期中考试题型总结

一、求函数定义域，求复合函数，已知复合函数求函数，奇偶性判别，求反函数。

1. 关于函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 说法正确的是（ ）

(A) 周期函数 (B) 有界函数 (C) 偶函数 (D) 奇函数

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}=$（ ）.

(A) 1 (B) 0 (C) $\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0, & |x|\le 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

3. 设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是连续函数，则下面不正确的是（ ）.

（A）如果 $f'(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 必是偶函数；

（B）如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 必是奇函数；

（C）如果 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 必是周期函数；

（D）如果 $f'(x)$ 是周期函数，则 $f(x)$ 必是周期函数；

二、求数列和函数的极限。基本方法：四则运算，重要极限，等价代换，无穷小与有界量之积仍为无穷小，夹逼定理。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$__________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$__________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$__________.

5.设对任意的x，总有$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（　）

（A）存在且等于零　　（B）存在但不一定为零

（C）一定不存在　　（D）不一定存在

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\arctan x\ln(1-x)}=$_____.　　7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)=$_____.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=$________.

9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+2+3+\cdots+n\right)^{\frac{1}{n}}=$（　）.　(A) 1　(B) 0　(C) 2　(D) $+\infty$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-x^2)}{\sin(\pi x)}=$（　）.　(A) 0　(B) $-\dfrac{4}{\pi}$　(C) e　(D) $\dfrac{1}{2}$

三、极限的性质。有界性，保序性，子数列，极限与无穷小。

1. 下面命题中**错误**的是（　）.

(A)收敛数列必有界　　(B)无界数列必发散

(C)无穷大数列必为无界数列　　(D)无界数列必为无穷大数列

2.关于数列$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$，下列说法中**错误**的是（　）

(A) 如果$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$收敛，则其所有子列均收敛

（B）如果$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$收敛，则其所有子列均有界

（C）如果$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$的子列$\left\{x_{2k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$和$\left\{x_{2k+1}\right\}_{k=1}^{+\infty}$均收敛，则$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$收敛

（D）如果$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$的子列$\left\{x_{2k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$，$\left\{x_{2k+1}\right\}_{k=1}^{+\infty}$和$\left\{x_{3k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$均收敛，则$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$收敛

3.设$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$，$\left\{c_n\right\}$均为非负数列，且

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　）

（A）$a_n<b_n$对任意n成立　　（B）$b_n<c_n$对任意n成立

（C）极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　（D）极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

4.若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(6x)+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（   ）

（A） 0　　　　（B） 6　　　　（C） 36　　　　（D） ∞

5.设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有（   ）

（A） $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　　　（B） $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$

（C） $|a_n|>a-\dfrac{1}{n}$　　　　（D） $|a_n|<a+\dfrac{1}{n}$

四. 证明数列收敛。基本方法：单调有界原理，夹逼定理。

1. 设 $x_1=1, x_{n+1}=2x_n+1$，则关于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的说法**正确**的是（ ）

(A) 极限为 -1　(B) 极限为 1　(C) 有界　(D) 发散

2. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$， $x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

3.设 $0<x_1<3$， $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

五. 连续与间断的判别。

1.函数 $f(x)=\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$（   ）

（A） 0　　（B） 1　　（C） $-\dfrac{\pi}{2}$　　（D） $\dfrac{\pi}{2}$

2.设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有（   ）

（A） 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

（B） 1 个可去间断点，1 个无穷间断点

（C） 2 个跳跃间断点

（D）2 个无穷间断点

3.设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$__________.

4.设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　）

（A）在 $x=0$ 处左极限不存在　　　　（B）有跳跃间断点 $x=0$

（C）在 $x=0$ 处右极限不存在　　　　（D）有可去间断点 $x=0$

5.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$$

则（　）

（A） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

（D） $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

6.函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

六、导数的定义与几何应用，可导的必要条件和充要条件。

1. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是（　）

（A）3　　（B）2　　（C）1　　（D）0

2.设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　　　（D）$(-1)^{n}n!$

3.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　）

（A）$-2f'(0)$　　（B）$-f'(0)$　　（C）$f'(0)$　　（D）0

4.设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为4.又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为（　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）0　　（C）-1　　（D）-2

5.设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是（　）

（A）$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　　　（B）$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

（C）$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　　　（D）$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

6.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　）

（A）$f(0)=0$ 且 $f'_{-}(0)$ 存在　　　　（B）$f(0)=1$ 且 $f'_{-}(0)$ 存在

（C）$f(0)=0$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在　　　　（D）$f(0)=1$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在

7. 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处切线的直角坐标方程为__________.

8. 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为__________.

9. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为__________.

10.曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为__________.

11.设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$__________.

12. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$ ________.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题**错误**的是（　）

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

七.（高阶）导数的计算。

1 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

2.设 $y=y(x)$ 是方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

3. 函数 $y=x^2\sin(x^3)$ 在 $x=0$ 点的 4 阶导数值 $y^{(4)}(0)=$（ ）

(A) -1　(B) 0 (C) 1　(D) 2

4.设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

5.函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ________.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$ ________.

8. 设 $f(x)$ 单调且可导，其反函数为 $g(x)$，$f(1)=2, f'(1)=-1, f''(1)=1$,则 $g''(2)=$（　）

(A) 0　(B) 1　(C) -1　(D) 2

八. 微分的定义与计算。

1. 函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 在 $x=1$ 点的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}$ =（　）

(A) 1　(B) $2\,\mathrm{d}x$　(C) 0 (D) $\mathrm{d}x$

2.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0}=$ ________.

3.设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$.当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$（　）

（A）-1　　（B）0.1　　（C）1　　（D）0.5

九、已知极限、连续、可导求参数。

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_________.

2.若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$_________，$b=$_________.

3.设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, |x|\le c\\ \dfrac{2}{|x|}, \ |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$_________.

4.设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　）

（A）$a<0$，$b<0$　　（B）$a>0$，$b>0$

（C）$a\le 0$，$b>0$　　（D）$a\ge 0$，$b<0$

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=1$，则常数 a 等于_______.

6.设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$，其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是

__________.

7. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, x<0\\ a+x, x\ge 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则常数 $a=$（　）

(A) -1　(B) -e　(C) e　(D) 1

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2,\ x\le 1\\ ax+b,\ x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 点可导，则 $b=$（　）

(A) 2　(B) 0　(C) 1　(D) -1

十. 无穷小比阶及其反问题，无穷大与无界。

1.若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$_________.

2.当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量，则 $k=$ _________.

3. 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　）

（A）$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

4.设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

5.设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　）

（A）比 x 高阶的无穷小　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　（D）与 x 等价的无穷小

6.当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是（　）

（A）$(2,+\infty)$　（B）$(1,2)$　（C）$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　（D）$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

7.设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　　　　　（B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$

（C）$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　　　　　（D）$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

8.当 $x\to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是（　）

（A）$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　　　　　（B）$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

（C）$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　　　　　（D）$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

9. 设 $f(x)=\cos x+\mathrm{e}^{2x}-2$，则当 $x\to 0$ 时，有(　).

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

10.当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 是（　）

(A) 无穷小量　(B) 无穷大量　(C) 有界但非无穷小量　（D）无界但非无穷大量

十一、闭区间上连续函数的性质。有界性定理，最值定理，零点定理，介值定理。

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

试证：存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$；

2.（I）证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（n 为大于 1 的整数）在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（II）记（I）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.