（复习课）（Part A）

一、第二型曲线积分

1.平面上曲线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \int_l Pdx + Qdy = \int_{\text{起点参数}}^{\text{终点参数}} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt$$

简化：曲线在某个坐标轴的投影为一个点，则关于该坐标轴坐标的积分为0

2.空间上曲线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\text{起点参数}}^{\text{终点参数}} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt$$

简化：曲线在某个坐标轴的投影为一个点，则关于该坐标轴坐标的积分为0

二、第二型曲面积分

$$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

1.分面计算法$\Sigma: z = g(x,y), (x,y) \in D_{xy}$单值曲面

$$\iint_\Sigma Rdxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,g(x,y))dxdy \qquad \begin{cases} "+", <\vec{n},\vec{k}> < \dfrac{\pi}{2} \\ "-", <\vec{n},\vec{k}> > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

2.统一到同一坐标面上$\Sigma: z = g(x,y), (x,y) \in D_{xy}$

$$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \overset{\text{统一}}{=\!=\!=} \iint_\Sigma (P(-g'_x) + Q(-g'_y) + R)dxdy \overset{\text{分面计算}}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\pm \iint_{D_{xy}} P(x,y,g(x,y))(-g'_x) + Q(x,y,g(x,y))(-g'_y) + R(x,y,g(x,y)))dxdy$$

三、公式

1.格林公式　　**不闭合则补线：平行坐标轴补（关于坐标轴的积分为0）**

设曲线C是平面闭曲面D的边界闭曲线，曲线C与D的方向满足D总是在曲线C前进

方向的左侧，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数，则

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

2.高斯公式　　不闭合则补面：平行坐标面补，（关于坐标面的两个轴积分为0）

设空间闭区域 V 是由分片光滑的闭曲面 Σ 围成，Σ 的方向是外法方向，$P(x,y,z)$，

$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 V 上具有连续的一阶偏导数，则

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$$

3. 斯托克斯（Stokes）公式(不考)

设 S 是空间有向闭曲面，l 是 S 的边界闭曲线，l 的方向对 S 而言满足右手螺旋，即右手拇指指向 S 的法方向，另外四指为 l 的方向，P，Q，R 在 S 上具有连续的一阶偏导数，则

$$\int_l Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

四、路径无关

平面曲线 $\int_l Pdx+Qdy$ 与路径无关

$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \Leftrightarrow \oint_C Pdx+Qdy=0 \Leftrightarrow du=Pdx+Qdy$ 全微分

原函数为 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+C=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+C$

五、全微分方程(不考)

$Pdx+Qdy=0$ 满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，通解：$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=C$

六、向量场 $\vec{F}=(P,Q,R)$，散度：$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

旋度：$rot\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$(不考)

（结课周）（典例课 第二型曲线/曲面积分 三个公式 积分与路径无关）

1.求$\int_{\widehat{AB}}(x+y)dx+(x-y)dy$，$\widehat{AB}$是

（1）单位圆弧$x^2+y^2=1, x>0, y>0$

（2）折线AOB，其中$A(1,0)$，$B(0,1)$

2.$\oint_C xy^2dy-x^2ydx$，C是圆周$x^2+y^2=2x$的正向

3.$\oint_l e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$，$l$是区域$\{(x,y)\,|\,0<x<\pi, 0<y<\sin x\}$的正向

围

线

4.$\int_l(e^x\sin y-y)dx+(e^x\cos y-1)dy$，$l$是由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周

5.$\int_C(e^x\sin y-y^3)dx+(e^x\cos y+x^3)dy$，$C$是沿半圆周$x=-\sqrt{a^2-y^2}$从点$A(0,-a)$

到

点$B(0,a)$的弧

6.$\int_{\widehat{AB}}(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$，$\widehat{AB}$是沿椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

从点$A(3,0)$到$B(1,\dfrac{4\sqrt{2}}{3})$的一段弧

7.验证：在整个xOy平面上，xy^2dx+x^2ydy是某个函数$u(x,y)$ 的全微分，并求

$u(x,y)$

8.验证：$\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$在右半面（$x>0$）内是某个函数$u(x,y)$的全微分，并求出

$u(x,y)$

9. 试求参数 λ，使得在任何不包含 $y=0$ 的区域上曲线积分 $\int_C \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda dx - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda dy$ 与路径无关，并求 $u(x,y)=\int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda dx - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda dy$

10. $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，$L$ 是平面上任意一条正向曲线

11. 求微分方程 $(x+ye^x)dx+e^x dy=0$ 的通解

12. $\iint\limits_{\Sigma}(x+y-z)dzdx$，$\Sigma$ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的上侧

13. $\iint\limits_{\Sigma}(x+z^2)dxdy+xdydz$，$\Sigma$ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧

14. 求向量场 $\vec{A}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ 在 $(1,0,-1)$ 处的散度 $div\vec{A}$

（无穷级数复习课）

题型：正项级数、交错级数敛散性判别，绝对收敛与条件收敛判别，抽象级数敛散性判别//幂级数的收敛域（收敛半径、收敛区间），函数的幂级数展开，幂级数求和

一、数项级数

①性质：$\sum a_n$ 中若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，则 $\sum a_n$ 发散（万用的标准）

二、正项级数敛散性判别法：$a_n > 0$，$\sum a_n$

②比值或根值法：若正项级数 $\sum a_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r$，则若 $r<1$，

则 $\sum a_n$ 收敛，若 $r>1$，$\sum a_n$ 发散，若 $r=1$，无法判断

③比较法：如果正项级数 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 满足 $a_n < b_n$，则若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛，若 $\sum a_n$ 发散，则 $\sum b_n$ 发散（$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$（推论））

④比阶法：如果正项级数 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = C$，则若 $C \neq 0$，$\sum u_n$，$\sum v_n$ 具有相同的敛散性，若 $C=0$，则当 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛，若 $C=\infty$，当 $\sum v_n$ 发散，则 $\sum u_n$ 发散。

⑤ 部分和数列$\{S_n\}$有上界$\Leftrightarrow \sum a_n$收敛

三、常用尺子

等比级数$\sum r^n \begin{cases} |r|<1, 收敛 \\ |r|\ge 1, 发散 \end{cases}$　　p级数$\sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p>1, 收敛 \\ 0<p\le 1, 发散 \end{cases}$

四、交错项级数$\sum(-1)^n a_n$，$\sum(-1)^{n-1} a_n$

莱布尼兹定理：若$a_n>0$，$\{a_n\}\downarrow$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则$\sum(-1)^n a_n$，$\sum(-1)^{n-1}a_n$收敛

1.若$\sum|a_n|$收敛，则$\sum a_n$收敛，称$\sum a_n$为绝对收敛

2.若$\Sigma|a_n|$发散，$\sum a_n$收敛，则称$\sum a_n$为条件收敛

五、幂级数$\sum a_n x^n$

收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$　　收敛区间$x\in(-R,R)$

收敛域：$(-R,R)\pm$（$x=\pm R$时使$\sum a_n x^n$收敛的点）

六、函数的幂级数展开与幂级数的求和（注意起始下标位置）

（方法）利用已知函数的幂级数展开、幂级数的和，通过四则运算、换元、求导、求积分，得到所求函数的幂级数展开、幂级数求和

特征与办法：**有n的倍数$\leftarrow$求导**

$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty,+\infty)\leftarrow$**有阶乘**

$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，　$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，$x\in(-1,1)\leftarrow$**分母有$n\leftarrow$求积分**

一、判断敛散

1. $\sum\frac{3n^n}{(1+n)^n}$　2. $\sum\frac{2^n n!}{n^n}$　3. $\sum\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$

解：1.（性质）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^n}{(1+n)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{3}{e}\neq 0$，发散

2.（比值）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{2}{e}<1$，收敛

3.（比阶）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n\cdot n}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot n}{(1+\frac{1}{n})^n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{e}\neq 0$，且$\dfrac{1}{n^2}$收敛

4.$\sum(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}}{x}dx$　　5.$\sum(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}$（题 4、5 要区分是条件、绝对）

解：4.$\left|(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}}{x}dx\right|=\int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}}{x}dx<\int_n^{n+1}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_n^{n+1}$

$=-(\dfrac{1}{e^{n+1}}-\dfrac{1}{e^n})=-(\dfrac{1}{e}-1)\dfrac{1}{e^n}$ 且$\sum\dfrac{1}{e^n}=\sum(\dfrac{1}{e})^n$ 收敛

由比较判别法，$\sum\left|(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}}{x}dx\right|$收敛

所以$\sum(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}}{x}dx$收敛且为绝对收敛

5.$\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}>\dfrac{1}{\sqrt{3n}}$且$\sum\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以$\sum\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}$发散

$\sum(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}$设$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}>0$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3(n+1)-1}}<a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以$\sum(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}$收敛，且为条件收敛

二、幂级数

1.求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+4^n}{n^2+1}x^n$收敛域

解：设$a_n=\dfrac{3^n+4^n}{n^2+1}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n+4^n}{n^2+1}}{\frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{(n+1)^2+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3^n+4^n)((n+1)^2+1)}{(3^{n+1}+4^{n+1})(n^2+1)}\right|$$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{4})^n+1}{(\frac{3}{4})^n\cdot 3+4}=\frac{1}{4}$，收敛区间 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

由于 $\left|\frac{3^n+4^n}{n^2+1}(\pm\frac{1}{4})^n\right|=((\frac{3}{4})^n+1)\frac{1}{n^2+1}<\frac{2}{n^2}$ 且 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛

所以当 $x=\pm\frac{1}{4}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{n^2+1}(\pm\frac{1}{4})^n$ 绝对收敛，所以收敛域为 $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

2. 将 $\frac{x}{9+x^2}$ 展成 x 的幂级数（展开：参考 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$， $x\in(-1,1)$）

解：$\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}=\frac{x}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x^2}{9})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

$\frac{x^2}{9}\in(-1,1)$，所以 $x\in(-3,3)$

当 $x=-3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-3)^{2n+1}}{9^{n+1}}=\sum(-1)^n\frac{9^n(-3)}{9^n\cdot 9}=-\frac{1}{3}\sum(-1)^n$

$n\to\infty$ 时，$-\frac{1}{3}(-1)^n$ 不 $\to 0$，所以 $x=-3$ 时发散

同理 $x=3$ 时，亦发散

所以 $\frac{x}{9+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$，收敛域为 $x\in(-3,3)$

3.（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$ 的和（数项级数求和）

解：原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})$

$$S_n=\frac{1}{(3\times1-2)(3\times1+1)}+\frac{1}{(3\times2-2)(3\times2+1)}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})$$

$$=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})=\frac{n}{3n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$的和是$\frac{1}{3}$

（2）求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^3}{n!}$的和（幂级数求和）

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^3}{n!}$，转化为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n$幂级数，设$a_n=\frac{n^3}{n!}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(\frac{n}{n+1})^3\cdot(n+1)\right|=\infty$$

收敛域为$(-\infty,+\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+An(n-1)+Bn+C}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{(n-3)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\qquad e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=x^3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}+3x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$=x^3e^x+3x^2e^x+xe^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$x=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^3}{n!}=8e^2+12e^2+2e^2=22e^2$