微积分周自测（一）答案解析

1.　（2 分）求 $\sin\left(59^{o}\right)$ 的近似值

解：设 $f(x)=\sin x$

$$f(x)\approx f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)$$

$$\sin 59^{o}\approx \sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\bullet(-\frac{\pi}{180})=0.857$$

2.　设奇函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)=1$. 证明:

(1)（2 分）存在$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(2)（2 分）存在$\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证明:

⑴因为 $f(x)$ 是区间$[-1,1]$上的奇函数，所以 $f(0)=0$

因为函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上可导，根据微分中值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得

$f(1)-f(0)=f'(\xi)$

又因为 $f(1)=1$，所以 $f'(\xi)=1$

⑵因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$是偶函数，故 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$

令 $F(x)=\left[f'(x)-1\right]e^{x}$,则 $F(x)$可导，且 $F(-\xi)=F(\xi)=0$

根据罗尔中值定理，存在$\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $F'(\eta)=0$

由 $F'(\eta)=\left[f''(\eta)+f'(\eta)-1\right]e^{\eta}$ 且 $e^{x}\neq 0$，得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

3.　（3 分）试证 $\left|\sin x-\sin y\right|\le\left|x-y\right|$

证：构造函数 $f(x)=\sin x$

由拉格朗日中值定理

$$\sin x-\sin y=\cos\xi(x-y)$$

$$\left|\sin x-\sin y\right|=\left|\cos\xi\right|\left|x-y\right|\le\left|x-y\right|$$

4.　（3 分）证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

证：构造函数 $f(x)=\ln x$

由拉格朗日中值定理$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{x}{\xi}<x$

又有$1<\xi<1+x$

得$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)-\ln 1=\frac{x}{\xi}<x$，得证

5. （4 分）证明：当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

证：构造函数$f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$

由拉格朗日中值定理$f(x_1)-f(x_0)=f^{'}(\xi)(x_1-x_0)$

又$f^{'}(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=0$

代入上式得$f(x)=C$

代入 x=1 或定义域内其他一值可得证

6. （4 分）设$0<a<b$, $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导。试利用柯西中值定理证明存在一点ξ使$f(b)-f(a)=\xi f^{'}(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

分析：将原式化为柯西中值定理的形式$\frac{f(b)-f(a)}{\ln\frac{b}{a}}=\xi f^{'}(\xi)$

即$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f^{'}(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$

证明：取$F(x)=\ln x$，则$f(x)$、$F(X)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导。且

$F^{'}(x)=\frac{1}{x}\neq 0$，由柯西中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$使$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{F^{'}(\xi)}=\frac{f^{'}(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$

将$F(b)=\ln b, F(a)=\ln a$代入得证。