期中考试题型总结

一、求函数定义域，求复合函数，已知复合函数求函数，奇偶性判别，求反函数。

1. 关于函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 说法正确的是（ D ）

(A) 周期函数　(B) 有界函数　(C) 偶函数　(D) 奇函数

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}=$ (A).

(A) 1　(B) 0　(C) $\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0, & |x|\le 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解：　由于 $f(x)\le 1$，故 $f[f(x)]=1$，因而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

3. 设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是连续函数，则下面不正确的是(D).

（A）如果 $f'(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 必是偶函数；

（B）如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 必是奇函数；

（C）如果 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 必是周期函数；

（D）如果 $f'(x)$ 是周期函数，则 $f(x)$ 必是周期函数；可以不是，对于y=x便不成立

二、求数列和函数的极限。基本方法：四则运算，重要极限，等价代换，无穷小与有界量之积仍为无穷小，夹逼定理。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$__________.

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ ________.

解

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right\} = e^{-\frac{1}{2}}$$

exp表示e的多少次方

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x) =$ ________.

解：因为当 $x\to+\infty$ 时 $\sin x+\cos x$ 无极限，但有界，所以要分成两个因式考虑

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x\ln^2 2+6x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x\ln^3 2+6} = 0$$

而 $\sin x+\cos x$ 是有界变量，所以原式为 0

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1} =$ ________.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{e(1-e^{\cos x-1})}{\frac{1}{3}x^2} = 3e\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{3e}{2}$$

5.设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

（A）存在且等于零　　（B）存在但不一定为零

（C）一定不存在　　（D）不一定存在

解：取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=x$，满足题设条件，但此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x$，极限不存在，排除（A）和（B）;

再取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=1$ 满足题设条件，但此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}1=1$ 存在，排除（C），

故选（D）

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\arctan x\ln(1-x)}=$ __$\dfrac{1}{2}$__.　　7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)=$ __1___.

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=$ ____0____.

9. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2+3+\cdots+n)^{\frac{1}{n}}=$ （ A ）. （A） 1 （B） 0 （C） 2 （D） $+\infty$

10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(5-x^2)}{\sin(\pi x)}=$ （ B ）. （A） 0 （B） $-\dfrac{4}{\pi}$ （C） e （D） $\dfrac{1}{2}$

三、极限的性质。有界性，保序性，子数列，极限与无穷小。

1. 下面命题中**错误**的是（ D ）.

(A)收敛数列必有界　　(B)无界数列必发散

(C)无穷大数列必为无界数列　　(D)无界数列必为无穷大数列

振荡函数除外

2. 关于数列$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，下列说法中**错误**的是（ C ）

（A） 如果$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$收敛，则其所有子列均收敛

（B）如果$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$收敛，则其所有子列均有界

（C）如果$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$的子列$\{x_{2k}\}_{k=1}^{+\infty}$和$\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{+\infty}$均收敛，则$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$收敛

（D）如果$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$的子列$\{x_{2k}\}_{k=1}^{+\infty}$，$\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{+\infty}$和$\{x_{3k}\}_{k=1}^{+\infty}$均收敛，则$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$收敛

3. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

（A） $a_n<b_n$对任意n成立　　（B） $b_n<c_n$对任意n成立

（C）极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　（D）极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

解：假设$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=A(\exists)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=A(\exists)$，这与$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$矛盾，

故 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

4.若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(6x)+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

（A） 0　　　（B） 6　　　（C） 36　　　（D） ∞

错误解法：

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}.$$所以选（A）

解法一

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}}$$

$$=-\frac{1}{6}\times 6^3+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$$

利用配凑法，凑出答案

故选（C）

解法二　利用极限值与无穷小的关系

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，得 $\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+a$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}a=0$，于是得

$\boxed{xf(x)=-\sin 6x+o(x^3)}$，故 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x+a}{x^3}}=36$. 故选（C）

替换之后才可以求极限，因为单独的极限和一起的极限结果不一样，极限的结果会受其余的表达式的影响

5.设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有

（A） $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　　（B） $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$

（C） $|a_n|>a-\dfrac{1}{n}$　　　（D） $|a_n|<a+\dfrac{1}{n}$

应选（A）

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|>\dfrac{|a|}{2}\Rightarrow n\to\infty$ 时，$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$

注：在上述解法中用到以下两条结论：

（I）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|A\right|$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=0$

（II）当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，$A>B(A<B)\Rightarrow$ 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$

对数列有着类似的上述结论

四. 证明数列收敛。基本方法：单调有界原理，夹逼定理。

1. 设 $x_1=1, x_{n+1}=2x_n+1$，则关于数列 $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 的说法**正确**的是（ D ）

（A）极限为 -1　（B）极限为 1　（C）有界　（D）发散

2. 设数列 $\left\{x_n\right\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限；

解：用归纳法证明 $\left\{x_n\right\}$ 单调下降且有下界.

由 $0<x_1<\pi$，得

$$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$$

设 $0<x_n<\pi$ 则

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi，则$$

所以 $\left\{x_n\right\}$ 单调下降且有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，由 $x_{n+1}=\sin x_n$，得

$a=\sin a$

所以 $a=0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

3.设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)} (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\left\{x_n\right\}$ 的极限存在，并求此极限.

解　由题设 $0<x_1<3$ 知，$x_1, 3-x_1$ 均为正数，

故
$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设$0<x_k\le\dfrac{2}{3},(k>1)$则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\le\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2}$$

故由数学归纳法知，对任意正整数$n>1$，均有

$$0<x_n\le\frac{3}{2},$$

即数列$\{x_n\}$是有界的，

又当$n>1$时

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{(3-x_n)}-\sqrt{x_n})$$
$$=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\ge 0,$$

不要把x当做不可拆解的式子，所有的式子都可以拆，+1也可以拆成i，所以不要思维定式

因而有$x_{n+1}\ge x_n(n>1)$，即数列$\{x_n\}$单调增加

所以由单调有界数列极限存在的准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)},$$

两边取极限得 $$a=\sqrt{a(3-a)},$$

解之得$a=\dfrac{3}{2},a=0$（舍去），即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}.$$

五. 连续与间断的判别。

注意不仅仅是分母不可以取到的，对于函数一部分本身不可以取到的也要考虑，例如本题中的tanx的π/2

1.函数$f(x)=\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是$x=$

（A）0　　（B）1　　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

解：由函数的表达式知，$x=0$，$x=1$，$x=\pm\frac{\pi}{2}$是间断点，不难看出$x=1$，$x=\pm\frac{\pi}{2}$是无穷间断，点故只能选（A）. 事实上，由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1+e^{1-\frac{1}{x}}}{1-e^{1-\frac{1}{x}}}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=-1,$$

因此$x=0$是跳跃间断点，即第一类间断点.

2.设函数$f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则$f(x)$有

（A）1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

（B）1 个可去间断点，1 个无穷间断点

（C）2 个跳跃间断点

（D）2 个无穷间断点

解：　应选（A）

$x=0, x=1$是间断点，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}=0$$

故$x=0$是可去间断点；而

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\boxed{[1+(x-1)]}}{\boxed{1-x}}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x}=-\sin 1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{\boxed{x-1}}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\sin 1$$

有绝对值要先去绝对值

故 $x=1$ 是跳跃间断点

3.设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$__________.

解：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\begin{cases}0, x=0,\\ \dfrac{1}{x}, x\neq 0\end{cases}$ 故 $x=0$ 是间断点.

对于任意x，n都是无穷，可以先对n取无穷去掉再计算，但要考虑定义域

注：在 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$ 的运算中，n 是极限变量，x 是参变量（视为常数）

4.设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

（A）在 $x=0$ 处左极限不存在

（B）有跳跃间断点 $x=0$

（C）在 $x=0$ 处右极限不存在

（D）有可去间断点 $x=0$

解：由于 $f(x)$ 是奇函数且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

所以选（D）

5.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$$

则

（A）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

（B）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

（C）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

（D）$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

解：应选（D）

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)$. 令 $t=\frac{1}{x}$，当 $x\to0$ 时 $t\to\infty$，则 $\lim_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}f(t)=a$

当 $a=0$ 时，有 $\lim_{x\to0}g(x)=0=g(0)$， $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续

当 $a\neq0$ 时， $\lim_{x\to0}g(x)=a\neq g(0)$， $g(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，因此 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关。

6.函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

解：由函数的表达式可知需要考查的点只有三个： $0,-1,1$，在其他点处函数均连续

因为 $$\lim_{x\to0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$$

可知 $x=0$ 是函数的一个可去间断点

$$\lim_{x\to1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

可知 $x=1$ 是函数的另一个可去间断点

而 $$\boxed{\lim_{x\to-1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}=\infty}$$

可知 $x=-1$ 是函数的无穷间断点，不是可去间断点

综上可知，选项（C）符合题意

六、导数的定义与几何应用，可导的必要条件和充要条件。

1. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是

（A）3　　（B）2　　（C）1　　（D）0

解：应选（B）

由按导数定义可知，$\boxed{|x| \text{ 在点 } x=0 \text{ 处不可导，} x|x| \text{ 在点 } x=0 \text{ 处一阶可导。}}$因此，求

$f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 得不可导点，关键在于因子分解并考查 $\left|x^3-x\right|=0$ 的点

由于 $f(x)=(x-2)(x+1)\left|x(x-1)(x+1)\right|$，则 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处不可导，而在 $x=-1$ 处是可导的。故 $f(x)$ 得不可导点个数是 2

2.设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)-0}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)\right]=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

3.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

（A） $-2f'(0)$　　（B）$-f'(0)$　　（C） $f'(0)$　　（D）0

解： 根据导数定义：$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-2\frac{f(x^3)}{x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3-0}$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$$

因此选（B）。

4.设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为4.又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）0　　（C）-1　　（D）-2

解：应选（D）

由题意，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)=f(x+4)$. 两边对 x 求导，则

$f'(x)=f'(x+4)$，故 $f'(5)=f'(1)$. 而由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$ 知 $f'(1)=-2$. 故

$y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率 $f'(5)=-2$

5.设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

（A）$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　（B）$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

（C）$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　（D）$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

解：应选（B）

可以很容易举反例排除（C）和（D）

令 $f(x)=x^2$，$a=1$，则可排除（C）. 令 $f(x)=-x^2$，$a=1$，则可排除（D）.（A),（B）

两条件中均有 $f(a)=0$.

所以 $$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=|f'(a)|$$

同理，$$\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-|f'(a)|$$

只有当 $|f'(a)|\neq -|f'(a)|$ 即 $f'(a)\neq 0$ 时 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处的左右导数才不相等，即不可导，故（B）为正确选项

6.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

h^2将0-与0+都变成了0+，所以无法验证0-

（A）$f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　（B）$f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

（C）$f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　（D）$f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

解：由$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$可知$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$. 又$f(x)$在$x=0$处连续，故$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=f(0)$所以$f(0)=0$，排除（B），（D），进而有

$$1=\lim_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(h^2)-f(0)}{h^2}=f'_+(0)$$

故$f'_+(0)=1$，但由此并不能保证$f'_-(0)$存在. 故（C）正确，（A）错误

7. 对数螺线$\rho=e^{\theta}$在点$(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$处切线的直角坐标方程为_________.

解：由于$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，将$\rho=e^{\theta}$代入得

$$\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta\\ y=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$$

切线斜率为

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$$

当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$x=0$，$y=e^{\frac{\pi}{2}}$，故所求切线方程为

$$y=-x+e^{\frac{\pi}{2}}$$

8. 曲线$y=\ln x$上与直线$x+y=1$垂直的切线方程为_________.

解：由于$y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，当$y'=\dfrac{1}{x}=1$时，得$x=1$即曲线$y=\ln x$在点$(1,0)$出的切线与直线$x+y=1$垂直，故所求切线方程为$y=x-1$

9. 曲线$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$在点$(0,1)$处的切线方程为_________.

解：在$\sin xy+\ln(y-x)=x$两端关于x求导，将y看成x的函数，得

$$(y+xy')\cos xy+\frac{y'-1}{y-x}=1$$

将 $x=0$， $y=1$代入，得 $y'(0)=1$，故所求的切线方程为

$$y-1=x\text{，即 } y=x+1$$

10.曲线 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为__________.

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}$$

当 $x=0,y=1$ 时， $t=0$，故

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$$

从而在点 $(0,1)$ 处法线的斜率为 -2，法线方程为

$$y-1=-2x;$$

11.设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=$__________.

解：将 y 看作是 x 的函数，在方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 两端关于 x 求导，得

$$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy')$$

将 $x=0$ 代入 $y-x=e^{x(1-y)}$，得 $y|_{x=0}=f(0)=1$

将 $x=0$， $y|_{x=0}=1$ 代入

$$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy')$$

得 $y'|_{x=0}=f'(0)=1$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=1$$

12. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$

__________.

解：由题意可知 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，则

利用导数的定义

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\dfrac{2}{n+2}}\cdot\frac{-2n}{n+2}=-2f'(1)=-2$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题**错误**的是（ C ）

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　（B） 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

解：应选（D）

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，要讨论 $f(0)$ 的值，自然想到利用 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 对于（A），

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，于是

存在乘0才为0

$$\boxed{f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right]=0}$$

巧妙的将f（0）分解

所以命题（A）正确

对于 D（B），将 $f(x)+f(-x)$ 看成（A）中的 $f(x)$，于是

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right]=0$$

既有 $f(0)+f(-0)=0$，故 $f(0)=0$，命题（B）正确

对于（C），由（A）已知 $f(0)=0$，按导数定义，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

B

由（C）之条件知 $f'(0)$ 存在，故命题（C）亦正确

于是余下只有（D）不正确，选（D）

可以举例说明（D）不正确，例如设 $f(x)=|x|$，满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$（存在），但 $f'(0)$ 不存在

七.（高阶）导数的计算。

1 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$__________.

解：因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos t}$$

从而有

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

2.设 $y=y(x)$ 是方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$__________.

解： 当 $x=0$ 时，由原方程得 $y(0)=0$. 在方程 $xy+e^y=x+1$ 两边对 x 求导得

$$y+xy'+y'e^y=1,$$

代入 $x=0$，$y(0)=0$ 便有 $y'(0)=1$

在 $y+xy'+y'e^y=1$ 两边再次对 x 求导，得

$$2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0,$$

代入 $x=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$，得 $y''(0)=-3$

3. 函数 $y=x^2\sin(x^3)$ 在 $x=0$ 点的 4 阶导数值 $y^{(4)}(0)=$（ B ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

4.设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$__________.

解：$y'(x)=\dfrac{(-1)\times 2}{(2x+3)^2}, y''(x)=\dfrac{(-1)\times(-2)\times 2^2}{(2x+3)^3},\cdots,$

$$y^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}, y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}\Big|_{x=0}=\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}.$$

5.函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$__________.

解： 用求函数乘积的 n 阶导数的莱布尼茨公式.

！！！！！！！！！！

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)}(2^x)^{n-k}$$

记得C系数的存在

其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. 注意 $(x^2)^{(k)}\big|_{x=0}=0(k\neq 2)$，$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，于是

$$f^{(n)}(0)=C_n^2\cdot 2\cdot(2^x)^{(n-2)}\big|_{x=0}=n(n-1)(ln2)^{n-2}(n\geq 2)$$

$$f'(0)=0$$

因此 $f^{(n)}(0)=n(n-1)(ln2)^{n-2}(n=1,2,3,\cdots)$.

:6.设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$__________.

解：$f''(x)=e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}=e^{2f(x)}$，$f'''(x)=\left[e^{2f(x)}\right]'=e^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=2e^{3f(x)}$

将 $x=2$ 代入上式，得 $f'''(2)=2e^3$

8. 设 $f(x)$ 单调且可导，其反函数为 $g(x)$，$f(1)=2, f'(1)=-1, f''(1)=1,$ 则 $g''(2)=$（ B ）

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

八. 微分的定义与计算。

1. 函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 在 $x=1$ 点的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}$ =（D ）

(A) 1 (B) $2\mathrm{d}x$ (C) 0 (D) $\mathrm{d}x$

2.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0}=$________.

解：等式两边同时求微分：

$$2^{xy}(ydx+xdy)\ln 2=dx+dy$$

由原方程知，当 $x=0$ 时，$y=1$，并代入上式得

$$\ln 2dx-dx=dy$$

即 $dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$

也可先求出 $y'\big|_{x=0}$（原方程两边对 x 求导）.

3.设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$.当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$

（A）-1 （B）0.1 （C）1 （D）0.5

解： 因为 $dy=f'(x^2)d(x^2)=2xf'(x^2)dx,$

所以得 $0.1=-2f'(1)(-0.1),$

即 $f'(1)=0.5,$ 所以（D）是正确的.

九、已知极限、连续、可导求参数。

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

解：根据函数在某点处连续的定义知，$a=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}$，问题转化为求极限，即

$$a=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\tan x}{2x}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

2.若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$_________，$b=$_________.

解：由题设可知分子 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$，因此必有 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=1-a=0$，

解得 $a=1$，并代入原式，有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-b)=1-b=5$，得 $b=-4$

3.设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, |x|\le c \\ \dfrac{2}{|x|},\ |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$_________.

解：由题设知 $f(x)$ 在 $x=\pm c$ 处是连续的，故有

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to c^-}f(x)=f(c),\quad \lim_{x\to -c^+}f(x)=\lim_{x\to -c^-}f(x)=f(-c)$$

即
$$\lim_{x\to c^+}\frac{2}{x}=\lim_{x\to c^-}(x^2+1)=c^2+1,\quad \lim_{x\to -c^+}(x^2+1)=\lim_{x\to -c^-}\frac{2}{|x|}=c^2+1$$

从而 $\dfrac{2}{c}=c^2+1$，解得 $c=1$，故应填 $c=1$

4.设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足

（A）$a<0$，$b<0$　　（B）$a>0$，$b>0$

（C）$a\le 0$，$b>0$　　（D）$a\ge 0$，$b<0$

解：由题目所给的条件便可分别确定系数. 因函数 $f(x)$ 在整个数轴上连续，故有 $a\ge 0$；又因 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0$，则必有当 $x\to -\infty$ 时，$a+e^{bx}\to\infty$，所以 $b<0$. 故（D）是正确的

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=1$，则常数 a 等于___2____.

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{x}}{x}+ae^{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x}}{x}+\lim_{x\to 0}ae^{x}=-1+a\ ,$$

从而 $a=2$. 故应选择（C）

6.设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ ，其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是__________.

对0处的导数用定义，对非零处的导数直接用公式

解： $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}=0,\ \lambda>1$

$$f'(x)=\left(x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}\right)'=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}-x^{\lambda}\sin\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)=x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}+\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}$$

要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，由连续的定义应有

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}\right)=f'(0)=0.$$

由此得出 $\lambda>2$

7. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, x<0 \\ a+x, x\geq 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则常数 $a=$（ D ）

(A) -1 (B) -e (C) e (D) 1

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2},\ x\leq 1 \\ ax+b,\ x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 点可导，则 $b=$（ D ）

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) -1

十. 无穷小比阶及其反问题，无穷大与无界。

1.若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^{2})^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$__________.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}a=1$，故 $a=-4$.

2.当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量，则 $k=$ __________.

解：$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{kx}+\frac{1-\cos x}{kx^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}\right)$$

得 $k=\dfrac{3}{4}$

3. 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

解：排除法。考生对应几个常用的等价无穷小量很熟悉。当 $x\to 0^+$ 时，

$1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x})$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x$

不选（A）（C）（D），所以选（B）

4.设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

解：　这是无穷小比较的题，把题中的每个无穷小都用其等价无穷小代替，便可得到正确的答案，事实上当 $x\to 0$ 时，

$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}, e^{x^2}-1\sim x^2$,

故应选（B）.

5.设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是

（A）比 x 高阶的无穷小　　　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　　　（D）与 x 等价的无穷小

解：　因为 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

即有

$$\lim_{x\to0}\sin\alpha(x)=0$$

注意到 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，可知 $\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$，即 $\alpha(x)$ 是 $x\to0$ 时的无穷小量，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=-\frac{1}{2}$，

即 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等阶的无穷小量，选项（C）正确。

6.当 $x\to0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　（D）$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

解：　当 $x\to0^+$ 时，$\ln^a(1+2x)\sim2^a x^a$，是 x 的 a 阶无穷小，$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}\sim\frac{1}{2^{\frac{1}{a}}}x^{\frac{2}{a}}$ 是 x 的 $\frac{2}{a}$ 阶无穷小，由题意可知 $a>1,\frac{2}{a}>1$. 所以 a 的可能取值范围是 $(1,2)$，应选（B）

7.设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x\to0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　　　（B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$

（C）$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　　　（D）$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

解：当 $x\to0^+$ 时，$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim\frac{1}{2}x^2$，

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim\sqrt{3}\sqrt[3]{x}=x^{\frac{5}{6}}$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x$$

则从低阶到高阶排序是$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$，故选（B）

8.当$x\to 0$时，用$o(x)$表示比x高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是

o(x^2)阶数本身就比x^2高，再加一，就比x^3高

（A）$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　（B）$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

依据A，B更加成立

（C）$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　（D）$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

相同阶次相加不影响

低阶无穷小比高阶无穷小更加影响表达式，因为低阶的趋于0的变化幅度小，而高阶大，所以低阶变化后仍然很大，所以占变化的主要部分

解：应选（D）

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{x^2}=0$，所以（A）中式子正确

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{o(x^2)}{x^2}=0$，所以（B）中式子正确

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{o(x^2)}{x^2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right]=0$，所以（C）中式子正确

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{o(x)}{x}+\dfrac{xo(x^2)}{x^2}\right]=0$，故$o(x)+o(x^2)=o(x)$，即（D）中式子不正确

注　这是考查无穷小量之间的运算（按照定义），这与一般的代数运算不同

9. 设$f(x)=\cos x+e^{2x}-2$，则当$x\to 0$时，有(B).

(A) $f(x)$与x是等价无穷小　　(B) $f(x)$与x同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$是比x高阶的无穷小　　(D) $f(x)$是比x低阶的无穷小

10.当$x\to 0$时，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}$是（ D ）

cos的正负号一直变化，所以是振荡的

(A) 无穷小量　(B) 无穷大量　(C) 有界但非无穷小量　（D）无界但非无穷大量

十一、闭区间上连续函数的性质。有界性定理，最值定理，零点定理，介值定理。

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

试证：存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$；

证明：令 $\Phi(x)=f(x)-x$，则 $\Phi(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续. 又 $\Phi(1)=-1<0$，$\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0$，

故由闭区间上连续函数的零点定理知，存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得

$$\Phi(\eta)=f(\eta)-\eta=0 \qquad \text{即} \qquad f(\eta)=\eta$$

2.（I）证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（n 为大于 1 的整数）在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（II）记（I）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

解：（I）令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$ 则 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0\text{，}\quad f(1)=n-1>0$$

由闭区间上连续函数得介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内至少有一个实根

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>1>0$$

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内单调增加

综上所述，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根

（II）由 $x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 知数列 $\{x_n\}$ 有界，又

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1$$

$$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^{n}+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}=1$$

因为 $x_{n+1}^{n+1}>0$，所以

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n>x_{n+1}^{n}+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}$$

于是有 $x_n>x_{n+1}$， $n=1,2,\cdots$

即 $\{x_n\}$ 单调减少

综上所述，数列 $\{x_n\}$ 单调有界，故 $\{x_n\}$ 收敛

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。由于

$$\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$$

利用n次方差公式反向聚合

令 $n\to\infty$ 并注意到 $\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$，则有

xn的n次方等于0

$$\frac{a}{1-a}=1$$

解得 $a=\frac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$