一、利用部分和数列判断级数敛散，如果收敛，求其和

1. 判断下列级数是否收敛，若收敛，求其和

(5) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$

发散

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为_______

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$

B. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}-u_{2n}\right)$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+u_{n+1}\right)$

BC 的核心在于，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，这我想你应该可以理解的，关键看 A

将选项 A 给出的反例代入选项 A 可知是判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 的敛散性。而根据积分判别法，可知离散级数和的敛散性和积分相同，因此积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ 和上述级数同时收敛或者同时发散，做积分就好做很多了。

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x$（注意将 $\frac{1}{x}$ 放入微分符号里，然后使用变量代换）令 $t=\frac{1}{x}$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\int_{\ln 1}^{+\infty}\frac{1}{t}dt=\ln t\Big|_{\ln 1}^{+\infty}$ 这个广义积分是发散的，所以级数也是发散的

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和序列为 $S_n=\frac{2n}{n+1}$，则 $u_n=$_______，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=$_______

2/(n(n+1))，2

4. 求下列级数的和

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$

提示：求前 2n, 2n-1 项和，分别取极限，得到相同的极限值为 3/2

二、利用级数收敛的性质判断敛散性

例 2：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ 收敛，则_______

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ 收敛

C

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则________

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必收敛

C. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

设 u 为当 n 是奇数的时候取 1，偶数的时候取-1

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数___D_____

A. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

5. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ =________　　C

A. 3　　B. 7　　C. 8　　D. 9

用第二个级数的前 2n-1 项部分和减去第一个级数的 2n 项部分和，得偶数项 sum a_2n =3，故偶数项部分和 3+奇数项部分和 5=8

6. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，试证，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n + u_n)$ 同时收敛或同时发散