一、 幂级数求和

2．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}x^{n-1}$的收敛域及和函数

*5．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$和函数

*5. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数

令$t=x^2$，原级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)t^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}-1}{\frac{1}{2n+3}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2n}{2n+1}}{\frac{-2n-2}{2n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n+3}{2n+1}=1$$

$\Rightarrow$ 收敛区间$(-1,1)$

当$t=1$时 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2n}{2n+1}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2n}{2n+1}}{\frac{1}{n}}=\infty$ 且$\sum\frac{1}{n}$发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)$发散

$\Rightarrow 0\le x^2<1 \Rightarrow -1<x<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^n$$

其中$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n} \Rightarrow xS=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Rightarrow (xS)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^n=\frac{x^2}{1-x^2}$

$$\Rightarrow xS=\int_0^x\frac{x^2}{1-x^2}dx=-\int_0^x\frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx=-\int_0^x\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx=-x+\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\Rightarrow xS=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|}\Rightarrow S=-1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\ne 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}=-1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in(-1,1)且x\ne 0$$

当$x=0$时 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}=0$

5 , $x=1$
0 , $x=0$

当$x=\frac{1}{2}$时 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$

$=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\ln 2+\frac{5}{4}-2\ln 2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\ln 2+\frac{5}{4}\right)$

*6．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n(2n-1)}+1\right)x^{2n}$的收敛区间及和函数

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n(2n-1)}+1\right)}{(-1)^{n}\left(\frac{1}{(n+1)(2n+1)}+1\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+2n^2-n}{n(2n-1)}}{\frac{2n^2+3n+2}{(n+1)(2n+1)}}=1 \Rightarrow \text{收敛区间 } (-1,1)$$

$$S_1=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n(2n-1)}x^{2n} \Rightarrow S_1'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1} \Rightarrow S_1''=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$\Rightarrow S_1''=\frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\frac{2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2} \qquad x\neq 0. \quad S_1(0)=0,\ S_1'(0)=0$$

$$\Rightarrow S_1'=\int_0^x\frac{2}{1+x^2}dx=2\arctan x \Rightarrow S_1=2\int_0^x\arctan x\,dx=2x\arctan x-\ln(1+x^2).$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n(2n-1)}+1\right)x^{2n}=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2},\quad x\neq 0,\ x\in(-1,1)$$

当 $x=0$ 时，$S=0$. 合并到一起.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$ ________

8. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$ 4

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \Rightarrow (-1,1) \qquad \frac{1}{2}\in(-1,1)$$

$$\int_0^x S\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x} \Rightarrow S=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow S\left(\tfrac{1}{2}\right)=4$$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}=$ ________

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(n^2-n+1)\cdot x^n \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{(-1)^{n+1}((n+1)^2-(n+1)+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}=1\Rightarrow(-1,1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n \triangleq S_1+S_2$$

$$S_1=x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x^n)''=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n\right)''=x^2\cdot\left(\frac{x^2}{1+x}\right)''=x^2\cdot\left(\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}\right)'=x^2\cdot\left(\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}\right)'$$

$$=x^2\cdot\frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)2(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2x^2}{(1+x)^3}$$

$$S_2=\frac{-x}{1+x}$$

$$\Rightarrow S=\frac{2x^2}{(1+x)^3}-\frac{x}{1+x}\quad\Rightarrow S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot(\frac{1}{2})^2}{(1+\frac{1}{2})^3}-\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{5}{27}.$$

二、 通过函数恒等变形、四则运算及变量代换将函数展开成幂级数

1. 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数

解：$f(x)=x\cdot\frac{1}{1+x^2}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n,\quad x^2\in(-1,1)\quad=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1},\quad x\in(-1,1)$

当 $x=\pm1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\pm1)^{2n+1}$ 发散，所以 $\frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1},\ x\in(-1,1)$

2. 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数

解：$f(x)=\frac{x}{(2-x)(1+x)}=\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)=\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+x}\right)$

$=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n+\sum(-1)^n x^n\right),\quad \begin{cases}\frac{x}{2}\in(-1,1)\\ x\in(-1,1)\end{cases}$

$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)x^{n+1},\quad x\in(-1,1)$

当 $x=\pm1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)(\pm1)^{n+1}$ 发散，所以 $\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)x^{n+1},\ x\in(-1,1)$

3. 将函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数

解：$f(x)=\ln(1-x-2x^2)=\ln(1-2x)(1+x)=\ln(1-2x)+\ln(1+x)\qquad -1<x<\frac{1}{2}$

$(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1,1)\Rightarrow\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-1,1)$

$\ln(1-2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot(-2x)^{n+1},\quad -2x\in(-1,1)\quad=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\Rightarrow f(x)=\ln(1-x-2x^2)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}\cdot(-\frac{1}{2})^{n+1}$ 收敛，所以 $\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

4. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 展开成 x 的幂级数

解：由 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

则 $f(x)=e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ 展开成 x-2 的幂级数

解：$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{-1-(x-2)}-\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{1+(x-2)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-2)^n$，$\begin{cases}x-2\in(-1,1)\\ \frac{x-2}{2}\in(-1,1)\end{cases}\Rightarrow x\in(1,3)$

当 $x-2=\pm1$ 时：$\sum(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(\pm1)^n$ 发散，

所以 $\frac{1}{x^2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-2)^n$，$x\in(1,3)$

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2+3x+x^2}$ 展开成 x-1 的幂级数，并证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{12}$

解：$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+x-1}-\frac{1}{3+x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$

$=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$ $\begin{cases}\frac{x-1}{2}\in(-1,1)\\ \frac{x-1}{3}\in(-1,1)\end{cases}\Rightarrow -1<x<3$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$

当 $x-1=\pm2$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(\pm2)^n$ 发散，

所以 $\frac{1}{2+3x+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$，$x\in(-1,3)$

(1) 当 $x=0$ 时 $\frac{1}{2+0+0^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(-1)^n\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}$

(2) 当 $x=2$ 时 $\frac{1}{2+6+4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ 即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{12}$

三、 使用逐项求积分、求导的方法将函数展开成幂级数

1. 将函数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的和

$dx(\ \ x\ \ )$

解：由 $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\ ,\ x\in(-\infty,+\infty)$，则 $\frac{e^x-1}{x} = 1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{(n-1)}{n!}x^{n-2}+\cdots = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}\ ,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

当 $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\Big|_{x=1} = \frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$.

2. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x - x$ 展开成 x 的幂级数

解：由 $f(x)=\frac{1}{4}(\ln(1+x)-\ln(1-x))+\frac{1}{2}\arctan x - x$，则 $f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n-1\ ,\quad x\in(-1,1)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n+1)x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}2x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\ ,\quad x\in(-1,1).$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}\ ,\quad x\in(-1,1).$$

3. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和

解：$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\cdot\frac{-2(1+2x)-(1-2x)\cdot 2}{(1+2x)^2} = \frac{-2}{1+4x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x^2)^n,\ 4x^2\in(-1,1)$

$$= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n x^{2n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^x -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\cdot x^{2n}dx+\frac{\pi}{4} = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}+\frac{\pi}{4},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2}$ 收敛

所以 $\arctan\frac{1-2x}{1+2x} = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)}x^{2n+1}+\frac{\pi}{4},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = -\left(\arctan\frac{1-2x}{1+2x}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\arctan 0+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

4. 将函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$ 展开成 x 的幂级数

解：由 $\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，则 $\ln(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

$x \in (-1, 1)$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\cdot(\pm 1)^{n+1}$ 收敛，所以

$$\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\cdot x^{n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$