**第一部分 多变量微分学**

**一、多元函数极限论**

1.多元函数极限的定义：

（1）邻域型定义：设函数的定义域为，是的聚点，如果存在常数，对于任意给定的正数，总存在正数，使得当点时，都有，那么就称常数为函数当时的极限，记作

（2）距离型定义：设函数的定义域为，是的聚点，如果存在常数，对于任意给定的正数，总存在正数，使得当点，且时，都有，那么就称常数为函数当时的极限，记作

注：①这里给出的是数学分析中国际通用的定义，已自然排除了邻域内的无定义点；

②极限存在的充要条件：点在定义域内以任何方式或途径趋近于时，都有极限；

③除洛必达法则、单调有界原理、穷举法之外，可照搬一元函数求极限的性质和方法，常用的有：等价无穷小替换、无穷小×有界量=无穷小、夹挤准则等；

④若已知存在，则可以取一条特殊路径确定出极限值；相反，如果发现点以不同的方式或途径于时，区域不同的值，则可断定不存在.

⑤二元函数的极限记为或.

2. 多元函数的连续性：设函数的定义域为，是的聚点，如果，且有，则称在处连续；如果在区域的每一点处都连续，则称在区域上连续.

注：①如果，只称“不连续”，而不讨论间断点类型；

②在有界闭区域上的连续函数拥有和一元函数类似的性质，如有界性定理、一致连续性定理、最大值最小值定理、介值定理等.

3.二重极限与累次极限

累次极限与二重极限的存在性之间没有任何必然的联系，但若某个累次极限和二重极限都存在，则它们一定相等；反之，若两个累次极限存在而不相等，则二重极限一定不存在，又若两个累次极限存在且相等，称累次极限可以交换求极限的顺序.

**二、偏导数、全微分**

1.偏导数、全微分的相关理论问题 （以二元函数为例讨论）

（1）偏导数的存在性：讨论对某个变量的偏导数，则将其他变量当作常数.

；.

（2）可微性：记，则仅当时，在处可微，否则不可微.其中，.

注：等价于

即

又即记为全微分在处的全微分.

中值定理推广为：

（3）偏导数的连续性：讨论偏导连续性，先用定义求和，用公式求和，判断和是否都成立，如果都成立则偏导数连续.

④逻辑关系：



2.多元函数微分法：

（1）链式求导法则：

①从题目中的复合关系画出从起始变量经过中间变量到终变量的复合结构图；

②求偏导就是“走路”的过程，有几条路，等号后就有几项；每条路上有几段，每项中就会有几部分相乘（注意：偏导写偏微分符号“”， 不偏则写微分符号“d”）；

③严格遵守用位置表示偏导数的规则，注意避免符号混乱和歧义；

④对于求高阶偏导数的问题，不论对谁求导，也不论求了几阶导，求导后的新函数仍具有与原来函数相同的复合结构（注意若偏导连续则相等，要合并同类项）.

（2）全微分形式不变性：仅一阶全微分可以使用，高阶全微分不再成立.

（3）隐函数存在性及求导法则：

①一个方程的情形（以三个变量为例）：设在点某邻域内偏导连续，且，，则方程在点内某邻域内可唯一确定单值函数，这个函数在的某邻域内具有连续的偏导数，且，.结论不难推广到一般情形.

②方程组的情形：一般地，设方程组可确定个元函数.当雅可比行列式



时，可以确定，其中由将分母中的第个元素替换成得到.（雅可比行列式在横向上改变各自变量，纵向上改变各函数名称）

注：①求导前应事先判断，个变元，个方程可确定个元函数；

②有些比较简单的问题不必使用此通法，可以考虑利用全微分形式不变性.

③经验结论：由确定的隐函数，

求时，有；

求时，有；

求时，有，

其中.（的曲率：）

**三、多元微分学的几何学应用（以下的讨论主要为了计算，条件未必严格）**

1.曲线的切线和法平面：设曲线 在处都存在且不为0，则曲线在处的：

（1）切线方程为：

（2）法平面方程为.

注：若曲线以形式给出，切向量为.

2.曲面的切平面与法线：设曲面由方程确定，在点处可微，且不为0，则曲面在处的：

（1）切平面方程为（导数已经代入坐标）；

（2）法线方程为.

注：二元函数在某点处的全微分等于其在这点处切平面竖坐标的增量.

3.方向导数：

（1）定义式：

（2）若函数在点处可微，那么在点处沿所有方向的方向导数存在，且，其中为的方向余弦.

注：沿所有方向的方向导数存在不能推出可微，偏导数存在不能推出各方向导数存在.

4.梯度：

（1）计算：**grad** ***u***=***i***+***j***+***k***；

（2）**grad** ***u***是在点的变化量最大的方向，其模等于这个最大变化率；

（3）梯度的运算法则和一元函数的求导法则相似；

（4）方向导数等于梯度在该方向上的投影.

**四、极值与最值问题**

1.二元函数的非条件极值问题

（1）极值的必要条件：对偏导数存在的函数，在处有极值的必要条件是.（可推广到三元及以上）

（2）极值的充分条件：设为函数的驻点，且在处连续，记，则：

①时，是极值点，当时，为极小值；当时，为极大值；

②时，不是极值点；

③时，此法失效，另谋它法.

注：本方法不可推广到三元及以上，三元及以上的充分条件中，要求黑塞矩阵正定或负定.（本知识不做要求，在出题人手下不会出现三元以上的极值判断问题）

2.条件极值与拉格朗日乘数法

（1）一般情况下的拉格朗日乘数法：求函数在条件下的条件极值，可以从函数



的驻点中得到可能的条件极值的极值点.

步骤：

①构造辅助函数；（注意：变量均为独立变量）

②求各变量的一阶导并令其为零，联立得到方程组；

③解方程组得到所有驻点.（解无定法，尽量利用观察法）

（2）对“条件极值”的解读：

事实上，只利用拉格朗日乘数法求条件极值无异于掩耳盗铃.由于对于多元函数，构造拉格朗日函数后会出现至少三个变量，在数学上欲判断求得的驻点是否是极值点需要利用三阶以上的黑塞矩阵.而出题人为了回避这一知识点，通常以实际问题的形式来考察拉格朗日乘数法.由于在实际问题的背景下必存在最值，可以认为“所得即所求”，但是实际上求出的并不是真正的条件极值，而是在条件下的最值.所以，出题人通常在题目中会以“最值”来代替极值进行考察.

**五、习题**

1.已知方程有形式的解，求出此解.

2.已知二元函数可微，两个偏增量：

且求

3.设确定，其中有二阶连续偏导数，求

4.已知函数可微，且有满足方程现在将作为的函数，求

5.设是由方程确定的,的函数，其中和均有一阶连续的偏导数，求

6.设是,的二元函数，求及

7.求函数在点处沿曲面的法线向量的方向导数.

8.求**grad**[***c*·*r***+ln(***c*·*r***)],其中***c***为常向量，***r***为向径，且***c*·*r*** >0.

9.设二元函数在点某邻域内偏导数和都有界，证明:在此邻域内连续.

10.设存在，在处连续，证明：在处可微.

11.证明：函数在原点处偏导数存在但不可微.

12.设是由方程确定的二元函数，其中有连续的二阶导函数，证明：

13.证明：曲面是柱面，其中可微.

**第二部分 多变量积分学**

**一、各类积分的计算公式及意义**

（一）二重积分

1.计算公式

①直角坐标系下的二重积分：

②极坐标系下的二重积分：



③二重积分的变量替换：

2.几何意义：时，表示以为底，以为顶的曲顶柱体的体积.

3.物理意义：各点处面密度为的平面片*D*的质量.

（二）三重积分

1.计算公式

①直角坐标系下的三重积分：

（1）柱型域：

投影穿线法（先一后二法）：

（2）片型域：

定限截面法（先二后一法）：

②柱面坐标系下的三重积分：

③球面坐标系下的三重积分：



④三重积分的变量替换：



2.物理意义：各点处体密度为的几何形体的质量.

（三）第一型曲线积分：

1.计算公式

①平面曲线的情形：

（1）则

（2）则

（3）则

②空间曲线的情形：

:

2.几何意义：以为准线，母线平行于轴的柱面介于与间的面积.

3.物理意义：各点处线密度为（或）的曲线的质量.

（四）第一型曲面积分：

1.计算公式：



2.物理意义：各点处面密度为的曲面的质量.

（五）第二型曲线积分：

1.计算公式：

①平面曲线的情形：

②空间曲线的情形：



2.物理意义：力场***F=****P*(*x*,*y*,*z*)***i***+ *Q*(*x*,*y*,*z*)***j***+*R*(*x*,*y*,*z*)***k***沿有向曲线***C***所做的功.

（六）第二型曲面积分：

1.计算公式：



2. 物理意义：流速场***v=****P*(*x*,*y*,*z*)***i***+ *Q*(*x*,*y*,*z*)***j***+*R*(*x*,*y*,*z*)***k***单位时间通过有向曲面***S***流向指定一侧的净通量.

**二、各种积分间的联系**

1. 第一型曲线积分与第二型曲线积分：



2. 第一型曲面积分与第二型曲面积分：



3. 第二型曲线积分与二重积分（Green公式）：



4. 第二型曲面积分与三重积分（Gauss公式）：

5. 第二型曲线积分与第二型曲面积分（Stokes公式）：



**三、各种积分的通用性质**

1.黎曼积分的性质

1°

2° ，其中，且与无公共内点.

3°若，，则

若，且连续，，则

4° 

5° 若在积分区域上的最大值为*M*，最小值为*m*，则

6° 若在有界闭区域上连续，则至少有一点，使

7° 若关于坐标轴对称，当关于垂直该轴的坐标是奇函数则为0；若关于坐标平面对称，当关于垂直该平面坐标轴的坐标是奇函数时为0.

8° 将坐标轴重新命名，如果积分区域不变，则被积函数中的*x*,*y*,*z*也同样作变化后，积分值保持不变.

2.第二型积分的性质

1° 设是与方向相反的几何体，则

2° 

3°若，则

4°若***e****p*,则

5°设***e****p*=，=，则



6° 将坐标轴重新命名，如果曲线或曲面的方程不变，则被积函数中的*x*,*y*,*z*也同样作变化后，积分值保持不变.

**四、各种积分的应用**

1.形心坐标公式：

质心坐标公式：

2.转动惯量：

3.旋度：**rot*F***(*M*)= ***i***+***j***+***k***.

4.散度：div***F***(*M*)= 

**五、习题**

1.计算其中*D*由横轴和摆线的一拱围成.

2.计算其中*D*: 

3.计算其中*D*: 

4.计算 其中*D*: 

5.计算其中*V*是由不等式组所限定的区域，为任一连续函数.

6.计算其中*V*是由不等式组所确定的空间区域.

7.计算其中*V*是由锥面和平面围成的立体.

8.计算其中*V*是顶点在处，底为平面上以 为圆心，1为半径的圆的圆锥体.

8.计算其中*l*为双曲线上点到的弧段.

9.计算其中*L*是空间圆周

10.计算其中*S*是椭球面的上半部分，点为*S*在点*P*处的切平面，为原点到平面的距离.

11.计算其中*l*是由由原点沿到点的曲线.

12.计算其中

从*z*轴正向看取逆时针方向.

13.计算其中*l*为摆线从到的弧段.

14.计算其中*S*是由抛物面，坐标面*xoz*,*yoz*及平面所围成的立体表面的外侧.

15.计算其中*S*是由锥面与半球面构成的闭曲面的外侧.

16.计算其中是由 和所围立体表面的外侧， 是有连续导数的函数.

17.计算其中*S*是由绕*y*轴旋转一周所得到的曲面，它的法向量与*y*轴正向夹角恒大于

18.计算其中*S*是曲面及，所围立体表面外侧.

19.求闭曲面所围成的立体体积.

20.求锥面含在圆柱面内部分的面积.

21.求由曲线*L*：绕直线旋转形成的旋转曲面的面积.

22.求平面曲线段*l*：绕直线*L*：旋转形成的旋转曲面的面积.

23.设函数在区间上连续，并设求 

24.求线密度为的物质曲线对三个坐标轴转动惯量之和.

25.设***r***=*x****i****+y****j****+z****k***,*r=*|***r***|.

（1）求，使div[***r***]=0；（2）求，使div[**grad**]=0.

26.设函数在区间上连续、正值且单调下降，证明：

27.设函数连续，证明：

28.证明：其中是球面：



29.设是弧长为*s*的光滑曲线段，函数在上连续，且 证明：

30.设在上半平面内函数具有连续偏导数，且对任意的，都有证明：，其中是内任意分段光滑的有向简单闭曲线.

**第三部分 无穷级数**

**一、数项级数**

（一）数项级数的基本性质

1.收敛的必要条件：收敛级数的一般项必趋于0.

2.收敛的充要条件（柯西收敛原理）：对任意给定的正数，总存在使得对于任何两个大于的正整数*m*和*n*，总有.（即部分和数列收敛）

3.收敛级数具有线性性（即收敛级数进行线性运算得到的级数仍然收敛），而一个收敛级数和一个发散级数的和与差必发散.

4.对收敛级数的项任意加括号所成级数仍然收敛，且其和不变.

5.在一个数项级数内去掉或添上有限项不会影响敛散性.

（二）数项级数的性质及敛散性判断

1.正项级数的敛散性判断方法

（1）正项级数基本定理：如果正项级数的部分和数列有上界，则正项级数收敛.

（2）比较判别法（放缩法）：若两个正项级数和之间自某项以后成立着关系：存在常数，使，那么

（i）当级数收敛时，级数亦收敛；

（ii）当级数发散时，级数亦发散.

推论：设两个正项级数和，且自某项以后有，那么

（i）当级数收敛时，级数亦收敛；

（ii）当级数发散时，级数亦发散.

（3）比较判别法的极限形式（比阶法）：给定两个正项级数和，若，那么这两个级数敛散性相同.（注：可以利用无穷小阶的理论和等价无穷小的内容）

另外，若，则当级数收敛时，级数亦收敛；若，则当级数发散时，级数亦发散.

常用度量：

①等比级数：，当时收敛，当时发散；

②*p*-级数：，当时收敛，当时发散(时称调和级数)；

③广义*p*-级数：，当时收敛，当时发散.

④交错*p*-级数：，当时绝对收敛，当时条件收敛.

（4）达朗贝尔判别法的极限形式（商值法）：对于正项级数，当时级数收敛；当时级数发散；当或时需进一步判断.

（5）柯西判别法的极限形式（根值法）：对于正项级数，设，那么时此级数必为收敛，时发散，而当时需进一步判断.

（6）柯西积分判别法：设为正项级数，非负的连续函数在区间上单调下降，且自某项以后成立着关系：，则级数与积分同敛散.

2.任意项级数的理论与性质

（1）绝对收敛与条件收敛：

①绝对收敛级数必为收敛级数，反之不然；

②对于级数，将它的所有正项保留而将负项换为0，组成一个正项级数，其中；将它的所有负项变号而将正项换为0，也组成一个正项级数，其中，那么若级数绝对收敛，则级数和都收敛；若级数条件收敛，则级数和都发散.

③绝对收敛级数的更序级数（将其项重新排列后得到的级数）仍绝对收敛，且其和相同.

④若级数和都绝对收敛，它们的和分别为和，则它们各项之积按照任何方式排列所构成的级数也绝对收敛，且和为.特别地，在上述条件下，它们的柯西乘积也绝对收敛，且和也为.

注：，这里.

（2）交错级数的敛散性判断（莱布尼兹判别法）:若交错级数满足，且单调减少（即），则收敛，其和不超过第一项，且余和的符号与第一项符号相同，余和的值不超过余和第一项的绝对值.

**二、函数项级数**

（一）幂级数

1.幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域

（1）柯西-阿达马定理：幂级数在内绝对收敛，在内发散，其中为幂级数的收敛半径.

（2）阿贝尔第一定理：若幂级数在处收敛，则它必在内绝对收敛；又若在处发散，则它必在也发散.

推论1：若幂级数在处收敛，则它必在内绝对收敛；又若幂级数在处发散，则它必在时发散.

推论2：若幂级数在处条件收敛，则其收敛半径，若又有

，则可以确定此幂级数的收敛域.

（3）收敛域的求法：令解出收敛区间再单独讨论端点处的敛散性，取并集.

2.幂级数的运算性质

（1）幂级数进行加减运算时，收敛域取交集，满足各项相加；进行乘法运算时，有：

，收敛域仍取交集.

（2）幂级数的和函数在收敛域内处处连续，且若幂级数在处收敛，则在内连续；又若幂级数在处收敛，则在内连续.

（3）幂级数的和函数在收敛域内可以逐项微分和逐项积分，收敛半径不变.

3.函数的幂级数展开以及幂级数的求和

（1）常用的幂级数展开：

①，*x*∈(−∞, +∞).



②1+*x*+*x*2+···+*xn*+··· =，*x*∈(−1, 1).



从而，，.

③，*x*∈(−∞, +∞).

④，*x*∈(−∞, +∞).

⑤，*x*∈(−1, 1].

⑥，*x*∈(−1, 1).

⑦，*x*∈[−1, 1].

⑧，*x*∈[−1, 1].

（2）常用的求和经验规律：

①级数符号里的部分可以提到级数外；

②系数中常数的幂中若含有，可以与的幂合并，如将和合并为；

③对求导可消去分母因式里的,对积分可消去分子因式里的；

④系数分母含可考虑的展开，含或等可考虑正余弦函数的展开；

⑤有些和函数满足特定的微分方程，可以考虑通过求导发现这个微分方程并求解.

（二）傅里叶级数

1.狄利克雷收敛定理（本定理为套话，不需真正验证，条件在命题人手下必然成立）

若以为周期，且在[−*l*, *l*]上满足：

①连续或只有有限个第一类间断点；

②只有有限个极值点；

则诱导出的傅里叶级数在[−*l*, *l*]上处处收敛.

2. 傅里叶级数与的关系：



3.以为周期的函数的傅里叶展开展开：



（1）在[−*l*, *l*]上展开：；

（2）正弦级数与余弦级数：

①奇函数（或在非对称区间上作奇延拓）展开成正弦级数：；

②偶函数（或在非对称区间上作偶延拓）展开成余弦级数：；

4.一些在展开时常用的积分：

（1）

（2）；

（3）；

（4）；

；

（5）；

.

注：①求多项式与三角函数乘积的积分时可采用列表法，注意代入端点后可能有些项为0；

②展开时求积分要特别注意函数的奇偶性及区间端点和间断点的特殊性；

③对于的情形，事先令对求积分通常是有帮助的.

**五、习题**

1.判断下列数项级数的敛散性，若收敛，不是正项级数的指出是绝对收敛还是条件收敛.

（1）；

（2），其中非负；

（3），其中；

（4）；

（5），其中；

（6）.

2.求幂级数的收敛域.

3.求幂级数的收敛域，其中为正数.

4.将下列函数展开成的幂级数.

（1）；

（2）；

（3）.

5.求下列幂级数的收敛域及和函数.

（1）；

（2）；

（3）；

6.求数项级数的和.

7.设分别求出和.

8.求极限.

9.求极限

10.将函数展开成正弦级数.

11.将函数展开成余弦级数.

12.将函数展开成傅里叶级数.

13.证明：幂级数在内绝对收敛.

14.求函数的傅里叶系数，其中是以为周期的连续函数，是其傅里叶系数.并证明：