

第五章 假设检验

5.1 正态分布

在假设检验中，我们可以使用正态分布的近似参数来计算置信区间。唯一的区别是，此时在原假设 $H_0: p=p_0$ 的前提下计算概率值，因此在计算原置信区间时采用的近似性

$$\frac{p(1-p)}{n} \approx \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$$

我们将用新的方法代替上述方法，新的方法是在计算标准误差和 P 值时直接使用 p_0 即可。

如果估计值用 \hat{p} 表示，其（估计的）标准误差是

$$\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

检验统计量为

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

举个例子，1965 年，美国联邦最高法院做出了裁决，认定斯文对阿拉巴马州提起的诉讼有理。这个案件也是在研究预判排除原则时经常被法学界提及的一个知名案例。斯文是一位非洲裔美国人，他被指控在阿拉巴马州塔拉迪加地区强奸了一名白人妇女，因此被判处死刑，成为本案的主角。斯文因为在陪审团中没有黑人成员而认为自己受到了不公正的审判，因此将最终的案件上诉至最高法院。上述请求被最高法院否决了。根据阿拉巴马州法律，陪审团成员是从一个包含 100 个备选成员的名单中随机抽取的，而这 100 人中有 8 名是非白人。这 8 名黑人因为无法符合诉讼过程中的无因回避原则而被排除在此处审判的陪审团之外，而无因回避原则是由宪法予以保障的。阿拉巴马州的法律规定，只要年满 21 岁，就可以担任陪审团成员。大约有 16,000 人符合这个条件，在塔拉迪加地区，其中约有 26% 是非裔美国人。我们目前所面临的问题是，如果这 100 名潜在的陪审团

成员确实是随机选取的，并且符合条件，那么其中黑人成员的数量是否会少于 8 人？

我们可以用 R 语言的 `prop.test` 函数。`prop.test` 函数是一种在统计学中使用的函数，它用于执行比例差异的假设检验。该函数的主要目的是比较两个或多个总体的比例。它可以计算比例的置信区间和 p 值，并根据它们来推断差异是否显著。

```
> prop.test(8,100,p=0.26,alternative = "less")

1-sample proportions test with continuity correction

data: 8 out of 100, null probability 0.26
X-squared = 15.917, df = 1, p-value = 3.308e-05
alternative hypothesis: true p is less than 0.26
95 percent confidence interval:
 0.0000000 0.1424974
sample estimates:
      p 
0.08
```

我们再使用 R 语言里面的二项式分布来验证，这里我们用了 `binom.test` 函数。`binom.test` 函数是用于二项分布的假设检验。它可以用来检验在已知概率的情况下，观察到的事件发生次数是否符合二项分布，并且可以进一步判断这个概率是否等于某一个特定的值。

具

```
> binom.test(8,100,p=0.26,alternative = "less")

Exact binomial test
```

```
data: 8 and 100
number of successes = 8, number of trials = 100, p-value =
4.735e-06
alternative hypothesis: true probability of success is less than 0.26
95 percent confidence interval:
0.0000000 0.1397171
sample estimates:
probability of success
0.08
```

5.2 t 检验

在样品量较少的情况下，整体标准差不得而知。由于依赖检测的信息量不足，只能用样本标准差代替整体标准差。此时样本统计量服从 t 分布，因此需要使用 t 统计量。其计算公式

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

这里 t 统计量的自由度为 n-1

以土壤 pH 值检测的数据为例，我们想问一下现在这个地区的土壤是否是中性的（即 pH=7）。为此，首先提出原假设和预备假设如下。H0:ph=7, H1:ph≠7 这个问题显然属于小样本，整体差异未知。此时计算其 t 统计量如下。

$$t \approx -2.9326$$

我们用 R 语言来计算其的概率

```
> 2*pt(-2.9326,16,lower.tail=T) %这里的-2.9326 是检验的 t 值，16 是自由
度。
```

```
[1] 0.009757353
```

我注意到上面的结果与之前使用 `t.test()` 函数计算的结果一致。让我们分析一下这个结果意味着什么。可以先用下面的代码在 R 语言中计算出双尾检验的两个临界值。

```
> qt(0.025,16);qt(0.975,16)
```

```
[1] -2.119905
```

```
[1] 2.119905
```

我们再举个例子，在上一章中我们画出过下列表格（表 6）

表 6

饲料	增重/g
1	42, 68, 85
2	42, 97, 81, 95, 61, 103

我们打算通过提出原假设和备择假设的方式来确定是否存在两种饲料之间的差异

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

我们计算出 $t \approx -0.9019$

我们在 R 语言使用以下代码计算与检验统计相对应的 P 值。

```
> pt(-0.9019, 7, lower.tail = T)*2
```

```
[1] 0.3970802
```

结果显示我们的原假设是成立的。

