技術說明

操作流程

1. 讀取一張 $N \times N$ 的低解析度灰階影像
2. 對原圖的每一列使用 Lagrange 插值法擴展為 $N \times M$ 的中間影像
3. 對中間影像的每一行使用 Lagrange 插值法擴展為 $M \times M$ 的高解析度影像
4. 對於計算結果進行 clamp，以確保結果依然在 $[0, 1]$ 的範圍內。本專案可以選擇以下 clamp 時機：
   - 每次插值時計算 clamp
   - 最後再對整張圖片進行 clamp
5. 在插值過程中，為避免圖片產生過擬合現象，因此在過程中只會使用大小為 K 的區塊來進行插值計算，而非整列或整行。本專案實作了以下區塊選擇方法：
   - 區塊取樣 (Block)：直接將影像分割為大小約為 K 的不重疊區塊，對每個區塊分別進行插值計算。
   - 重疊取樣 (Overlap)：同上述方法，但邊界會延伸一格像素，使得相鄰區塊間可以參考彼此的數值，減少邊界的不連續現象。
   - 滑動視窗 (Sliding Window)：使用滑動視窗的方式，對每個像素點周圍大小為 K 的區域進行插值計算，以獲得更平滑的結果。
6. 最後會使用 `display` 程式來顯示輸入與輸出影像，並使用 `convert` 程式將輸出影像轉換為 PNG 格式圖片。

使用說明

1. 系統需求
   - Makefile 需使用 Linux 或 macOS 系統的終端機執行
   - 支援 C 和 C++ 17 以上標準的編譯器
   - freeglut （用於顯示影像）
   - Python 3.10+、matplotlib （僅用於比較圖片差異，需在 Windows 系統上執行）
2. 編譯程式碼
   ```
   make clean // 清理舊的編譯檔案
   make
   ```
   注意：此功能需安裝 makefile！
3. 執行主程式
   ```
   ./super <input_image> <M>
   ```
   其中 `<input_image>` 是輸入的低解析度影像檔案名稱，預設為 “`image/image1.txt`”；`<M>` 是輸出影像的解析度大小 (輸出影像為 $M \times M$)，預設為原圖的八倍大小。輸出影像會儲存為 “`image/output_<K>.txt`”，其中 `<K>` 是區塊大小。
4. 在視窗中顯示影像
   ```
   ./display <img1.txt> <img2.txt> < ... >
   ```
5. 將影像轉換為 PNG 格式
   ```
   ./convert <img1.txt> <img2.txt> < ... >
   ```
6. 批次比較圖片差異
   ```
   python compare.py <img1.txt> <img2.txt> < ... >
   ```
   注意：此功能僅限 Windows 平台使用！
   將 img1、img2、... 依序與標準解析度圖片 (image2.txt) 比較，並輸出個別的比較結果 MSE、PSNR、SSIM。若只有一個輸入參數時支援 globbing，可以匹配多個檔案進行比較。若無輸入參數，則預設為比較 `image/output_*.txt` 的所有圖片。

實作細節[1]

1. 主程式入口 `super.cpp:main()`：負責讀取輸入影像、選擇不同的插值參數進行 super sampling、將結果儲存起來。此外，我也實現了在所有結果運算完成後，自動顯示圖片視窗、將結果轉換為 PNG 圖片，方便檢視結果。

```
void main(int argc, char** argv) {
    Image src = readImage("image/image1.txt");     // 讀取輸入影像
    int srcSize = src.width, dstSize = 512;        // 輸入、輸出影像大小 (N*N, M*M)
    vector<int> k_list = {1, 2, 4, 6, 8, 16, 32};  // 要測試的區塊大小列表

    // 進行 super sampling
    for (int k : k_list) {  // 測試分別 K 值
        string dstFilename = "image/output_" + to_string(k) + ".txt";
        cout << "Generating `" << dstFilename << "' ..." << endl;

        Image dst = zerosImage(dstSize, dstSize, dstFilename.c_str());  // 輸出影像
        super_sample(src, dst, k, USE_METHOD_SLIDING | CLAMP_AT_END);   // 插值
        writeImage(dstFilename.c_str(), dst);
    }
}
```

2. `interpolation.cpp:super_sample()`：負責對輸入影像進行 super sampling，先對列方向進行插值，再對行方向進行插值。而對於行方向的插值，則是先將影像轉置（transpose）後再進行列方向的插值，最後再轉置回來。其中參數 "`method`" 為以下 flags 使用位元或運算（|）組合而成：

   - `USE_METHOD_BLOCK`：使用區塊取樣（預設）
   - `USE_METHOD_OVERLAP`：使用重疊取樣（overlap）
   - `USE_METHOD_SLIDING`：使用滑動視窗（sliding window）
   - `CLAMP_EACH_STEP`：每次插值時 clamp
   - `CLAMP_AT_END`：最後再 clamp（預設）
   - `NORMALIZE_AT_END`：線性正規化（不建議）

```
/**
 * @param src 輸入影像
 * @param dst 輸出影像
 * @param blockSize 區塊大小 (K)
 * @param method 計算方法
 */
void super_sample(const Image& src, Image& dst, int blockSize, int method) {
    Image mid = zerosImage(dst.width, src.height, NULL);  // 中間影像
    bool overlap = (method / 16 == 1);  // 是否使用 overlap 取樣
    bool clamped = (method % 16 == 0);  // 是否在每次插值時 clamp

    if (method / 16 < 2) {  // 使用一般或 overlap 方法
        super_row(src, mid, blockSize, overlap, clamped);  // 列方向插值
        transposeImage(&mid);                              // 轉置後
        super_row(mid, dst, blockSize, overlap, clamped);  // 行方向插值
        transposeImage(&dst);                              // 再轉置回來
    } else if (method / 16 == 2) {  // 使用 sliding window 方法
        sliding_row(src, mid, blockSize, clamped);  // 列方向插值
        transposeImage(&mid);                       // 轉置後
        sliding_row(mid, dst, blockSize, clamped);  // 行方向插值
        transposeImage(&dst);                       // 再轉置回來
    }

    if (method % 16 == CLAMP_AT_END) {  // 最後再 clamp
        for (int i = 0; i < dst.height; i++)
            for (int j = 0; j < dst.width; j++)
                dst.data[i][j] = clamp(dst.data[i][j]);
    }
}
```

[1] 實作代碼只節錄主要邏輯，完整程式碼請見 Tronclass 的上傳檔案。

3. `interpolation.cpp:super_row()`：負責對影像的每一列進行 Lagrange 插值來擴展影像寬度，並支援區塊取樣與重疊取樣兩種方法。其中使用了輔助函式 `get_block_range()` 來計算取樣區塊的範圍（左界與右界），其主要功能為把原始影像分割為若干個區塊，並且每一個區塊的大小盡量接近指定的 K，例如當 $N=64, K=3$ 時會分割為 $4\times1+3\times20$，共 21 個區塊；當 $N=64, K=12$ 時會分割為 $13\times4+12\times1$，共 5 個區塊。如果使用 overlap 方式，則會將每個區塊的邊界向外擴展一格像素。由 Theorem 1 可知，拉格朗日插值法具有平移性質，因此在每個區塊內插值時，可以將區塊的左界視為 $x=0$ 來進行計算，不必考慮其在整張影像中的實際位置。(較方便實作且不影響結果)

```cpp
/**
 * @param src 輸入影像
 * @param dst 輸出影像
 * @param blockSize 區塊大小 (K)
 * @param overlap 是否使用重疊取樣
 * @param clamped 是否將結果限制在 [0, 1]
 */
void super_row(const Image& src, Image& dst, int blockSize, bool overlap, bool clamped) {
    // 調整 blockSize 的大小，使每個區塊儘量均勻
    blockSize = src.width / (src.width / blockSize);
    double scale = (double)src.width / dst.width;  // [0, M) -> [0, N) 的縮放比例

    for (int i = 0; i < dst.height; i++) {
        int last_left = -1;      // 上一次的 left 位置
        std::vector<double> ys;  // 插值的取樣點

        for (int j = 0; j < dst.width; j++) {
            double xi = j * scale;  // 在原始影像中的位置

            // 取樣區塊的範圍
            auto [left, right] = get_block_range((int)xi, src.width, blockSize);

            if (overlap) {                          // 使用 overlap 方式
                if (left > 0) left--;               // 向左擴展取樣範圍
                if (right < src.width) right++;     // 向右擴展取樣範圍
            }

            if (left != last_left) {  // 更新取樣點 (如有需要)
                ys.resize(right - left);
                for (int jj = 0, l = left; l < right; jj++, l++)
                    ys[jj] = src.data[i][l];
                last_left = left;
            }

            double value = lagrange(ys, xi - left);
            if (clamped) value = clamp(value);
            dst.data[i][j] = value;
        }
    }
}
```

4. `interpolation.cpp:lagrange()`：實作拉格朗日插值法的函式，給定一組取樣點 `ys` 與欲插值的位置 x_i，回傳插值後的結果。其中由於取樣點的 x 座標為 $0,1,\ldots,n-1$，因此在計算時直接使用索引值來代表 x 座標。

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\ell_i(x),\quad \ell_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-j}{i-j} \tag{1}$$

```cpp
double lagrange(const std::vector<double>& ys, double xi) {
    double ret = 0.0;  // 回傳值
    for (int i = 0; i < ys.size(); i++) {
        double term = ys[i];
        for (int j = 0; j < ys.size(); j++) {
            if (i == j) continue;
            term *= (xi - j) / (i - j);
        }
        ret += term;
    }
    return ret;
}
```

5. `interpolation.cpp:sliding_row()`：使用滑動視窗的方式決定取樣點，實作方式與 `super_row()` 類似，但計算取樣區塊的範圍的輔助函式改為 `get_sliding_range()`，是以當前欲插值的位置為中心的大小為 K 的區塊作為取樣點，參考程式碼如下：

```
std::pair<int, int> get_sliding_range(int xi, int N, int K) {
    int left = std::max(0, (int)xi - K / 2), // 取樣區間的左界
        right = std::min(N, left + K);        // 取樣區間的右界
    left = std::max(0, right - K);            // 調整 left 以確保有 K 個點
    return {left, right};
}
```

Theorem 1 (拉格朗日差值法的平移性)**.** 設有一組取樣點 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$，其拉格朗日插值多項式為 $p(x)$。若將所有取樣點的 x_i 座標平移一個常數 c，即 $x_i' = x_i + c$，得到新的取樣點 $(x_0', y_0), (x_1', y_1), \ldots, (x_n', y_n)$，其拉格朗日插值多項式為 $q(x)$，則 $q(x)$ 的圖形與 $p(x)$ 的圖形平移 c 單位後的結果相同，即 $q(x) = p(x - c)$。

Proof. 根據拉格朗日差值法，我們可以構造出

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{2}$$

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i'(x), \quad \ell_i'(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j'}{x_i' - x_j'}. \tag{3}$$

注意到

$$x_i' - x_j' = (x_i + c) - (x_j + c) = x_i - x_j, \tag{4}$$

$$x - x_j' = x - (x_j + c) = (x - c) - x_j. \tag{5}$$

因此

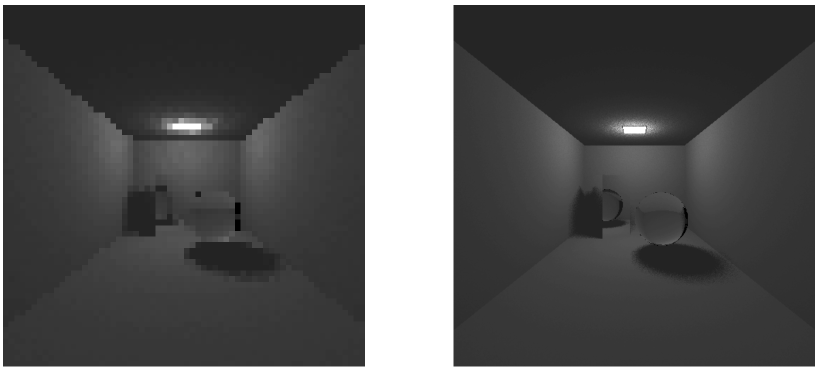
$$\ell_i'(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - c) - x_j}{x_i - x_j} = \ell_i(x - c) \tag{6}$$

將此結果代入 $q(x)$ 的式子中，可得

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i'(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x - c) = p(x - c) \tag{7}$$

得證. □

成果展示



(a) 原始低解析度影像（image1.txt） (b) 標準影像（image2.txt）

Figure 1: Tronclass 提供的測試影像

上圖（Figure 1）為 Tronclass 提供的測試影像。左側為輸入的低解析度影像（64×64），右側為對應的高解析度標準影像（512×512）。

由於我實作的三種方法皆可處理任意區塊大小 K，不必限定為 N 的因數。因此我針對所有的整數 $K = 1 \sim 64$ 都進行測試。不過考量篇幅，這裡僅展示部分結果，即 $K = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ 的情況。

下表（Table 1）列出了各種方法在不同區塊大小下，與標準影像（image2.txt）相比的 MSE、PSNR、SSIM 指標。所有數值皆四捨五入至小數點後四位，其中 MSE 越小、PSNR 與 SSIM 越大代表重建結果越佳。

圖表 Figure 3、Figure 4、Figure 5 則分別繪製三種方法在不同區塊大小 K 下的 MSE、PSNR 與 SSIM 指標變化趨勢。圖組 Figure 8、Figure 9、Figure 10 則分別展示三種方法在不同區塊大小下的輸出影像，以供視覺比較。

K	樣本取樣 (Block)	重疊取樣 (Overlap)	滑動視窗 (Sliding)
1	(0.0009, 30.27 dB, 0.9256)	(0.0004, 34.43 db, 0.9574)	(0.0009, 30.27 db, 0.9256)
2	(0.0007, 31.40 dB, 0.9193)	(0.0004, 34.32 db, 0.9545)	(0.0014, 28.39 db, 0.8717)
3	(0.0013, 28.97 dB, 0.8898)	(0.0004, 33.56 dB, 0.9473)	(0.0004, 34.43 dB, 0.957365)
4	(0.0019, 27.23 dB, 0.8503)	(0.0005, 32.71 db, 0.9343)	(0.0004, 33.50 db, 0.9462)
8	(0.0113, 19.46 dB, 0.6734)	(0.0028, 25.57 db, 0.8336)	(0.0007, 31.51 db, 0.9340)
16	(0.0716, 11.45 dB, 0.4367)	(0.0545, 12.64 db, 0.4821)	(0.0135, 18.70 db, 0.8157)
32	(0.1769, 7.52 dB, 0.2118)	(0.1734, 7.61 db, 0.2165)	(0.0957, 10.19 db, 0.5112)

Table 1: 不同方法與區塊大小下的 MSE、PSNR、SSIM 比較結果

結果分析

根據上述結果，我們可以觀察到以下幾點：

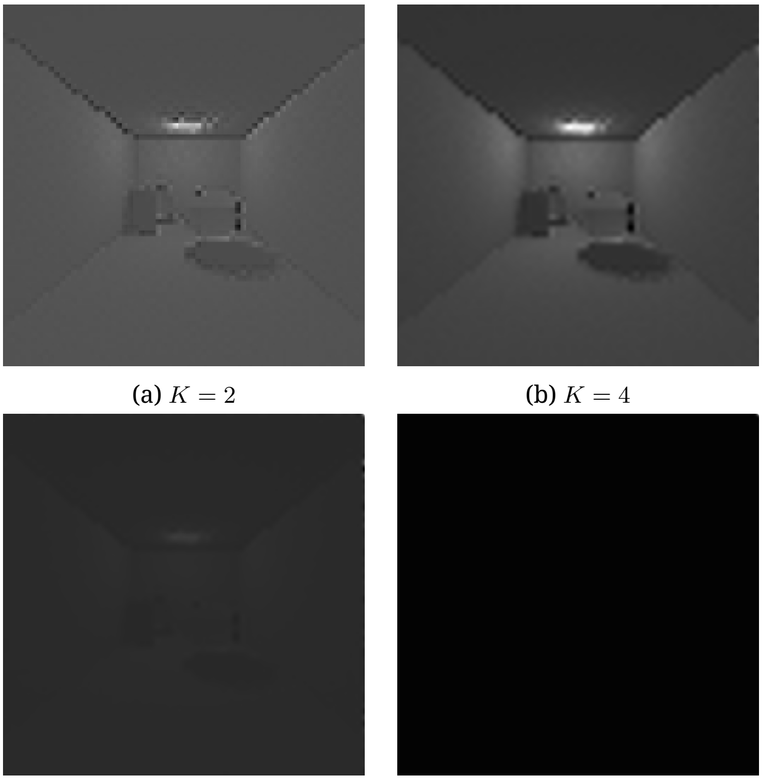
- 使用區塊取樣法與重疊取樣法時，選擇 $K = 1$（即直接將影像放大，不做任何插值）反而能得到較好的結果，但隨著 K 的增加，影像品質顯著下降，容易在區塊邊緣產生 Runge 現象，導致不連續與失真。這是因為拉格朗日插值法較密集的取樣點會導致過擬合現象，使得插值多項式在區塊邊界處震盪劇烈。
- 在 K 相同時，重疊取樣法普遍優於區塊取樣法，顯示出重疊取樣能有效減少區塊邊界的不連續現象。
- 滑動視窗法在大多數情況下表現優異，尤其在 K 較大時，能夠維持較高的 PSNR 與 SSIM 指標。這是因為滑動視窗法能夠更平滑地處理每個像素點，減少區塊效應的影響。
- 使用滑動視窗法時，$K = 3$ 的效果最佳，甚至優於 $K = 1$ 與 $K = 4$ 的結果，這可能是因為 $K = 3$ 能夠在插值過程中提供足夠的鄰近資訊，同時避免過度擬合。
- 使用滑動視窗法時，$K = 2$ 時影像變得較銳利，表現不如 $K = 1$ 與 $K = 3$，這可能是因為 $K = 2$ 無法提供足夠的鄰近資訊，導致插值結果不夠平滑。
- 從圖表 Figure 5 可見，滑動視窗法在 SSIM 指標上明顯優於其他兩種方法，特別是在 $K = 32$ 時仍然可以保持約 0.5 的 SSIM 值，另外兩種方法在 $K = 16$ 之後 SSIM 值已下降至約 0.5 以下。
- 在視覺效果上，區塊取樣法與重疊取樣法在 $K \geq 8$ 時，區塊邊緣的失真與不連續現象非常明顯，而滑動視窗法則在 $K \geq 16$ 時，影像邊緣開始出現模糊與失真，但中央區域仍然保持較好的細節，並沒有明顯被破壞成多個區塊。
- 因此建議 K 值應該要選擇 3 或 4，以取得較佳的平衡點。
- 從圖表 Figure 6 與 Figure 7 可見，每次插值時進行 clamp，可能可以避免在過程中因為震盪而產生過大的值，但是對最終結果的 SSIM 指標沒有明顯的變化（平均差異約為 6×10^-4），而對於 PSNR 值標則在 K 較大時才有輕微提升（平均差異約為 0.31 dB），但實務上並不會選擇如此大的 K。這表明在影像重建的過程中，單純的變更 clamp 操作時機並不足以改變影像品質。

其他想法：正規化

除了 clamp 操作外，我也思考過是否可以使用正規化（normalization）方法來處理插值過程中可能出現的過大或過小值。其中一種想法是在線性正規化（linear normalization），若果插值結果超出 $[0, 1]$ 範圍，則將整張圖片的像素值線性映射到 $[0, 1]$ 範圍內，即對於每個像素值 I_{ij}，進行以下轉換：

$$I'_{ij} = \frac{I_{ij} - I_{min}}{I_{max} - I_{min}} \tag{8}$$

其中 I_{min} 與 I_{max} 分別為整張圖片的最小與最大像素值。不過經過測試後發現，使用線性正規化反而會導致變得更糟糕，因為這會改變整張圖片的對比度與亮度分佈，例如讓影像偏白、偏暗等。甚至在 $K = 16$ 時，因為 Runge 現象導致極端值過大，整個影像幾乎全黑。因此我非常不建議直接使用此方法。



(a) $K = 2$ (b) $K = 4$ (c) $K = 8$ (d) $K = 16$

Figure 2: 使用線性正規化的結果

此外，我也考慮了一種基於 Z-score 的非線性正規化方法。具體做法是選定某個平均值 μ（如 0.5）與標準差 $\sigma \neq 0$，將每個像素值 I_{ij} 轉換為：

$$I'_{ij} = \frac{I_{ij} - \mu}{\sigma} \tag{9}$$

再透過線性正規化將結果映射到 $[0, 1]$ 範圍內。

此方法的優點在於，若插值法輸出值近似服從常態分佈，約 68.2% 數值將集中在 $\pm 1\sigma$ 範圍內，約 95.7% 數值將集中在 $\pm 2\sigma$ 範圍內。換言之，適當選擇 μ 與 σ 可以使大部分數值集中於特定區間內，減少極端值對整體影像的影響。

然而，即便使用此方法可降低極端值的影響，影像的對比度與細節仍可能無法完全保留，並可能受到數值震盪的干擾。由於時間有限，我並未針對此方法進行深入研究，此處僅提出作為未來可能的研究方向。

附錄：圖 & 表

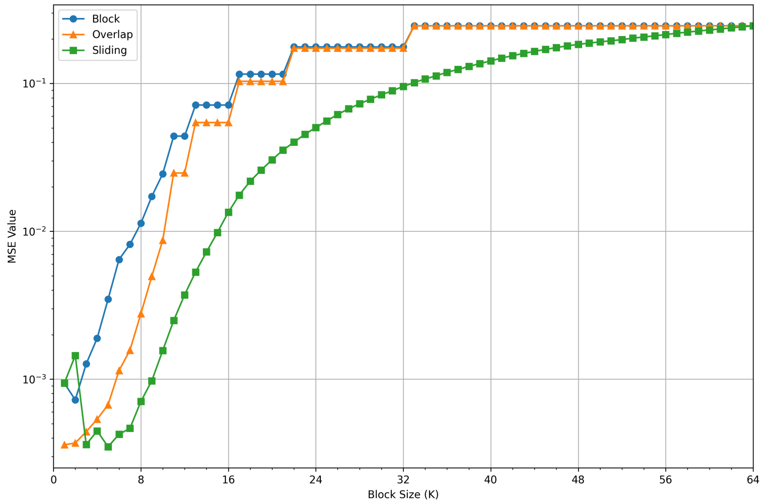


Figure 3: 三種方法在不同區塊大小 K 下的 MSE 指標比較

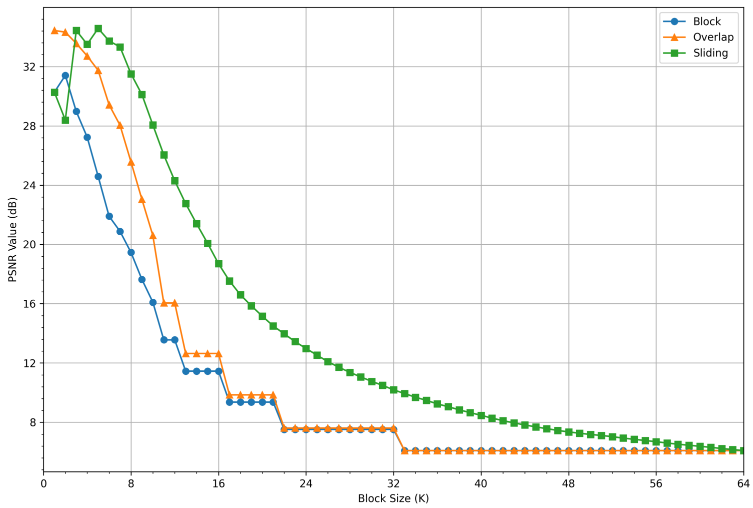


Figure 4: 三種方法在不同區塊大小 K 下的 PSNR 指標比較

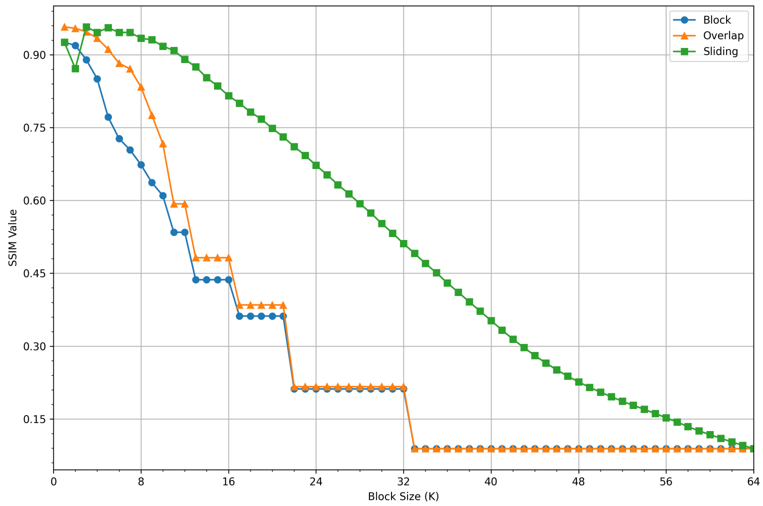


Figure 5: 三種方法在不同區塊大小 K 下的 SSIM 指標比較

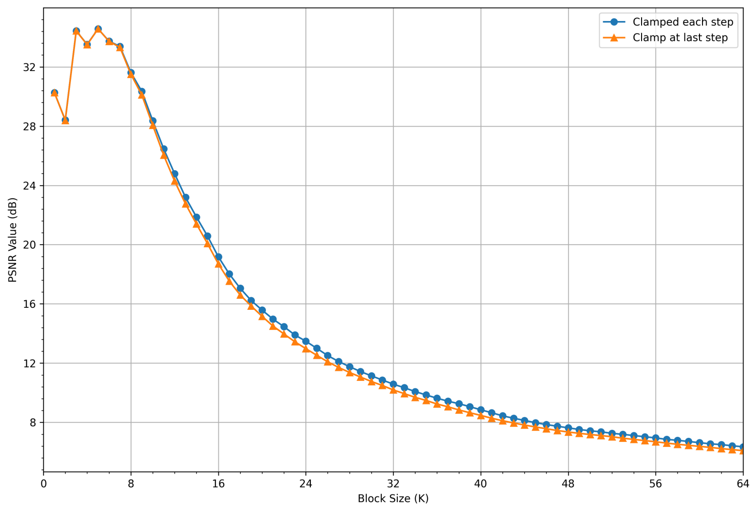


Figure 6: 不同 clamp 時機對 PSNR 指標的影響比較（以滑動視窗法為例）

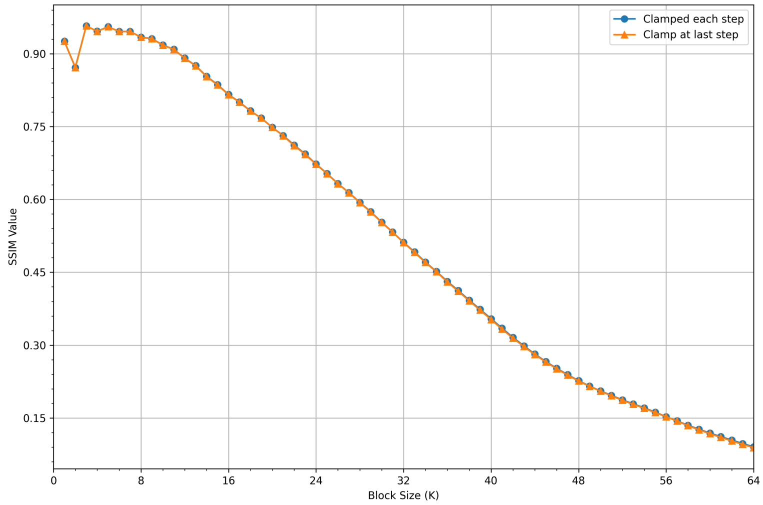
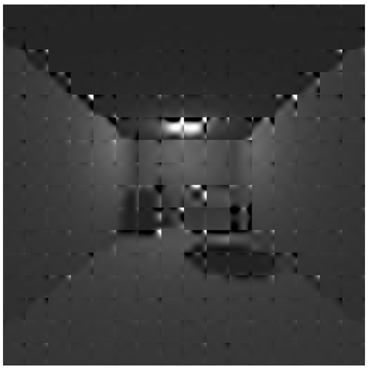


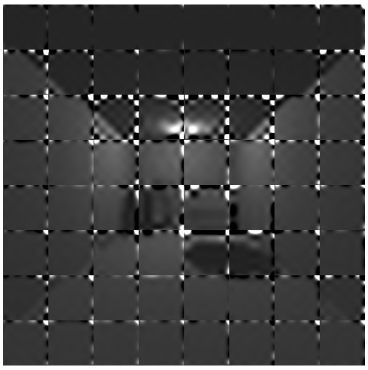
Figure 7: 不同 clamp 時機對 SSIM 指標的影響比較（以滑動視窗法為例）

(a) $K = 1$

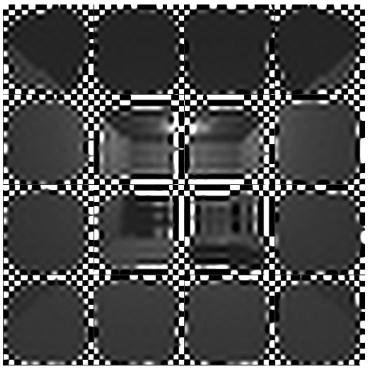
(b) $K = 2$



(c) $K = 4$



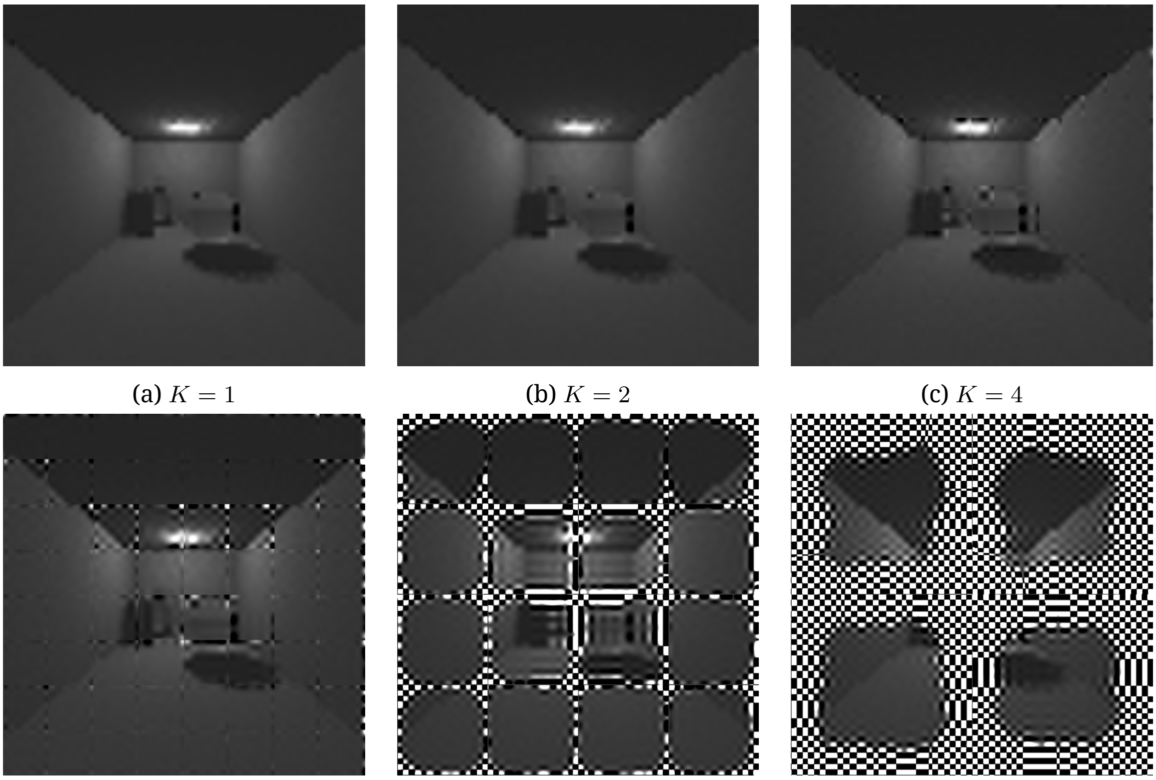
(d) $K = 8$



(e) $K = 16$

(f) $K = 32$

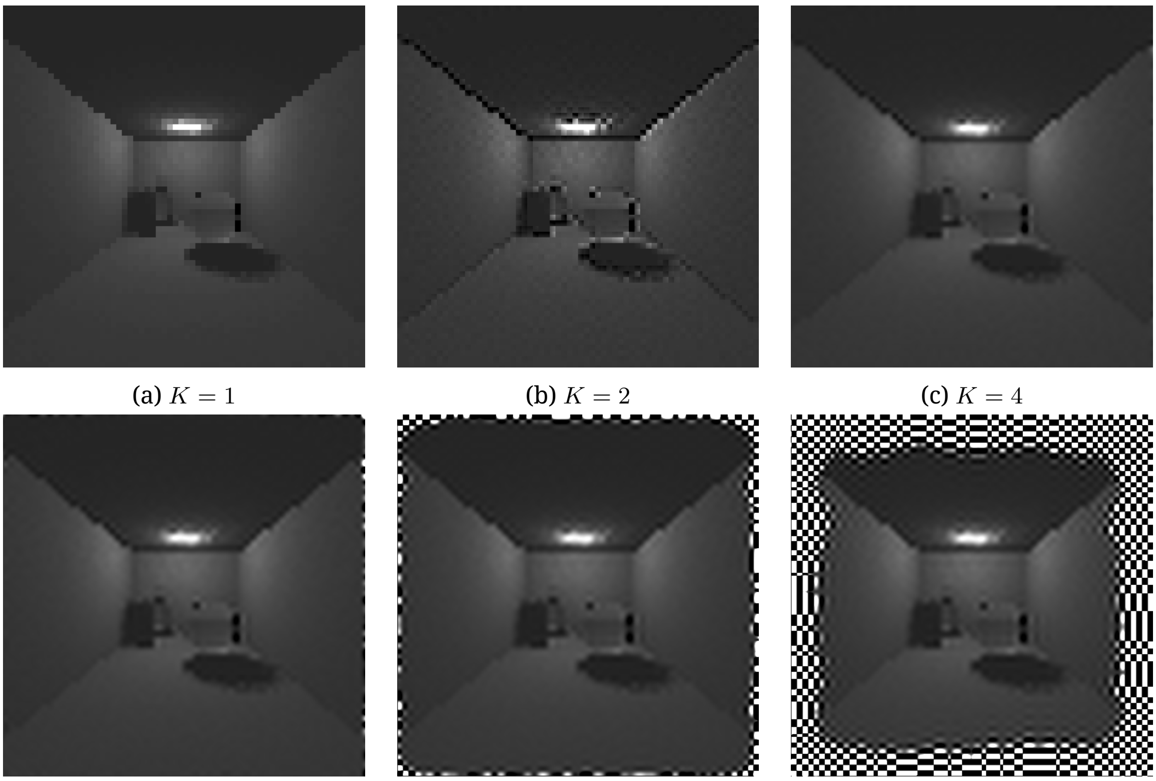
Figure 8: 使用區塊取樣法（Block）的結果



(a) $K = 1$ (b) $K = 2$ (c) $K = 4$

(d) $K = 8$ (e) $K = 16$ (f) $K = 32$

Figure 9: 使用重疊取樣法（Overlap）的結果



(a) $K = 1$ (b) $K = 2$ (c) $K = 4$

(d) $K = 8$ (e) $K = 16$ (f) $K = 32$

Figure 10: 使用滑動視窗法（Sliding）的結果