Computer Vision (CV) **Winter Term 2019 / 2020**

Prof. Dr.-Ing. A. Bruhn
Institute for Visualization and Interactive Systems
Computer Vision and Intelligent Systems Group
University of Stuttgart

Computer Vision – Self-Test Problems

This sheet contains 4 problems which are intended to be similar in style and difficulty to a 120-minute written exam on Computer Vision. Use these problems to test yourself.

Problem 1 - Features and Descriptors

(2 + 2 + 1 + 5 + 4 + 6 + 12 = 32 points)

(a) State central difference approximations for first and second order derivatives of a 1D-signal $f(x)$.

(b) State a mathematical definition of the gradient ∇f of a 2D-signal $f(x, y)$ and explain how it can be used to select edge candidates.

(c) Explain how second order derivatives can be used to select edge candidates.

(d) State a mathematical definition of the structure tensor J_ρ and explain how it can be used to classify flat regions, edges and corners.

(e) State the eigenvectors and eigenvalues of the structure tensor J_ρ for $\rho = 0$.

(f) Consider the following 4×4 images:

$$f_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad f_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad f_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Compute mean and variance of the three images.

(g) Furthermore, using the vector $d_1 = (1, 0)^\top$, compute the cooccurrence matrices and the contrast for all three images from part (f). The contrast is defined as

$$c = \sum_{i,j} (i - j)^2 \, p_{i,j},$$

where $p_{i,j}$ are the entries of the cooccurrence matrix.

Die deutsche Version finden Sie auf der nächsten Seite.

Aufgabe 1 - Features and Descriptors

(2 + 2 + 1 + 5 + 4 + 6 + 12 = 32 points)

(a) Geben Sie zentrale Differenzenausdrücke für die Approximation der Ableitungen erster und zweiter Ordnung eines 1D-Signals $f(x)$ an.

(b) Geben Sie eine mathematische Definition des Gradienten ∇f eines 2D-Signals $f(x, y)$ an und erklären Sie, wie dieser verwendet werden kann, um Kantenkandidaten auszuwählen.

(c) Erklären Sie, wie Ableitungen zweiter Ordnung verwendet werden können, um Kantenkandidaten auszuwählen.

(d) Geben Sie eine mathematische Definition des Strukturtensors J_ρ an und erklären Sie, wie dieser verwendet werden kann, um zwischen glatten Regionen, Kanten und Ecken zu unterscheiden.

(e) Geben Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte des Strukturtensors J_ρ für $\rho = 0$ an.

(f) Betrachten Sie die folgenden 4×4-Bilder:

$$f_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad f_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad f_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Berechnen Sie Mittelwert und Varianz dieser drei Bilder.

(g) Berechnen Sie außerdem, unter Verwendung des Vektors $d_1 = (1, 0)^\top$, die Kookurrenzmatrizen und den Kontrast für alle drei Bilder aus Teil (f). Der Kontrast is definiert als

$$c = \sum_{i,j} (i - j)^2 \, p_{i,j},$$

wobei $p_{i,j}$ die Einträge der Kookurrenzmatrix sind.

The English version can be found on the previous page.

Problem 2 - Motion and Stereo

(2 + 11 + 6 + 5 + 4 = 28 points)

(a) The basic assumption for motion estimation is the grey value constancy assumption. State the corresponding equation and its linearised version.

(b) An approach for motion estimation is the local method of Lucas and Kanade.

- Which additional assumption is made in order to overcome the aperture problem?
- State the resulting energy function.
- State the equations that a minimiser of this energy function necessarily has to fulfill.
- Explain the relation to the structure tensor from Problem 1d) and distinguish the three cases of solvability.

(c) The KLT-tracker is based on the method of Lucas and Kanade.

- Based on the structure tensor, explain which features are good to track and why.
- State which motion models are used for (i) tracking and (ii) monitoring and explain why.

(d) State the intrinsic and extrinsic camera parameters and explain what they describe.

(e) The full projection matrix P is given by

$$P = \mathcal{A}_{\text{int}} \cdot P_0 \cdot \mathcal{A}_{\text{ext}}.$$

State the dimensions of the matrices P, $\mathcal{A}_{\text{int}}$, P_0 and $\mathcal{A}_{\text{ext}}$. Which of these matrices are invertible?

Die deutsche Version finden Sie auf der nächsten Seite.

Aufgabe 2 - Motion and Stereo

(2 + 11 + 6 + 5 + 4 = 28 Punkte)

(a) Die grundlegende Annahme für die Bewegungsschätzung ist die Grauwertkonstanzannahme. Geben Sie die zugehörige Gleichung und deren linearisierte Version an.

(b) Eine Methode zur Berechnung des optischen Fluss ist die lokale Methode von Lucas und Kanade

- Welche zusätzliche Annahme wird getroffen, um das Aperturproblem zu überwinden?
- Geben Sie die resultierende Energiefunktion an.
- Geben Sie die Gleichungen an, die ein Minimierer dieser Energiefunktion notwendigerweise erfüllen muss.
- Erklären Sie die Beziehung zum Strukturtensor aus Aufgabe 1d) und unterscheiden Sie drei Fälle bezüglich der Lösbarkeit.

(c) Der KLT-Tracker basiert auf der Methode von Lucas und Kanade.

- Basierend auf dem Strukturtensor, erklären Sie welche Merkmale (Features) zum Tracken gut geeignet sind und warum.
- Erklären Sie welche Bewegungsmodelle benutzt werden für (i) Tracking und (ii) Monitoring und erklären Sie warum.

(d) Geben Sie die intrinsischen und die extrinsischen Kameraparameter an und erklären Sie, was diese beschreiben.

(e) Die volle Projektionsmatrix P ist gegeben durch

$$P = \mathcal{A}_{\text{int}} \cdot P_0 \cdot \mathcal{A}_{\text{ext}}.$$

Geben Sie die Dimensionen der Matrizen P, $\mathcal{A}_{\text{int}}$, P_0 und $\mathcal{A}_{\text{ext}}$. Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

The English version can be found on the previous page.

Problem 3 - Segmentation

(10 + 6 + 6 + 4 + 6 = 32 points)

(a) The diffusion tensor for anisotropic diffusion can be constructed by:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^\top + \lambda_2 v_2 v_2^\top,$$

where $v_1 \parallel \nabla u_\sigma$ and $v_2 \perp \nabla u_\sigma$ are normalised vectors. How have λ_1 and λ_2 to be chosen in order to obtain:

- Linear diffusion
- Isotropic nonlinear diffusion
- Edge enhancing diffusion

(b) As linear diffusion does not allow edge preservation, the partial differential equation (PDE) was modified as follows:

$$\partial_t u = \operatorname{div}(\nabla u) \qquad \rightarrow \qquad \partial_t u = \operatorname{div}\left(g\left(|\nabla u_\sigma|\right)\nabla u\right)$$

- What is the name of the resulting PDE?
- State a PDE for mean curvature motion in divergence form.
- How can we modify this equation in order to allow edge preservation?
- What is the name of the resulting PDE?

(c) The energy functional of the Chan-Vese model is given by:

$$E(v) = \int_\Omega (f - u_{in})^2 H(v)dx + \int_\Omega (f - u_{out})^2 (1 - H(v))dx + \lambda \int_\Omega |\nabla H(v)|\, dx$$

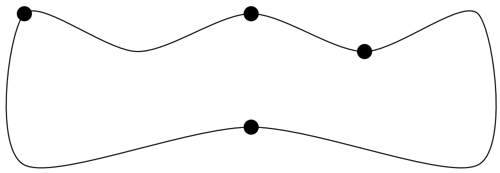
- Explain the role of the variables v, u_{in} and u_{out}.
- What is the name of the function $H(v)$?
- What is the role of the three terms?

(d) The gradient descent for the Chan-Vese model is given by:

$$\partial_t v = \left((f - u_{out})^2 - (f - u_{in})^2\right) |\nabla v| + \lambda \, |\nabla v| \, \mathrm{div} \left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|} \right)$$

The two terms on the right-hand side are related to concurring image evolution processes. Which ones? How are they discretised? (central differences or upwind schemes?)

(e) Assume mean curvature motion to be applied to the following image:



- For each of the black dots, draw the direction in which the curve evolves.
- If the above curve is enclosed by a circle of radius σ, after what evolution time does it vanish completely?

Die deutsche Version finden Sie auf der nächsten Seite.

Aufgabe 3 - Segmentation

(10 + 6 + 6 + 4 + 6 = 32 Punkte)

(a) Der Diffusionstensor für anisotrope Diffusion kann folgendermaßen konstruiert werden:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^\top + \lambda_2 v_2 v_2^\top,$$

wobei $v_1 \parallel \nabla u_\sigma$ and $v_2 \perp \nabla u_\sigma$ normalisierte Vektoren sind. Wie müssen λ_1 und λ_2 gewählt werden für:

- Lineare Diffusion
- Isotrope nichtlineare Diffusion
- Kantenverstärkende Diffusion

(b) Da lineare Diffusion keine Kantenerhaltung erlaubt, wurde die partielle Differenzialgleichung (PDE) folgendermaßen verändert:

$$\partial_t u = \operatorname{div}(\nabla u) \qquad \rightarrow \qquad \partial_t u = \operatorname{div}\left(g\left(|\nabla u_\sigma|\right)\nabla u\right)$$

- Wie heißt die resultierende PDE?
- Geben Sie eine PDE für Mean-Curvature-Motion in Divergenzform an.
- Wie kann diese Gleichung modifiziert werden, um Kantenerhaltung zu ermöglichen?
- Wie heißt die resultierende PDE?

(c) Das Energiefunktional des Chan-Vese-Modells ist gegeben durch:

$$E(v) = \int_\Omega (f - u_{in})^2 H(v)dx + \int_\Omega (f - u_{out})^2 (1 - H(v))dx + \lambda \int_\Omega |\nabla H(v)|\, dx$$

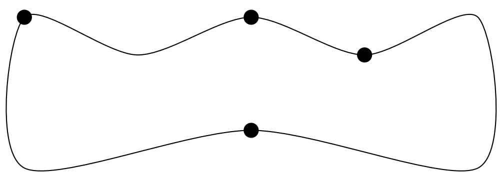
- Erklären Sie die Rolle der Variablen v, u_{in} und u_{out}.
- Wie heißt die Funktion $H(v)$?
- Welche Rolle spielen die drei Terme?

(d) Der Gradientenabstieg des Chan-Vese-Modells ist gegeben durch:

$$\partial_t v = \left((f - u_{out})^2 - (f - u_{in})^2\right) |\nabla v| + \lambda \, |\nabla v| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|} \right)$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite gehören zu konkurrierenden Bildevolutionsprozessen. Welchen? Wie können diese diskretisiert werden? (zentrale Differenzen oder Upwind-Schemata?)

(e) Nehmen Sie an, Mean-Curvature-Motion wird auf das folgende Bild angewendet:



- Geben Sie für jeden der schwarzen Punkte an, in welche Richtung sich die Kurve entwickelt.
- Wenn die obige Kurve von einem Kreis mit Radius σ umhüllt wird, nach welcher Evolutionszeit verschwindet die Kurve vollständig?

The English version can be found on the previous page.

Problem 4 - Pattern Recognition

(8 + 2 + 8 + 6 + 2 + 2 = 28 points)

(a) State the Bayes rule, the names of each variable and explain their meaning.

(b) How to classify a feature using the Bayes rule (when all data are given)?

(c) Assuming normally distributed likelihoods, i.e.:

$$P(w_i \mid \vec{x}) \propto \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\left|\Sigma_i\right|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_i)^\top \Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)} \cdot P(w_i)$$

show that, given equal priors and $\Sigma_i = \Sigma$ for all classes w_i, one possible quadratic discriminant function for the MAP-classifier is given by:

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}\left(x-\mu_i\right)^\top \Sigma^{-1}\left(x-\mu_i\right)$$

What is the name of that classifier? Is it possible to derive an equivalent classifier with linear discrimant function? If yes, state the corresponding linear discriminant function.

(d) Explain the idea of Maximum Likelihood Estimation and explain what makes Bayesian estimation different.

(e) What is the "curse of dimensionality"?

(f) Which simplifying assumption is made for the naïve Bayes classifier? State its name and a mathematical definition.

Die deutsche Version finden Sie auf der nächsten Seite.

Aufgabe 4 - Pattern Recognition

(8 + 2 + 8 + 6 + 2 + 2 = 28 Punkte)

(a) Geben Sie die Bayes-Regel an sowie die Namen aller Variablen und erklären Sie deren Bedeutung.

(b) Wie kann man ein Merkmal (Feature) mit der Bayes-Regel klassifizieren (wenn alle Daten gegeben sind)?

(c) Zeigen Sie, dass unter der Annahme normalverteilter klassenbedingter Wahrscheinlichkeiten (Likelihood), d.h.

$$P(w_i \mid \vec{x}) \propto \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \left|\Sigma_i\right|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_i)^\top \Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)} \cdot P(w_i)$$

bei identischen a-priori Wahrscheinlichkeiten und $\Sigma_i = \Sigma$ für alle Klassen w_i, eine mögliche quadratische Diskriminantenfunktion für den MAP-Klassifikator durch

$$g_i(x) = -\frac{1}{2} (x - \mu_i)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu_i)$$

gegeben ist. Wie heißt dieser Klassifikator? Ist es möglich, einen äquivalenten Klassifikator mit linearer Diskriminantenfunktion herzuleiten? Wenn ja, geben Sie die zugehörige Diskriminantenfunktion an.

(d) Erklären Sie die Idee hinter Maximum Likelihood Estimation und erklären Sie was Bayesian Estimation davon unterscheidet.

(e) Was ist der “Fluch der Dimensionen” (curse of dimensionality)?

(f) Welche vereinfachende Annahme wurde für den naïven Bayes-Klassifikator getroffen? Geben Sie deren Namen und eine mathematische Definition an.

The English version can be found on the previous page.