第二章 矩阵及其运算

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

2.4 方阵的行列式

- 2.4.1 方阵行列式的定义
- 2.4.2 方阵行列式的性质
- 2.4.3 行列式按行按列展开
- 2.4.4 伴随矩阵与克拉默法则
- 2.4.5 练习

2.4.1 方阵行列式的定义

（1）全排列

用 1,2,3 三个数可以排成6个不重复的三位数。

“ 123; 132; 213; 231; 312; 321 ”

概念：

1. 全排列

（**2**）逆序数及其计算

标准顺序：$123\cdots n$

排列：$P_1P_2\cdots P_n$

令 l_i为大于P_i且排在P_i前面元素的个数。

$$l=\sum_{i=1}^{n} l_i$$

概念：

1. 标准次序
2. 逆序
3. 逆序数
4. 奇排列
5. 偶排列

方法论：

1. 逆序数的计算

例子：

- 排列：32514，逆序数为5，奇排列
- 排列：31524，逆序数为4，偶排列

定理：一个排列中任意两个元素对换，排列的奇偶性发生改变。

概念：

1. 对换

（3）行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau'}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A|=det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

概念：

1. 行列式
2. 方阵的行列式
3. 几种特殊的行列式

2.4.2 方阵行列式的性质

（1）转置行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（2）行列式的性质

性质： 行列式与转置行列式相等。

性质： 互换行列式的两行或两列行列式变号。

推论： 如果行列式有两行或两列完全相同，那么此行列式为零。

性质：行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数，等于用数乘以此行列式。

推论：行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式的外面。

性质：行列式中，如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

性质：行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则D等于下列两行列式之和，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质：把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数，然后加到另一行（列）对应的元素上，行列式不变。

性质：A是方阵$|\lambda A| = \lambda^n |A|$。

推论：

$$\begin{vmatrix} A_{k\times k} & 0 \\ * & B_{n\times n} \end{vmatrix} = |A_{k\times k}| \times |B_{n\times n}|$$

$$\begin{vmatrix} A_{k\times k} & * \\ 0 & B_{n\times n} \end{vmatrix} = |A_{k\times k}| \times |B_{n\times n}|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{k\times k} \\ B_{n\times n} & * \end{vmatrix} = (-1)^{k\times n}|A_{k\times k}| \times |B_{n\times n}|$$

$$\begin{vmatrix} * & A_{k\times k} \\ B_{n\times n} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k\times n}|A_{k\times k}| \times |B_{n\times n}|$$

性质：$|AB| = |A||B|$，A, B为n阶方阵。

性质：$|A^k| = |A|^k$

性质：$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$，$|A|$不等于0。

例题：

1）计算：$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2）已知1632，2160，3696，5024都可被16整除，

不经计算，证明$D=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$可被16整除。

3）证明：

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

4）设A,B均为n阶方阵，且$A^TA=E,B^TB=E,$ $\frac{|A|}{|B|}=-1$，则$|A+B|=0$。

概念：

1. 转置的行列式
2. 行列式的性质

2.4.3 行列式按行按列展开

（1）余子式与代数余子式

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在第i行和第j列划去后，留下的$n-1$阶行列式叫作元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}。a_{ij}的代数余子式记作$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

（2）行列式按行（列）展开定理

引理： 设D为n阶行列式，如果D的第i行所有元素除a_{ij}外，其余元素均为零，那么行列式D等于a_{ij}与其代数余子式的乘积，即$D = a_{ij}A_{ij}$。

定理（拉普拉斯展开）： 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$。

> 拉普拉斯（Laplace），法国著名天文学家，数学家。

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即：

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j$$

综上所述：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

> 范德蒙（Vandermonde），法国数学家。

例题：

1）设D为四阶行列式，第 2 行元素 $1, 3, a, 4$ 而第 4 行元素余子式为 $2, 0, -1, 1$，求a。

2）求$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中 $A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}$是$D$的第4行元素的代数余子式。

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

概念：

1. 余子式
2. 代数余子式
3. 范德蒙行列式

方法论：

1. 行列式按行（列）展开

2.4.4 伴随矩阵与克拉默法则

（1）伴随矩阵

定理：方阵A可逆$\Leftrightarrow|A|$不等于0，$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，其中

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A^*为A的伴随矩阵，A^*中的元素是A的所有元素的代数余子式。

例题：若$|A|$不等于0，求证

1）$|A^*| = |A|^{n-1}$

2）$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

3）$(A^*)^T = (A^T)^*$

4）$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

5）$(kA)^* = k^{n-1}A^*$，$k \neq 0$

例题：

1）设n阶矩阵A的伴随矩阵为A^*，证明若$|A| = 0$，则$|A^*| = 0$。

2）设A为3阶方阵，且$|A| = 2$，计算$|3A^{-1} - 2A^*|$和$|3A - (A^*)^*|$。

3）设A为n阶方阵，则____。

A. $(-A)^* = (-1)^{n+1}A^*$
B. $(-A)^* = -A^*$
C. $(-A)^* = (-1)^n A^*$
D. $(-A)^* = A^*$

（2）克拉默法则

非齐次线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \quad (a)$$

系数矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

定理：若(a)的系数行列式$|A| \neq 0$，则线性方程组有唯一解。$x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, 2, \cdots, n$

$$D = |A|$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理：如果线性方程组(a)无解或有多个解，则它的系数行列式$D = 0$。

齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (b)$$

系数行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理：若(b)的系数行列式$D \neq 0$，则(b)没有非零解（只有零解）。

定理：若(b)有非零解，则它的系数行列式必为零。

例题：

1）问λ在什么条件下$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$有非零解。

2）设方程组

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2 \\ bcx + cay + abz = 3abc \end{cases}$$

问a, b, c满足什么条件时，方程组有唯一解，并求出该解。

概念：

1. 伴随矩阵
2. 伴随矩阵的性质

方法论：

1. 利用克拉默法则求解线性方程组

2.4.5 练习

（1）证明：奇数阶反对称矩阵的行列式等于零。

（2）设α, β, γ为互不相等的实数，证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = 0$$

的充分必要条件是$\alpha + \beta + \gamma = 0$

（3）计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

（4）设3阶方阵$A=(a,c_1,c_2),B=(b,c_1,c_2)$且$|A|=3,|B|=5$，计算$|A+B|$。

（5）设$\alpha^T=(1,2,3),\beta^T=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，令$A=\alpha\times\beta^T$，求$A^n$及$|A^n|$。