第三章 向量空间

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

3.3 向量空间的基与维数，坐标，过渡矩阵

- 3.3.1 向量空间的基与维数
- 3.3.2 向量的坐标
- 3.3.3 线性空间的同构
- 3.3.4 基变换与坐标变换

3.3.1 向量空间的基与维数

定义：

设V为向量空间，如果r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in V$且满足：

（1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关
（2）V中任一向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示

那么向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$就称为向量空间的基，$r$称为向量空间的维数$dim(V) = r$，并称$V$为$r$维向量空间。

注意：

（1）只含有零向量的向量空间没有基，维数为0。

（2）若把向量空间V看作向量组，则V的基就是向量组的极大无关组，V的维数就是向量组的秩。

（3）向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$所生成的空间

$$V = Span\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$$

由于，V与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$等价，所以，向量组的极大无关组就是$V$的一组基，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩就是$V$的维数。

例子：

（1）

R^2的基：$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，2维

R^3的基：$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，3维

R^n的基：

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}，n维$$

（2）向量空间

$$V=\{x=(0,x_2,x_3\cdots,x_n)^T|x_2,x_3,\cdots,x_n\in R\}$$

的基，$n-1$维。

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

（3）$R^{2\times 2}$的基，4维。

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（4）$R^{3\times 3}$对称矩阵的基（6维）

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},E_4=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E_5=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},E_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

概念：

- 向量空间的基
- 向量空间的维数

3.3.2 向量的坐标

定义：

设$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是线性空间$V$的一组基，$\forall\alpha\in V$，总有且仅有一组有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\alpha$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$这组有序数，就称为α在B这组基下的坐标，记作$[\alpha]_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$。

例子：

在线性空间$P[x]_4$中

$$B: p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3, p_5 = x^4$$

是它的一组基，任一不超过4次的多项式

$$P = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

都可以表示为：

$$P = a_0p_1 + a_1p_2 + a_2p_3 + a_3p_4 + a_4p_5$$

$$[P]_B = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$$

若另外一组基

$$D: q_1 = 1, q_2 = 1 + x, q_3 = 2x^2, q_4 = x^3, q_5 = x^4$$

$$P = (a_0 - a_1)q_1 + a_1 q_2 + \frac{1}{2}a_2 q_3 + a_3 q_4 + a_4 q_5$$

$$[P]_D = (a_0 - a_1, a_1, \frac{1}{2}a_2, a_3, a_4)^T$$

概念：

- 向量的坐标

3.3.3 线性空间的同构

同构的定义：

设V与U是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，那么就说线性空间V与U同构。

$\forall\alpha,\beta\in V,\exists x,y\in U$。

$\alpha\leftrightarrow x$； $\beta\leftrightarrow y$

$\alpha+\beta\leftrightarrow x+y$； $\lambda\alpha\leftrightarrow\lambda x$

对应关系T，称为同构映射（双射）。

（1）元素一一对应：
$T(\alpha)=x;T(\beta)=y$

（2）保持线性组合的对应：
$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta);T(\lambda\alpha)=\lambda T(\alpha)$

例子：

令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V_n$的一组基，则$V_n$与$R^n$同构。

$\forall\alpha\in V_n$则$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$
同构映射：$T(\alpha)=(x_1,\cdots,x_n)^T$

同构的性质（两个线性空间V与U的关系）：

性质1：$T(0)=0$；$T(-\alpha)=-T(\alpha)$

性质2：保持线性组合

$$T(k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_nT(\alpha_n)$$

性质3：保持线性相关性

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，则
$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性相关。

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，则
$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性无关。

性质4：同构映射的逆映射，仍然是同构映射。

同构的相关定理：

定理：同构是一种等价关系。

- 反身性，V与V同构，$T(\alpha) = \alpha$
- 对称性，V与U同构，则U与V同构
- 传递性，V与U同构，U与W同构，则V与W同构

定理：有限维的线性空间V与U同构的充要条件$dim(V) = dim(U)$，即两个空间维数相同。

例子：

利用坐标向量证明，在$P[t]_2$中多项式

$$1+2t^2, 4+t+5t^2, 3+2t$$

是线性相关的。

3.3.4 基变换与坐标变换

定义：

设n维向量空间V的两组基为：

$$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$$

由于A和B等价，所以

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}K_{n\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

上式称为基变换，矩阵K称为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵，其中$K_{n\times n}$为可逆矩阵。

设向量v在两组基下的坐标分别为

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$和$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} K_{n\times n} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

由于 $R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} = n$，所以：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = K_{n\times n} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

坐标变换公式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = K_{n\times n}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

例子：

在$P[x]_3$中取两组基：

$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x$

$\alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1$

$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1$

$\alpha_4 = x^3 - x^2 + 1$

及

$$\beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1$$
$$\beta_2 = x^2 + 2x + 2$$
$$\beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2$$
$$\beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

，求坐标变换公式。

概念：

1. 基变换
2. 过渡矩阵
3. 坐标变换公式