第一章 线性方程组

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

1.3 矩阵的秩及方程组解的判别

- 1.3.1 矩阵的秩
- 1.3.2 线性方程组解的存在性
- 1.3.3 线性方程组的解法
- 1.3.4 练习

1.3.1 矩阵的秩

概念：

1. 矩阵秩的定义

2. 矩阵秩的性质

- $A = 0$，则$R(A) = 0$
- $A \sim B$，则$R(A) = R(B)$
- $R(A_{m\times n}) \le min(m, n)$

1.3.2 线性方程组解的存在性

定理：n元齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$有非零解的充要条件。

定理：n元非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$有解的充要条件。

1.3.3 线性方程组的解法

方法论：

1. 线性方程组的解法 $Ax=0$ $Ax=b$

Step01：系数矩阵A（增广矩阵(A,b)）化行阶梯形。

Step02：判断方程组是否有非零解$R(A)<n$（是否有解$R(A)==R(A,b)$）。

n

Step03：Yes，化行最简形。

Step04：非零行首元为1的未知量留在等号左边，其余未知量$n-r$（自由未知量）移到等号右边。

Step05：写出方程组的通解，通常写成向量的形式。

1.3.4 练习

（1）设矩阵$B=\begin{bmatrix}1&1&-6&-10\\2&5&a&1\\1&2&-1&-a\end{bmatrix}$的秩为2，则a为__________。

（2）求下列方程组的通解。

$$\begin{cases}x_1+x_3-x_4-3x_5=0\\x_1+2x_2-x_3-x_5=0\\4x_1+6x_2-2x_3-4x_4+3x_5=0\\2x_1-2x_2+4x_3-7x_4+4x_5=0\end{cases}$$

（3）当a,b为何值时，非齐次线性方程组有解，并求出通解。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$