第二章 矩阵及其运算

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

2.1 矩阵的基本运算

- 2.1.1 矩阵的加法
- 2.1.2 矩阵的数乘
- 2.1.3 矩阵的乘法
- 2.1.4 方阵的乘幂
- 2.1.5 方阵的迹
- 2.1.6 矩阵的转置

2.1.1 矩阵的加法

$$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$$

$$C=A+B=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

概念：

1. 矩阵加法的定义
2. 矩阵减法的定义
3. 矩阵加法的运算律

2.1.2 矩阵的数乘

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

概念:

1. 矩阵数乘的定义
2. 矩阵数乘的运算律
3. 矩阵的线性运算

2.1.3 矩阵的乘法

$$A = (a_{ij})_{m \times s}, B = (b_{ij})_{s \times n}$$

$$C = A \times B = (c_{ij})_{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \times b_{kj}, i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$$

（1）计算$A \times B$和$B \times A$。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

概念：

1. 矩阵乘法的定义
2. 矩阵乘法的运算律
3. 特殊的矩阵乘法

2.1.4 方阵的乘幂

$$A_{n\times n}^{k} = A \times A \cdots \times A$$

（1）计算A^3，其中$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

（2）计算A^2，其中$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

概念：

1. 方阵乘幂的定义
2. 方阵乘幂的性质
3. 幂零矩阵的定义
4. 幂等矩阵的定义

2.1.5 方阵的迹

$$A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

证明：$tr(AB) = tr(BA)$。

证明：$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$。

概念：

1. 方阵迹的定义
2. 方阵迹的相关定理与推论

2.1.6 矩阵的转置

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

概念：

1. 矩阵转置的定义
2. 对称矩阵与反对称矩阵
3. 矩阵转置的性质

证明：

1. $(A \times B)^T = B^T \times A^T$。
2. 对任何矩阵$A_{m\times n}$，A^TA与AA^T均为对称矩阵。
3. 任意n阶方阵都可分解为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和。
4. 设A, B都是对称矩阵，证明AB为对称矩阵的充要条件是$AB = BA$。