第三章 向量空间

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

3.4 矩阵的零空间，列空间，线性方程组解的结构

- 3.4.1 齐次线性方程组解的结构
- 3.4.2 非齐次线性方程组解的结构
- 3.4.3 秩定理
- 3.3.4 练习

3.4.1 齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组(1)：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

线性方程组的矩阵表示形式(2)：

$$Ax = 0$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

性质：若$x=\xi_1, x=\xi_2$为(2)的解，则$\xi_1+\xi_2$也是(2)的解。

性质：若$x=\xi$为(2)的解，则$k\xi, (k \in R)$也是(2)的解。

若S表示方程组(1)的全体解的集合，则以上性质为：

- 若$\xi_1, \xi_2 \in S$，则$\xi_1+\xi_2 \in S$。
- 若$\xi_1 \in S$，则$k\xi_1 \in S, k \in R$。

即S是一个向量空间，称为齐次线性方程组(1)的解空间。也称为系数矩阵$A_{m\times n}$的零空间，记作$NulA$。

$$NulA = \{x|x \in R^n andAx = 0\}$$

概念:

1. $Ax = 0$的解空间
2. 系数矩阵A的零空间$NulA$

方法论:

1. 求$NulA$的基和维数

定理：n元齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$的全体解所构成的集合S是一个向量空间，当$R(A)=r$时，解空间的维数为$n-r$。

注意：

（1）解空间S的基是不唯一的。

（2）解空间S的基又称为方程组(1)的基础解系。

（3）当$R(A)=n$时，方程组(1)只有零解，因而没有基础解系，此时解空间只有一个零向量，为0维的向量空间。

（4）当$R(A) < n$时，方程组(1)含有$n-r$个向量的基础解系$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r})$，则(1)的解可表示为：

$$x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$k_1, \cdots, k_{n-r} \in R$，上式称为方程组(1)的通解。

（5）方程组(1)的解空间为：

$$S = \{x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} | k_1, \cdots, k_{n-r} \in R\}$$

概念：

1. $Ax = 0$的基础解系
2. $Ax = 0$的通解
3. $Ax = 0$解空间的表示

3.4.2 非齐次线性方程组解的结构

非次线性方程组(1)：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

非次线性方程组矩阵表示(2)：

$$Ax = b$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

$A_{m\times n}$列向量的线性组合构成的集合，称为A的列空间，记作$ColA$，为R^m的子空间。

$$ColA = Span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$$

定理：向量$b \in ColA \Leftrightarrow Ax = b$有解。

性质：设$x = \eta_1, x = \eta_2$都是(2)的解，则
$x = \eta_1 - \eta_2$为对应的齐次线性方程组$Ax = 0$的解。

性质：设$x = \eta$是$Ax = b$的解，$x = \xi$是$Ax = 0$的解，则$x = \xi + \eta$是$Ax = b$的解。

若方程$Ax = 0$的通解为：

$$x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}; k_1, \cdots, k_{n-r} \in R$$

若η^*为$Ax = b$的一个特解，则$Ax = b$的任一解：

$$x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

上式称为$Ax = b$的通解。

概念：

- 矩阵A的列空间$Col A$
- $Ax = b$的通解

3.4.3 秩定理

定理：矩阵$A_{m\times n}$，$dim(ColA)+dim(NulA)=n$。

定理：若$A_{m\times n}B_{n\times l}=0$，则$R(A)+R(B)\le n$。

3.3.4 练习

（1）已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=2 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$的

两个解$\eta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$则系数矩阵的秩为

_____，该方程组的全部解为_____。

（2）设四元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为3，已知η_1,η_2,η_3是它的三个解向量，且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\\0\\2\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$，求它的通解。

（3）设$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1 & 3\\ 9 & -5 & 2 & 8\end{bmatrix}$求一个$4\times 2$矩阵$B$使得$AB=0$且$R(B)=2$。

（4）求齐次线性方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的一个基础解系和齐次线性方程组$x_1=x_2=\cdots=x_n$的一个基础解系。

（5）设矩阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，向量$b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$求方程$Ax=b$的通解。

（6）设η^*是非齐次线性方程组$Ax = b$的一个解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是对应齐次线性方程组的一个基础解系。

证明：

- $\eta^*, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$线性无关。
- $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \eta^* + \xi_2, \cdots, \eta^* + \xi_{n-r}$线性无关。