第一章 线性方程组

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

1.2 方程组与矩阵

- 1.2.1 线性方程组的矩阵表示
- 1.2.2 矩阵初等变换的应用
- 1.2.3 练习

1.2.1 线性方程组的矩阵表示

非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$Ax = b$，是否有解问题，若有解是唯一解还是无穷多解。

齐次线性方程组：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
$$

$Ax = 0$，是否有非零解问题。

概念：

1. 线性方程组的分类（非齐次，齐次）
2. 线性方程组的相容性

1.2.2 矩阵初等变换的应用

（1）讨论方程组的相容性。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

（2）讨论方程组的相容性。

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

（3）当h和k取何值时，下列方程相容。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ -6x_1 + 3x_2 = k \end{cases}$$

概念：

1. 行阶梯形
2. 行最简形
3. 线性方程组的通解
4. 标准形
5. 矩阵的秩

1.2.3 练习

（1）下列矩阵哪些是行最简形，哪些不是行最简形，并将不是行最简形的矩阵采用初等行变换将其化为行最简形。

$$(1)\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&5\end{bmatrix},(2)\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},(4)\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&2&2&2\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

（2）指出矩阵$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&0&0\\1&1&2&3\end{bmatrix}$的先导列和主元列。

（3）主元位置上的元素就是主元。（×）

注意：

- 先导列，行首非零元所在列；主元列，对应行阶梯形的先导列。
- 先导列可以相同，主元列一定不同；先导列一看便知，主元列需要计算才能确定。

概念

1. 先导元
2. 先导列
3. 主元位置
4. 主元列
5. 主元