第三章 向量空间

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

3.2 线性相关与线性无关

- 3.2.1 定义
- 3.2.2 线性相关性基本定理
- 3.2.3 线性相关性的判定
- 3.2.4 向量组的秩

3.2.1 定义

给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$成立，则称向量组$A$线性相关，否则线性无关。

- 线性相关$Ax=0$有非零解
- 线性无关$Ax=0$只有零解

注意：

（1）一个向量线性相关$\leftrightarrow$零向量。

（2）两个向量线性相关$\leftrightarrow$它们对应分量成比例。

（3）三个向量线性相关的几何意义：它们共面。

概念：

1. 线性相关

2. 线性无关

3.2.2 线性相关性基本定理

定理：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$向量组中至少有一个向量可由其余的$m-1$个向量线性表示。

定理：设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示且表示式唯一。

例子：

（1）设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是一组$n$维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是任何一$n$维向量都可由它们线性表示。

（2）已知3阶矩阵A与3维列向量x满足$A^3x = 3Ax - A^2x$且向量组x, Ax, A^2x线性无关。

- 记$P = (x, Ax, A^2x)$求3阶矩阵B，使得$AP = PB$。
- 求$|A|$。

3.2.3 线性相关性的判定

定理：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关,

- $\Leftrightarrow Ax = 0$有非零解。
- $\Leftrightarrow R(A) < m$
- $\Leftrightarrow A_{m\times m}, |A| = 0$

定理：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关,

- $\Leftrightarrow Ax = 0$只有零解。
- $\Leftrightarrow R(A) = m$
- $\Leftrightarrow A_{m\times m}, |A| \neq 0$

例子：$e_1, e_2, \cdots, e_n$线性无关

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

定理：（维数不变，增加向量个数）

向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$
向量组$B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$

- 若向量组A线性相关，则向量组B线性相关。
- 若向量组B线性无关，则向量组A线性无关。

注意：

- 一个向量组若有线性相关的部分组，则该向量组必线性相关。
- 一个向量组若线性无关，则它的任何部分组都线性无关。
- 含有零向量的向量组一定线性相关。

定理：（向量个数不变，加向量的维数）

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{rj} \end{bmatrix}, \beta_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1j} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, m$$

向量组$A : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

向量组$B : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$

- 若向量组A线性无关，则向量组B线性无关。
- 若向量组B线性相关，则向量组A线性相关。

推论：

$$\alpha_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{rj}\end{bmatrix},\beta_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\\cdots\\a_{rj}\\a_{r+1j}\\\cdots\\a_{nj}\end{bmatrix},j=1,2,\cdots,m$$

向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$
向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$

- 若向量组A线性无关，则向量组B线性无关。
- 若向量组B线性相关，则向量组A线性相关。

定理：m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量的个数m时，一定线性相关。

例子：

$$（1）设有向量组\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^n \end{bmatrix}, i = 1, 2, \cdots, m \leq n$$

试证：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，其中$a_1, a_2, \cdots, a_m$为$m$个互不相等且不等于零的常数。

（2）设$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}$。

当$\lambda =$_____时，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关。

当$\lambda =$_____时，向量α_3可由α_1, α_2唯一线性表示。

3.2.4 向量组的秩

向量组秩的定义：

设有向量组A，如果A中存在r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$满足：

- 向量组$A_0 : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关。
- 向量组A中任意$r+1$个向量（如果A中有$r+1$个向量的话）都线性相关。

那么，向量组A_0是向量组A的一个极大无关组；
极大无关组所包含向量的个数r称为向量组A的秩。
记作$R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = R(A) = r$。

注意：

（1）只含有零向量的向量组不存在极大无关组；任何含有非零向量的向量组至少有一个极大无关组。

（2）一个向量组的极大无关组通常不唯一。

（3）线性无关的向量组的极大无关组为其本身。

（4）零向量组的秩为0。

概念：

1. 向量组的极大无关组的概念
2. 向量组秩的概念

矩阵秩的定义：

在$A_{m\times n}$中，任取k行与k列$k\le min\{m,n\}$，位于这些行和列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中的位置次序，而得到的k阶行列式，称为A的k阶子式。

注意：$A_{m\times n}$的k阶子式共有$C_m^k C_n^k$个。

设在矩阵A中有一个不等于0的r阶子式$D_r \neq 0$且所有$r+1$阶子式（如果存在的话）全等于零，那么D_r为A的最高阶非零子式。数r称为A的秩，记作$R(A)=r$。

注意：

（1）最高阶非零子式的阶数称为该矩阵的秩。
（2）行阶梯型矩阵非零行的行数称为该矩阵的秩。

概念：

1. k阶子式的概念
2. 最高阶非零子式的概念
3. 矩阵秩的概念

向量组秩的定理：

定理：矩阵的秩等于它列向量组的秩，也等于它行向量组的秩。（A的极大无关组的求法）

定理：向量组与其极大无关组等价。（A的极大无关组与A的关系）

定理：设向量组B能由向量组A线性表示，则向量组B的秩不大于向量组A的秩。（B可由A线性表示，$R(A)$与$R(B)$的关系）

推论：等价的向量组秩相等。（A,B等价，$R(A)$与$R(B)$的关系）

注意：

（1）两个同维数的向量组秩相等，但不一定等价。

$$A:\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};B:\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

（2）两个同型矩阵秩相等，则两个矩阵等价。

推论：设向量组B是向量组A的部分组，若向量组B线性无关，且向量组A能由向量组B线性表示，则向量组B是向量组A的一个极大无关组。

方法论：

- 如何求向量组的极大无关组

矩阵秩的总结：

（1）$0 \leq R(A_{m \times n}) \leq min\{m, n\}$

（2）$A \sim B \Rightarrow R(A) = R(B)$

（3）P, Q可逆$\Rightarrow R(PAQ) = R(A)$

（4）$R(A) = R(A^T)$

（5）

$max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$

（6）$R(A + B) \leq R(A) + R(B)$

（7）$R(AB) \leq min\{R(A), R(B)\}$

（8）若$A_{m\times n}B_{n\times l} = 0$，则$R(A) + R(B) \leq n$。

例子：

（1）设$b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3,$
$b_3 = a_3 + a_4, b_4 = a_4 + a_1$,证明：向量组
b_1, b_2, b_3, b_4线性相关。

（2）设$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \cdots,$
$b_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$且向量组$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性无关，证明向量组$b_1, b_2, \cdots, b_r$线性无关。