第二章 矩阵及其运算

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

2.3 逆矩阵

- 2.3.1 逆矩阵的概念
- 2.3.2 逆矩阵的唯一性与存在性
- 2.3.3 逆矩阵的性质
- 2.3.4 逆矩阵的求解
- 2.3.5 练习

2.3.1 逆矩阵的概念

$$A_{n\times n}\times B_{n\times n}=B_{n\times n}\times A_{n\times n}=E$$

$$A^{-1}=B$$

概念：

1. 奇异矩阵
2. 非奇异矩阵（可逆矩阵）

2.3.2 逆矩阵的唯一性与存在性

定理：逆矩阵是唯一的。

线性方程组中A为可逆矩阵，满足以下定理：

- 定理：若A可逆，则$Ax = b$只有唯一解$x = A^{-1}b$。
- 定理：若A可逆，则$Ax = 0$只有零解。

矩阵方程中A为可逆矩阵，满足以下定理：

- 定理：若A可逆，则$AX = B$只有唯一解$X = A^{-1}B$。
- 定理：若A可逆，则$AX = 0$只有零解。

方阵A可逆的一组充要条件：

- 定理：$Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow R(A)=n$。
- 定理：A为方阵且$A\sim E\Leftrightarrow R(A)=n$。
- 定理：A可逆$\Leftrightarrow R(A)=n$。

推论：若$AB=E$，则A,B均可逆，且$A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$。

例题：

1）设$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求$A$的标准型。

2.3.3 逆矩阵的性质

性质：若A可逆，则A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$。

性质：若A可逆，$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$。

性质：若A可逆，则A^T可逆，$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$。

性质：若A, B为同阶的可逆矩阵，则AB也可逆且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

性质：若 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 不等于0，则

$$A^{-1} = diag(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n})$$

$$A^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k), k \in N$$

注意：

1. $A^0 = E$
2. $A^{-k} = (A^{-1})^k$

例题：

1）设方阵A满足$A^3 - A^2 + 2A - E = 0$，证明A及$E - A$均可逆，并求A^{-1}和$(E - A)^{-1}$。

2）设A, B均为n阶方阵，若$E - AB$可逆，则$E - BA$也可逆，求$(E - BA)^{-1}$。

3）设A为n阶方阵且$ABC = E$，则____。

A. $ACB = E$
B. $CBA = E$
C. $BAC = E$
D. $BCA = E$

概念：

1. 逆矩阵的唯一性
2. 逆矩阵的存在性
3. 逆矩阵的性质

2.3.4 逆矩阵的求解

（1）初等方阵的定义

初等方阵

- 对换变换：$E[i,j]$
- 倍乘变换：$E[i(k)], k$不等于0
- 倍加变换：$E[i,j(k)]$

注：初等方阵是可逆的

- $E^{-1}[i,j]=E[i,j]$
- $E^{-1}[i(k)]=E[i(\frac{1}{k})]$，$k\neq 0$
- $E^{-1}[i,j(k)]=E[i,j(-k)]$

例题：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

计算：

- $A \times E[1,3], A \times E[2(k)], A \times E[1,3(k)]$
- $E[1,3] \times A, E[2(k)] \times A, E[1,3(k)] \times A$

（2）初等方阵的相关定理

定理：$A_{m\times n}$，A左乘初等方阵，相当于实施一次初等行变换；右乘初等方阵，相当于实施一次初等列变换。

定理：A可逆，A可看作有限个初等方阵的乘积。
$A = P_1 \times P_2 \times \cdots P_n$。

定理：$A_{m\times n} \sim B_{m\times n} \Leftrightarrow PAQ = B$，
$P_{m\times m}, Q_{n\times n}$可逆矩阵。

推论：$A_{m\times n}$，$A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$，$P_{m\times m}, Q_{n\times n}$可逆矩阵。

推论：若P, Q可逆，则$R(PAQ)=R(A)$。

推论：$R(A)=R(A^T)$。

（3）初等方阵的应用

利用初等方阵求方阵的逆矩阵

初等行变换：

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

初等列变换：

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

利用初等方阵求解矩阵方程。

$AX=B$，若A可逆，则$X=A^{-1}B$。

初等行变换：

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \end{bmatrix}$$

$XA=B$，若A可逆，则$X=BA^{-1}$。

初等列变换：

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$$

$XA=B$，若A可逆，则$A^TX^T=B^T$即
$X=[(BA^{-1})^T]^T$。

初等行变换：

$$\begin{bmatrix} A^T & B^T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} E & (BA^{-1})^T \end{bmatrix}$$

概念：

1. 初等方阵
2. 初等方阵的性质

方法论：

1. 利用初等方阵求逆矩阵
2. 利用初等方阵求矩阵方程的解

2.3.5 练习

（1）设$AX = B$，求X，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

（2）设

$$P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

且$P^mAP^n=A$，则$m=$___，$n=$___。

A. $m=5,n=4$

B. $m=5,n=5$

C. $m=4,n=5$

D. $m=4,n=4$

（3）

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，A可逆，则$B^{-1}=$___。

A. $A^{-1}P_1P_2$

B. $P_1A^{-1}P_2$

C. $P_1P_2A^{-1}$

D. $P_2A^{-1}P_1$

（4）设$A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$均为n阶可逆矩阵，则$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$______。

A. $A^{-1}+B^{-1}$

B. $A+B$

C. $A(A+B)^{-1}B$

D. $(A+B)^{-1}$

（5）设A, B均可逆，求下列分块矩阵的逆矩阵。

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}$$

（6）已知$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，
$A = P\Lambda P^{-1}$求$P(A) = A^3 + 5A^2 + E$。