第三章 向量空间

马燕鹏，华北电力大学

Github： https://github.com/datawhalechina

CSDN： https://lsgogroup.blog.csdn.net

3.5 向量的内积和正交阵

- 3.5.1 向量内积的定义
- 3.5.2 向量的范数与夹角
- 3.5.3 向量组的正交性
- 3.5.4 规范正交基
- 3.5.5 正交矩阵与正交变换

3.5.1 向量内积的定义

定义：给定向量空间V，如果$\forall \alpha, \beta \in V$都有一个实数记为$\langle \alpha, \beta \rangle$与其对应，且满足以下条件，则称实数$\langle \alpha, \beta \rangle$为向量$\alpha, \beta$的内积。

（1）对称性：$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$
（2）齐次性：$\langle \lambda\alpha, \beta \rangle = \lambda\langle \alpha, \beta \rangle$
（3）线性性：$\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$
（4）正定性：$\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$当且仅当$\alpha = 0$时，有$\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$

定义了内积的向量空间称为内积空间。

例子：

$$\forall x, y \in R^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^T y$$

例子：

（1）证明：$R(A^TA)=R(A)$。

（2）证明：$R(AA^T)=R(A^TA)$。

概念：

1. 向量内积

2. 内积空间

3.5.2 向量的范数与夹角

向量范数的定义：

令 $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$

$$\left\| x \right\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

称$\left\| x \right\|$为n维向量x的范数（长度）。

令 $y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$

$$\left\| x-y \right\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

$x-y$的范数$\left\| x-y \right\|$称为x与y的距离。

注意：

（1）$\langle x, x \rangle = \left\| x \right\|^2$

概念：

1. 向量的范数
2. 两个向量的距离

向量范数的性质：

（1）正定性：$\left\| x \right\| \geq 0$当且仅当$x = 0$时$\left\| x \right\| = 0$

（2）齐次性：$\left\| \lambda x \right\| = \left| \lambda \right| \left\| x \right\|$

（3）三角不等式：$\left\| x + y \right\| \leq \left\| x \right\| + \left\| y \right\|$

注意：以上3点为范数应满足的公理。

单位向量的定义：

若$\left\|x\right\| = 1$，则称x为单位向量。

注意：

（1）若$\forall\alpha \neq 0$，则$e = \frac{\alpha}{\left\|\alpha\right\|}$为单位向量。

概念：

1. 向量范数的性质
2. 单位向量

许瓦兹不等式：

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

当$\left\|x\right\| \neq 0, \left\|y\right\| \neq 0$时

$$\left|\frac{\langle x, y\rangle}{\left\|x\right\|\left\|y\right\|}\right| \leq 1$$

注意：

（1）当$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$时，$x, y$线性相关。

向量夹角的概念：

当$\left\|x\right\| \neq 0, \left\|y\right\| \neq 0$时

$$\theta = arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\left\|x\right\| \left\|y\right\|}\right), 0 \leq \theta \leq \pi$$

注意：

（1）零向量的方向是随意的。

（2）$\langle x, y\rangle = \left\|x\right\| \left\|y\right\| cos\theta$

（3）当$\theta = 0, \theta = \pi$时，$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$，即$x, y$平行。

概念：

1. 许瓦兹不等式
2. 向量的夹角

3.5.3 向量组的正交性

正交的定义：

设x, y为n维向量，当$\langle x, y\rangle = 0$时，称x, y正交（即x, y的夹角为$\frac{\pi}{2}$）。

注意：

（1）若$x = 0$，则x与任何向量都正交。

正交的向量组：

由一组两两正交的非零向量组成的向量组，称为正交的向量组。

定理：若n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是一组两两正交的非零向量，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关。（即：正交的向量组线性无关）。

正交基的定义：

用正交的向量组作为向量空间的基，称为向量空间的正交基。

例子：

（1）R^3的正交基

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

（2）R^4的正交基

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

（3）n个两两正交的n维非零向量，可构成R^n的一个正交基。

概念：

1. 两个向量正交
2. 正交的向量组
3. 正交基

3.5.4 规范正交基

规范正交基的定义：

设n维向量$e_1, e_2, \cdots, e_r$是向量空间$V(V \subset R^n)$的一个基，如果$e_1, e_2, \cdots, e_r$是两两正交的单位向量，则称$e_1, e_2, \cdots, e_r$是向量空间V的一个规范正交基。

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

例子：

（1）R^4的规范正交基

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

向量坐标：

设$e_1, e_2, \cdots, e_r$是V的一个规范正交基，则$\forall \alpha \in V$

$$\alpha = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r$$

向量坐标的求法：求α在e_i轴上的投影。

$$\langle \alpha, e_i \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, r$$

$$\langle \alpha, e_i \rangle = \left\| \alpha \right\| cos\theta = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, r$$

概念：

1. 规范正交基
2. 向量坐标

方法论：

1. 规范正交基下，向量坐标的求法。

正交投影与最小二乘：

给定R^n的子空间W与向量x，若x与W中任意向量都正交，则称x正交于W，记作$x \perp W$。

与W正交的向量的全体组成的集合称为W的正交补，记作$W^\perp$，即$W^\perp = \{x \in R^n | x \perp W\}$。

例子：

（1）若$A_{m\times n}x=0$，则$Row\,A^{\perp}=Nul\,A$。

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\langle\alpha_1^T,x\rangle=0,\cdots,\langle\alpha_m^T,x\rangle=0$$

$$\forall x\in Row\,A^{\perp}\Rightarrow x\in Nul\,A\Rightarrow Row\,A^{\perp}\subset Nul\,A$$
$$\forall x\in Nul\,A\Rightarrow x\in Row\,A^{\perp}\Rightarrow Nul\,A\subset Row\,A^{\perp}$$

$$Row\,A^{\perp}=Nul\,A$$

正交投影定理：

若W为R^n的非零子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$为$W$的一组正交基，则$\forall b \in R^n$, $\exists$唯一的分解$b = p + z$。

其中，$p \in W, z \in W^{\perp}$且对$\forall y \in W, y \neq p$有$\|b - y\| > \|b - p\|$。

$$p = \frac{\langle b,\alpha_1\rangle}{\langle \alpha_1,\alpha_1\rangle}\alpha_1 + \frac{\langle b,\alpha_2\rangle}{\langle \alpha_2,\alpha_2\rangle}\alpha_2 + \cdots + \frac{\langle b,\alpha_p\rangle}{\langle \alpha_p,\alpha_p\rangle}\alpha_p$$

p称为b在W上的正交投影，记作$P_W b$。

最小二乘原理：

若 $b \notin Col\,A$，即 $Ax=b$无解。

寻找b在$Col\,A$上的正交投影p，使得$A\overline{x}=p$，则$\overline{x}$可作为$Ax=b$的近似解。

$$\because e=b-p$$

$$A^{T}e=A^{T}(b-A\overline{x})=0\Rightarrow \overline{x}=(A^{T}A)^{-1}A^{T}b$$

$$\because R(A^{T}A)=R(A)$$

$\therefore$只要A的列向量组线性无关，上式即成立。

例子：

（1）已知平面上有3个点$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，用一条直线$y=kx+b$对其进行拟合。

（2）在形如$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$的向量中，找出最接近$b$的向量$\alpha$，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}4\\3\\3\\1\end{pmatrix}$$

概念：

1. 正交补
2. 正交投影

方法论：

1. 最小二乘法

施密特正交化：

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量空间$V$的一个基。

$$b_1 = \alpha_1, e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$$
$$b_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_1, e_1 \rangle e_1, e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}$$
$$b_3 = \alpha_3 - \langle \alpha_3, e_1 \rangle e_1 - \langle \alpha_3, e_2 \rangle e_2, e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|}$$
$$\ldots$$
$$b_r = \alpha_r - \langle \alpha_r, e_1 \rangle e_1 - \cdots \langle \alpha_r, e_{r-1} \rangle e_{r-1}, e_r = \frac{b_r}{\|b_r\|}$$

可见，$e_1, e_2, \cdots, e_r$为两两正交的单位向量。

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left\|b_1\right\| e_1 \\
\alpha_2 &= \left\|b_2\right\| e_2 + \langle \alpha_2, e_1 \rangle e_1 \\
\alpha_3 &= \left\|b_3\right\| e_3 + \langle \alpha_3, e_1 \rangle e_1 + \langle \alpha_3, e_2 \rangle e_2 \\
\dots \\
\alpha_r &= \left\|b_r\right\| e_r + \langle \alpha_r, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle \alpha_r, e_{r-1} \rangle e_{r-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_r \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \|b_1\| & \langle \alpha_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha_r, e_1 \rangle \\ 0 & \|b_2\| & \cdots & \langle \alpha_r, e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \|b_r\| \end{bmatrix}
$$

可见，$e_1, e_2, \cdots, e_r$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$等价，故$e_1, e_2, \cdots, e_r$是$V$的规范正交基。

例子：

（1）试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（2）已知$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，求非零向量$\alpha_1, \alpha_2$使$\alpha_3$与$\alpha_1, \alpha_2$正交，并把它们化成$R^3$的规范正交基。

QR分解：

若$A_{m\times n}$列向量线性无关，则

$$A_{m\times n} = Q_{m\times n}R_{n\times n}$$

- Q的列向量是$Col\,A$的规范正交基。
- R为上三角形，可逆矩阵，对角线元素全为正数。

QR分解的应用：

若$Ax = b$，A的列向量线性无关。

$$A\overline{x} = b, \overline{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$\overline{x}$为$Ax = b$的最小二乘解。

定理：

若$A = QR$，则$R\overline{x} = Q^T b$。

方法论：

- 施密特规范正交化
- 矩阵的QR分解
- 利用QR分解求$Ax = b$的最小二乘解

3.5.5 正交矩阵与正交变换

正交矩阵：

若$A_{n\times n}^{T}A=E, A^{T}=A^{-1}$，则称$A$为正交矩阵。

若$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}, A^{T}A=E$，则

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_i^T\alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

说明：

$A_{n\times n}$正交

- $\Leftrightarrow$ A的列向量是两两正交的单位向量。

若$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}$, $AA^T=\boldsymbol{E}$，则

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

说明：

$A_{n\times n}$正交

- $\Leftrightarrow$ A的行向量是两两正交的单位向量。

例子：

（1）设$e_1, e_2, \cdots, e_n$是R^n的一个规范正交基，A为正交矩阵。试证$Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_n$也是R^n的一个规范正交基。

概念：

1. 正交矩阵

线性变换：

设V_n, V_m分别是n维和m维的向量空间，T是一个从V_n到V_m的映射，如果T满足：

- $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V_n, T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2)$
- $\forall \alpha \in V_n, k \in R, T(k\alpha) = kT(\alpha)$

那么，称T为从V_n到V_m的线性映射或线性变换。

例子：

（1）$y_{m\times 1} = A_{m\times n}x_{n\times 1}$，$V_n \rightarrow V_m$的线性变换。

正交变换：

$y = Ax$，A可逆，可逆变换。

$y = Ax$，A正交，正交变换。

性质：经过正交变换向量的范数保持不变。

$$\|y\| = \sqrt{x^T A^T A x} = \|x\|$$

例子：

$$y = \begin{bmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{bmatrix} x$$

概念：

1. 线性变换
2. 可逆变换
3. 正交变换