第三章 向量空间

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

3.1 基本概念

- 3.1.1 向量的概念
- 3.1.2 向量组的概念
- 3.1.3 向量组之间的关系
- 3.1.4 向量空间
- 3.1.5 线性子空间

3.1.1 向量的概念

n维向量的定义：

$$\alpha^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$$\beta^T = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

n维向量的运算：

1. $\alpha^T = \beta^T \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, n$
2. $\alpha^T \pm \beta^T = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_n \pm b_n)$
3. $k\alpha^T = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$，$k$为常数。

n维向量的运算律：

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
2. $\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
3. $kl\alpha=k(l\alpha)$
4. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
5. $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

概念：

1. n维向量的定义
2. n维向量的运算
3. n维向量的运算律

3.1.2 向量组的概念

向量组与矩阵一一对应

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \leftrightarrow A_{m\times n} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$\beta_1^T, \beta_2^T, \cdots \beta_m^T \leftrightarrow A_{m\times n} = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{bmatrix}$$

矩阵与线性方程组一一对应

$$(A, b) \leftrightarrow Ax = b$$

$$A \leftrightarrow Ax = 0$$

线性方程组与向量组一一对应

$$\begin{aligned} Ax = b &\leftrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), b \\ &\leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\leftrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \\ &\leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \end{aligned}$$

定理：β可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示
$\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$。

概念：

1. 向量组的概念
2. 向量组、矩阵、线性方程组之间具有一一对应关系
3. 线性组合、线性组合系数、线性表示
4. 线性相关、线性无关

3.1.3 向量组之间的关系

注：

$$A:\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},B:\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

向量组等价，但对应的矩阵不一定等价。

概念：

1. 向量组B可由向量组A线性表示
2. 向量组等价

注：

$$A \times B = C$$

- C的列向量组可由A的列向量组线性表示。
- C的行向量组可由B的行向量组线性表示。

注：

$$PA = B, |P| \neq 0, P^{-1}B = A$$

- A与B行向量组等价。

$$AP = B, |P| \neq 0, BP^{-1} = A$$

- A与B列向量组等价。

定理：向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由向量组
$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示
$\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$。即$AX=B$有解
$\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$。

推论：向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$与向量组
$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价
$\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$。

定理：若$AB=C$，则
$R(C)\le min\{R(A),R(B)\}$。

例子：

（1）已知两个向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\t\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix}$$

问$t=$_____时，两个向量组等价？

3.1.4 向量空间

线性八条：

设V是一个非空集合，K为实数或复数域，在V上定义加法和数乘两种运算，这些运算满足如下性质：

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V; \lambda, \mu \in K$

1）加法和数乘封闭：$\alpha + \beta \in V; \lambda\alpha \in V$

2）加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

3）加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

4）零元（唯一）：V中存在一个零元素0，使得 $\alpha + 0 = \alpha$。

5）负元（唯一）：$\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V$使得 $\alpha - \alpha = 0$

6）单位元：$1\alpha = \alpha$

7）数乘结合律：$(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha)$

8）数乘分配率：$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$，$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$

则称V是数域K上的向量空间（线性空间），V中的元素称为向量。

例子：

（1）正实数的全体，记作R^+，构成向量空间。在其中定义的加法及数乘运算为：

- $a \bigoplus b = ab, (a, b \in R^+)$
- $\lambda \bigotimes a = a^\lambda, \lambda \in R, a \in R^+$

（2）只含有零向量的向量空间称为零空间。

（3）

- $V=\{(x,y)^T|x,y\in R\}$，R^2空间。
- $V=\{(x,y,z)^T|x,y,z\in R\}$，$R^3$空间。
- $V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T|a_1,a_2,\cdots,a_n\in R\}$，$R^n$空间。

（4）

- $V=\{(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)^T|x_2,x_3,\cdots,x_n\in R\}$，为向量空间。
- $V=\{(1,x_2,x_3,\cdots,x_n)^T|x_2,x_3,\cdots,x_n\in R\}$，不为向量空间。

（5）

已知$\{\alpha_1, \alpha_2\}$，则
$Span\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$为
向量空间。

已知$\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\}$，则$Span\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\}$
$= \{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n | \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \in R\}$
为向量空间。

（6）

所有$m \times n$矩阵的集合构成一个线性空间。

（7）

次数不超过n的多项式的全体，记为$P[x]_n$，对于通常的多项式加法，多项式的数乘构成线性空间。

$$P[x]_n = \{P = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 \\ | a_0, a_1, \cdots, a_n \in R\}$$

（8）

闭区间$[a,b]$上的连续实函数的全体记为$C[a,b]$。

设$f,g \in C[a,b], \lambda \in R$定义函数的加法和数乘：

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

则$C[a,b]$构成一个线性空间。

性质：

（1）满足消去律：若$\alpha+\beta=\alpha+\gamma$，则$\beta=\gamma$。

（2）零元素是唯一的。

（3）任意元素的负元素是唯一的。

（4）$0\alpha=0$，$\lambda 0=0$，$(-1)\alpha=-\alpha$

（5）如果$\lambda\alpha=0$，则$\lambda=0$或$\alpha=0$。

概念：

1. 向量空间（线性空间）的概念
2. 零空间
3. 向量空间的性质

3.1.5 线性子空间

设V是一个线性空间，L是V的一个非空子集，如果L对于V中所定义的加法和数乘运算也构成一个线性空间，则称L是V的子空间。

定理：线性空间V的非空子集L构成子空间$\Leftrightarrow L$对V中的线性运算封闭。

概念：

1. 线性子空间

例子：

（1）零空间是V的子空间。

（2）$P[x]_n$是$P[x]$的子空间。

（3）$A_{m\times n}x=0$的解空间是R^n的子空间。

（4）已知$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$Span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为$R^n$的子空间。

例子：

（1）设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$等价，试证：$V_1 = V_2$

$$V_1 = \{x = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m | \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in R\}$$

$$V_2 = \{x = \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s | \mu_1, \cdots, \mu_s \in R\}$$

注意：等价的向量组张成的向量空间相等。