第二章 矩阵及其运算

马燕鹏，华北电力大学

Github：https://github.com/datawhalechina

CSDN：https://lsgogroup.blog.csdn.net

2.2 分块矩阵及运算

- 2.2.1 分块矩阵的定义
- 2.2.2 分块矩阵的运算
- 2.2.3 分块矩阵的应用
- 2.2.4 练习

2.2.1 分块矩阵的定义

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

概念：

1. 子块的概念
2. 分块矩阵的定义

2.2.2 分块矩阵的运算

（1）分块矩阵的加法

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}, B_{m\times n}=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{bmatrix}$$

（2）分块矩阵的数乘

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$$

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{bmatrix}$$

（3）分块矩阵的转置

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{bmatrix},A^T=\begin{bmatrix}A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T\\ \vdots & & \vdots\\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T\end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n}=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n],A^T=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}$$

（4）分块矩阵的乘法

$$A_{m\times l}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{it} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, B_{l\times n}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{i1} & B_{i2} & \cdots & B_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$$

$$C_{s\times r}=A_{s\times t}\times B_{t\times r}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}\times B_{kj}, i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,r$$

例子：利用分块法求AB。

$$A_{2\times 4}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}, B_{4\times 3}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

A,B分块方式如下：

- $A=[A_{11}\quad A_{12}], B=\begin{bmatrix}B_{11}\\B_{21}\end{bmatrix}$
- $A=[A_{11}\quad A_{12}], B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$
- $A=[A_{11}\quad A_{12}\quad A_{13}\quad A_{14}], B=\begin{bmatrix}B_{11}\\B_{21}\\B_{31}\\B_{41}\end{bmatrix}$

概念：

1. 分块矩阵的加法
2. 分块矩阵的数乘
3. 分块矩阵的转置
4. 分块矩阵的乘法

2.2.3 分块矩阵的应用

（1）齐次线性方程组的分块表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- 利用矩阵表示：$Ax = 0$
- 利用列向量表示：
  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$
- 利用行向量表示：$\alpha_i^T x = 0, i = 1, 2, \cdots, m$

（2）非齐次线性方程组的分块表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 利用矩阵表示：$Ax = b$
- 利用列向量表示：
  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b$
- 利用行向量表示：$\alpha_i^T x = b_i, i = 1, 2, \cdots, m$

（3）矩阵乘法的分块

$$A_{m\times n}B_{n\times s}=C_{m\times s}$$

分块策略：

- 对B按列分块的讨论
- 对A按列分块的讨论
- 对B按行分块的讨论
- 对A按行分块的讨论

（4）对角矩阵的分块

$$A_{m\times n}\times\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\alpha_1 & \lambda_2\alpha_2\cdots\lambda_n\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$\Lambda\times A_{m\times n}=\begin{bmatrix}\lambda_1\alpha_1^T\\ \lambda_2\alpha_2^T\\ \cdots\\ \lambda_m\alpha_m^T\end{bmatrix}$$

（5）定理与推论

定理：若$m\times n$矩阵满足$A^TA=0$，则$A=0$。

推论：若$m\times n$矩阵满足$tr(A^TA)=0$，则$A=0$。

2.2.4 练习

画出如下矩阵分隔线使每个矩阵分成四块：

$$(1).\ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ - & - & - & - \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ - & - & - & - \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right]$$

$$(2).\ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ - & - & - & - \\ * & * & * & * \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ - & - & - & - \\ * & * & * & * \end{array}\right]$$