

# 基于多元非线性规划振荡浮子式波浪能最优输出功率设计

## 摘 要

作为丰富的可再生能源之一，波浪能的开发利用受到国家极大重视，其发电装置是当前利用波浪能的一个关键工具，本文通过建立阻尼系数与输出功率的模型，研究不同条件的阻尼系数下最大输出功率的变化规律。

问题一：首先根据题目给出的装置内部结构图，分析浮子和振子的受力情况。其次根据题目中的已知条件，建立阻尼力与相对速度之间的函数关系式，构建浮体的动力学方程和刚体方程模型，利用附件 3 和附件 4 的数据，在第一小问中，令阻尼系数为  $10000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，对微分方程组进行变换，使用四阶五阶龙格-库塔法解模型中的微分方程组，求出总步长，以及在 40 个周期内浮子和振子的位移与速度，得到当  $B=100000$  时，在第二问中，构建阻尼系数与相对速度的函数关系式，延用问题一变换过后的微分方程组，并将构建的函数方程式与该微分方程组连立起来，通过 ode45 功能函数解方程组，算出 40 个周期内浮子和振子的位移与速度。在 10 s、20 s、40 s、60 s、100s 时，浮子与振子的垂荡位移和速度见表 2 和表 3。

问题二：在限定垂荡运动的条件下给出了阻尼系数的取值区间，即受力分析与问题一相同，通过建立双自由度浮子模型，构建了平均输出功率与相对速度的关系。在问题一思路的基础上，第一小问中，通过在区间内不同取值得出不同阻尼系数下的相对速度，将相对速度代入模型中求出平均输出功率，对求出来的若干点集进行曲线拟合，得到平均输出功率与阻尼系数的函数，求解出最优阻尼系数为  $4.29 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，最大输出功率为  $114.158 \text{ w}$ 。第二小问涉及到了在限定区间内双变量微分方程的最值求解问题，鉴于直接求解的复杂性，我们选择通过曲面拟合的方法，得到平均输出功率关于比例系数和幂指数的函数，对其求导得到优阻尼系数为  $91800 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，最大输出功率约为  $248.6 \text{ w}$ 。

问题三：针对重新定义的运动情景，在原有垂荡运动的基础上新增了纵摇运动，对其进行受力分析，新加了波浪激励力矩、静水恢复力矩、兴波阻尼力和附加惯性力，建立新的垂荡纵摇模型，引入转动角加速度与旋转阻尼力，利用题目所给附件 3、附件 4 的数据，通过四五阶龙格-库塔法解微分方程组，最终得到在 10 s、20 s、40 s、60 s、100s 时，浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度（见表 7-1 和表 7-2）

问题四：在问题二的基础上，结合垂荡运动的特性，利用角速度与线速度之间的转换，构建新的直线/旋转阻尼器与输出功率之间的模型，由于同样涉及了二元函数的最值问题，通过解微分方程组得到若干点集，进行曲面拟合得到最大的平均输出功率和最优的直线阻尼系数与旋转阻尼系数。

最后，给出了该模型的优缺点评价。

**关键词：**波浪发电装置 最大输出功率 龙格-库塔法 微分方程

## 一、 问题重述

随着近年来全球的温室效应加剧，以及化石燃料的耗费，各国越来越重视可再生能源的使用，波浪能作为储藏于海洋的可再生能源之一，有着巨大的能源潜力，开发其能量转换装置是利用的关键。

问题一：考虑浮子在波浪中只做垂荡运动，建立浮子与振子的运动模型，分别在两种情况下计算浮子和振子在波浪激励力 $f\cos\omega t$ 作用下前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移和速度。

问题二：依然只考虑浮子在波浪中做垂荡运动，分别在两种情况下建立确定直线阻尼器的最优阻尼系数的数学模型，使得 PTO 系统的平均输出功率最大，并计算两种情况的最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

问题三：在前两问的基础上加上纵摇运动，计算浮子与振子在波浪激励力 $f\cos\omega t$ 和波浪激励力矩 $L\cos\omega t$ 的作用下前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2s 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度，并且在论文中给出 10s、20s、40s、60s、100s 时，浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

问题四：情形同第三问，在直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均为常量的情况下，建立确定直线阻尼器和旋转阻尼器最优系数的模型，计算最大输出功率及最优阻尼系数。

## 二、 问题分析

由题所给波浪能装置图可知，该装置主要由振子和浮子两大主体构成，我们将该装置简化为直线圆柱体和锥体的组合体，并且考虑了实际情况，忽略锥体在波浪运动中水平面截面积的变化。根据各题情境，利用刚体动力学与流体动力学的相关知识，分别对其进行受力分析，建立模型。

### 2.1 问题一的分析

求解问题一之前需要对该装置在波浪中的运动进行受力分析，题目表示只需考虑浮子和振子只做垂荡运动，并且初始状态为平衡状态，在题目所给附件一和附件二的基础上，我们可知该装置主要受的力有波浪激励力、静水恢复力、兴波阻尼力、附加惯性力、直线阻尼器的阻尼力和弹簧弹力，题目要求我们建立浮子和振子的垂荡位移、速度关于时间的函数关系，由参考文献<sup>[1]</sup>和以上受力分析可知，我们可建立浮子与振子耦合频域运动方程，联立微分方程组，对该微分方程组进行变换后使用四五阶龙格库塔法求解。

第一小问：已知直线阻尼器的阻尼系数，通过题目所给附件三和附件四提供的数据，可直接带入微分方程组求解，鉴于解该微分方程的复杂性，我们利用龙格库塔法得出一个精度较高的近似解（若干点集）。

第二小问：因为直线阻尼器的阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，我们可建立阻尼系数关于浮子和振子的相对速度的绝对值的幂的函数关系，将第一问中直线阻尼器的阻尼系数替换，更改为浮子和振子的相对速度关于时间的函数，代入微分方程组，利用龙格库塔法再次求解。

### 2.2 问题二的分析

第二问仍假定浮子在波浪中只做垂荡运动，对比问题一，使用方法基本相同，数

据有所更改，我们可视其为求 PTO 系统的平均输出功率最值问题。需要建立 PTO 平均输出功率与阻尼系数的模型，分别求出在不同情境下，不同阻尼系数下的最大平均输出功率。由相近情景下的参考文献可得到 PTO 的平均输出功率关于阻尼系数的表达式，其中需要使用到的浮子和振子的相对速度，可分别在第一小问和第二小问的情境下，通过问题一中的四阶五阶龙格-库塔法解微分方程组得出，然后代入公式得出不同阻尼系数下 PTO 系统的平均输出功率，最后将结果得到的若干点集通过 Matlab 进行曲线拟合，对拟合得到的函数表达式进行求最值处理，得出最大输出功率及相应的最优阻尼系数。由于第二小问涉及到双变量下的微分方程最值问题，需要进行一个拟合曲面的处理，通过拟合函数得到最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

### 2.3 问题三的分析

在一二问的基础上增加了纵摇运动，即需要我们在垂荡运动和纵摇运动的前提下求解浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。对该波浪发电装置在原有垂荡运动的基础上进行受力分析，纵摇运动产生的力位于水平方向上，共有波浪激励力矩、静水恢复力矩、兴波阻尼力和附加惯性力，根据力矩平衡原理，考虑到旋转阻尼力、转动角加速度的影响，我们需要重新建立垂荡运动与纵摇运动相结合的模型，对该微分方程组做简单变换后，使用四五阶龙格-库塔法求解方程组，便可以得到不同时间点上浮子/振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

### 2.4 问题四的分析

在考虑垂荡运动与纵摇运动相结合的情况下，将直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数视为参数，构建直线与旋转阻尼系数和最大输出功率的模型，即将其视为在相同的规定区间内，求解最值的复杂二元函数。

## 三、 模型假设

1. 由于中轴、底座、隔层及 PTO 的质量对模型的影响不大，忽略不计
2. 由于装置锥体部分吃水较深，忽略其对主体的水动力性能影响
3. 假定该波浪为理想流体
4. 忽略波浪能装置内部的各种摩擦的影响
5. 忽略风雨等天气因素对水上装置部分的作用
6. 假定初始条件下装置处于平衡状态，位移和初始速度均为 0

## 四、 符号说明

符号	说明	单位
$M_1$	振子的质量	kg
$M_2$	浮子的质量	kg
$F_1$	振子所受外力和	N
$F_2$	浮子所受外力和	N
$\mu_i$	垂荡附加质量 ( $i=1,2,3,4$ )	kg
$Z_1$	振子的位移	m
$Z_2$	浮子的位移	m

B	直线阻尼器的阻尼系数	N·s/m
$\lambda_i$	垂荡兴波阻尼系数 (i=1,2,3,4)	N·s/m
K	弹簧刚度系数	N/m
$F_{li}$	浮子受到的波浪激励力 (i=1,2,3,4)	N
C	回复刚度系数	N/m
S	浮子吃水线处的横截面积	m <sup>2</sup>

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一模型的建立与求解

#### 5.1.1 模型的建立

由于题目考虑浮子在波浪中只做垂荡运动，我们可将其视为单自由度升沉运动，首先对于浮子，由牛顿第二定律得：

$$F_2 = M_2 a_2 \quad (M_2 \text{ 为浮子质量, } a_2 \text{ 为浮子的总加速度})$$

其中所受外力  $F_2$  可分为

$$F_2 = F_w + F_m$$

$F_w$  是浮子所受到的波浪激励力、静水恢复力、兴波阻尼力和附加惯性力的矢量和。各力相关的物理意义如表 1 所示。

表 1  $F_w$  中包含的力的名称及物理意义

受力名称	物理意义
波浪激励力	波浪对海洋中的结构物所产生的作用
静水恢复力	浮体在海水中做垂荡运动时，会受到使浮体回到平衡位置的作用力
兴波阻尼力	浮体在海水中做摇荡运动时，因兴起波浪，从而产生对浮体摇荡运动的阻力
附加惯性力	要使浮体在流体中获得（角）加速度，需要施加额外的力

$F_m$  是弹簧弹力和直线阻尼器的阻尼力的矢量和。其次对振子，由牛顿第二定律得，其受力的力学表达式为

$$F_1 = M_1 a_1$$

由于振子的运动是浮子的内部运动，故认为振子的运动与海水运动无直接关系，仅受直线阻尼器的阻尼力和弹簧弹力的影响。

一般认为，浮体有六个自由运动度，即在三个维度各自两个方向上的不同运动度，分别体现为纵荡、横荡、升沉、横摇、纵摇和艏摇，本题中所考虑的运动度只有垂荡，视作六自由度中的升沉运动。

由参考文献可知，在线性波浪作用下，浮体六自由度运动相应的幅值（此处为浮子和振子的位移）可通过浮子在海浪上的动力学方程和刚体运动方程表示，鉴于我们只考虑该装置的垂荡运动，故浮子垂荡运动方程为：

$$(M_2 + \mu_1)Z_2^{(2)} + B(Z_2^{(1)} - Z_1^{(1)}) + \lambda_1 Z_2^{(1)} + K(Z_2 - Z_1) + CZ_2 = F_{11} \quad (1)$$

振子的运动方程为：

$$M_1 Z_1^{(2)} + B(Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)}) + K(Z_1 - Z_2) = 0 \quad (2)$$

其中 C 代表的回复刚度系数的表达式为  $C = \rho g S$ ,  $\rho$  为海水密度,  $g$  为重力加速度,  $S$  为浮子吃水线处的横截面积。

### 5.1.2 模型的求解

根据一二问所给的情景不同, 直线阻尼器的阻尼系数  $B$  在第一小问中可表示为  $B = 10000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , 结合题目所给表附件 3 和表附件 4 的数据, 代入方程 (1) 和方程 (2) 中计算, 利用龙格库塔法对该非刚性常微分方程进行求解。

我们使用 Matlab 工具箱中的 ode45 功能函数, ode45 采用的是四五阶龙格-库塔方法, 它用四阶方法得出候选解, 五阶方法控制误差, 属于一种自适应步长的常微分方程数值解。

在使用之前, 需要对该微分方程组进行变换。

$$(M_2 + \mu_1)Z_2^{(2)} + B(Z_2^{(1)} - Z_1^{(1)}) + \lambda_1 Z_2^{(1)} + K(Z_2 - Z_1) + CZ_2 = F_{11} \quad (1)$$

$$M_1 Z_1^{(2)} + B(Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)}) + K(Z_1 - Z_2) = 0 \quad (2)$$

令  $x(1) = Z_1, x(2) = Z_1^{(1)}, x(3) = Z_2, x(4) = Z_2^{(1)}$ , 则上述微分方程组可化为:

$$dx = \begin{bmatrix} dx(1) \\ dx(2) \\ dx(3) \\ dx(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(2) \\ \frac{-B[x(2) - x(4)] - K[x(1) - x(3)]}{M_1} \\ x(4) \\ \frac{F_{11} - Cx(3) - K[x(3) - x(1)] - B[x(4) - x(2)] - \lambda x(3)}{M_2 + \mu} \end{bmatrix} \quad (3)$$

得到一个  $4 \times 1$  的矩阵, 利用 Matlab 的 ode45 功能函数求解, 得出方程(1)、(2)的相应数值解, 计算得总步长为[0,180]。

即该装置运动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 180\text{s}$$

同时求出该周期内浮子和振子的速度、位移的若干点集 ( $B=100000$  情形下 40 个周期内浮子和振子的速度、位移已经存放在 result1-1.xlsx 和 result1-2.xlsx 中)。

由计算结果可知, 在 0~20s 时浮子和振子的位移与速度的波动较大, 在  $t > 20\text{s}$  时, 浮子和振子的位移和速度均随时间呈现出规则的正弦变化, 振子的位移基本位于 0.5m 内, 速度基本不超过 0.75m/s; 浮子在趋于稳定后的位移与振子相近, 基本保持在 0.5m 一下, 但差值很小, 浮子的速度则比振子略低, 但在同一时间点上无明显差异。

$B=100000$  时浮子与振子在 10 s、20 s、40 s、60 s、100 s 时的垂荡位移和速度如下表所示。

表 2  $B=100000$  时浮子与振子的垂荡位移和速度

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10.0	-0.2020	-0.6257	-0.2239	-0.6770
20.0	-0.5902	-0.2426	-0.6337	-0.2746
40.0	0.2835	0.3162	0.2945	0.3361
60.0	-0.3124	-0.4820	-0.3291	-0.5186
100.0	-0.0797	-0.6051	-0.0799	-0.6441

在第二小问中，由于直线阻尼器的阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，并且其中比例系数取 10000，幂指数取 0.5，可得  $B = 100000 \left| Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)} \right|^{0.5}$ ，将  $B = 100000 \left| Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)} \right|^{0.5}$  代入转换后的微分方程组中，利用四五阶龙格-库塔法，通过 matlab 解微分方程组，可得  $B = 100000 \left| Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)} \right|^{0.5}$  下浮子和振子的速度、位移的若干点集。在 10 s、20 s、40 s、60 s、100 s 时，浮子与振子的垂荡位移和速度如下表所示。

由计算结果可知，在第二种情景下，浮子和振子的速度、位移随时间的变化趋势与第一种情景相似，在 0~20s 处，浮子和振子的位移和速度变化幅度较大。在  $t > 20s$  后逐渐趋于稳定，振子的位移变化稳定在 0.5m 左右，速度变化基本在 0.7m/s 上下，浮子的位移变化基本在 0.45m 左右，速度变化略高于 0.5m/s。

$B = 100000 \left| Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)} \right|^{0.5}$  时浮子与振子在 10 s、20 s、40 s、60 s、100 s 时的垂荡位移和速度如下表所示。

表 3  $B = 100000 \left| Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)} \right|^{0.5}$  时浮子与振子的垂荡位移和速度

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10.0	-0.1994	-0.6611	-0.2278	-0.7078
20.0	-0.5973	-0.3258	-0.6458	-0.3540
40.0	0.2635	0.3022	0.2748	0.3207
60.0	-0.3417	-0.4694	-0.3647	-0.5009
100.0	-0.0730	-0.6140	-0.0774	-0.6544

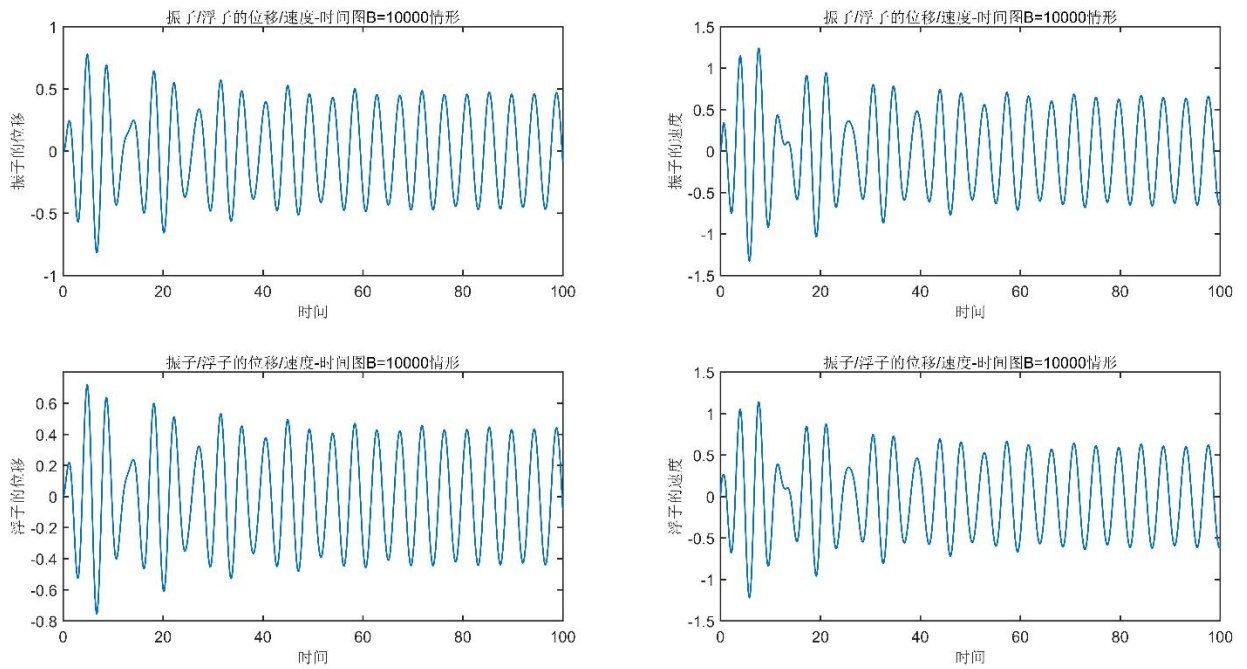


图 1  $B=100000$  时浮子和振子的位移速度-时间图

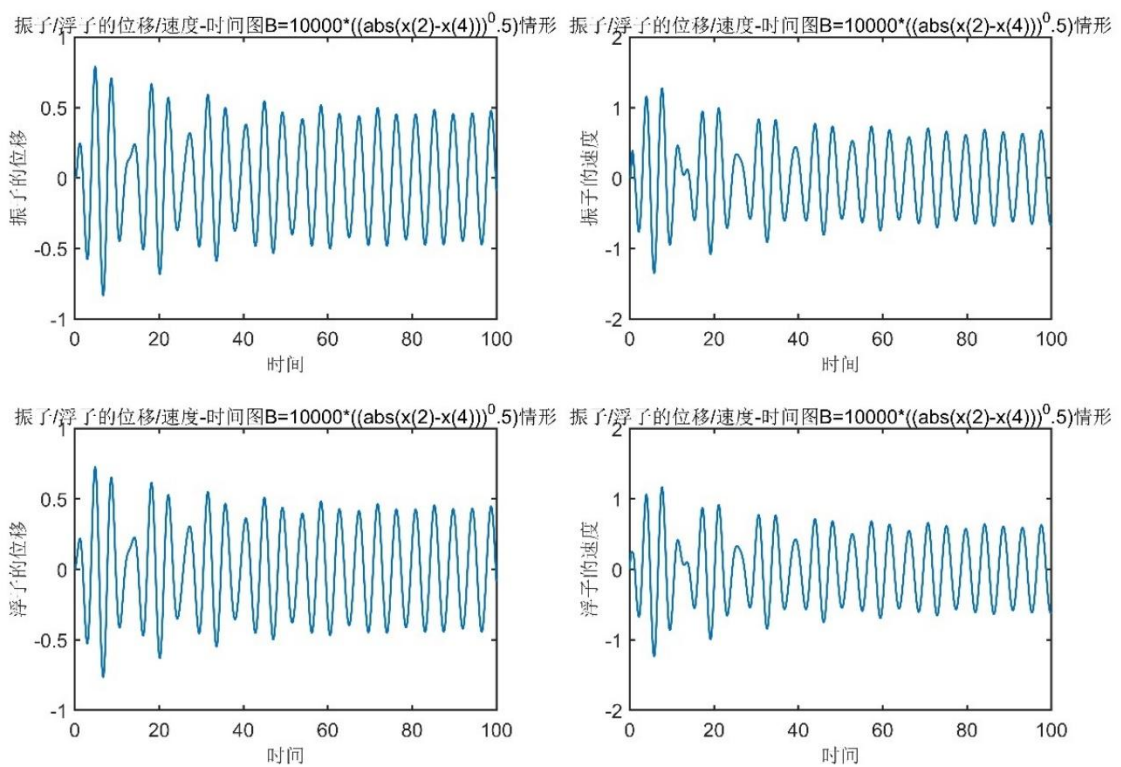


图 2  $B = 100000|Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)}|^{0.5}$  时浮子和振子的位移速度-时间图

## 5.2 问题二模型的建立与求解

### 5.2.1 模型的建立

在问题二的限定条件下，我们视该振荡浮子式波浪发电装置的运动为双自由度运动，根据双自由度浮子模型<sup>ii</sup>可知，PTO 的平均输出功率的公式为

$$P = \frac{1}{2}B(v_2 - v_1)^2 \quad (4)$$

$v_1$ 为振子的速度， $v_2$ 为浮子的速度， $|v_2 - v_1|$ 即是振子和浮子的相对速度。

在第一小问中，利用四五阶龙格库塔法，求出在阻尼系数的区间 $[0,100000]$ 内振子和浮子的速度，接着在不同的相对速度下，通过方程(4)求出平均输出功率  $P$  的值，结果得到若干点集，为了得到阻尼系数与平均输出功率的函数关系，我们使用 Matlab 对该点集进行曲线拟合，得到一个先单调递增后单调递减的函数，对该函数在区间 $[0,100000]$ 内进行求最值处理，得到第一问中的最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

在第二小问中，由于题目所给条件建立了阻尼系数与相对速度之间的函数关系，可把问题视为双变量下的微分方程的求最值问题，鉴于直接求解的复杂性，我们对不同的比例系数和幂函数取值下的点集进行曲面拟合，得到二元微分方程表达式，对其进行求出最值处理，得到最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

### 5.2.2 模型的求解

在第一小问中，题目规定阻尼系数为常量，并且给出了阻尼系数的取值区间，即区间 $[0,100000]$ 。我们通过不断调整  $B$  在区间 $[0,100000]$ 内的取值，利用四五阶龙格库塔法解出由方程(1)和方程(2)联立起来的微分方程组，求出在阻尼系数  $B$  不同的情景下振子和浮子的相对速度。

将求出来的相对速度代入方程(4)，得到不同  $P$  的取值。

对上述点集进行曲线拟合，使用 Matlab 中的 cftool 调用曲线拟合工具，求出平均输出功率  $P$  与阻尼系数  $B$  的函数解析式：

$$f(x) = a_1 \sin(b_1x + c_1) + a_2 \sin(b_2x + c_2) \quad (5)$$

$a_1 = 260$  ,  $b_1 = 0.00003175$  ,  $c_1 = -0.5833$  ,  $a_2 = 159.1$  ,  $b_2 = 0.00004092$  ,  $c_2 = 1.831$ 。

表 4  $B$  在 $[0,100000]$ 内  $P$  的大小

阻尼系数 $B(\times 10^4 \cdot \text{N} \cdot \text{s/m})$	平均输出功率 $P(\text{w})$
1	57.55035
3	108.52334
5	112.74215
7	100.96960
9	87.04978
10	80.83010



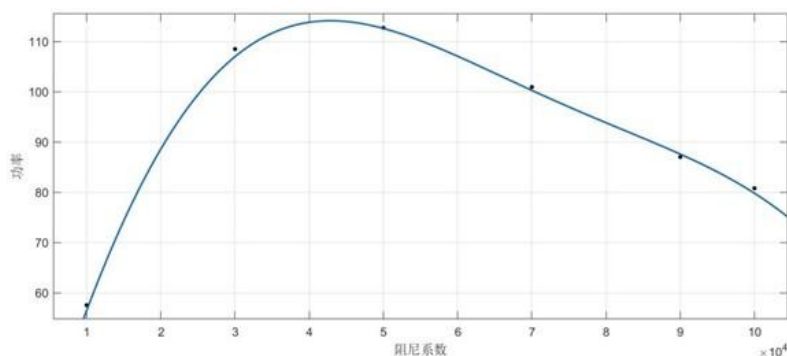


图 3  $B = 100000$  时浮子和振子的位移速度-时间图

由拟合所得曲线可知，函数(5)先单调递增后单调递减，故在区间内存在最大值。

在 GeoGebra 中输入一元函数(5)，得出在区间 $[0, 100000]$ 内，当函数(5)有最大值时， $x = 42885.869141021394$ ， $y = 114.15814552753908$ ，即当阻尼系数  $B = 4.29 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$  时，平均输出功率  $P$  有最大值  $114.158\text{w}$ 。

综上所述，在问题二的（1）问中，最优阻尼系数为  $4.29 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，最大输出功率为  $114.158\text{w}$ 。

在第二小问中，我们对区间内不同取值的阻尼系数  $B$  和幂指数  $\alpha$  进行取值，求出不同取值下的浮子与振子的相对速度，代入方程(4)中，得到平均输出功率  $P$  的大小如表 5 所示。

表 5 不同  $B$  和不同  $\alpha$  下输出功率  $P$  (w) 的大小

$B \backslash \alpha$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0
10000	115.101	93.580	68.324	49.129	33.345	22.627	18.738
20000	191.275	164.560	120.351	89.004	66.066	45.480	37.673
30000	217.047	195.353	166.646	124.243	93.039	65.526	55.117
40000	230.343	224.355	195.776	153.446	117.360	85.213	71.393
50000	225.484	238.578	214.750	180.072	138.034	104.010	88.156
60000	215.156	241.429	231.916	197.273	158.583	117.732	102.857
70000	201.939	235.266	240.794	211.222	175.149	132.482	114.366
80000	187.527	224.901	245.943	227.153	188.649	146.025	127.805
90000	174.100	214.657	247.397	235.530	200.899	159.580	140.357
100000	161.660	204.076	246.165	242.201	211.515	171.462	150.096

对表 5 中的若干点集，通过 Matlab 中的 curve fitting 进行曲面拟合，得到三维图像如图 4 所示，根据拟合图像得出的表达式为：

$$f(x, y) = p_{00} + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3 + p_{40}x^4 + p_{31}x^3y + p_{22}x^2y^2 + p_{13}xy^3 + p_{04}y^4 + p_{50}x^5 + p_{41}x^4 + p_{32}x^3y^2 + p_{23}x^2y^3 + p_{14}xy^4 + p_{05}y^5 \quad (5)$$

$x$  为幂指数  $\alpha$ ， $y$  为直线阻尼器的阻尼系数  $B$

表 6 方程 (5) 中  $p$  的取值

系数	取值	系数	取值
$p_{00}$	179.00	$p_{31}$	8.26

p10	-72.39	p22	-3.04
p01	68.04	p13	-10.05
p20	-5.01	p04	-1.99
p11	8.89	p50	1.58
p02	-20.76	p41	-0.99
p30	8.38	p32	-2.13
p21	-28.00	p23	6.11
p12	17.14	p14	2.58
p03	5.35	p05	-0.58
p40	-2.97		

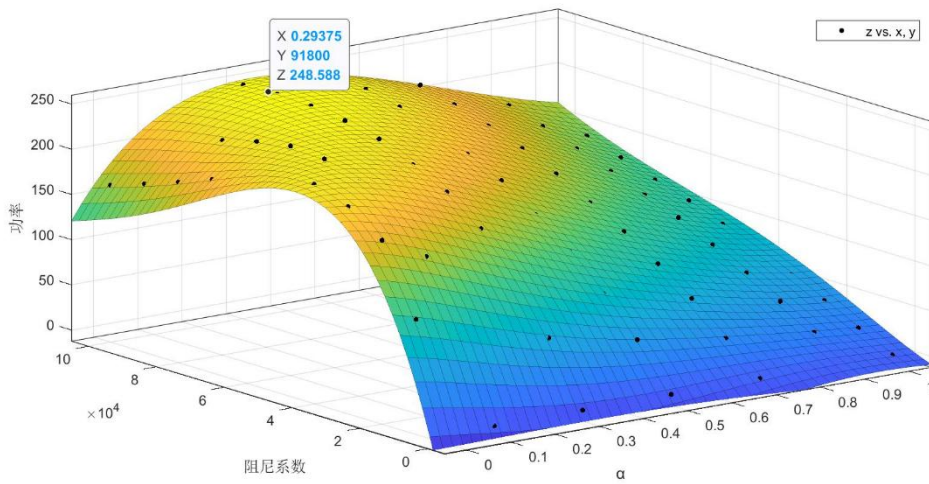


图 4 曲面拟合得到的三维图像

通过 Matlab 绘图软件对其进行求最值处理，得到当  $\alpha$  为 0.3，直线阻尼器的阻尼系数  $B=91800\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$  时，有最大输出功率  $P\approx 248.6\text{w}$ 。

故最优阻尼系数为  $91800\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，最大输出功率为  $248.6\text{w}$ 。

### 5.3 问题三模型的建立与求解

#### 5.3.1 模型的建立

由于第三题考虑该波浪发电装置的垂荡运动和纵摇运动，因此我们在第一问的基础上，结合纵摇运动的特点，对其进行受力分析可知，除了受到由垂荡运动产生的波浪激励力、静水恢复力、兴波阻尼力、附加惯性力之外，还受到了由纵摇运动带来的波浪激励力矩、静水恢复力矩、兴波阻尼力和附加惯性力，方向为水平方向。

考虑到垂荡运动的影响，根据力矩平衡原理，结合牛顿第二定律我们得到如下方程组：

$$(I_2 + \xi_2)\theta_2^{(2)} + \sigma_2\theta_2^{(1)} + B(\theta_2^{(1)} - \theta_1^{(1)}) + C\theta_2 + K(\theta_2 - \theta_1) = m \quad (6)$$

$$I_1\theta_1^{(2)} + B(\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)}) + K(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (7)$$

其中 $I_1$ 指的是振子的纵摇惯量， $I_2$ 指的是浮子的纵摇惯量， $m$ 是指浮子纵摇产生的波浪激励力矩， $\theta_1$ 是振子的转动角加速度， $\theta_2$ 是浮子的转动角加速度， $\xi_2$ 是浮子纵摇引起的附加惯量， $\sigma_2$ 为浮子纵摇引起的阻尼系数。

上述提到的纵摇惯量即为转动惯量，是指刚体（此处为波浪发电装置）绕轴转动时产生的惯性的量度，可通俗理解为旋转物体的惯性，在此处可用于建立角动量、角速度、力矩和角加速度之间的关系。<sup>iii</sup>

### 5.3.2 模型的求解

对该微分方程组进行变换：

$$\theta_2^{(2)} = \frac{L \cos \omega t - K(\theta_2 - \theta_1) - C\theta_2 - B(\theta_2^{(1)} - \theta_1^{(1)}) - \sigma_2 \theta_2^{(1)}}{I_2 + \xi_2}$$

$$\theta_1^{(2)} = \frac{-K(\theta_2 - \theta_1) - B(\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)})}{I_1}$$

$$\text{令 } J(1) = \theta_2, J(2) = \theta_2^{(1)}, J(3) = \theta_1, J(4) = \theta_1^{(1)}$$

$$\text{则 } dJ = \begin{bmatrix} dJ(1) \\ dJ(2) \\ dJ(3) \\ dJ(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(2) \\ \frac{L \cos \omega t - K(\theta_2 - \theta_1) - C\theta_2 - B(\theta_2^{(1)} - \theta_1^{(1)}) - \sigma_2 \theta_2^{(1)}}{I_2 + \xi_2} \\ J(4) \\ \frac{-K(\theta_2 - \theta_1) - B(\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)})}{I_1} \end{bmatrix}$$

化为一个  $4 \times 1$  的矩阵，对其使用四阶五阶的龙格-库塔法进行求解，得到若干点集（见 result3.xlsx），如图 5、图 6 所示，其中周期已经发生改变，约为 146s， $B_x$  表示的是旋转阻尼器的阻尼系数。

与在只考虑垂荡运动的情景下较为相似的是，在 50s 后该装置中浮子和振子的位移/速度变化趋于稳定。

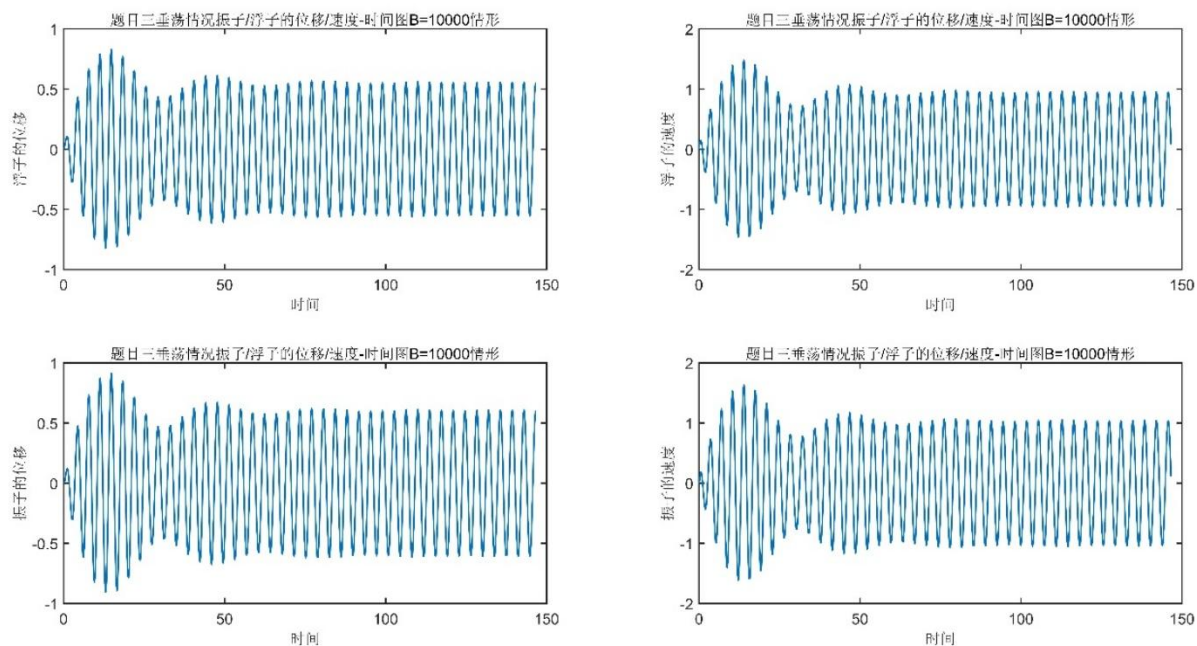


图 5 垂荡情况下  $B=10000$  时振子/浮子的位移/速度随时间变化图像

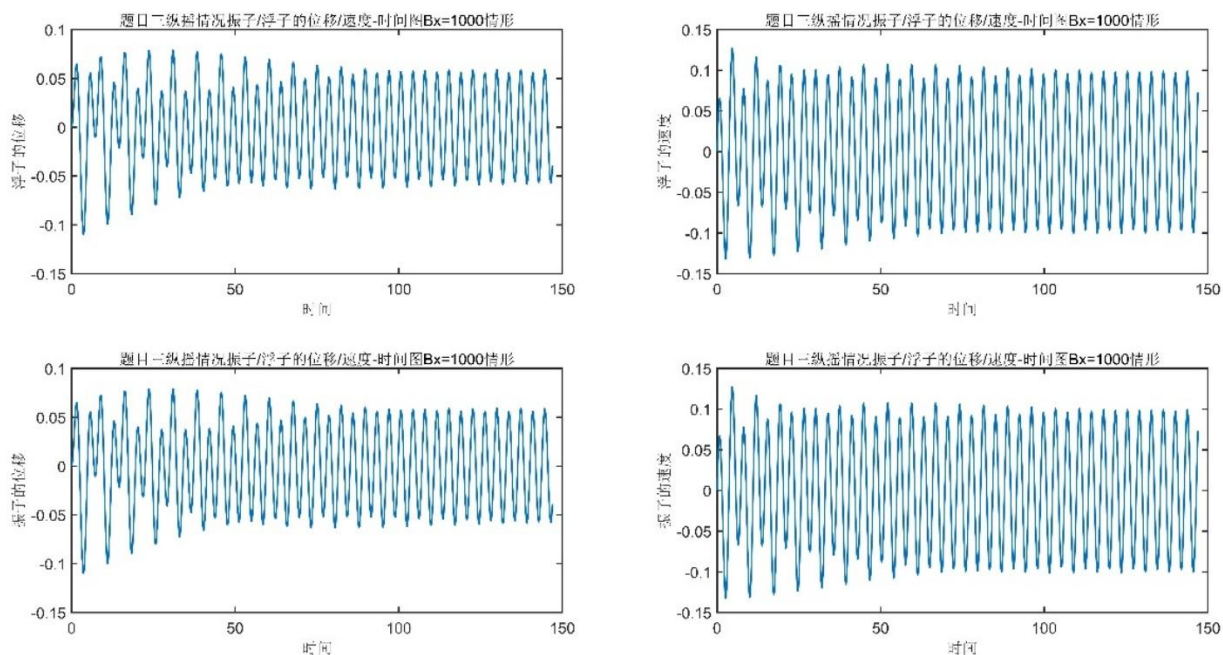


图 6 垂荡情况下  $B_x=1000$  时振子/浮子的位移/速度随时间变化图像

得到在 10 s、20 s、40 s、60 s、100 s 时，浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度如下表所示。

表 7-1 浮子的垂荡位移/速度与纵摇位移/速度

时间 (s)	浮子			
	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m/s)	纵摇角位移	纵摇角速度 ( $s^{-1}$ )
10	-0.53	0.97	-0.01	-0.13

20	-0.70	-0.27	0.03	0.04
40	0.37	0.76	-0.05	-0.06
60	-0.32	-0.72	0.05	0.07
100	-0.05	-0.95	0.02	0.09

表 7-2 振子的垂荡位移/速度与纵摇位移/速度

时间 (s)	振子			
	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m/s)	纵摇角位移	纵摇角速度 ( $s^{-1}$ )
10	-0.60	1.04	-0.01	-0.13
20	-0.77	-0.32	0.03	0.04
40	0.39	0.84	-0.05	-0.06
60	-0.34	-0.80	0.05	0.07
100	-0.04	-1.04	0.02	0.09

## 5.4 问题四模型的建立与求解

### 5.4.1 模型的建立

在结合垂荡运动和纵摇运动的情况下，通过改进方程(4)，即对其进行线速度与角速度的转换，建立有关直线/旋转阻尼系数与平均输出功率的模型：

$$P = \frac{1}{2} B(v_2 - v_1)^2 \quad (4)$$

$$P_x = \frac{1}{2} B_x(\theta_1 R_1 - \theta_2 R_2)^2 \quad (8)$$

其中 $P_x$ 为浮子在纵摇运动中吸收能量的功率， $P_2$ 为浮子在纵摇运动中吸收能量的功率， $B_x$ 为旋转阻尼器的阻尼系数， $\theta_1$ 为振子的纵摇角位移， $\theta_2$ 为浮子的纵摇角位移， $R_1$ 为振子半径， $R_2$ 为浮子半径。

### 5.4.2 模型的求解

鉴于直接求解的复杂性，为了简化该过程，我们通过联立该方程组，使用四五阶龙格库塔法求解微分方程，得到若干点集，并对该若干点集通过 MATLAB 的工具箱进行曲面拟合，得到图像如下图所示

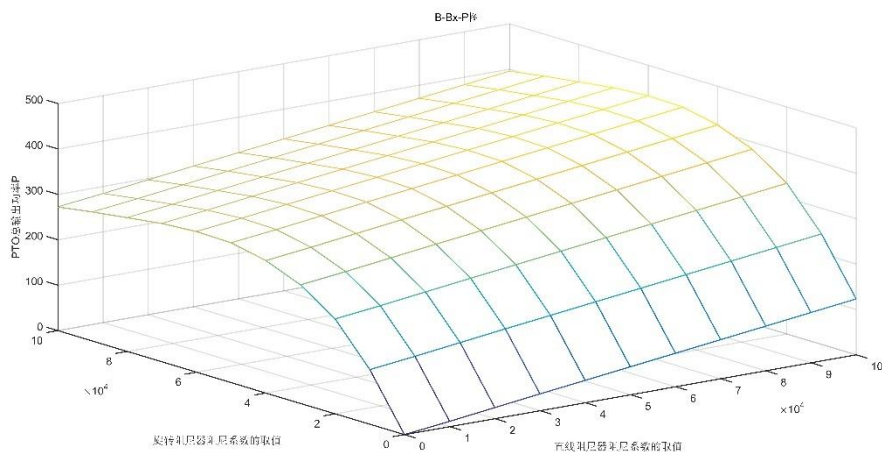


图 7 问题四中的曲面拟合图像

## 六、 模型的评价

### 6.1 模型的优点

- (1) 综合流体和刚体动力学的知识，本模型在一定程度上简化了该问题，并且求出了准确性相对较高的解。
- (2) 该模型曲线/曲面拟合度较高，所求结果误差小，计算结果较为准确。
- (3) 处理较大样本时有较好的表现，即使数据量较大，也能在相对较短时间内求出结果。

### 6.2 模型的缺点

- (1) 由于 4 阶 5 阶 RK 算法是自适应步长算法，因此时间间隔即步长的精度不同，步长较宽或者较短的部分点都不能通过代码来找到，特别是在 0.2s~1.4s 这部分刚开始的时间内，其步长较宽，需要手动寻找表格 dataNEW 中满足时间条件的数据，但由于需要手动寻找的点不超过 15 个，在八百多个点内属于可以接受的程度。
- (2) 在进行直线阻尼器 ( $B=10000$ ) 和功率的曲线拟合 以及直线阻尼器 ( $B=B(t)$ ) 和功率的曲面拟合时，选取的点仍然较少

## 七、参考文献

彭建军.振荡浮子式波浪能发电装置水动力性能研究.山东大学, 2014

<sup>2</sup> 黄秀秀.振荡浮子式波浪发电系统的控制.华南理工大学, 2019

<sup>3</sup> [转动惯量 百度百科 \(baidu.com\)](http://baike.baidu.com)



## 附录

### 附录 1

介绍：支撑材料的文件列表

MATLAB:

1. odefun\_Q11.m 第一题情形 1 微分方程组子函数
2. odefun\_Q12.m 第一题情形 2 微分方程组子函数
3. odefun\_Q211W.m 第二题情形 1 微分方程组子函数 (B=1W)
4. odefun\_Q212W.m 第二题情形 1 微分方程组子函数 (B=2W)
5. odefun\_Q213W.m 第二题情形 1 微分方程组子函数 (B=3W)
6. odefun\_Q215W.m 第二题情形 1 微分方程组子函数 (B=5W)
7. odefun\_Q217W.m 第二题情形 1 微分方程组子函数 (B=7W)
8. odefun\_Q219W.m 第二题情形 1 微分方程组子函数 (B=9W)
9. odefun\_Q2110W.m 第二题情形 1 微分方程组子函数 (B=10W)
10. odefun\_Q3chuidang.m 第三题垂荡微分方程组子函数
11. odefun\_Q3zongyao.m 第三题纵摇微分方程组子函数
12. odefun\_Q4chuidang.m 第四题垂荡微分方程组子函数
13. odefun\_Q4zongyao.m 第四题纵摇微分方程组子函数
14. Q1\_main.m 第一题主程序
15. Q21\_main.m 第二题情形 1 主程序
16. Q22\_main2.m 第二题情形 2 主程序
17. Q3\_main.m 第三题主程序
18. main\_4.m 第四题主程序

EXCEL:

- 1、result1-1
- 2、result1-2
- 3、result3

### 附录 2

介绍：该代码是 MATLAB 语言编写的，用于四阶五阶 RK 法求解微分方程组

```
clc;clear;
tspan=[0 180];%总步长设置
y0=[0 0 0 0];%初值设置
%%四阶五阶 RK 法求解微分方程组(情形 2)
for i0=8;i=0:10000:100000;
end
B=i';
[~,x_Q411]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(1)),tspan,y0);x_Q411=abs(x_Q411(:,4)-x_Q411(:,2)).^(2);x_Q411=sum(x_Q411,1)/length(x_Q411);
[~,x_Q412]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(2)),tspan,y0);x_Q412=abs(x_Q412(:,4)-x_Q412(:,2)).^(2);x_Q412=sum(x_Q412,1)/length(x_Q412);
```



```

[~,x_Q413]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(3)),tspan,y0);x_Q413=abs(x_Q413(:,4)-x_Q413(:,2)).^(2);x_Q413=sum(x_Q413,1)/length(x_Q413);
[~,x_Q414]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(4)),tspan,y0);x_Q414=abs(x_Q414(:,4)-x_Q414(:,2)).^(2);x_Q414=sum(x_Q414,1)/length(x_Q414);
[~,x_Q415]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(5)),tspan,y0);x_Q415=abs(x_Q415(:,4)-x_Q415(:,2)).^(2);x_Q415=sum(x_Q415,1)/length(x_Q415);
[~,x_Q416]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(6)),tspan,y0);x_Q416=abs(x_Q416(:,4)-x_Q416(:,2)).^(2);x_Q416=sum(x_Q416,1)/length(x_Q416);
[~,x_Q417]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(7)),tspan,y0);x_Q417=abs(x_Q417(:,4)-x_Q417(:,2)).^(2);x_Q417=sum(x_Q417,1)/length(x_Q417);
[~,x_Q418]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(8)),tspan,y0);x_Q418=abs(x_Q418(:,4)-x_Q418(:,2)).^(2);x_Q418=sum(x_Q418,1)/length(x_Q418);
[~,x_Q419]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(9)),tspan,y0);x_Q419=abs(x_Q419(:,4)-x_Q419(:,2)).^(2);x_Q419=sum(x_Q419,1)/length(x_Q419);
[~,x_Q4110]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(10)),tspan,y0);x_Q4110=abs(x_Q4110(:,4)-x_Q4110(:,2)).^(2);x_Q4110=sum(x_Q4110,1)/length(x_Q4110);
[~,x_Q4111]=ode45(@(t,x)odefun_Q4chuidang(t,x,B(11)),tspan,y0);x_Q4111=abs(x_Q4111(:,4)-x_Q4111(:,2)).^(2);x_Q4111=sum(x_Q4111,1)/length(x_Q4111);
final=[x_Q411,x_Q412,x_Q413,x_Q414,x_Q415,x_Q416,x_Q417,x_Q418,x_Q419,x_Q4110,x_Q4111];
final=final';
final=[final(1,:)*B(1);
        final(2,:)*B(2);
        final(3,:)*B(3);
        final(4,:)*B(4);
        final(5,:)*B(5);
        final(6,:)*B(6);
        final(7,:)*B(7);
        final(8,:)*B(8);
        final(9,:)*B(9);
        final(10,:)*B(10);
        final(11,:)*B(11)];
[~,J_Q4zongyao1]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,0),tspan,y0);J_Q4zongyao1=abs(J_Q4zongyao1(:,4)*0.5-J_Q4zongyao1(:,2)).^(2);J_Q4zongyao1=sum(J_Q4zongyao1,1)/length(J_Q4zongyao1);
[~,J_Q4zongyao2]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,10000),tspan,y0);J_Q4zongyao2=abs(J_Q4zongyao2(:,4)*0.5-J_Q4zongyao2(:,2)).^(2);J_Q4zongyao2=sum(J_Q4zongyao2,1)/length(J_Q4zongyao2);
[~,J_Q4zongyao3]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,20000),tspan,y0);J_Q4zongyao3=abs(J_Q4zongyao3(:,4)*0.5-J_Q4zongyao3(:,2)).^(2);J_Q4zongyao3=sum(J_Q4zongyao3,1)/length(J_Q4zongyao3);
[~,J_Q4zongyao4]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,30000),tspan,y0);J_Q4zongyao4=abs(J_Q4zongyao4(:,4)*0.5-J_Q4zongyao4(:,2)).^(2);J_Q4zongyao4=sum(J_Q4zongyao4,1)/length(J_Q4zongyao4);

```

```

[~,J_Q4zongyao5]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,40000),tspan,y0);J_Q4zo
ngyao5=abs(J_Q4zongyao5(:,4)*0.5-J_Q4zongyao5(:,2)).^(2);J_Q4zongyao5=sum
(J_Q4zongyao5,1)/length(J_Q4zongyao5);
[~,J_Q4zongyao6]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,50000),tspan,y0);J_Q4zo
ngyao6=abs(J_Q4zongyao6(:,4)*0.5-J_Q4zongyao6(:,2)).^(2);J_Q4zongyao6=sum
(J_Q4zongyao6,1)/length(J_Q4zongyao6);
[~,J_Q4zongyao7]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,60000),tspan,y0);J_Q4zo
ngyao7=abs(J_Q4zongyao7(:,4)*0.5-J_Q4zongyao7(:,2)).^(2);J_Q4zongyao7=sum
(J_Q4zongyao7,1)/length(J_Q4zongyao7);
[~,J_Q4zongyao8]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,70000),tspan,y0);J_Q4zo
ngyao8=abs(J_Q4zongyao8(:,4)*0.5-J_Q4zongyao8(:,2)).^(2);J_Q4zongyao8=sum
(J_Q4zongyao8,1)/length(J_Q4zongyao8);
[~,J_Q4zongyao9]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,80000),tspan,y0);J_Q4zo
ngyao9=abs(J_Q4zongyao9(:,4)*0.5-J_Q4zongyao9(:,2)).^(2);J_Q4zongyao9=sum
(J_Q4zongyao9,1)/length(J_Q4zongyao9);
[~,J_Q4zongyao10]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,90000),tspan,y0);J_Q4z
ongyao10=abs(J_Q4zongyao10(:,4)*0.5-J_Q4zongyao10(:,2)).^(2);J_Q4zongyao1
0=sum(J_Q4zongyao10,1)/length(J_Q4zongyao10);
[~,J_Q4zongyao11]=ode45(@(t,J)odefun_Q4zongyao(t,J,100000),tspan,y0);J_Q4
zongyao11=abs(J_Q4zongyao11(:,4)*0.5-J_Q4zongyao11(:,2)).^(2);J_Q4zongyao
11=sum(J_Q4zongyao11,1)/length(J_Q4zongyao11);
final2=[J_Q4zongyao1,J_Q4zongyao2,J_Q4zongyao3,J_Q4zongyao4,J_Q4zongyao5,
J_Q4zongyao6,J_Q4zongyao7,J_Q4zongyao8,J_Q4zongyao9,J_Q4zongyao10,J_Q4zon
gyao11];
final2=final2';
final2=[final2(1,:)*B(1);
        final2(2,:)*B(2);
        final2(3,:)*B(3);
        final2(4,:)*B(4);
        final2(5,:)*B(5);
        final2(6,:)*B(6);
        final2(7,:)*B(7);
        final2(8,:)*B(8);
        final2(9,:)*B(9);
        final2(10,:)*B(10);
        final2(11,:)*B(11)];
BBP=zeros(11,11);
for i=1:11
    for j=1:11
        BBP(i,j)=final(i,1)+final2(j,1);
    end
end
%%绘制三维图,观测 P 和 B、alpha 的关系
y=B(:,1);

```

```

x=B(:,1);
z=BBP;
mesh(x,y,z);
xlabel('直线阻尼器阻尼系数的取值')
ylabel('旋转阻尼器阻尼系数的取值')
zlabel('PTO 总输出功率 P')
title('B-Bx-P 图')

```

### 附录 3

介绍：该代码是 MATLAB 语言编写的，用于四阶五阶 RK 法求解微分方程组

```

clc;clear;
tspan=[0 180];%总步长设置
y0=[0 0 0 0];%初值设置
%四阶五阶 RK 法求解微分方程组 (情形 1 和情形 2)
[t_Q11,x_Q11]=ode45('odefun_Q11',tspan,y0);
[t_Q12,x_Q12]=ode45('odefun_Q12',tspan,y0);
w=1.4005;T=(2*pi)/w;Ttotal=40*T;%计算前 40 个波浪周期的总时间
n=Ttotal/0.2;nL=ceil(n);%求出 40 个波浪周期内每间隔 0.2s 计数的次数
x_Q11=[x_Q11,t_Q11];result1_1=zeros(nL,5);o=size(x_Q11,1);
x_Q12=[x_Q12,t_Q12];result1_2=zeros(nL,5);O=size(x_Q12,1);
%根据题目 1 要求，搜索每隔 0.2s 的数据，并将他们整理成 result 矩阵
for G=1:nL;%初始化 result1_1 和 result1_2 矩阵
    result1_1(G,5)=x_Q11(1,5)+G*0.2;
    result1_2(G,5)=result1_1(G,5);
end
resultfirst=result1_1;
for G=1:nL
    for p=1:o
        for Q=0.001:0.001:0.05
            if abs(result1_1(G,5)-x_Q11(p,5))<=Q
                for m=1:5
                    result1_1(G,m)=x_Q11(p,m);
                end
            end
        end
    end
end
result1_1(:,[1,5])=result1_1(:,[5,1]);

```

```

result1_1(:, [2,4])=result1_1(:, [4,2]);
result1_1(:, [3,2])=result1_1(:, [2,3]);
result1_1(:, [4,5])=result1_1(:, [5,4]);
for G=1:nL
    for p=1:O
        for Q=0.001:0.001:0.05
            if abs(result1_2(G,5)-x_Q12(p,5))<=Q
                for M=1:5
                    result1_2(G,M)=x_Q12(p,M);
                end
            end
        end
    end
end
result1_2(:, [1,5])=result1_2(:, [5,1]);
result1_2(:, [2,4])=result1_2(:, [4,2]);
result1_2(:, [3,2])=result1_2(:, [2,3]);
result1_2(:, [4,5])=result1_2(:, [5,4]);
%%绘制振子/浮子的位移/速度-时间图
figure(1)
lstr = { '振子的位移', '振子的速度', '浮子的位移', '浮子的速度' };
for i=1:length(lstr)
    subplot(2,2,i)
    plot(t_Q11, x_Q11(:,i));
    xlabel('时间')
    ylabel( lstr{i} )
    title('振子/浮子的位移/速度-时间图{B=10000 情形}')
end
figure(2)
for U=1:length(lstr)
    subplot(2,2,U)
    plot(t_Q12, x_Q12(:,U));
    xlabel('时间')
    ylabel( lstr{U} )
    title('振子/浮子的位移/速度-时间图{B=10000*((abs(x(2)-x(4))))^0.5;情形}')
end

```

#### 附录 4

介绍：该代码是 MATLAB 语言编写的，用于求解题目三

```

clc;clear;
tspan=[0 160];%总步长设置
y0=[0 0 0 0];%初值设置
B=10000;%直线阻尼器的阻尼系数
Bx=1000;%旋转阻尼器的阻尼系数
w=1.7152;T=(2*pi)/w;Ttotal=40*T;%计算前 40 个波浪周期的总时间
n=Ttotal/0.2;nL=ceil(n);%求出 40 个波浪周期内每间隔 0.2s 计数的次数
%%四阶五阶 RK 法求解微分方程组(垂荡和纵摇)
[t_Q3chuidang,x_Q3chuidang]=ode45(@ (t,x) odefun_Q3chuidang(t,x,B),0:0.2:cei
il(Ttotal),y0);
[t_Q3zongyao,J_Q3zongyao]=ode113(@ (t,x) odefun_Q3zongyao(t,x,Bx),0:0.2:cei
il(Ttotal),y0);
x_Q3chuidang=[t_Q3chuidang,x_Q3chuidang];
J_Q3zongyao=[t_Q3zongyao,J_Q3zongyao];
%%根据题目 1 要求,搜索每隔 0.2s 的数据,并将他们整理成 result_3 矩阵
result3_1=x_Q3chuidang(1:734,1:5);
result3_1(:,[2,4])=result3_1(:,[4,2]);
result3_1(:,[3,5])=result3_1(:,[5,3]);
result3_2=J_Q3zongyao(1:734,1:5);
result_3=[result3_1(:,1),result3_1(:,2),result3_1(:,3),result3_2(:,2),res
ult3_2(:,3),result3_1(:,4),result3_1(:,5),result3_2(:,4),result3_2(:,5)];
%%绘制振子/浮子的位移/速度-时间图
figure(1)
lstr = { '浮子的位移', '浮子的速度', '振子的位移', '振子的速度' };
for i=1:length(lstr)
    subplot(2,2,i)
    plot(result3_1(:,1), result3_1(:,i+1));
    xlabel('时间')
    ylabel( lstr{i} )
    title('题目三垂荡情况振子/浮子的位移/速度-时间图{B=10000 情形}')
end
figure(2)
lstr = { '浮子的位移', '浮子的速度', '振子的位移', '振子的速度' };
for i=1:length(lstr)
    subplot(2,2,i)
    plot(J_Q3zongyao(:,1), J_Q3zongyao(:,i+1));
    xlabel('时间')
    ylabel( lstr{i} )
    title('题目三纵摇情况振子/浮子的位移/速度-时间图{Bx=1000 情形}')
end

```

介绍：该代码是 MATLAB 语言编写的，用于求解题目二（1）

```
lc;clear;
tspan=[0 180];%总步长设置
y0=[0 0 0 0];%初值设置
%%四阶五阶 RK 法求解微分方程组(情形1)
[t_Q211W,x_Q211W]=ode45('odefun_Q211W',tspan,y0);
[t_Q213W,x_Q213W]=ode45('odefun_Q213W',tspan,y0);
[t_Q215W,x_Q215W]=ode45('odefun_Q215W',tspan,y0);
[t_Q217W,x_Q217W]=ode45('odefun_Q217W',tspan,y0);
[t_Q219W,x_Q219W]=ode45('odefun_Q219W',tspan,y0);
[t_Q2110W,x_Q2110W]=ode45('odefun_Q2110W',tspan,y0);
%%计算 PTO 系统平均输出功率
S=pi*1^2;%浮子入水横截面积
m2=4866;%浮子质量
p=1165.992;%垂荡附加质量
density=1025;%海水的密度
g=9.8;%重力加速度
w=2.2143;%入射波浪频率
k1=length(x_Q211W);k2=length(x_Q213W);k3=length(x_Q215W);
k4=length(x_Q217W);k5=length(x_Q219W);k6=length(x_Q2110W);
for i0=8;i1=1:k1;i2=1:k2;i3=1:k3;i4=1:k4;
    i5=1:k5;i6=1:k6;

vd1W=zeros(size(x_Q211W,1),1);vd3W=zeros(size(x_Q213W,1),1);vd5W=zeros(size(x_Q215W,1),1);

vd7W=zeros(size(x_Q217W,1),1);vd9W=zeros(size(x_Q219W,1),1);vd10W=zeros(size(x_Q2110W,1),1);

vd1W(i1,1)=(x_Q211W(i1,4)-x_Q211W(i1,2)).^2;vd3W(i2,1)=(x_Q213W(i2,4)-x_Q213W(i2,2)).^2;

vd5W(i3,1)=(x_Q215W(i3,4)-x_Q215W(i3,2)).^2;vd7W(i4,1)=(x_Q217W(i4,4)-x_Q217W(i4,2)).^2;

vd9W(i5,1)=(x_Q219W(i5,4)-x_Q219W(i5,2)).^2;vd10W(i6,1)=(x_Q2110W(i6,4)-x_Q2110W(i6,2)).^2;
end

vd1W=sum(vd1W,1);vd3W=sum(vd3W,1);vd5W=sum(vd5W,1);vd7W=sum(vd7W,1);
vd9W=sum(vd9W,1);vd10W=sum(vd10W,1);
vdtotal=[vd1W;vd3W;vd5W;vd7W;vd9W;vd10W];
vdtotal(1,1)=vdtotal(1,1)/k1;vdtotal(2,1)=vdtotal(2,1)/k2;vdtotal(3,1)=vdtotal(3,1)/k3;
```

```

vdttotal(4,1)=vdttotal(4,1)/k4;vdttotal(5,1)=vdttotal(5,1)/k5;vdttotal(6,1)=vdttotal(6,1)/k6;
B=[10000;30000;50000;70000;90000;100000];
for i7=1:size(vdttotal,1)
    Pt(i7,1)=0.5*B(i7,1)*vdttotal(i7,1);
end
figure(1)
plot(B(:,1),Pt(:,1));
xlabel('B')
ylabel('Pt')
title('Pt-B 图(情形 1)')

```

## 附录 6

介绍：该代码是 MATLAB 语言编写的，用于求解题目二（2）

```

clc;clear;
tspan=[0 180];%总步长设置
y0=[0 0 0 0];%初值设置
%%四阶五阶 RK 法求解微分方程组(情形 2)
for i0=8;i=0:10000:100000;
end
B=i';alpha=[0;0.1;0.3;0.5;0.7;0.9;1];
[~,x_Q2211]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(1),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2211=abs(x_Q2211(:,4)-x_Q2211(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2211=sum(x_Q2211,1)/length(x_Q2211);
[~,x_Q2221]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(1),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2221=abs(x_Q2221(:,4)-x_Q2221(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2221=sum(x_Q2221,1)/length(x_Q2221);
[~,x_Q2231]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(1),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2231=abs(x_Q2231(:,4)-x_Q2231(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2231=sum(x_Q2231,1)/length(x_Q2231);
[~,x_Q2241]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(1),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2241=abs(x_Q2241(:,4)-x_Q2241(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2241=sum(x_Q2241,1)/length(x_Q2241);
[~,x_Q2251]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(1),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2251=abs(x_Q2251(:,4)-x_Q2251(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2251=sum(x_Q2251,1)/length(x_Q2251);
[~,x_Q2261]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(1),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2261=abs(x_Q2261(:,4)-x_Q2261(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2261=sum(x_Q2261,1)/length(x_Q2261);
[~,x_Q2271]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(1),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2271=abs(x_Q2271(:,4)-x_Q2271(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2271=sum(x_Q2271,1)/length(x_Q2271);
[~,x_Q2212]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(2),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2212=abs(x_Q2212(:,4)-x_Q2212(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2212=sum(x_Q2212,1)/length

```

```

(x_Q2212);
[~,x_Q2222]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(2),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2222=a
bs(x_Q2222(:,4)-x_Q2222(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2222=sum(x_Q2222,1)/length
(x_Q2222);
[~,x_Q2232]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(2),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2232=a
bs(x_Q2232(:,4)-x_Q2232(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2232=sum(x_Q2232,1)/length
(x_Q2232);
[~,x_Q2242]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(2),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2242=a
bs(x_Q2242(:,4)-x_Q2242(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2242=sum(x_Q2242,1)/length
(x_Q2242);
[~,x_Q2252]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(2),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2252=a
bs(x_Q2252(:,4)-x_Q2252(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2252=sum(x_Q2252,1)/length
(x_Q2252);
[~,x_Q2262]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(2),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2262=a
bs(x_Q2262(:,4)-x_Q2262(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2262=sum(x_Q2262,1)/length
(x_Q2262);
[~,x_Q2272]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(2),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2272=a
bs(x_Q2272(:,4)-x_Q2272(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2272=sum(x_Q2272,1)/length
(x_Q2272);
[~,x_Q2213]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(3),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2213=a
bs(x_Q2213(:,4)-x_Q2213(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2213=sum(x_Q2213,1)/length
(x_Q2213);
[~,x_Q2223]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(3),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2223=a
bs(x_Q2223(:,4)-x_Q2223(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2223=sum(x_Q2223,1)/length
(x_Q2223);
[~,x_Q2233]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(3),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2233=a
bs(x_Q2233(:,4)-x_Q2233(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2233=sum(x_Q2233,1)/length
(x_Q2233);
[~,x_Q2243]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(3),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2243=a
bs(x_Q2243(:,4)-x_Q2243(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2243=sum(x_Q2243,1)/length
(x_Q2243);
[~,x_Q2253]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(3),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2253=a
bs(x_Q2253(:,4)-x_Q2253(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2253=sum(x_Q2253,1)/length
(x_Q2253);
[~,x_Q2263]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(3),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2263=a
bs(x_Q2263(:,4)-x_Q2263(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2263=sum(x_Q2263,1)/length
(x_Q2263);
[~,x_Q2273]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(3),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2273=a
bs(x_Q2273(:,4)-x_Q2273(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2273=sum(x_Q2273,1)/length
(x_Q2273);
[~,x_Q2214]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(4),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2214=a
bs(x_Q2214(:,4)-x_Q2214(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2214=sum(x_Q2214,1)/length
(x_Q2214);
[~,x_Q2224]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(4),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2224=a

```



```

bs(x_Q2224(:,4)-x_Q2224(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2224=sum(x_Q2224,1)/length
(x_Q2224);
[~,x_Q2234]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(4),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2234=a
bs(x_Q2234(:,4)-x_Q2234(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2234=sum(x_Q2234,1)/length
(x_Q2234);
[~,x_Q2244]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(4),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2244=a
bs(x_Q2244(:,4)-x_Q2244(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2244=sum(x_Q2244,1)/length
(x_Q2244);
[~,x_Q2254]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(4),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2254=a
bs(x_Q2254(:,4)-x_Q2254(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2254=sum(x_Q2254,1)/length
(x_Q2254);
[~,x_Q2264]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(4),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2264=a
bs(x_Q2264(:,4)-x_Q2264(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2264=sum(x_Q2264,1)/length
(x_Q2264);
[~,x_Q2274]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(4),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2274=a
bs(x_Q2274(:,4)-x_Q2274(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2274=sum(x_Q2274,1)/length
(x_Q2274);
[~,x_Q2215]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(5),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2215=a
bs(x_Q2215(:,4)-x_Q2215(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2215=sum(x_Q2215,1)/length
(x_Q2215);
[~,x_Q2225]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(5),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2225=a
bs(x_Q2225(:,4)-x_Q2225(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2225=sum(x_Q2225,1)/length
(x_Q2225);
[~,x_Q2235]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(5),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2235=a
bs(x_Q2235(:,4)-x_Q2235(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2235=sum(x_Q2235,1)/length
(x_Q2235);
[~,x_Q2245]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(5),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2245=a
bs(x_Q2245(:,4)-x_Q2245(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2245=sum(x_Q2245,1)/length
(x_Q2245);
[~,x_Q2255]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(5),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2255=a
bs(x_Q2255(:,4)-x_Q2255(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2255=sum(x_Q2255,1)/length
(x_Q2255);
[~,x_Q2265]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(5),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2265=a
bs(x_Q2265(:,4)-x_Q2265(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2265=sum(x_Q2265,1)/length
(x_Q2265);
[~,x_Q2275]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(5),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2275=a
bs(x_Q2275(:,4)-x_Q2275(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2275=sum(x_Q2275,1)/length
(x_Q2275);
[~,x_Q2216]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(6),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2216=a
bs(x_Q2216(:,4)-x_Q2216(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2216=sum(x_Q2216,1)/length
(x_Q2216);
[~,x_Q2226]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(6),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2226=a
bs(x_Q2226(:,4)-x_Q2226(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2226=sum(x_Q2226,1)/length
(x_Q2226);

```

```

[~,x_Q2236]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(6),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2236=abs(x_Q2236(:,4)-x_Q2236(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2236=sum(x_Q2236,1)/length(x_Q2236);
[~,x_Q2246]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(6),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2246=abs(x_Q2246(:,4)-x_Q2246(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2246=sum(x_Q2246,1)/length(x_Q2246);
[~,x_Q2256]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(6),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2256=abs(x_Q2256(:,4)-x_Q2256(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2256=sum(x_Q2256,1)/length(x_Q2256);
[~,x_Q2266]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(6),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2266=abs(x_Q2266(:,4)-x_Q2266(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2266=sum(x_Q2266,1)/length(x_Q2266);
[~,x_Q2276]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(6),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2276=abs(x_Q2276(:,4)-x_Q2276(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2276=sum(x_Q2276,1)/length(x_Q2276);
[~,x_Q2217]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(7),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2217=abs(x_Q2217(:,4)-x_Q2217(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2217=sum(x_Q2217,1)/length(x_Q2217);
[~,x_Q2227]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(7),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2227=abs(x_Q2227(:,4)-x_Q2227(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2227=sum(x_Q2227,1)/length(x_Q2227);
[~,x_Q2237]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(7),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2237=abs(x_Q2237(:,4)-x_Q2237(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2237=sum(x_Q2237,1)/length(x_Q2237);
[~,x_Q2247]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(7),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2247=abs(x_Q2247(:,4)-x_Q2247(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2247=sum(x_Q2247,1)/length(x_Q2247);
[~,x_Q2257]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(7),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2257=abs(x_Q2257(:,4)-x_Q2257(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2257=sum(x_Q2257,1)/length(x_Q2257);
[~,x_Q2267]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(7),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2267=abs(x_Q2267(:,4)-x_Q2267(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2267=sum(x_Q2267,1)/length(x_Q2267);
[~,x_Q2277]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(7),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2277=abs(x_Q2277(:,4)-x_Q2277(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2277=sum(x_Q2277,1)/length(x_Q2277);
[~,x_Q2218]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(8),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2218=abs(x_Q2218(:,4)-x_Q2218(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2218=sum(x_Q2218,1)/length(x_Q2218);
[~,x_Q2228]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(8),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2228=abs(x_Q2228(:,4)-x_Q2228(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2228=sum(x_Q2228,1)/length(x_Q2228);
[~,x_Q2238]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(8),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2238=abs(x_Q2238(:,4)-x_Q2238(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2238=sum(x_Q2238,1)/length

```

```

(x_Q2238);
[~,x_Q2248]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(8),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2248=a
bs(x_Q2248(:,4)-x_Q2248(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2248=sum(x_Q2248,1)/length
(x_Q2248);
[~,x_Q2258]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(8),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2258=a
bs(x_Q2258(:,4)-x_Q2258(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2258=sum(x_Q2258,1)/length
(x_Q2258);
[~,x_Q2268]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(8),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2268=a
bs(x_Q2268(:,4)-x_Q2268(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2268=sum(x_Q2268,1)/length
(x_Q2268);
[~,x_Q2278]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(8),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2278=a
bs(x_Q2278(:,4)-x_Q2278(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2278=sum(x_Q2278,1)/length
(x_Q2278);
[~,x_Q2219]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(9),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2219=a
bs(x_Q2219(:,4)-x_Q2219(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q2219=sum(x_Q2219,1)/length
(x_Q2219);
[~,x_Q2229]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(9),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2229=a
bs(x_Q2229(:,4)-x_Q2229(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q2229=sum(x_Q2229,1)/length
(x_Q2229);
[~,x_Q2239]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(9),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2239=a
bs(x_Q2239(:,4)-x_Q2239(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q2239=sum(x_Q2239,1)/length
(x_Q2239);
[~,x_Q2249]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(9),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2249=a
bs(x_Q2249(:,4)-x_Q2249(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q2249=sum(x_Q2249,1)/length
(x_Q2249);
[~,x_Q2259]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(9),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2259=a
bs(x_Q2259(:,4)-x_Q2259(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q2259=sum(x_Q2259,1)/length
(x_Q2259);
[~,x_Q2269]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(9),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2269=a
bs(x_Q2269(:,4)-x_Q2269(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q2269=sum(x_Q2269,1)/length
(x_Q2269);
[~,x_Q2279]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(9),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2279=a
bs(x_Q2279(:,4)-x_Q2279(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q2279=sum(x_Q2279,1)/length
(x_Q2279);
[~,x_Q22110]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(10),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2211
0=abs(x_Q22110(:,4)-x_Q22110(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q22110=sum(x_Q22110,1)
/length(x_Q22110);
[~,x_Q22210]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(10),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2221
0=abs(x_Q22210(:,4)-x_Q22210(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q22210=sum(x_Q22210,1)
/length(x_Q22210);
[~,x_Q22310]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(10),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2231
0=abs(x_Q22310(:,4)-x_Q22310(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q22310=sum(x_Q22310,1)
/length(x_Q22310);
[~,x_Q22410]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(10),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2241

```

```

0=abs(x_Q22410(:,4)-x_Q22410(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q22410=sum(x_Q22410,1)
/length(x_Q22410);
[~,x_Q22510]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(10),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2251
0=abs(x_Q22510(:,4)-x_Q22510(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q22510=sum(x_Q22510,1)
/length(x_Q22510);
[~,x_Q22610]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(10),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2261
0=abs(x_Q22610(:,4)-x_Q22610(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q22610=sum(x_Q22610,1)
/length(x_Q22610);
[~,x_Q22710]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(10),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2271
0=abs(x_Q22710(:,4)-x_Q22710(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q22710=sum(x_Q22710,1)
/length(x_Q22710);
[~,x_Q22111]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(11),alpha(1)),tspan,y0);x_Q2211
1=abs(x_Q22111(:,4)-x_Q22111(:,2)).^(2+alpha(1));x_Q22111=sum(x_Q22111,1)
/length(x_Q22111);
[~,x_Q22211]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(11),alpha(2)),tspan,y0);x_Q2221
1=abs(x_Q22211(:,4)-x_Q22211(:,2)).^(2+alpha(2));x_Q22211=sum(x_Q22211,1)
/length(x_Q22211);
[~,x_Q22311]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(11),alpha(3)),tspan,y0);x_Q2231
1=abs(x_Q22311(:,4)-x_Q22311(:,2)).^(2+alpha(3));x_Q22311=sum(x_Q22311,1)
/length(x_Q22311);
[~,x_Q22411]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(11),alpha(4)),tspan,y0);x_Q2241
1=abs(x_Q22411(:,4)-x_Q22411(:,2)).^(2+alpha(4));x_Q22411=sum(x_Q22411,1)
/length(x_Q22411);
[~,x_Q22511]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(11),alpha(5)),tspan,y0);x_Q2251
1=abs(x_Q22511(:,4)-x_Q22511(:,2)).^(2+alpha(5));x_Q22511=sum(x_Q22511,1)
/length(x_Q22511);
[~,x_Q22611]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(11),alpha(6)),tspan,y0);x_Q2261
1=abs(x_Q22611(:,4)-x_Q22611(:,2)).^(2+alpha(6));x_Q22611=sum(x_Q22611,1)
/length(x_Q22611);
[~,x_Q22711]=ode45(@(t,x)odefun_Q22(t,x,B(11),alpha(7)),tspan,y0);x_Q2271
1=abs(x_Q22711(:,4)-x_Q22711(:,2)).^(2+alpha(7));x_Q22711=sum(x_Q22711,1)
/length(x_Q22711);
%%计算最后的矩阵即 B-alpha-P 矩阵
final=[x_Q2211,x_Q2221,x_Q2231,x_Q2241,x_Q2251,x_Q2261,x_Q2271;
x_Q2212,x_Q2222,x_Q2232,x_Q2242,x_Q2252,x_Q2262,x_Q2272;
x_Q2213,x_Q2223,x_Q2233,x_Q2243,x_Q2253,x_Q2263,x_Q2273;
x_Q2214,x_Q2224,x_Q2234,x_Q2244,x_Q2254,x_Q2264,x_Q2274;
x_Q2215,x_Q2225,x_Q2235,x_Q2245,x_Q2255,x_Q2265,x_Q2275;
x_Q2216,x_Q2226,x_Q2236,x_Q2246,x_Q2256,x_Q2266,x_Q2276;
x_Q2217,x_Q2227,x_Q2237,x_Q2247,x_Q2257,x_Q2267,x_Q2277;
x_Q2218,x_Q2228,x_Q2238,x_Q2248,x_Q2258,x_Q2268,x_Q2278;
x_Q2219,x_Q2229,x_Q2239,x_Q2249,x_Q2259,x_Q2269,x_Q2279;
x_Q22110,x_Q22210,x_Q22310,x_Q22410,x_Q22510,x_Q22610,x_Q22710;
x_Q22111,x_Q22211,x_Q22311,x_Q22411,x_Q22511,x_Q22611,x_Q22711];

```

