Modelling Extremal Events: Chap 3 部分定理证明与例题解答

庄源

1 Proposition 3.1.1 (Poisson Approximation)

命题. 对于给定 $\tau \in [0, \infty]$ 和一列实数 (u_n)，下面两式等价：

$$n\bar{F}(u_n) \to \tau, \tag{3.4}$$

$$P(M_n \leq u_n) \to e^{-\tau}. \tag{3.5}$$

证明. 第一种情况：$0 \leq \tau < \infty$

从 (3.4) 到 (3.5) 的推导比较直观：

$$P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) = \left(1 - \bar{F}(u_n)\right)^n = \left(1 - \frac{\tau}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

从 (3.5) 到 (3.4)，对 (3.5) 两边取对数：

$$\ln\left(P(M_n \leq u_n)\right) = -n \ln\left(1 - \bar{F}(u_n)\right) \to \tau$$

使用等价无穷小，$-\ln(1-x) \sim x,\ x \to 0$[1]，也即 $n\bar{F}(u_n) = \tau + o(1)$。

第二种情况：$\tau = \infty$，使用反证法。

If $\tau = \infty$ and (3.4) holds, but (3.5) does not, there must be a subsequence (n_k) such that $P(M_{n_k} \leq u_{n_k}) \to \exp\{-\tau'\}$ as $k \to \infty$ for some $\tau' < \infty$. But then (3.5) implies (3.4), so that $n_k\overline{F}(u_{n_k}) \to \tau' < \infty$, contradicting (3.4) with $\tau = \infty$. Similarly, (3.5) implies (3.4) for $\tau = \infty$. □

□

2 Corollary 3.1.2

推论. 假设 $x_F < \infty$ 且

$$\bar{F}(x_F-) = F(x_F) - F(x_F-) > 0.$$

那么对于任意的序列 (u_n) 都有：

$$P(M_n \leq u_n) \to \rho,$$

要么 $\rho = 0$，要么 $\rho = 1$。

证明. 为了能够使用 Poisson 近似，不妨令 $\rho = \exp\{-\tau\}$，其中 $0 \leq \tau \leq \infty$[2]。由 Poisson 近似，

[1] $\bar{F}(u_n) \to 0$ 一定成立，因为若 $\bar{F}(u_{n_k})$ 不趋于 0，则 $\Pr(M_{n_k} \leq u_{n_k}) = \left(1 - \bar{F}(u_{n_k})\right)^{n_k}$，推出 $\Pr(M_{n_k} \leq u_{n_k}) \to 0$，与 (3.5) 相违背。

[2] 上述转换能成立，是因为 $0 \leq \rho \leq 1$。

$n\bar{F}(u_n) \to \tau$，$n \to \infty$。如果 $u_n < x_F$，n 有无限多，我们有 $\bar{F}(u_n) \geq \bar{F}(x_{F-}) > 0$，因此 $\tau = \infty$。另外有可能的情况是 $u_n \geq x_F$，因此 $n\bar{F}(u_n) = 0$，$\tau = 0$。既然 $\tau = \infty$ 或 0，那么 $\rho = 0$ 或 1。 □

3 Example 3.1.4 Poisson Distribution

对于 Poisson 分布，有：

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda > 0$$

从而有：

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} &= 1 - \frac{F(k) - F(k-1)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - \frac{P(X=k)}{\bar{F}(k-1)} \\
&= 1 - \frac{\lambda^k}{k!}\left(\sum_{r=k}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}\right)^{-1} = 1 - \left(\frac{k!}{\lambda^k} \times \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\right)^{-1} \\
&= 1 - \left(1 + \sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\right)^{-1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

不妨令 $s = r - k$，则

$$\sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{k!}{r!}\lambda^{r-k} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^s}{(k+1)(k+2)\cdots(k+s)} \leq \sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k}\right)^s = \frac{\lambda/k}{1-\lambda/k}, \quad k > \lambda$$

所以 $\bar{F}(k)/\bar{F}(k-1) \to 0$，$k \to \infty$。

4 Example 3.1.5 Geometric distribution

对于几何分布，有：

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1$$

仿照例 3.1.4 的步骤，

$$\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - (1-p)^{k-1}\left(\sum_{r=k}^{\infty}(1-p)^{r-1}\right)^{-1} = 1 - p \in (0, 1)$$

对于负二项分布，其证明也类似。

5 Theorem 3.2.2 Limit property of max-stable laws

想要证明：最大值的极限分布类型也就是最大稳定分布的类型。

对于最大值的极限分布，假设其有一个非退化的极限分布，该分布在 $\mathbb{R}$ 上连续：

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

也就是 $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$。

此外，对于 $k \in \mathbb{R}$，有：

$$\lim_{n\to\infty} F^{nk}(c_n x + d_n) = \left(\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n)\right)^k = H^k(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

也有：

$$\lim_{n\to\infty} F^{nk}\left(c_{nk}x+d_{nk}\right)=H(x), \quad x\in\mathbb{R}$$

也就是 $c_{nk}^{-1}\left(M_n-d_{nk}\right)\xrightarrow{d} H^k$。

那么，由 convergence to type theorem：

$c_{nk}^{-1}\left(M_n-d_{nk}\right)\xrightarrow{d} H^k$ 时，$c_n^{-1}\left(M_n-d_n\right)\xrightarrow{d} H$ 也满足，则存在 $\tilde{c}_k>0$ 和 $\tilde{d}_k\in\mathbb{R}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{nk}}{c_n}=\tilde{c}_k \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{d_{nk}-d_n}{c_n}=\widetilde{d}_k$$

所以对于独立同分布随机变量 $Y_1,\ldots,Y_k$，累积分布函数为 H，

$$\max\left(Y_1,\ldots,Y_k\right)\stackrel{d}{=}\widetilde{c}_kY_1+\tilde{d}_k$$

因此，最大值的极限分布也最大稳定。

6 由式 3.10 推导至 3.11

命题. 由

$$H^t(x)=H(\gamma(t)x+\delta(t)) \tag{3.10}$$

有

$$\gamma(st)=\gamma(s)\gamma(t), \quad \delta(st)=\gamma(t)\delta(s)+\delta(t) \tag{3.11}$$

证明.

$$H^{ts}(x)=H(\gamma(ts)x+\delta(ts))$$

则

$$\begin{aligned}H^{ts}(x)&=\left(H^s(x)\right)^t=H^t(\gamma(s)x+\delta(s))\\&=H[\gamma(t)(\gamma(s)x+\delta(s))+\delta(t)]\\&=H(\gamma(t)\gamma(s)x+\gamma(t)\delta(s)+\delta(t))\end{aligned}$$

利用系数的一一对应，可得 (3.11)。 □