UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS

Asignatura:

Análisis Matemático I

Catedrático:

Cesar Alvarado

Alumno:

Jaime Yubini Sibrian Romero

N° Cuenta:

20182400022

Fecha de Entrega

Sábado 15 de octubre de 2022

1) Probar que si a es una cota superior de un conjunto A y además es elemento de A, entonces $a = \sup A$.

Demostración:

Por contradicción:

Supongamos que $a \neq \sup(A)$

Sabemos que a es una cota superior entonces $\forall x \in A,\ x \leq a$ y $a \in A$

Usando el lema del supremo

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a_1 \in A$ t.q $s - \varepsilon < a$, como $S = \sup(A)$ entonces $a \leq S$

Pero es una contradicción pues $x \leq a$ y es una cota superior y $S > a$ por lo cual a es una cota superior más pequeña que S $\boxed{\Rightarrow\Leftarrow}$

$\therefore a = \sup(A)$.

② Demuestre que dados dos números reales tales que $a < b$, existe un número irracional t t.q $a < t < b$. Esto significa que los irracionales son densos.

Sea $a, b \in \mathbb{Q}$ t.q $a < b$ p.d.q $\exists t \in \mathbb{Q}^c$ t.q $a < t < b$

Si $a < b \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$

Sabemos que $\mathbb{Q}$ es Denso en $\mathbb{R}$. y $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$

$\therefore \exists t \in \mathbb{Q}$ t.q $\frac{a}{\sqrt{2}} < t < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < \sqrt{2}t < b$

Sea $x = \sqrt{2}t \Rightarrow x \in \mathbb{Q}^c$

$\therefore \mathbb{Q}^c$ son densos en $\mathbb{Q}$

③ Use la propiedad arquimediana de los reales para probar que

$$\operatorname{Inf}\{\tfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}=0$$

Prueba:
Es claro que $0<\frac{1}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ por lo cual el 0 es una cota inferior de $\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$

Ahora por Arquímedes
Sea $\varepsilon>0$, $\exists k\in\mathbb{N}$ t.q $\frac{1}{k}<\varepsilon$
es decir $\varepsilon>0 > \frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k}\in\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$ $\forall\varepsilon>0$

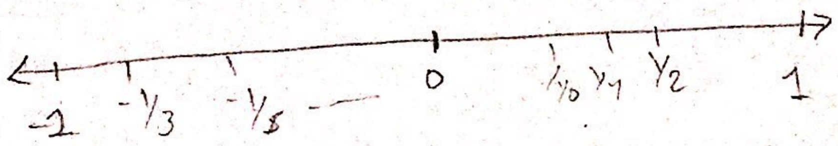
Por lo tanto $\operatorname{Inf}\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}=0$

④ Determinar, si existe, el extremo superior (Sup), extremo inferior (Inf), Max y Min en R de los siguientes conjuntos de R.

a) $A=\{x\in\mathbb{R} : x=\frac{(-1)^n}{n}, n\in\mathbb{N}\}$

Comportamiento

$A=\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$



Hipótesis $Max(A)=\frac{1}{2}$, $Min(A)=-1$

① Demostrar que $Max(A)=1/2$
i) $1/2\in A$
ii) $\forall x\in A \Rightarrow x\leq 1/2$.

i) Para $n=2$ temos que $\frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \in A$

ii) $\forall x \in A$ $x = \frac{(-1)^n}{n}$ se cumple que $x \leq 1/2$

$\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$ Por demostrar

$(-1)^n < \frac{n}{2}$

Con base $n=1$ $(-1) \leq \frac{1}{2}$

H. Inducc. $n=k$ $(-1)^k \leq \frac{k}{2}$

Para $n=k+1$ $= (-1)^{k+1} \leq \frac{k+1}{2}$

$= (-1)^k \cdot (-1) \leq \frac{k+1}{2}$

$= -(-1)^k \leq \frac{k+1}{2}$

$-k-1$

min $(A) = -1$

Sup $(A) = 1/2$

Inf $(A) = -1$

$B = \{ x = \frac{2n^2-3}{n^2}, n \in N \}$

Visualizar

$B = \{ -1, \frac{5}{4}, \frac{15}{9}, \frac{29}{16}, \frac{47}{25}, \text{———} \}$

Hipótesis: $Min(B) = -1$, $Sup(A) = 2$

Demostrar que $Sup(B) = 2$.

i) $\forall x \in B \Rightarrow 2 \geq x$

ii) $\forall y > 0 \; \exists x \in B$ t.q $x < y$

i) $2 \geq \frac{2n^2-3}{n^2} \Rightarrow 2n^2 \geq 2n^2 - 3 \quad \forall n \in N$

ii) Sea $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana $\exists n \in N$ t.q $\frac{1}{n} < \varepsilon$ entonces $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ $\qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

a) $\frac{2n^2-3}{n^2} = 2 - \frac{3}{n^2}$

$\frac{3}{n^2} < 3\varepsilon = \bar{\varepsilon} \Rightarrow \frac{3}{n^2} < \bar{\varepsilon} \Rightarrow -\frac{3}{n^2} > -\bar{\varepsilon}$

$\Rightarrow 2 - \frac{3}{n} > 2 - \bar{\varepsilon}$

$\Rightarrow 2 - \varepsilon < 2 - \frac{3}{n} \in B$

Por el lema:

$S = Sup(B) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in B$ t.q $S - \varepsilon < a$.

- $Max(B) = \nexists$ vamos a demostrar que $2 \notin B$
$\Leftrightarrow 2 \neq \frac{2n^2-3}{n^2} \quad \forall n \in N$.

Por contradicción

Suponemos que $2 = \frac{2n^2-3}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = 2n^3 - 3$ $\boxed{\Rightarrow\Leftarrow}$

Pero $2n^2 \neq 2n^2-3$

Demostrar que Min $(B) = -1$

i) $-1 \in B$

ii) $\forall x \in B \Rightarrow -1 \leq x$

i) para $n=1 \Rightarrow \frac{2-3}{1} = -1 \in B$

ii) $\forall x \in B$ se cumple que $-1 \leq \frac{2n^2-3}{n^2}$

$-n^2 \leq 2n^2 - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$-3n^2 \leq -3$

$n^2 \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (pues es obvio)

$\therefore \text{Inf}(B) = -1$

i) $\forall x \in B \Rightarrow x \geq -1$

ii) $\forall y > 0 \ \exists x \in B$ t.q $x < y$

i) $-1 \leq \frac{2n^2-3}{2} \Rightarrow n^2 \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) Sea $\varepsilon > 0$ por la prop. arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ t.q

$\frac{1}{n} < \varepsilon. \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{n^2} < 3\varepsilon = \bar{\varepsilon}$

$-\frac{3}{n^2} < \frac{3}{n^2} < \bar{\varepsilon} \Rightarrow -\frac{3}{n^2} < \bar{\varepsilon} \Rightarrow 2 - \frac{3}{n^2} < \bar{\varepsilon} + 2$

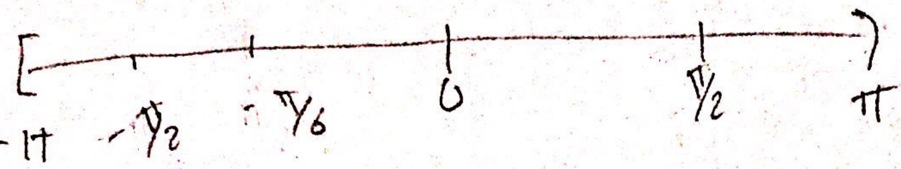
$2 - \frac{3}{n^2} < \bar{\varepsilon} + 3 - 1$

$2 - \frac{3}{n^2} < \hat{\varepsilon} - 1$

$\therefore \text{Inf}(B) = -1.$

$C = \{x \in [-\pi, \pi[\ : \ \sin x > -1/2\}$

$\sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x > \sin^{-1}(-1/2) \Rightarrow x > -\frac{\pi}{6}$



$\bar{C} = \{-\pi/6 < x < \pi\} \cup \{-\pi\}$

Supremo $(\bar{C}) = \pi$, Mínimo $(\bar{C}) = -\pi$

Demostrar que Supre $(C) = \pi$

i) $\forall x \in \bar{C} \Rightarrow x < \pi$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in \bar{C} \Rightarrow x < \varepsilon$

i) por defini. $x < \pi \Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < 1 < \pi$ ✓

Por argum.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$-\frac{1}{2} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ $\quad \frac{1}{2} < \varepsilon$ $\quad -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \varepsilon$

$D = \{0, 1, -1, 2, -2, -3, 3, -n, n, \ldots\}$ con $n \in \mathbb{N}$

$\bar{D} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- No existe Mínimo ni Máximo pues no es un conjunto acotado y además es Infinito.

Supongamos que a es una cota Inferior para $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists n+1 > n$

Como a es cota inferior $\Rightarrow$ $a < -n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$-(n+1) < -n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $n+1 \in \mathbb{N}$

Entonces como $a < -n$ y $-(n+1) < -n$

$n-1 < a < -n$ $\Rightarrow \Leftarrow$

$\exists$ un valor menor que a que pertenece a el conjunto.

$\nexists$ Infimo ni Minimo.

Demostrar que $\{n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado superiormente.

Sea $s \in \mathbb{R} \Rightarrow s = \sup\{n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\exists s' = s+1$ t.q. $s' > s$ $\wedge$ $s' \in B$ $\Rightarrow \Leftarrow$ //

$\nexists$ Maximo ni Minimo.

$E = \{ \frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{N}, \; m < n \}$.

$E = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots \frac{99}{100}, \frac{99}{1000} \}$

$\text{Inf}(E) = 0$, $\text{Sup}(E) = 1$, $\text{Max}(E) = \emptyset$, $\text{Min}(E) = \emptyset$

Demostrar que $\text{Sup}(E) = 1$

i) $\forall \frac{m}{n} \in E \Rightarrow 1 \geq \frac{m}{n}$

ii) $\forall y > 0 \Rightarrow \exists x \in E$ t.q $x < y$.

i) $1 > \frac{m}{n} \Rightarrow n > m$ por def.

$1 = \frac{m}{n}$ para $n > m \Rightarrow 1 \in E$

ii) Sea $\varepsilon > 0$ t.q $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$\frac{m}{n} < \varepsilon \qquad -\frac{m}{n} < \frac{m}{n} < \varepsilon$

$-1 - \frac{m}{n} < -\frac{m}{n} < \frac{m}{n} < \varepsilon$

$-\frac{m}{n} < \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{m}{n} < \varepsilon + 1 = \hat{\varepsilon}$

$-1 + \frac{m}{n} > -\hat{\varepsilon}$

$\frac{m}{n} > 1 - \hat{\varepsilon}$

Por el lema del supremo.

$1 = \text{Sup}(E) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in E$ t.q $1 - \varepsilon < \frac{m}{n}$.

$Max(E) = \nexists$

Demostremos que $1 \notin E \Rightarrow 1 \neq \frac{m}{n}$

Supongamos que $1 \in E \Rightarrow 1 = \frac{m}{n} \Rightarrow m = n \Rightarrow\Leftarrow$

$Inf(E) = 0$

i) $\forall \frac{m}{n} \in E$ se cumple que $0 < \frac{m}{n}$

como $m > 0$ y $n > 0$ $\Rightarrow \frac{m}{n} > 0$

ii) $\forall y > 0 \ \exists x \in E$ t.q $x < y \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E$ t.q $0 + \varepsilon > x$

Por arquímedes $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \omega$ t.q $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$\frac{m}{n} < m\varepsilon = \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{m}{n} < \varepsilon + 0$ $\quad \frac{m}{n} \in E.$

$\therefore Inf(E) = 0$

$Min(E) = \nexists$ por $m \neq 0$, $n \neq 0$, $\frac{m}{n} \neq 0$.

•) Demuestre que $2^n \geq 1+n$ siempre que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Caso base: $n = 1$

$$2^1 \geq 2 \checkmark$$

Hipotesis de Induccion

Asumimos que se cumple para $n = k$, entonces

$$2^k \geq 1+k \text{ con } k \in \mathbb{N}, k \geq 1$$

• Por demostrar que se cumple para $n = k+1$

donde $2^{k+1} \geq 1+(k+1)$

$$2^k \cdot 2 \geq 1+(k+1).$$

$$2^k \geq 1+k \Rightarrow 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (1+k)$$

$$2^{k+1} \geq 2k+2 > k+2$$

Para los conjuntos A, B, y C, Demostrar que $A \sim B$ y $B \sim C$ implica $A \sim C$.

Dem

$A \sim B \Rightarrow \exists f : A \to B$ que es 1-1

$B \sim C \Rightarrow \exists g : B \to C$ que es 1-1

Sea $h : A \to C$ la cual $h(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$

$\forall x_1, x_2 \in A$ y $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2) \Rightarrow h$ es 1-1

$\forall y \in C$, $\exists z \in B$ t.q. $y = g(z)$

por lo cual $z \in B$, $\exists x \in A$ t.q. $z = f(x)$

$\Rightarrow y = g(f(x)) = h(x) \Rightarrow h$ es sobrey.

$\Rightarrow A \sim C$.

2.2.1)

Verificar usando la definición de convergencia cual de las siguientes sucesiones convergen al límite propuesto.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(6n^2+1)} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n > n_0$, se tiene que $|a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{6n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{1}{6n^2+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{6n^2+1} < \varepsilon$, pues $\frac{1}{6n^2+1} > 0$

$1 < \varepsilon(6n^2+1) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 6n^2+1$

$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < 6n^2 \Rightarrow \frac{1-\varepsilon}{6\varepsilon} < n^2$, $n \geq n_0$

$n_0 > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{6\varepsilon}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+3}} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{2}{\sqrt{n+3}} - 0 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2}{\sqrt{n+3}} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n+3}} < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n+3}} < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Rightarrow 2 < \varepsilon\sqrt{n} \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{n}$

$\Rightarrow \frac{4}{\varepsilon^2} < n \quad \forall n \geq n_0$

$\frac{4}{\varepsilon^2} < n_0$. //

2.2.7

Informalmente hablamos, que la sucesion $\sqrt{n}$ " convergencia a el infinito?

a) Imitar la estructura logica de la def. 2.2.3
Para crear una rigurosa definicion para la afirmacion
$\lim x_n = \infty$ use esta definicion para probar $\lim \sqrt{n} = \infty$

Demostración: (Divergencia positiva)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $|\sqrt{n}| > \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$

$|\sqrt{n}| > \varepsilon \Rightarrow \sqrt{n} > \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$ | $n_0 > \varepsilon^2$, $\sqrt{n_0} > \varepsilon$

$\sqrt{n} > \sqrt{n_0}$

Sea $\varepsilon > 0$ vamos a elegir a $n_0 > \varepsilon^2$ de modo que para $n \geq n_0$ se cumple que

$$a_n = \sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} > \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

b) Que dice su definicion en (a) acerca de la sucesion particular
$(1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $|a_n| > \varepsilon$

observamos que la posicion de $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ esta dado por $2n-1$ $\forall n \geq n_0$ | $n_0 > (\frac{\varepsilon+1}{2})$

$$2n-1 \geq 2n_0 - 1 > 2\left(\frac{\varepsilon+1}{2}\right) - 1 = \varepsilon$$

$$2n-1 > \varepsilon$$

$\therefore$ la serie diverge.

2.3.2

Sea $X_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Si $X_n \to 0$, probar que $(\sqrt{X_n} \to 0)$

Solución:

Si $X_n \to 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $|X_n - 0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$|X_n| < \varepsilon \Rightarrow X_n < \varepsilon \Rightarrow X_n < \varepsilon^2$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \sqrt{X_n} < \sqrt{\varepsilon^2} \Rightarrow \sqrt{X_n} < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

b) Si $(X_n) \to X$, probar que $\sqrt{X_n} \to \sqrt{X}$

Si $X_n \to X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $|X_n - X| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$|X_n - X| < \varepsilon$

Notemos que $|X_n - X| = |(\sqrt{X_n} - \sqrt{X})(\sqrt{X_n} + \sqrt{X})|$

$= |\sqrt{X_n} - \sqrt{X}| \cdot |\sqrt{X_n} + \sqrt{X}|$

$$\Rightarrow |\sqrt{X_n} - \sqrt{X}| = \frac{|X_n - X|}{|\sqrt{X_n} + \sqrt{X}|} \leq \frac{|X_n - X|}{\sqrt{X}} < \varepsilon$$

$|\sqrt{X_n} - \sqrt{X}| < |X_n - X| < \varepsilon$.

2.3.4

Muestre que los límites, si existen deben de ser únicos:

Supongamos que $\lim a_n = L_1$ y $\lim a_n = L_2$. Por demostrar que $L_1 = L_2$.

Por contradicción

Supongamos que $L_1 \neq L_2$

Como $\lim a_n = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $|a_n - L_1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Como $\lim a_n = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N}$ t.q $|a_n - L_2| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

Escogemos a $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$

$$
\begin{aligned}
|L_1 - L_2| &= |L_1 - a_n + a_n - L_2| \\
&\leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| = |a_n - L_1| + |a_n - L_2| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= \frac{|L_1 - L_2|}{2} + \frac{|L_1 - L_2|}{2} = |L_1 - L_2|
\end{aligned}
$$

$|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2| \Rightarrow \unicode{x21af}$

$\therefore L_1 = L_2$.

2.3.10 Si $(a_n) \to 0$ y $|b_n - b| < a_n$, entonces demostrar que $(b_n) \to b$.

Como $a_n \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $|a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$|a_n| < \varepsilon$ y $|b_n - b| \leq a_n$ entonces $a_n \geq 0$

$\Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$

2.4.2

a) Probar que la sucesión definida por $x_1=3$ y

$$x_{n+1} = \frac{1}{4-x_n} \quad \text{converge}$$

$$\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{11}{41}, \frac{41}{163}, \dots\right)$$

$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1/3$

Por inducción vamos a demostrar x_n es decreciente

Caso base:

$x_1 < x_2 \qquad 3 > 1$

Hipótesis de inducción $n=k$

$$x_{k+1} - x_k < 0$$

Por demostrar $\quad x_{k+2} - x_{k+1} < 0$

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{1}{4-x_{k+1}} - \frac{1}{4-x_k} = (4-x_k)-(4-x_{k+1})$$

$$= \frac{4 - x_k - 4 + x_{k+1}}{(4-x_{k+1})(4-x_k)} = \frac{x_{k+1}-x_k}{(4-x_{k+1})(4-x_k)}$$

Usando la hipótesis $\quad \frac{x_{k+1} - x_k}{(4-x_{k+1})(4-x_k)} < 0$

Como $(4-x_{k+1})(4-x_k)$ es positivo entonces (x_n) es decreciente

Podemos notar que x_n es acotada por $0 < x_n < 4$

$\therefore$ (x_n) es convergente.

b) Ahora que sabemos que $\lim x_n$ existe, explique porque x_{n+1} debe de existir también a el mismo valor.

Asumimos que $(x_n) \to L$, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ t.q $|x_n - L| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$.

Sea $N_2 = n_1 - 1$ entonces si $n \geq N_2 \Rightarrow n \geq n_1 - 1$

$n+1 \geq n_1$ y $|x_{n+1} - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_{n+1}) \to L$.

c) Calcular el límite de (x_n).

Como sabemos que $\lim(x_n)$ existe y el $\lim(x_{n+1})$ también y además son iguales entonces:

$$L = \frac{1}{4-L}$$

$$L(4-L) = 1$$
$$L^2 - 4L + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Como $L < 3$
$\lim x_n = 2 - \sqrt{3}$

2.5.3) Dar un ejemplo de cada enunciado, o argumento que no es posible.

A) Una sucesión que no contiene 0 o 1 como términos pero tiene subsucesiones que converge a estos valores.

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ no posee términos 0 pero

$b_n = \frac{1}{n+1}$ es una subsucesión que converge a 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

$c_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ no posee términos 1

$c_{n_i} = 1 + \frac{1}{n+1}$ converge a 1.

b) Una sucesión monótona que diverge pero no tiene una subsucesión convergente

Sea $(a_n) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$

Es una sucesión divergente

c) Una Sucesion que contiene subsucesion que que contiene a cada punto del conjunto infinito $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$

Solucion:

Sea $a_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots\right) \forall n \in \omega$

Una subsucesion sera $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\right) \forall n \in \omega$
la cual converge a $\frac{1}{n}$ $\forall n \in \omega$.

d) Una sucesion no acotada con una subsucesion convergente

Sea $a_n = (1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, 1, 10, \ldots)$

Es una subsucesion es Divergente y no acotada
por $b_n = 2n$ es una subsucesion de a_n la cual
es divergente $\Rightarrow$ a_n es divergente.

Sea $b_n = 1$ es una subsucesion convergente.

e) Una Sucesion que contiene una subsucesion que es acotada
Pero no contiene una sucesion que converge

Sea $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$

$b_n = 1$ es convergente y por lo tanto acotada

$c_n = n+1$ es una subsucesion que Diverge.

2.6.1||

Dar un ejemplo de cada una de los siguientes enunciados o dar un argumento por que es imposible.

a) Una sucesión de Cauchy que no es monotona.

la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ converge a 0

y por lo tanto es de Cauchy.

Pero no es una sucesión monotona por miremos sus terminos

$$\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

Pues $a_1 < a_2$ y $a_2 > a_3$ pero $a_3 < a_4$

b) Una sucesión monotona que no es de Cauchy

Sea $a_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es una sucesión creciente pues $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y sabemos que a_n no es acotada por lo tanto no es convergente y por lo tanto no es de Cauchy.

c) Una sucesión de Cauchy con una subsucesión divergente.

Imposible

Una sucesión de Cauchy es convergente

Si una sucesión converge $\Rightarrow$ cada subsucesión converge

d) Una Sucesión no acotada, cuenta una subsucesión que es de Cauchy

$a_n = (1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$

no es acotada porque siempre se puede encontrar un $n \in a_n$ que es mayor que otro numero

Pero $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ es una subsucesión

que converge $\Rightarrow$ es de Cauchy.

2.6.4]

Asuma que (a_n) y (b_n) son Sucesiones de Cauchy use el triangulo para probar que $c_n = |a_n - b_n|$ es de Cauchy.

Como (a_n) es de Cauchy entonces $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_1$ $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$

Como (b_n) es de Cauchy entonces $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_2$ $|b_n - b_m| < \varepsilon/2$

Sea $N = \max(n_1, n_2)$

Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $|c_n - c_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N$

Sabemos que $|a_m - a_n| + |b_n - b_m| < \varepsilon$

$|a_m - a_n + b_n - b_m| \leq |a_m - a_n| + |b_n - b_m| < \varepsilon$

$|(a_m - b_m) - (a_n - b_n)| < \varepsilon$

$|c_m - c_n| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

$\therefore c_n$ es de Cauchy.

Cual de los Siguientes Conjuntos tiene Supremo.

a) $A = \{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \}$

b) $B = \{ \frac{1}{n^2} + 2 \mid n \in \mathbb{N} \}$

c) $C = \{ n \mid n \in \mathbb{N} \}$

d) $D = \{ e^{1/n} : n \in \mathbb{N} \}$

Solución:

a)
Visualización

$n = 1, \quad m = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$

$n = 1, \quad m = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2} = 3/2$

Hipotesis $\quad Sup(K) = 2.$

i) $\forall x \in A \Rightarrow x \leq 2$
ii) $\forall y > 0 \quad \exists x \in A$ t.q $x < y$

i) Sabemos que $\frac{1}{n} < 1$ y $\frac{1}{m} < 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 1 + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A$ t.q $Sup(A) = 2 \Rightarrow \quad 2 - \varepsilon < a$
Por la propiedad arquimediana
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ t.q $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon$

$\Rightarrow -(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) < (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) < \varepsilon$

$\Rightarrow 2 - (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) < \varepsilon + 2 = \overline{\varepsilon}$

$\Rightarrow 2 - \overline{\varepsilon} < (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) \in A$

Por (i) y (ii) $\Rightarrow Sup(A) = 2$

a) $B=\{\frac{1}{n^2}+2 \mid n\in N\}$

b) Visualización

c) $n=1, \Rightarrow 3$

$n=2 \Rightarrow 9/4$

d) $n=3 \Rightarrow 19/9$

Hipotesis $Sup(B)=3$

i) $\forall x\in B \Rightarrow x\leq 3$

$\frac{1}{n^2}+2\leq 3$

$\frac{1}{n}<1 \Rightarrow \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}\leq 1$

$\frac{1}{n^2}\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2}+2\leq 1+2=3$

$\frac{1}{n^2}+2\leq 3 \quad \forall n\in N.$

ii) $Sup(B)=3 \iff \forall \varepsilon>0 \; \exists a\in B$ t.q $3-\varepsilon<a$

Por la P. Arquimides

$\forall\varepsilon>0 \; \exists n\in N$ t.q $\frac{1}{n}<\varepsilon$

$\frac{1}{n^2}<\varepsilon \Rightarrow 3+\frac{1}{n^2}<\varepsilon+3$

$\Rightarrow 3+\frac{1}{n^2}<\bar{\varepsilon} \Rightarrow 3-\frac{1}{n^2}<3+\frac{1}{n^2}<\bar{\varepsilon}$

$\Rightarrow 3-\bar{\varepsilon}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}+2$

$3-\bar{\varepsilon}<\frac{1}{n^2}+2\in B$

$\therefore Sup(B)=3$

c) $C = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$

No existe Maximo pues no es un conjunto acotado superiormente.

Supongamos que a es una cota superior
por definicion $n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pero sabemos que $n+1 > n$
y $n \leq a < n+1$ y $n+1 \in C \Rightarrow \Leftarrow$ //

D) $D = \{e^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$

$Sup(D) = e$

i) $\forall x \in D \Rightarrow x \leq e$

$e^{1/n} \leq e$

$\ln e^{1/n} \leq \ln e$

$\frac{1}{n} \ln e \leq 1$

$\frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

ii) $Sup(D) = e \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in D$ t.q $e - \varepsilon < a$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow e^{1/n} < e^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$

$e^{1/n} \leq \bar{\varepsilon} \Rightarrow e + e^{1/n} \leq \bar{\varepsilon} + e = \hat{\varepsilon}$

$\Rightarrow e - e^{1/n} < e - e^{1/n} \leq \hat{\varepsilon}$

$e - e^{1/n} \leq \hat{\varepsilon}$

$e - \hat{\varepsilon} < e^{1/n}$

$\therefore Sup(D) = e.$