TD n°3

Stabilité : critère de Routh et Marges de stabilité

Exercice 1 :

Le modèle par fonction de transfert du système « montgolfière du TD N°2, exercice3 » en boucle ouverte est :

$$G(p) = \frac{H(p)}{U(p)} = \frac{5}{p(p+5)(p+1)}$$

On souhaite régler les variations d'altitude de la montgolfière. Pour cela on rajoute un altimètre qui mesure la hauteur du ballon (par rapport à la hauteur de référence $h_c(t)$). Le pilote peut commander la variation de hauteur ($h_c(t)$) de la montgolfière depuis le boitier de commande. Un régulateur génère la loi de commande, *u(t),* du brûleur en fonction de l'écart de hauteur $\varepsilon(t)$. Le schéma d'asservissement est comme suit :

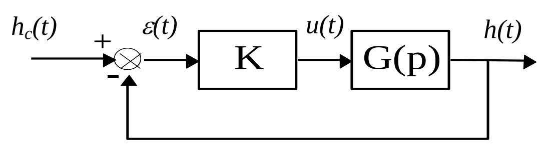


Schéma asservissement d'une montgolfière

a) Donner l'expression de la Fonction de transfert en boucle ouverte FTBO. (On la note : $G_1(p)$) et la mettre sous la forme suivante :

$$G_1(p) = K\frac{N(p)}{p^{\alpha}D(p)}$$

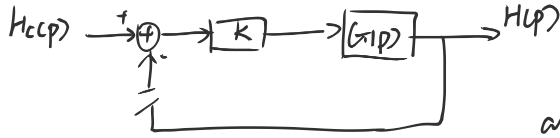
b) La figure 2 représente le diagramme de Bode de $G_1(p)$ pour $K=1$.

- Relever les marges de stabilité (marge de gain et marge de phase).
- Dire si le système est stable en boucle fermée pour K=1.
- Quelle est la condition sur *K* qui assure la stabilité du système en boucle fermée.

c) Retrouver la condition sur K, qui assure la stabilité du système bouclé en utilisant le critère de Routh.

d) Pour quelle valeur de *K* a-t-on la limite de stabilité ? A quoi correspond physiquement cette limite de stabilité.

a) FTBO :



$G_1(p) = K G(p) = \frac{5K}{p(1+p)(5+p)} = K \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$

avec. $N(p)=5$, $D(p)=(p+1)(p+5)$, $\alpha=1$

b) ① marge de gain : 增益裕量 ：相频为$-180°$，0dB与幅度的差 $0-H(w_g)$

marge de phase : 相位裕量 ：幅值为0dB，相角与$-180°$的差 $\theta(w_c)+180°$

$$|G_1(jw_c)|_{dB}=0 \Rightarrow |G_1(jw_c)|=1 = \left|\frac{5}{jw(1+jw)(5+jw)}\right| = \left|\frac{5}{(jw-w^2)(5+jw)}\right|$$

$$= \left|\frac{5}{-6w^2+(5w-w^3)j}\right| \Rightarrow 36w^4+25w^2-10w^4+w^6=25$$

$$x=w_c^2 \rightarrow x^3+26x^2+25x-25=0 \rightarrow x_1=-24 \quad \underline{x_2=0.607} \quad x_3=-1.649$$

$w_c=\sqrt{x_2}=0.779$ rad/s

$$\varphi(w_c)=Arg\left(\frac{5}{-6w_c^2+(5w_c-w_c^3)j}\right) = Arg(5) - Arg[-6w_c^2+(5w_c-w_c^3)j] = -136°.$$

$$\varphi(w_g)=180° \Rightarrow \underbrace{Arg(5)}_{0°} - Arg[-6w_g^2+(5w_g-w_g^3)j]=180°$$

$$\Rightarrow Arg(-6w_g^2+(5w_g-w_g^3)j) = -180° \Rightarrow (5w_g-w_g^3)=0,\ w_g(5-w_g)^2=0,\ w_g=2.23$$

$$\begin{cases} M_g = 0 - A(w_g) = 15.5\ dB > 0dB \\ M_\varphi = 180°+\varphi(w_c) = 44° > 0° \end{cases}$$

② M_g：表示开环增益可以在不破坏稳定性的数字.

开环增益：$|G_1(p)| = 20\log 5k + 20\log[G(jw)]$ → 开环增益与K有关

$Arg(G_1(p)) = Arg(k) - Arg[G(jw)] = -Arg[G(jw)]$ → 与K无关

因为 $\begin{cases} M_g=15.5dB>0 \\ M_\varphi=44°>0 \end{cases}$ 此时，系统稳定

③ K影响稳定性临界值 ：相频为$-180°$时，幅值等于0dB

$$\left.\begin{array}{l} k=1\text{时}: 0 - 20\log(1) + 20\log[G(jw_g)] = 15.5dB. \\ 0 - 20\log k + 20\log[G(jw_g)] = 0\ dB \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 20\log k = 15.5 \\ k=5.95 \end{array}$$

$0<k<5.95$ 时，系统稳定

c) 利用劳斯准则来确定系统稳定的k的条件

FTBF : $M(p) = \frac{KG(p)}{1+KG(p)} = \frac{5K}{p(1+p)(5+p)+5K} = \frac{5K}{p^3+6p^2+5p+5K}$

劳斯判则： $p^3+6p^2+5p+5k$

p^3	1	5	0
p^2	6	$5k$	0
p^1	$\frac{30-5k}{6}$	$\frac{6\times0-0\times1}{6}=0$	0
p^0	$5k$	0	
p^{-1}	0		
p^{-2}	0		

稳定条件： $\begin{cases}\frac{30-5k}{6}>0 \\ 5k>0\end{cases} \Rightarrow 0<k<6$

若 $k=6$

p^3	1	5	
p^2	6	$5k$	
p^1	0	0	0
p^0	$5k$		

$\rightarrow$

p^3	1	5
p^2	6	$5k$
p^1	12	0
p^0	$\underbrace{5k}_{\text{也满足}}$	

$(6p^2+5k)' = 12p+0$

$\boxed{0<k\leq 6}$

$k=6$, va osciller 振动

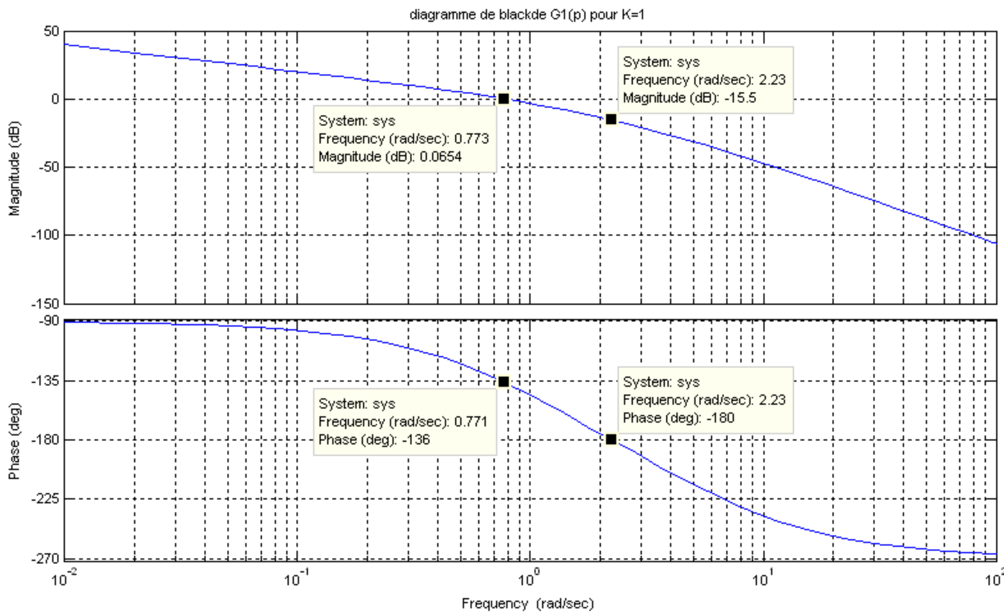


Figure 2. Diagramme de Bode de $G_1(p)$

Exercice 2 : 伺服控制系统

Le système asservi de gouverne de l'assiette d'avion (TD 2 exercice2) peut être représenté comporte les dispositifs suivants et peut être représenté par la figure 1:

- Un amplificateur dont on suppose le gain K (réglable)
- Un système de commande électrique du gouvernail dont la fonction de transfert est : $\frac{B(p)}{U(p)} = F_{a(p)} = \frac{K_a}{1+2p}$ avec $K_a=0.05\ rad/V$
- Un détecteur d'assiette (gyroscope) qui fournit un signal électrique proportionnel à l'assiette réelle représenté par $\frac{A_m(p)}{A(p)} = F_g(p) = K_d$ avec $K_d=8\ V/rad$
- Le modèle de l'avion

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{2(0.2p+1)}{p(4p^2+2.4p+1)}$$

1°)- Compléter le schéma fonctionnel de l'asservissement de l'assiette d'un avion en précisant le modèle de chaque bloc ainsi que les différents signaux (entrée sortie bloc)

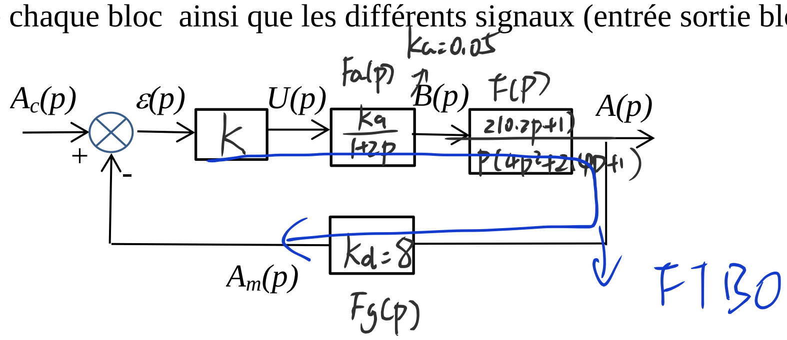


Figure 2. Schéma de l'asservissement de l'assiette d'un avion

2°)- Donner l'expression de la FTBO. On note la FTBO par $G(p)= \frac{A_m(p)}{A_m(p)}$

Les figures 2 et 3 représentent le diagramme de Bode et le diagramme de Black-Nichols de G(p) pour K=1.

3°)- Orienter le lieu de Black-Nichols et relever les marges de stabilité.

4°)-Pour quelle valeur de K le système est à la limité de stabilité ? On note cette valeur K_{lim}. Que deviennent alors les marges de stabilité ?

5°)- Tracer la réponse indicielle dans le cas de la limite de stabilité

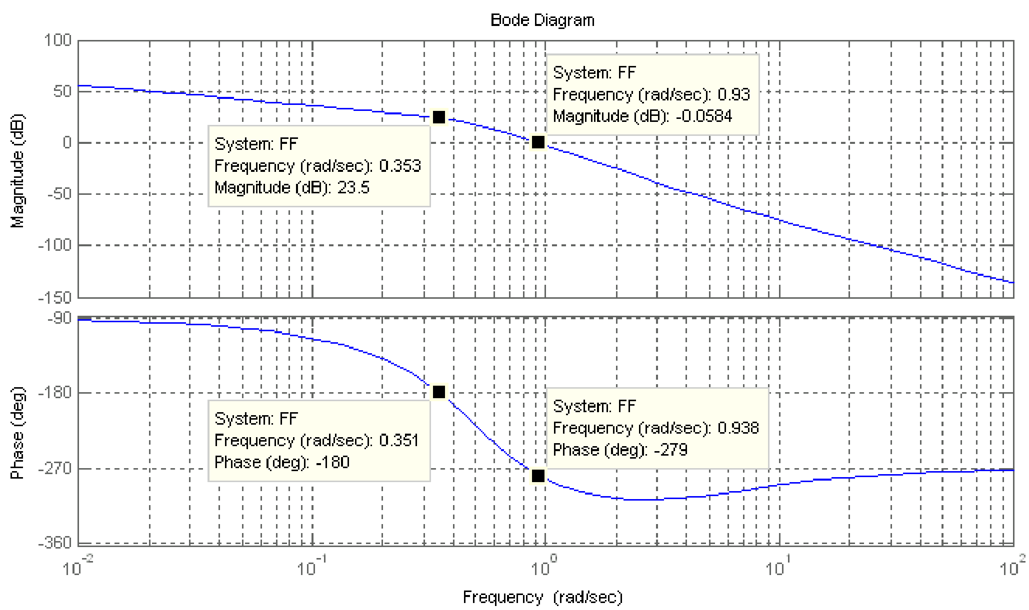
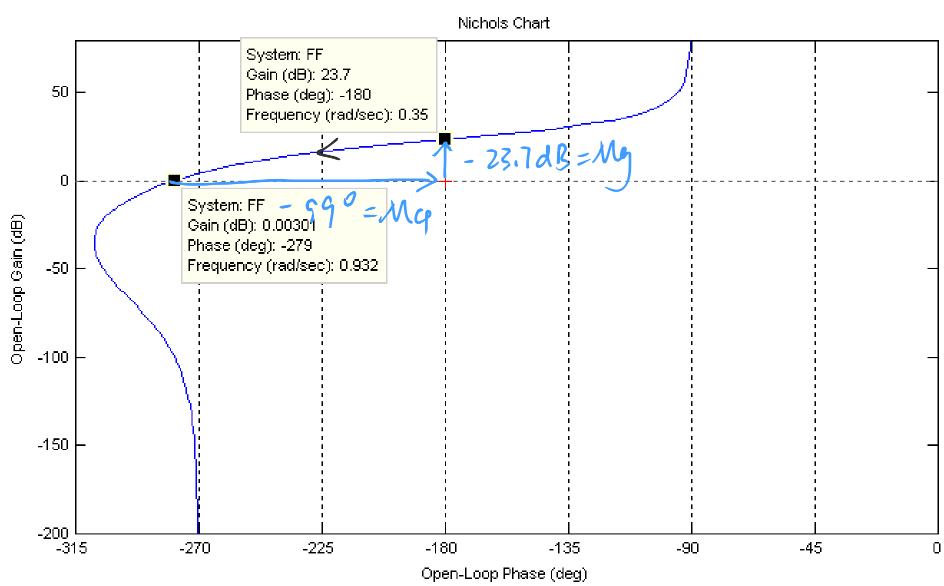


Diagramme de Bode de G(p) pour K=1



2°) FTBO: $G(p) = k\,F_a(p)\,F(p)\,F_g(p) = K \dfrac{k_a}{1+2p} \dfrac{2(0.2p+1)}{p(4p^2+2.4p+1)} \cdot K_d$

4°) $|G(p)|_{dB} = -\left\{20\log k + 20\log\left[F_a(j\omega_g)F(j\omega_g)F_g(j\omega_g)\right]\right\} = -23.7\,dB$

当 $k=1$, $\omega_g = 0.25$.

若要使系统稳定 $20\log k = -23.7$ $k_{lim} = e^{-\frac{23.7}{10}} = 0.0653$

相位稳定不管了?

5°) $G(p) = \dfrac{0.05 \times \cancel{0.0653} \times 2\,(0.2p+1) \times 8}{(1+2p)\,p\,(4p^2+2.4p+1)}$

等幅振荡

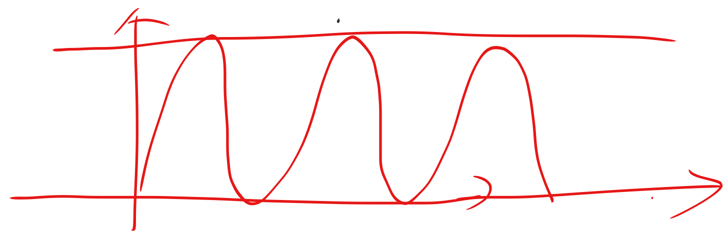


Figure 3. Diagramme de Black de G(p) pour K=1

<u>Exercice 3</u> :

Etudier la stabilité des systèmes représentés par leurs équations caractéristiques :

$$p^3 + p^2 + 2\,p + 8 = 0$$

$$a_2\,p^2 + a_1\,p + a_0 = 0$$

$$p^3 + 3\,p^2 + 3\,p + 1 + k = 0$$

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + k = 0$$

$$p^5 + 2\,p^4 + 2\,p^3 + 4\,p^2 + 11\,p + 10 = 0$$

$$p^3 + 2\,p^2 + 4\,p + k = 0$$

$$p^8 + 2\,p^6 - 6\,p^5 + 4\,p^2 + 11\,p + 5 = 0$$