TD 0

Transformée de Laplace

Exercice 1 :

A- Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1- fonction polynôme : $f(t) = t^n$, (n > 0)

2- fonction exponentielle : $f(t) = e^{-at}t^n$

3- fonction sinus amortie : $f(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$

4- fonction cosinus amortie : $f(t) = e^{-at}\cos(\omega t)$

B- Les transformées inverses de Laplace, en utilisant la table des transformées de Laplace, des fonctions suivantes :

$$F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)}, \quad F(p) = \frac{3e^{-p}}{(1+p)p}, \quad F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2+1}, \quad F(p) = \frac{2pe^{-p}}{p^2+4}$$

Exercice 2 :

Soit y la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t) = 1 \text{ , } t \geq 0$$

Calculer la transformée de Laplace Y(p) de $y(t)$ pour :

1. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

2. $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

3. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

avec les conditions initiales suivantes : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$

Exercice 3 :

Trouver la réponse forcée du système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$$

où $u(t) = e^{-3t}$ $t \geq 0$

Exercice ~~5~~ 4 :

Trouver le signal de sortie d'un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

où

$$p^2Y(p) + 3pY(p) + 2Y(p) = U(p)$$

. Signal rampe : $u(t) = t$ $t \geq 0$ $\frac{1}{p}$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2+3p+2}$$

. Signal échelon : $u(t)=1$

. Signal harmonique : u(t)=sin(ωt)