TD 0

Transformée de Laplace

Exercice 1 :

A- Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1- fonction polynôme : $f(t) = t^n$, (n > 0)

2- fonction exponentielle : $f(t) = e^{-at}t^n$

3- fonction sinus amortie : $f(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$

4- fonction cosinus amortie : $f(t) = e^{-at}\cos(\omega t)$

B- Les transformées inverses de Laplace, en utilisant la table des transformées de Laplace, des fonctions suivantes :

$$F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)}, \quad F(p) = \frac{3e^{-p}}{(1+p)p} \quad, F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2+1}, \qquad F(p) = \frac{2pe^{-p}}{p^2+4}$$

Exercice 2 :

Soit y la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t) = 1 \text{ , t} \geq 0$$

Calculer la transformée de Laplace Y(p) de $y(t)$ pour :

1. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

2. $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$,$a_3 = 1$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

3. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

avec les conditions initiales suivantes : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$

Exercice 3 :

Trouver la réponse forcée du système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$$

où $u(t) = e^{-3t}$ $t \geq 0$

Exercice 5 :

Trouver le signal de sortie d'un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

où

. Signal rampe : $u(t) = t$ $t \geq 0$

. Signal échelon : $u(t)=1$

. Signal harmonique : $u(t)=\sin(\omega t)$

Ex1

A-(1) fonction de polynôme 多项式 : $f(t) = t^n, (n>0$

$F(p) = \mathcal{L}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt$

分部积分: $\int u v' dt = uv - \int v du.$ $\qquad v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$

$F(p) = \underbrace{t^n\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Big|_0^\infty} - \int_0^\infty n t^{n-1}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)dt$

$-\frac{t^n}{pe^{pt}}\Big|_0^\infty = -0+0$

$= \frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-pt} = \frac{n}{p}\mathcal{L}(t^{n-1}) = \frac{n(n-1)}{p^2}\mathcal{L}(t^{n-2}) \ldots$

$n=1$ 时 $\mathcal{L}(t^1) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(t^0) = \frac{1}{p^2}$

故最终积分结果确定 $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

(2) fonction exponetielle : $f(t) = e^{-at}t^n$

$F(p) = \int_0^\infty t^n e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty t^n e^{-(p+a)t} dt$

TL性质: $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$

$\therefore F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

(3) fonction sinus amortie : $f(t) = e^{-at}\sin(wt)$

$\mathcal{L}(\sin wt) = \frac{w^2}{p^2+w^2}$,

$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(p+a)$

$\Rightarrow F(p) = \frac{w^2}{(p+a)^2+w^2}$

(4) fonction cossinus amortie : $f(t) = e^{-at}\cos(wt)$

$\mathcal{L}(\cos wt) = \frac{p}{p^2+w^2}$

$\Rightarrow F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$

B- (1) $F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)} = \frac{A}{1+p} + \frac{B}{p+3} = \frac{\frac{1}{2}}{1+p} + \frac{\frac{1}{2}}{3+p}$

$Ap+3A+B+Bp = p+2 \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 3A+B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$

$f(t) = \frac{1}{2}e^{-at}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) = \frac{1}{2}(e^{-at}+e^{-3t})u(t)$

(2) $F(p) = \frac{3e^{-p}}{(1+p)p}$ $\quad e^{-p}\underbrace{\left(\frac{-3}{1+p}+\frac{3}{p}\right)}_{(-3e^{-t}+3)u(t)}$ $\qquad Ap+B+Bp=3 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B=3 \end{cases}$

$\mathcal{L}^{-1}[e^{-ap}f(p)] = f(p-a) \Rightarrow f(t) = (-3e^{-(t-1)}+3)u(t-1)$

$= 3(1-e^{1-t})u(t-1)$

(3) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2+1} = e^{-p} \underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{\sin t \cdot u(t)}$

$f(t) = \sin(t-1)\, u(t-1)$

(4) $F(p) = \frac{2pe^{-p}}{p^2+4} = 2e^{-p} \underbrace{\frac{p}{p^2+4}}_{\cos(2t)}$

$f(t) = 2\cos(2t-2)\, u(t-1)$

Ex2: (1) $[s^2Y(s) - s^1 y'(0) - s^0 y(0)] + 3[sY(s) - s^0 y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$

(2) $[s^3Y(s) - s^2 y''(0) - s y'(0) - y(0)] + 4[s^2Y(s) - C.I.] + 5[sY(s) - C.I.] + 2Y(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s^3+4s^2+5s+2)}$

(3) $[s^2Y(s) - s\underbrace{y'(0)}_{1} - \underbrace{y(0)}_{1}] + 3[sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1}] + 2Y(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s)(s^2+3s+2) - (s+1+3) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{s^2+4s+1}{(s^2+3s+2)s}$

Ex3: $[p^2Y(p) - C.I.] + 4[pY(p) - C.I.] + 4Y(p) = [pU(p) - C.I.] + 2U(p)$

$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p^2+4p+4} = \frac{1}{p+2}$

$u(t) = e^{-3t} \rightarrow U(p) = \frac{1}{p+3}$

$Y(p) = H(p)U(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)} = \frac{-1}{p+3} + \frac{1}{p+2}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = (e^{-2t} - e^{-3t})\underbrace{u(t)}$

单位阶跃

Ex4:

$[p^2Y(p) - C.I.] + 3[pY(p) - C.I.] + 2Y(p) = U(p)$

$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

(1) $u(t) = t,\ t \geq 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} U(p) = \frac{1}{p^2}$

$Y(p) = H(p)U(p) = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$

对于一个 $\frac{1}{(x-a)^n}$ 要分解成n个：$\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a}$

$= \frac{1}{2p^2} - \frac{3}{4p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)}$

$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$.

(2) $u(t)=1 \xrightarrow{\text{拉}} U(p)=\frac{1}{p}$

$$Y(p)=\frac{1}{p(p+1)(p+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{p}+\frac{-1}{p+1}+\frac{\frac{1}{2}}{p+2}$$

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

错 (3) $Y(p)=\frac{w}{p^2+w^2}\cdot\frac{1}{(p+1)(p+2)}$

$$y(t)=\frac{w}{w^2+1}e^{-t}-\frac{w}{w^2+4}e^{-2t}-\frac{2w\cos wt}{w^4+5w^2+4}-\frac{w^2-2}{w^4+5w+4}\sin wt$$

SS：稳态：$y_{ss}(t)=|H(jw)|\sin(wt+\varphi(w))$

$$|H(jw)|=\left|\frac{1}{(1+jw)}\frac{1}{(2+jw)}\right|=\frac{1}{\sqrt{(1+w^2)(4+w^2)}}$$

$$\varphi(w)=0-\arctan(w)-\arctan\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$y_{ss}(t)=\frac{1}{\sqrt{(1+w^2)(4+w^2)}}\sin\left(wt-\arctan w-\arctan\frac{w}{2}\right)$$