

ex 4.



$$\text{IL} \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t) \right)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right] + 3 \mathcal{L} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] + 2 \mathcal{L} [y(t)] = \mathcal{L} [u(t)]$$

Propriété de Linéarité

$$(p^2 y(p) - \underbrace{p y(0) - \dot{y}(0)}_{\text{état}}) + 3(p y(0) - \underbrace{\dot{y}(0)}_{\text{état}}) + 2y(p) = U(p)$$

$$\Rightarrow (p^2 + 3p + 2) y(p) = U(p) + \underbrace{(p y(0) + 3 \dot{y}(0) + y(0))}_{C_L}$$

$$y(p) = \underbrace{\frac{1}{(p^2 + 3p + 2)} U(p)}_{\text{Réponse forcée (CL=0)}} + \underbrace{\frac{(p y(0) + 3 \dot{y}(0) + y(0))}{p^2 + 3p + 2}}_{\text{Réponse Libre (u(t)=0)}}$$

* Cas entrée échelon: $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$ $U(p) = 1/p$;

Si $CL=0$:

$$y(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)p} = \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p-p_1} + \frac{\alpha_3}{p-p_2}$$

Si CL ne sont pas nulle. ($\dot{y}(0)=1, y(0)=1$):

$$y(p) = \underbrace{\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}}_{\text{Réponse forcée}} \cdot \frac{1}{p} + \underbrace{\frac{p+4}{(p-p_1)(p-p_2)}}_{\text{Réponse Libre}} = \frac{1+(p+4)p}{(p-p_1)(p-p_2)p} = \frac{\alpha'_1}{p-p_1} + \frac{\alpha'_2}{p-p_2} + \frac{\alpha'_3}{p}$$

$$Y(p) = \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p-p_1} + \frac{\alpha_3}{p-p_2}, \quad p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = 0$$

Pour calculer α , on a des racines simples:

$$\alpha_1 = \lim_{p \rightarrow 0} (p) Y(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)} \right] = \frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{2}$$

32(1) 24)

$$\alpha_2 = \lim_{p \rightarrow p_1 = -1} [(p-p_1) Y(p)] = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[(p-p_1) \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)} \right] = \frac{1}{p_1(p_1-p_2)} = -1$$

$$\alpha_3 = \lim_{p \rightarrow p_2 = -2} [(p-p_2) Y(p)] = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[(p-p_2) \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)} \right] = \frac{1}{p_2(p_2-p_1)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p-p_1} + \frac{\alpha_3}{p-p_2}$$

$$y(t) = \alpha_1 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + \alpha_2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_1}\right] + \alpha_3 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_2}\right]$$

$$y(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{p_1 t} + \alpha_3 e^{p_2 t}$$

* Cas entrée rampe unité: $u(t) = t, t \geq 0; U(p) = \frac{1}{p^2}$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} \cdot \frac{1}{p^2}$$

↓ décomposition en élément simple.

les racine: $p_1, p_2, p_3 = p_4 = 0$. racine double

$$Y(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \frac{\alpha_{31}}{p} + \frac{\alpha_{32}}{p^2}$$

↓ \mathcal{L}^{-1}

$$y(t) = \alpha_1 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_1}\right] + \alpha_2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_2}\right] + \alpha_{31} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + \alpha_{32} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]$$

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \alpha_{31} + \alpha_{32} t$$

$$\text{Calcul: } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{31}, \alpha_{32}.$$

$$Y(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \frac{\alpha_{31}}{p} + \frac{\alpha_{32}}{p^2}$$

$$= \frac{\alpha_1 p^2 (p-p_2) + \alpha_2 p^2 (p-p_1) + \alpha_{31} p (p-p_1)(p-p_2) + \alpha_{32} (p-p_1)(p-p_2)}{p^2 (p-p_1)(p-p_2)}$$

$$= \frac{1}{p^2 (p-p_1)(p-p_2)}$$

$$\text{Coefficients} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{31}, \alpha_{32}.$$

$$= \frac{A}{p^3} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} + \frac{D}{1}$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -0.25 \\ \alpha_{31} = -0.75 \\ \alpha_{32} = 0.5 \end{cases}$$

* Entrée harmonique: $u(t) = \sin \omega t \rightarrow U(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{\omega}{(p+2)(p+1)(p^2 + \omega^2)}, \quad p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -j\omega, p_4 = j\omega.$$

$$Y(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \frac{\alpha_3}{p-p_3} + \frac{\alpha_4}{p-p_4}$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \alpha_3 \underbrace{e^{p_3 t}}_{e^{-j\omega t}} + \alpha_4 \underbrace{e^{p_4 t}}_{e^{j\omega t}}$$

p_3 et p_4 : complexe conjugué

法②
比较系数

2, 2, 3, 4 全解去~

Solutions TD0

Exercice 1 :

A- Calcul des transformées de Laplace

On applique la définition de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tp} dt \quad \text{avec } f(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

1- $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt, (n > 0)$

On procède par une intégration par partie. On pose : $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-pt}$ donc $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt}$

$$\text{On a alors : } F(p) = \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt}_{u \cdot v'} = \underbrace{\left[t^n \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \right]_0^{+\infty}}_{u \cdot v} - \int_0^{+\infty} \underbrace{nt^{n-1} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right)}_{u' \cdot v} dt$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^n \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) = 0$, on obtient alors :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt = \frac{n}{p} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[t^{n-1}]}$$

Soit $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{p} \mathcal{L}[t^{n-1}]$ (1)

Pour $n=1$, la relation (1) s'écrit alors comme suit : $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p} \mathcal{L}[t^0] = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \right)$

Pour $n=2$, on a : $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p} \mathcal{L}[t] = \frac{2}{p} \left(\frac{1}{p^2} \right) = \frac{2 \times 1}{p^3} = \frac{2!}{p^3} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ pour } n=2$

Pour $n=3$, on a : $\mathcal{L}[t^3] = \frac{3}{p} \mathcal{L}[t^2] = \frac{3}{p} \left(\frac{2}{p^3} \right) = \frac{3 \times 2}{p^4} = \frac{3!}{p^4} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[t^3] = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ pour } n=3$

On peut alors déduire que : $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$

Remarque : on peut vérifier à partir de la table des transformées :

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}\right] = \frac{1}{p^n}, \text{ donc pour } n \text{ on peut écrire : } \mathcal{L}\left[\frac{1}{(n)!} t^n\right] = \frac{1}{p^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

2- $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} t^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} t^n dt$

Or à partir des propriétés de Laplace on sait que :

$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$, on peut alors déduire : $\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} t^n dt = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

$$3- F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} \sin(\omega t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \sin(\omega t) dt$$

On procède comme pour le cas précédent :

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a) \implies \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \sin(\omega t) dt = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

$$4- F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} \cos(\omega t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \cos(\omega t) dt$$

On procède comme pour le cas précédent :

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a) \implies \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \cos(\omega t) dt = \frac{\omega(p+a)}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

B- Calculer les transformées inverses de Laplace : on utilise **la méthode par décomposition en éléments simples** (voir la référence Y. Granjon, « Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état », Edition Dunod, 2001)

a- $F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)}$, le polynôme $(1+p)(p+3)$ admet 2 racines : $p_1 = -1$ et $p_2 = -3$

On peut réécrire $F(p)$ sous la forme suivante : $F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2(p+1)}$

On applique la propriété de linéarité on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p+2}{(1+p)(p+3)} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+3} \right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+1} \right] \quad \text{et à partir de la table des transformées on}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+a} \right] = e^{-at}$$

On déduit : $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p+2}{(1+p)(p+3)} \right] = \frac{1}{2} [e^{-3t} + e^{-t}]$

b- $F(p) = \frac{3e^{-p}}{(1+p)p}$, pour calculer la transformée inverse on utilise :

La propriété du retard : $\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-\tau p} F(p)$.

Dans cet exemple $\frac{3e^{-p}}{(1+p)p}$ le retard $\tau = 1$, et $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(1+p)p} \right] = 3 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(1+p)p} \right] = 3(1 - e^{-t})$

Alors $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(1+p)p} e^{-p} \right] = 3(1 - e^{-(t-1)})$

c- $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2 + 1}$, on procède comme pour précédemment

Cette fois ci on pose : $\omega=1$ et $\tau=1$, on trouve alors

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(1+p^2)} e^{-p} \right] = \sin(t-1)$$

d- $F(p) = \frac{2pe^{-p}}{p^2 + 4}$, on procède comme pour précédemment

Cette fois ci on pose : $\omega=2$ et $\tau=1$, on trouve alors

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2p}{(4+p^2)} e^{-p} \right] = \cos(2(t-1))$$

Exercice 2

Calculer la transformée de Laplace d'une équation différentielle :

a- $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1$ $y(0) = 0, y'(0) = 0$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1$$

On applique les propriétés de linéarité et de dérivation pour $n=2$ avec conditions initiales nulles, on obtient

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right] = \mathcal{L}[1]$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right] + 3\mathcal{L} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] + 2\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[1]$$

$$p^2 Y(p) + 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p} \quad \longrightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 3p + 2)p}$$

b- $a_0=2, a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = 1$ avec $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right] = \mathcal{L}[1]$$

$$p^3 + 4p^2 Y(p) + 5pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p} \quad \longrightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{(p^3 + 4p^2 + 5p + 2)p}$$

c- $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right] = \mathcal{L}[1]$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right] + 3\mathcal{L} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] + 2\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[1]$$

$$p^2 Y(p) - \cancel{p y(0)} - y'(0) + 3p Y(p) - \cancel{3 y(0)} + 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$(p^2 + 3p + 2) Y(p) - y'(0) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 3p + 2)p} + \frac{1}{(p^2 + 3p + 2)}$$