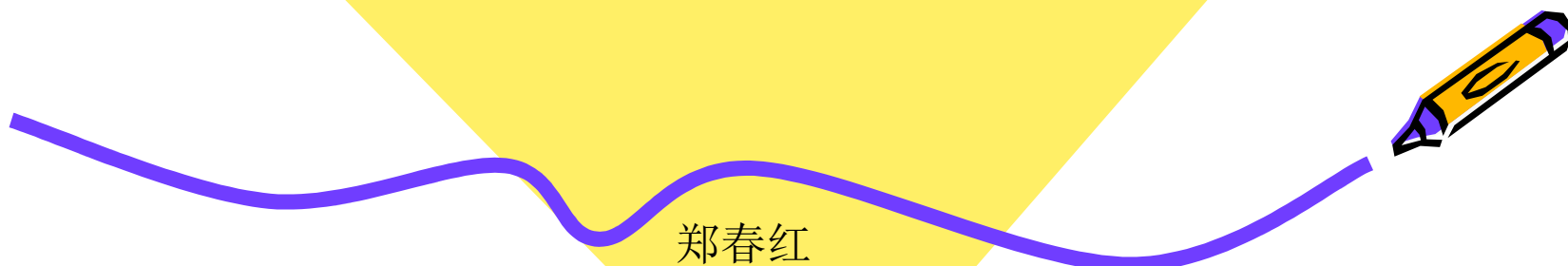


第七章 数字滤波器的 算法结构

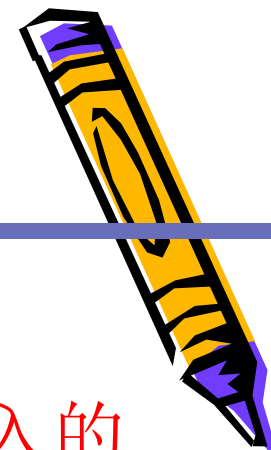


郑春红
电子工程学院

Email: chzheng@xidian.edu.cn

2021/10/12

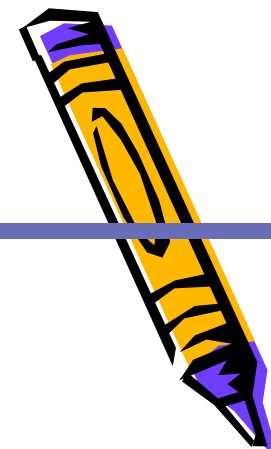
第七章 数字滤波器的算法结构



- 数字滤波器的功能：本质上说是将一组输入的数字序列通过一定的运算后转变为另一组输出的数字序列，因此它本身就是一台完成给定运算的数字计算机。
- 数字滤波器一般可以用两种方法来实现：
 1. 用数字硬件装配成一台专门的设备，成为数字信号处理机。
 2. 直接利用通用计算机软件来实现。



第七章 数字滤波器的算法结构



7.1 时域离散系统算法结构的基本概念

7.2 IIR数字滤波器算法结构

7.3 FIR数字滤波器算法结构



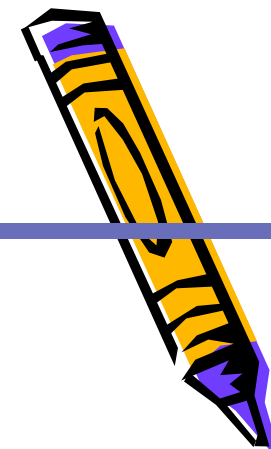
7.1 时域离散系统算法结构的基本概念

数字滤波器的系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

常系数线性差分方程：

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$



7.1 时域离散系统算法结构的基本概念

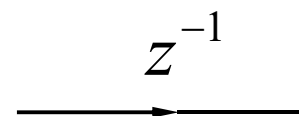
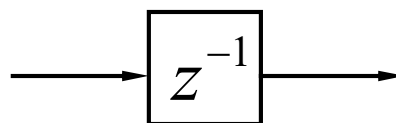
$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

基本运算单元

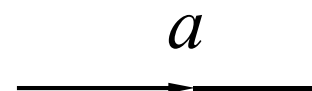
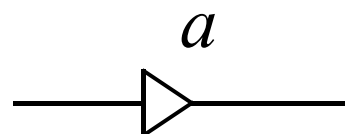
方框图

流图

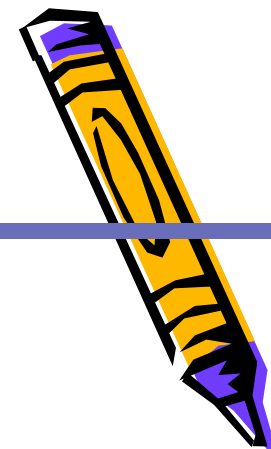
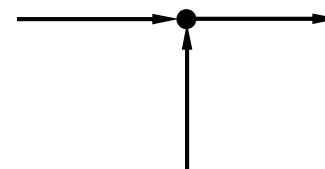
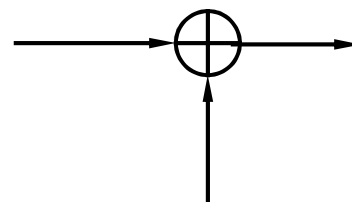
单位延时



常数乘法器



加法器



7.1 时域离散系统算法结构的基本概念

例：二阶数字滤波器

$$y(n] = a_1y(n-1) + a_2y(n-2) + b_0x(n)$$

方框图结构

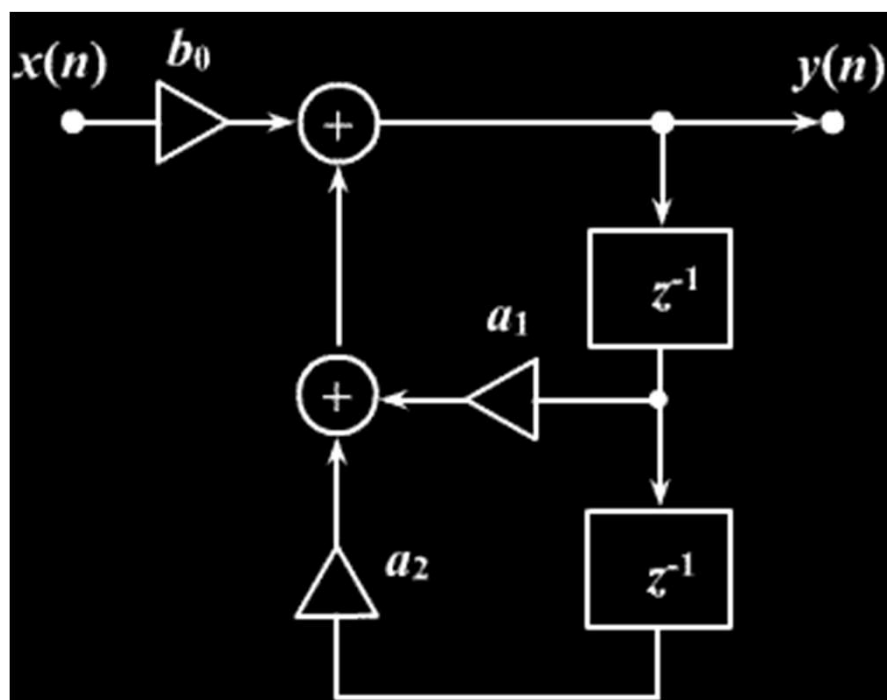


图7-1 二阶数字滤波器的方框图结构

流图结构

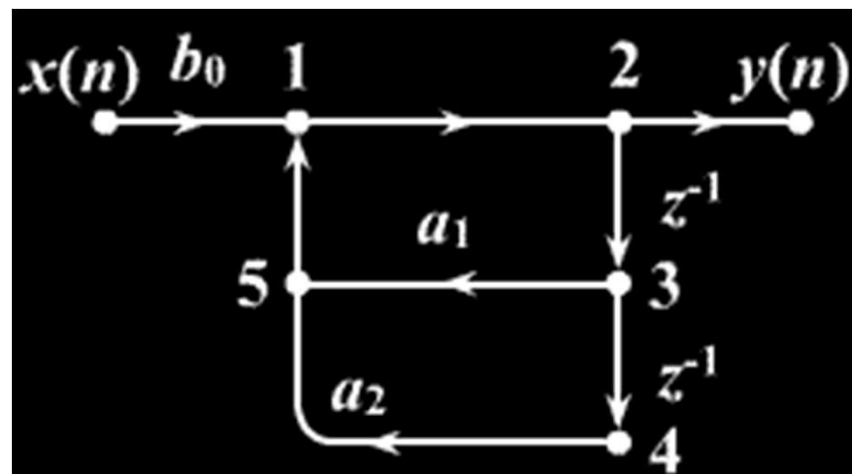


图7-2 信号流图结构

用信号流图结构更简洁

7.1 时域离散系统算法结构的基本概念

■ 流图结构

- 节点

- 输入节点
- 输出节点
- 网络节点

- * 分支节点

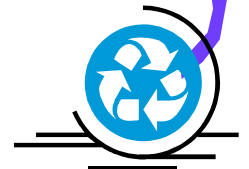
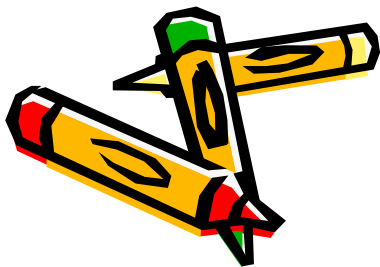
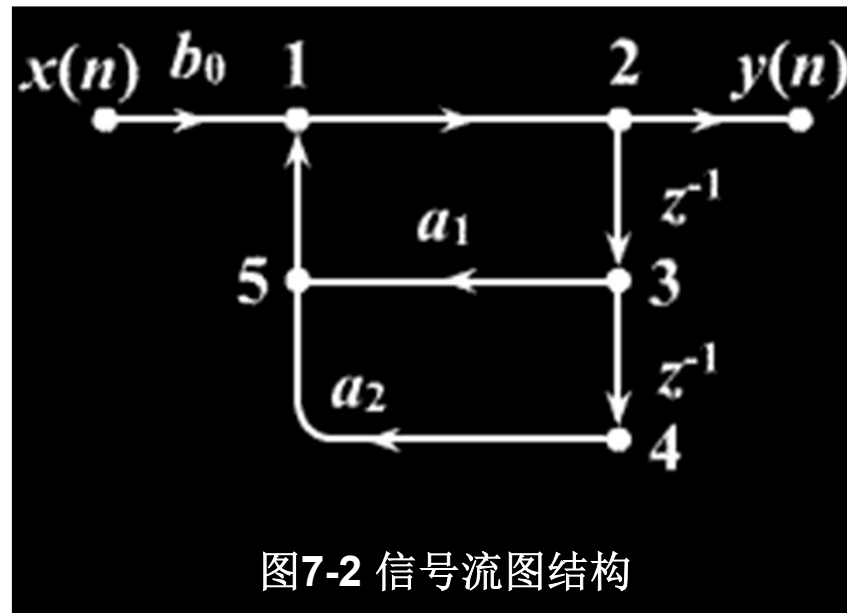
- * 相加器

节点的值=所有输入支路的值之和

支路的值=支路起点处的节点值 \times 传输系数

- 有向支路

- 输入支路
- 输出支路



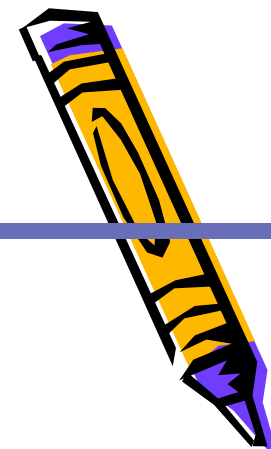
7.2 IIR数字滤波器算法结构

IIR数字滤波器的特点：

系统函数：
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

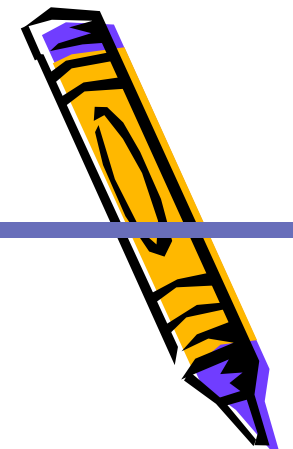
差分方程：
$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- 1) 系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 无限长
- 2) 系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面（ $0 < |z| < \infty$ ）上有极点存在
- 3) 存在输出到输入的反馈，递归型结构



7.2 IIR数字滤波器算法结构

- IIR数字滤波器的基本结构：
 - 直接 I 型
 - 直接 II 型（典范型）
 - 级联型
 - 并联型



7.2 IIR数字滤波器算法结构

- 1、直接 I 型
差分方程:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

需 $N+M$ 个
延时单元

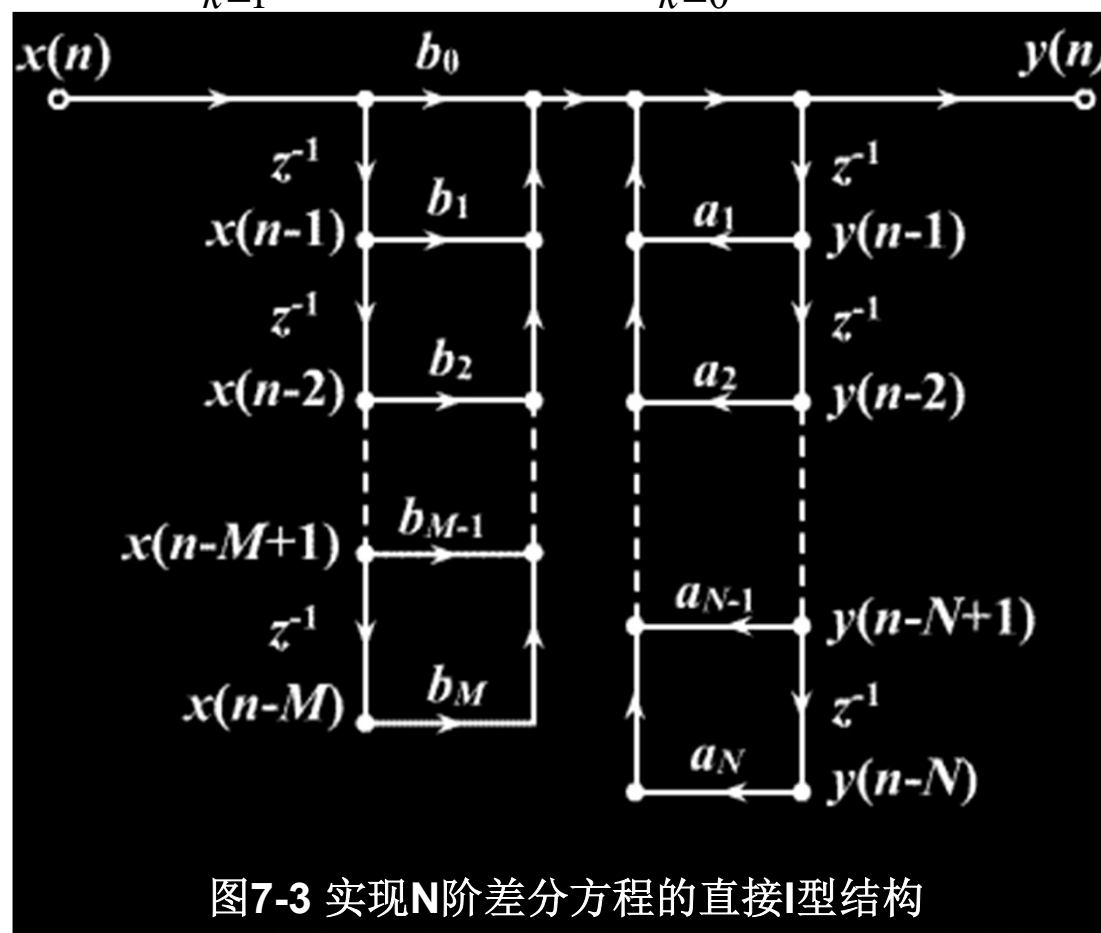


图7-3 实现N阶差分方程的直接I型结构

7.2 IIR数字滤波器算法结构

■ 2、直接 II 型

只需实现 **N** 阶滤波器所需的最少的 **N** 个延时单元，故称典范型。（ $N \geq M$ ）

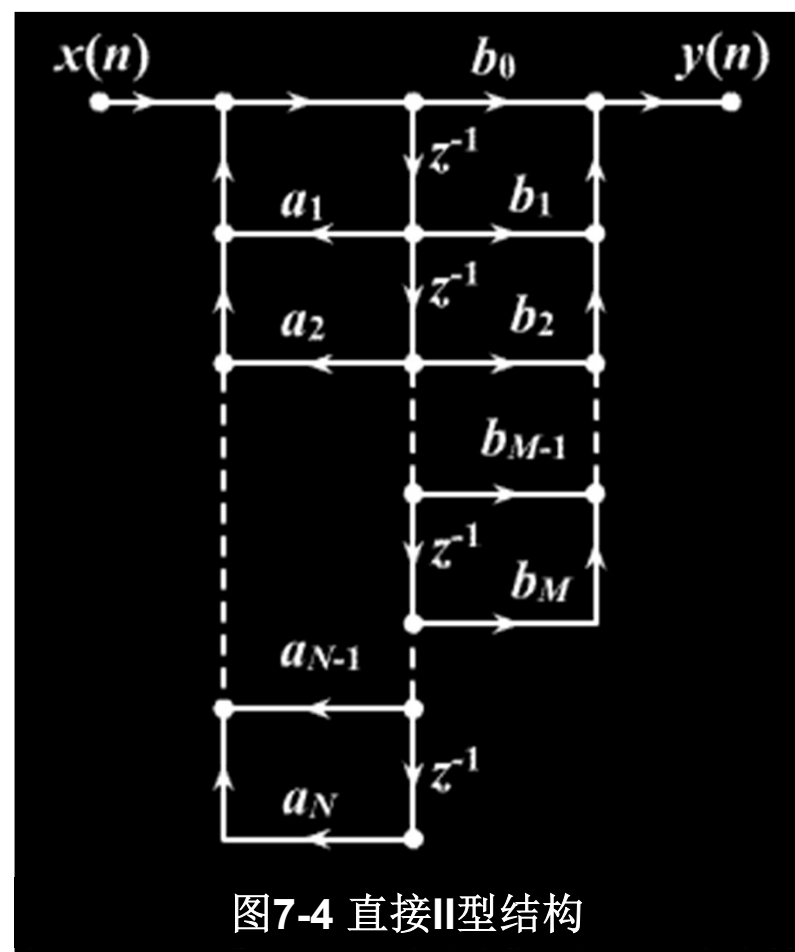
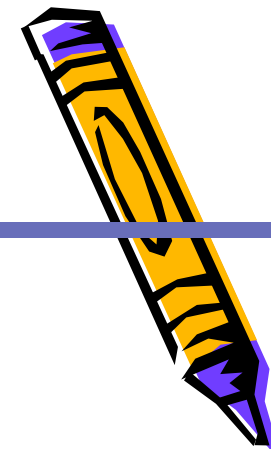


图7-4 直接II型结构



7.2 IIR数字滤波器算法结构

- 直接型的共同缺点：
 - 系数 a_k , b_k 对滤波器的性能控制作用不明显
 - 极点对系数的变化过于灵敏，易出现不稳定或较大误差
 - 运算的累积误差较大



7.2 IIR数字滤波器算法结构

■ 3、级联型

将系统函数按零极点因式分解：

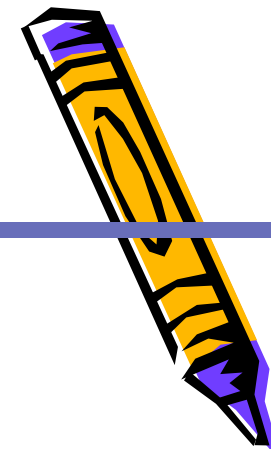
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = K \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - z_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M_2} (1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}$$

$$M = M_1 + 2M_2$$

$$N = N_1 + 2N_2$$

分解成实系数二阶因子的形式

$$H(z) = A \prod_{l=1}^L \frac{1 + \alpha_{1l} z^{-1} + \alpha_{2l} z^{-2}}{1 + \beta_{1l} z^{-1} + \beta_{2l} z^{-2}} = A \prod_{l=1}^L H_l(z)$$



7.2 IIR数字滤波器算法结构

- 二阶子系统可以采用直接II型结构来实现，整个滤波器则是他们的级联。

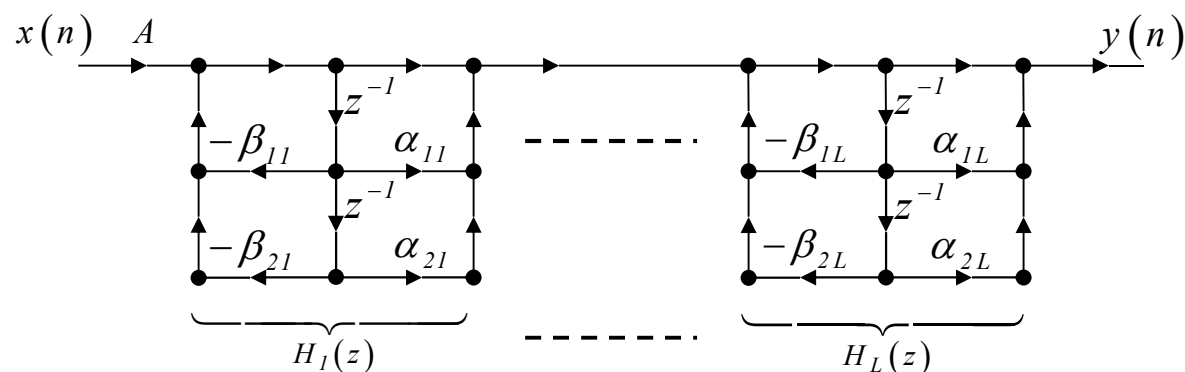


图7-5 IIR数字滤波器的级联结构

7.2 IIR数字滤波器算法结构

- 级联型的特点:

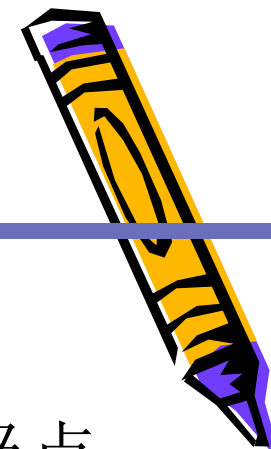
调整系数 β_{1l} , β_{2l} 能单独调整滤波器的第 l 对极点, 而不影响其它零极点

调整系数 α_{1l} , α_{2l} 能单独调整滤波器的第 l 对零点, 而不影响其它零极点

便于调整滤波器频率响应性能

运算的累积误差较小

具有最少的存储器



7.2 IIR数字滤波器算法结构

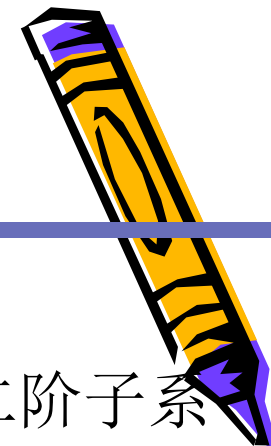
■ 4、并联型

将系统函数 $H(z)$ 展成部分分式，且一阶子系统看成二阶子系统的特例：

$$H(z) = C + \sum_{l=1}^L \frac{\gamma_{0l} + \gamma_{1l}z^{-1}}{1 + \beta_{1l}z^{-1} + \beta_{2l}z^{-2}} = C + \sum_{l=1}^L H_l(z)$$

$$L = \left[\frac{N+1}{2} \right]$$

当 N 为奇数时，有一个 $\beta_{2l} = \gamma_{1l} = 0$



7.2 IIR数字滤波器算法结构

并联型的特点：

- 通过调整系数 β_{1l} , β_{2l} 可单独调整一对极点位置，但不能单独调整零点位置
- 各并联基本节的误差互不影响，故运算误差最小
- 可同时对输入信号进行运算，故运算速度最高

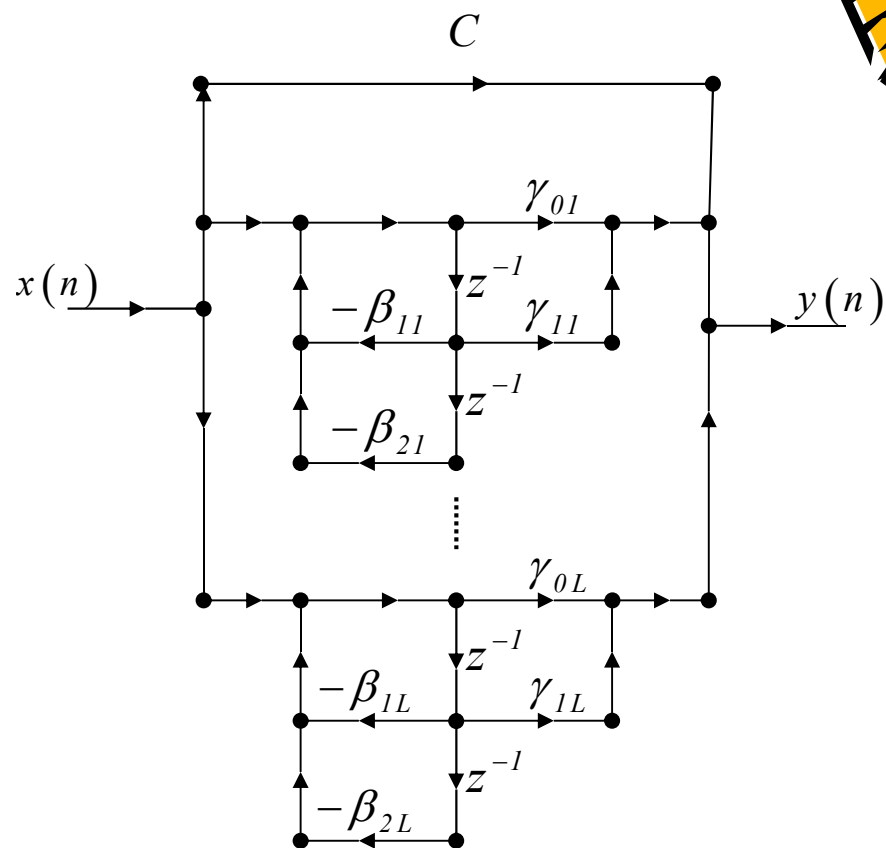


图7-6 IIR数字滤波器的并联结构



7.2 IIR数字滤波器算法结构

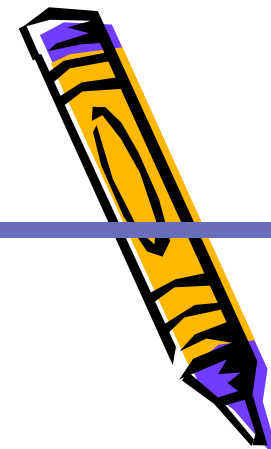
IIR滤波器的几种结构形式的性能

1. 直接I型：需要 $2N$ 级延时单元。
2. 直接II型：只需要 N 级延时单元，节省资源。

共同的缺点是，系数 a_i 、 b_i 对滤波器性能的控制关系不直接，调整不方便。当阶数 N 较高时，极点位置灵敏度太大，对字长效应太明显，因而容易出现不稳定现象并产生较大误差。

3. 级联型：准确实现滤波器的零、极点，也便于性能调整。

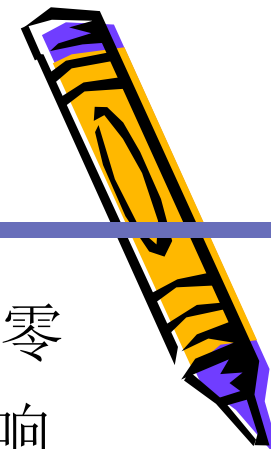
级联结构可以由许多不同的搭配方式，在实际工作中，由于运算字长效应的影响，不同排列所得到的误差和性能也不一样



7.2 IIR数字滤波器算法结构

4. 并联型：可以单独调整极点位置，但不能直接控制零点。在运算误差方面，并联型各基本节的误差互不影响，所以比级联型总的说，**误差要稍小**一些。

因此当要求有准确的传输零点时，采用级联型最合适，其他情况下这两种结构性能差不多，或许采用并联型稍好一点。



7.2 IIR数字滤波器算法结构

例：设IIR数字滤波器差分方程为：

$$y(n) = 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3) \\ + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3)$$



试用四种基本结构实现此差分方程。

解：对差分方程两边取 z 变换，得系统函数：

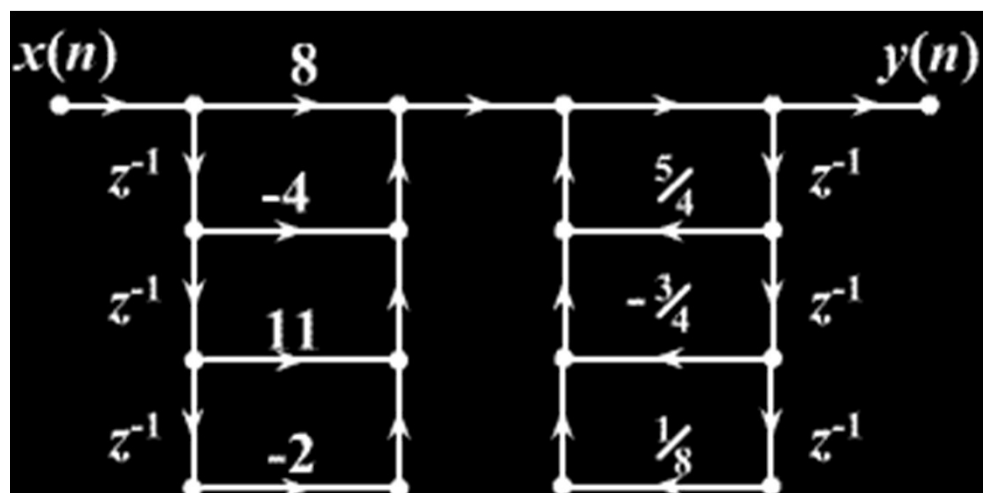
$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$



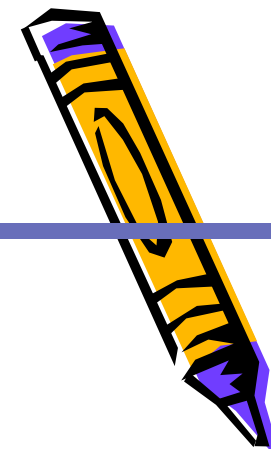
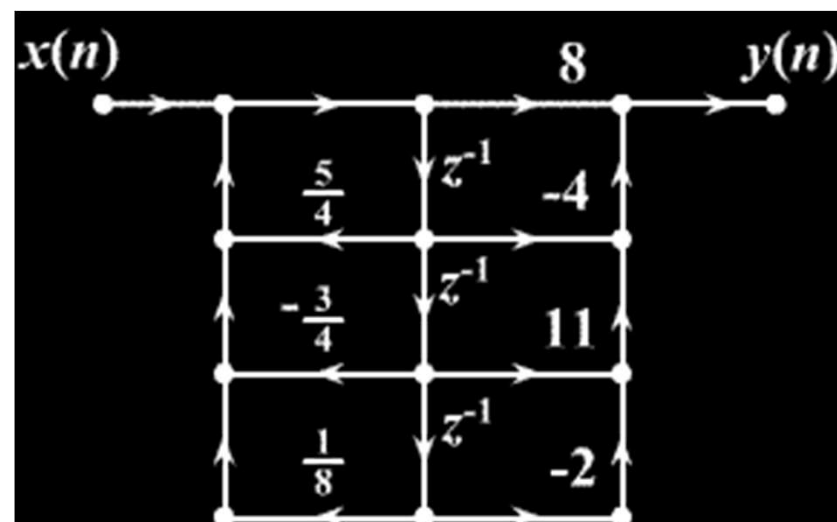
7.2 IIR数字滤波器算法结构

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

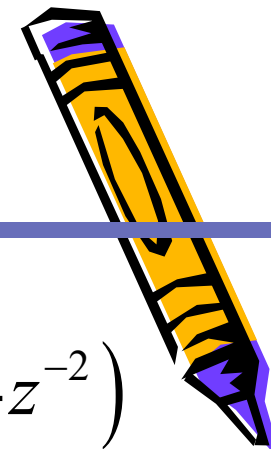
得直接I型结构:



典范型结构:



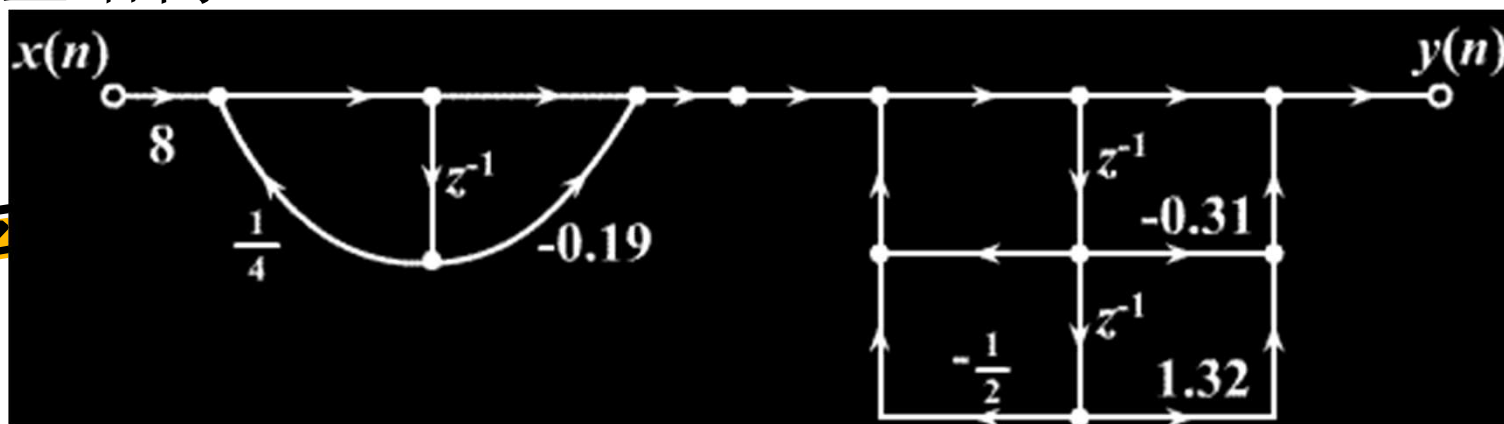
7.2 IIR数字滤波器算法结构



将 $H(z)$ 因式分解:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)} \\ &= \frac{8(1 - 0.19z^{-1})(1 - 0.31z^{-1} + 1.32z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)} \end{aligned}$$

得级联型结构:

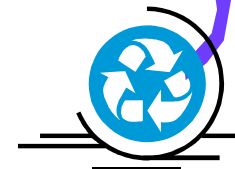
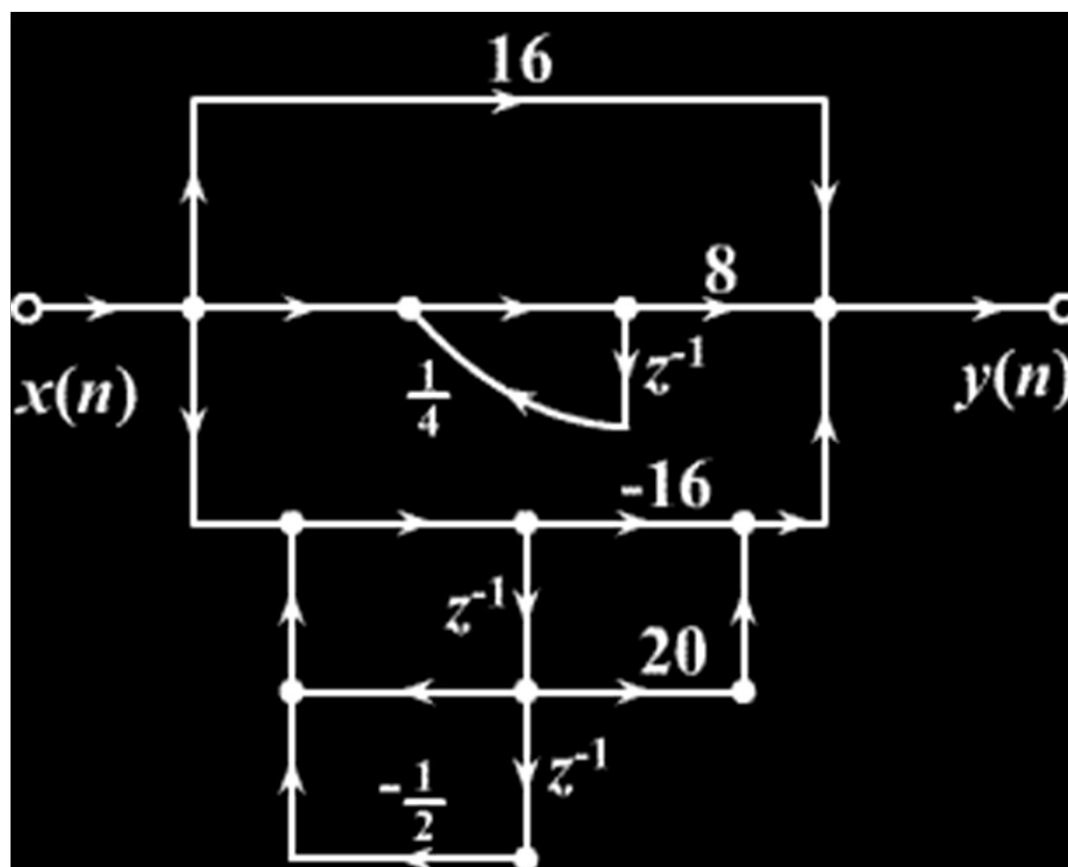


7.2 IIR数字滤波器算法结构

将 $H(z)$ 部分分式分解:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

得并联型结构:



7.3 FIR数字滤波器算法结构

- **FIR**数字滤波器的特点:

系统函数:
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

有 **$N-1$** 个零点分布于 **z** 平面

$z=0$ 处 是 **$N-1$** 阶极点

- 1) 系统的单位脉冲响应 **$h(n)$** 有限长, 长度为 **N** 点
- 2) 系统函数 **$H(z)$** 在 $|z| > 0$ 处收敛, 有限 **z** 平面只有零点, 全部极点在 **$z = 0$** 处 (因果系统)



- 3) 无输出到输入的反馈, 一般为非递归型结构

7.3 FIR数字滤波器算法结构

IIR滤波器的系统函数
及差分方程;

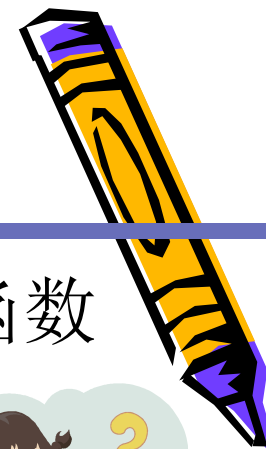
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

FIR滤波器的系统函数
及差分方程;

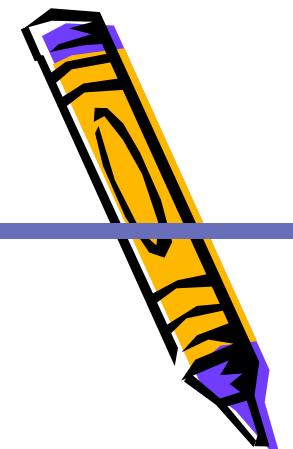
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m)$$



7.3 FIR数字滤波器算法结构

- FIR数字滤波器的基本结构：
 - 直接型（卷积型、横截型）
 - 级联型
 - 线性相位FIR滤波器
 - 频率采样结构
 - 快速卷积结构



7.3 FIR数字滤波器算法结构

- 1、直接型（卷积型、横截型）

FIR滤波器的系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

差分方程:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m]$$

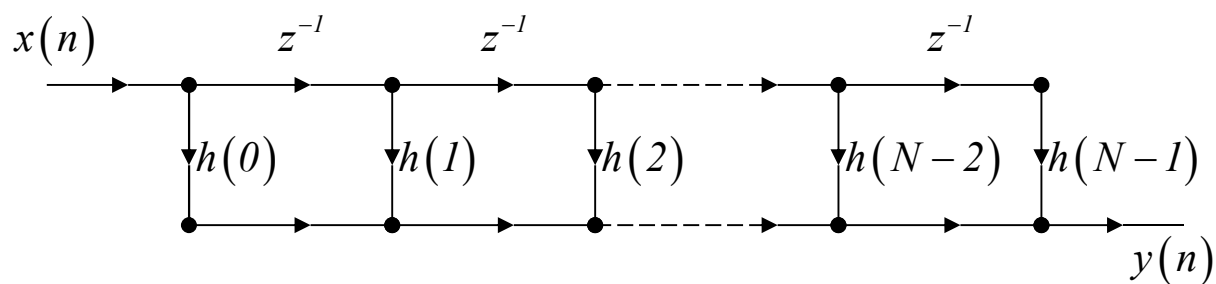


图7-7 FIR滤波器直接型结构

7.3 FIR数字滤波器算法结构

■ 2、级联型

将 $H(z)$ 分解成实系数二阶因式的乘积形式:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = h(0) \prod_{l=1}^L (1 + \alpha_{1l}z^{-1} + \alpha_{2l}z^{-2})$$

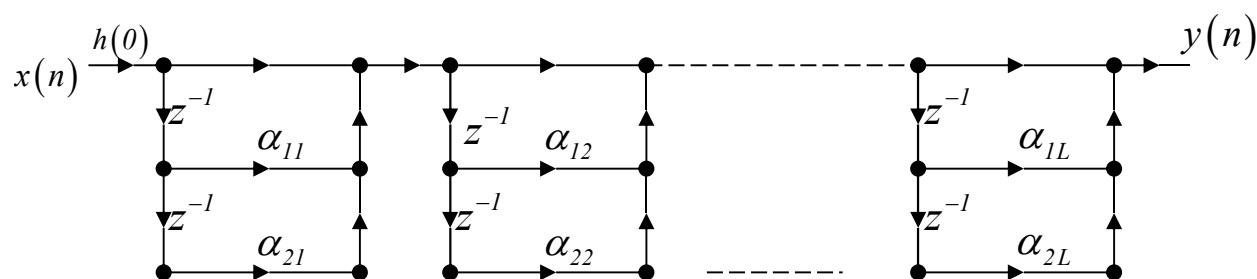


图7-8 FIR数字滤波器的级联型结构

- 每个基本节控制一对零点，便于控制滤波器的传输零点
- 系数比直接型多，所需的乘法运算多



7.3 FIR数字滤波器算法结构

■ 3、线性相位FIR滤波器的结构

FIR滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 为实数, $0 \leq n \leq N-1$

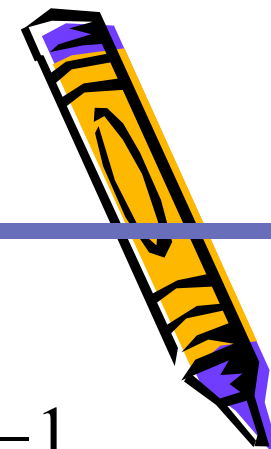
且满足:

偶对称:
$$h(n) = h(N-1-n)$$

或奇对称:
$$h(n) = -h(N-1-n)$$

则这种FIR滤波器具有严格/广义线性相位。

即对称中心在 $(N-1)/2$ 处



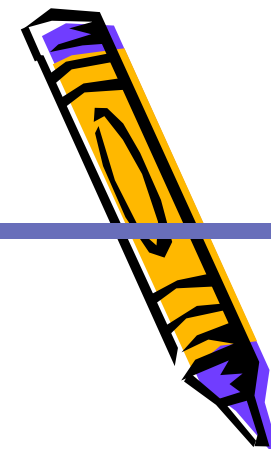
7.3 FIR数字滤波器算法结构

N 为奇数时:

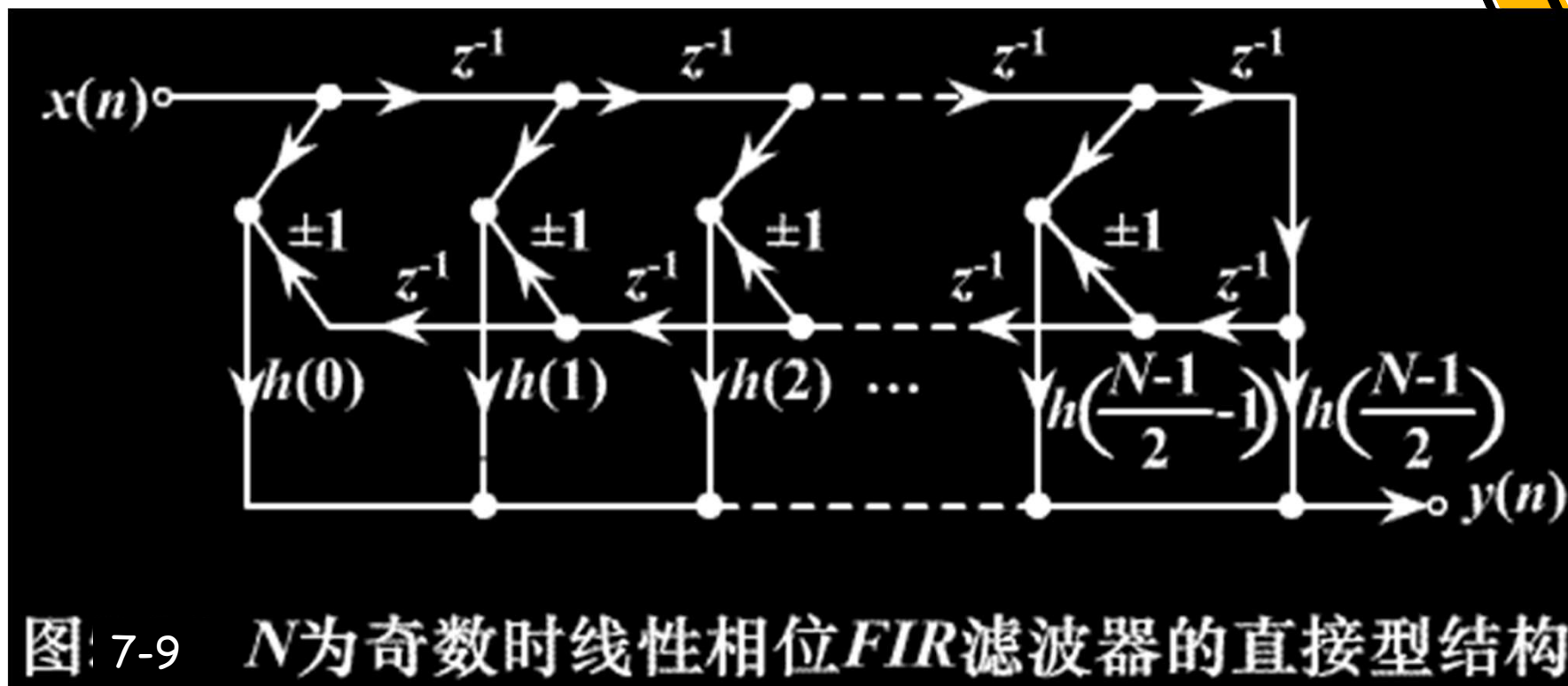
$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)z^{-n} \end{aligned}$$

令 $n = N - 1 - m$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$



7.3 FIR数字滤波器算法结构



$h(n)$ 偶对称, 取 “+”

$h(n)$ 奇对称, 取 “-”, 且 $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

7.3 FIR数字滤波器算法结构

N 为偶数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]$$

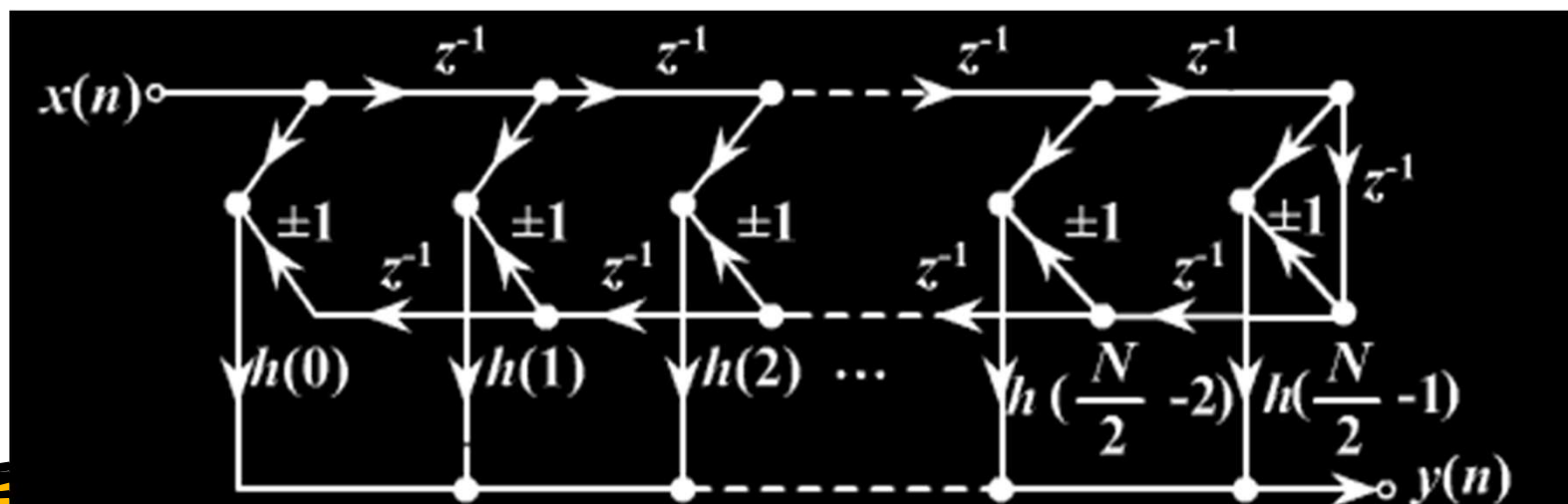
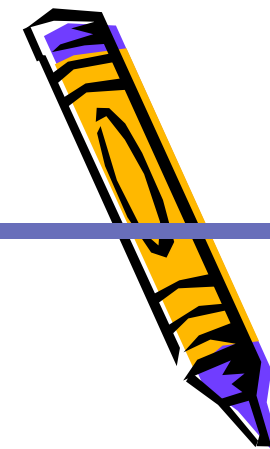


图 7-10 N 为偶数时，线性相位FIR滤波器的直接型结构
($h(n)$ 偶对称时 ± 1 取 $+1$, $h(n)$ 奇对称时 ± 1 取 -1)

7.3 FIR数字滤波器算法结构



■ 4、频率采样结构

N 点频率采样 $H(k)$ 恢复 $H(z)$ 的内插公式:

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \\ &= \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \end{aligned}$$

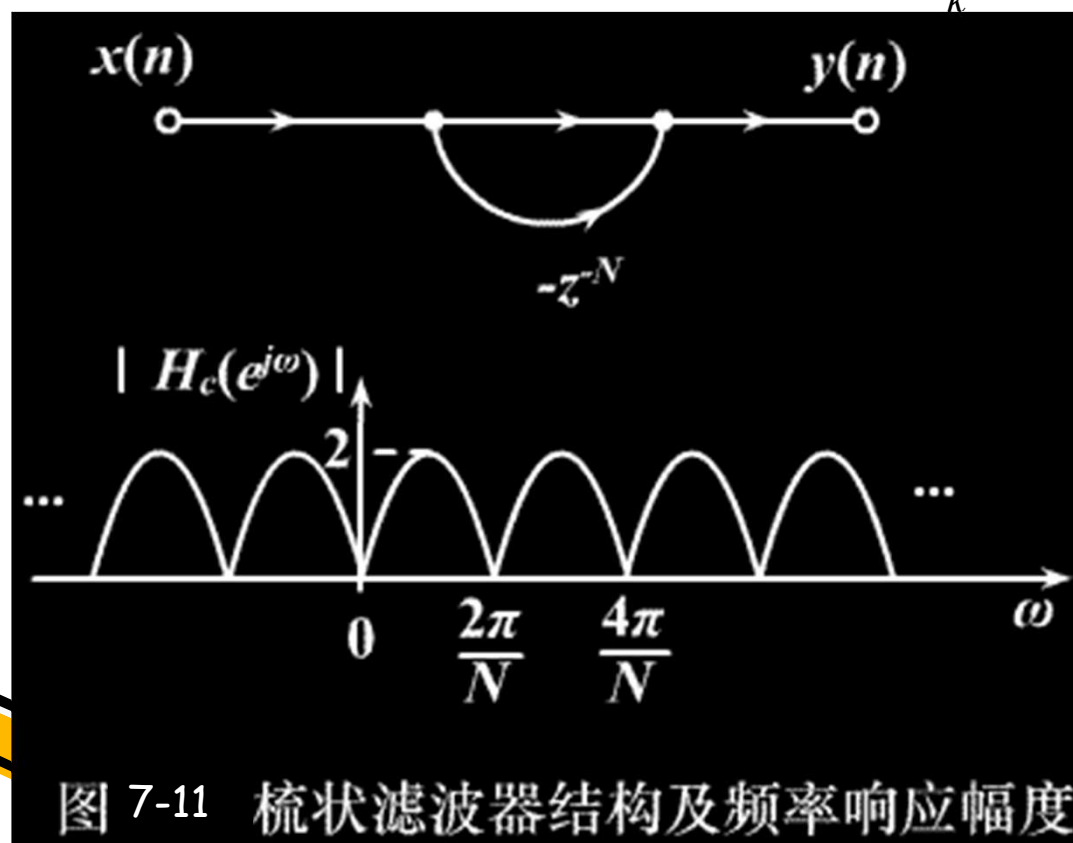


7.3 FIR数字滤波器算法结构



子系统: $H_c(z) = 1 - z^{-N}$ 是 N 节延时单元的梳状滤波器
在单位圆上有 N 个等间隔角度的零点:

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



频率响应:

$$\begin{aligned} H_c(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega N} \\ &= e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left(e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}} \right) \\ &= 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin \frac{\omega N}{2} \end{aligned}$$

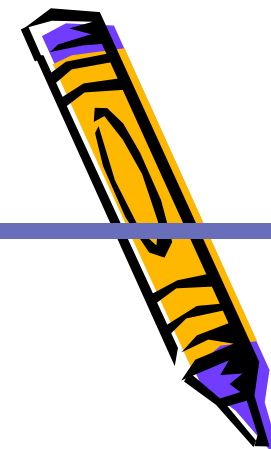
图 7-11 梳状滤波器结构及频率响应幅度

7.3 FIR数字滤波器算法结构

子系统: $H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$ 谐振器

单位圆上有一个极点: $z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

与第 k 个零点相抵消, 使该频率 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处的频率响应等于 $H(k)$



7.3 FIR数字滤波器算法结构

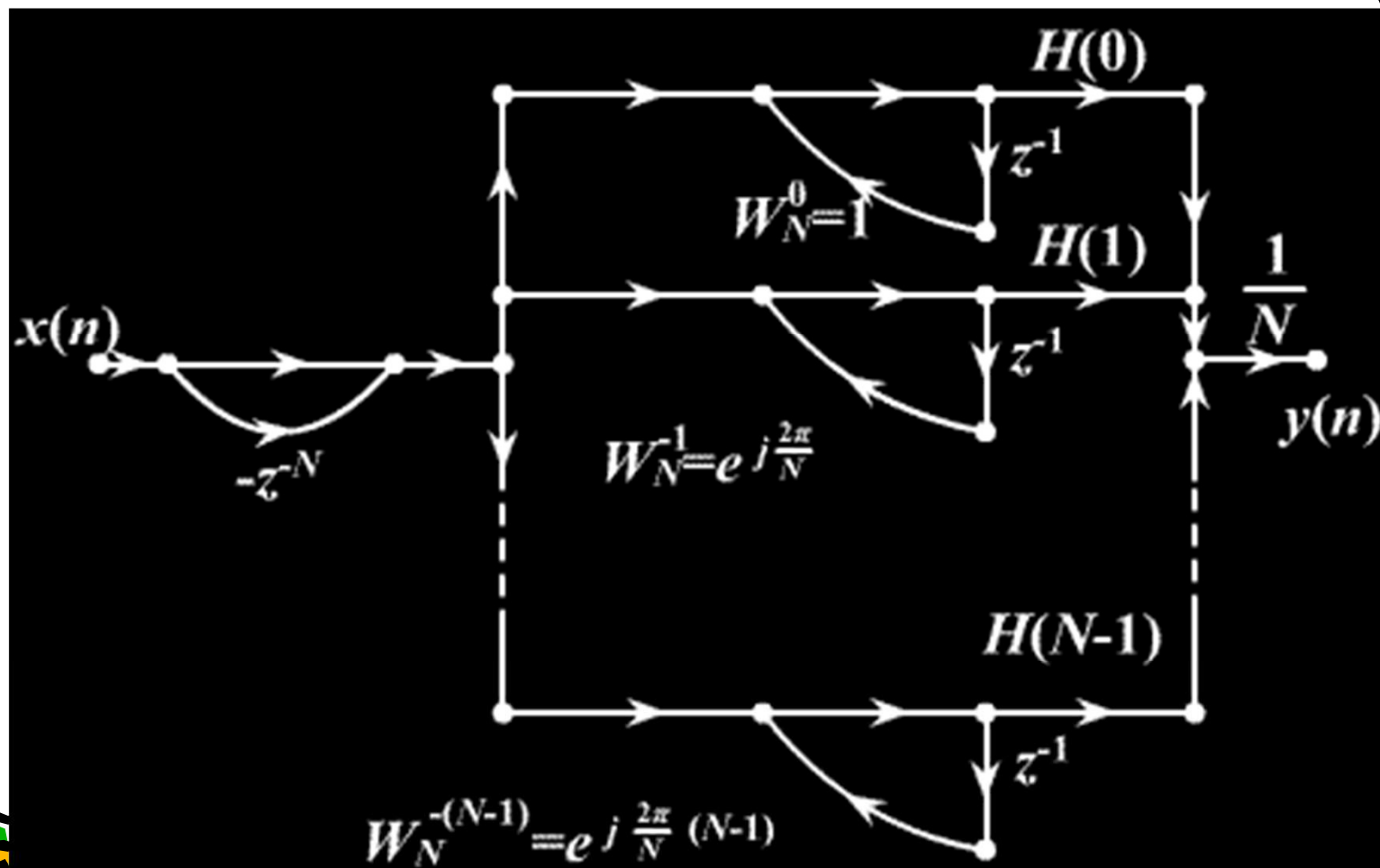
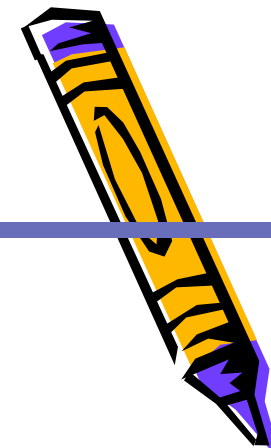


图 7-12 *FIR*滤波器的频率抽样型结构

7.3 FIR数字滤波器算法结构

- 频率抽样结构的优缺点
 - 调整 $H(k)$ 就可以有效地调整频响特性
 - 若 $h(n)$ 长度相同，则网络结构完全相同，除了各支路增益 $H(k)$ ，便于标准化、模块化
 - 有限字长效应可能导致零极点不能完全对消，导致系统不稳定
 - 系数多为复数，增加了复数乘法和存储量



7.3 FIR数字滤波器算法结构

■ 5、快速卷积结构

