Rappel

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tp}\, dt \qquad \text{avec } f(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Propriétés :

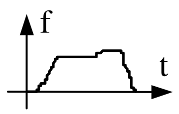
- Linéarité : $\mathcal{L}\big(f(t) + g(t)\big) = F(p) + G(p)$ et $\mathcal{L}\big(\lambda\, f(t)\big) = \lambda\, F(p)$ $\quad \lambda \in \Re$
- Intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right) = \dfrac{1}{p} F(p)$
- Dérivation : $\mathcal{L}\left(\dfrac{df}{dt}(t)\right) = \underbrace{pF(p)}_{\text{复域}} - \underbrace{f(0)}_{\text{时域}} \leftarrow n=1$

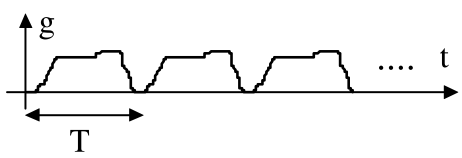
$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}(t)\right) = p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \leftarrow n=2$$

....

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = p^n F(p) - \underbrace{p^{n-1} f(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}_{\text{时域的零状态}} \quad C.I$$

- Périodicité : Soit les deux signaux suivants :





alors : $\quad G(p) = \dfrac{F(p)}{1 - e^{-Tp}}$

- Retard : $\mathcal{L}\big(f(t-\tau)\big) = e^{-\tau p} F(p)$

$$\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right) = F(p+a)$$

- Produit de convolution : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\right) = F(p)G(p)$
- Thérorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to \infty} pF(p)$
- Thérorème de la valeur finale : $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} pF(p)$

• Quelques transformées de Laplace

大写 $F(p)$	小写 f(t) t >0
1	δ(t) : impulsion de Dirac
$\dfrac{1}{p}$	Γ(t) : échelon unitaire =1 (t>0)
n=1 $\dfrac{1}{p^n}$ $\dfrac{1}{p^2}$	t ← n=2 n=1 $\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
$\dfrac{1}{p+a}$ 系数1	即为极点 p=-a $e^{极点t}$ e^{-at}
$\dfrac{1}{(p+a)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ n = 1, 2, 3, ...
* $\dfrac{a}{p(p+a)}$	$1-e^{-at}$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\left(a\,e^{-at}-b\,e^{-bt}\right)$
$\dfrac{p+d}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}\left[(d-a)\,e^{-at}-(d-b)\,e^{-bt}\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{p+d}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{(d-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(d-b)e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{(d-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	sinωt是第一 $\sin\omega t$
$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ ω→换p	$\cos\omega t$
$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$
$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$
$\dfrac{p+d}{p^2+\omega^2}$	$\sqrt{\dfrac{d^2+\omega^2}{\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)$ φ ≡ Arctg(ω/d)
$\dfrac{p\sin\phi+\omega\cos\phi}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t+\phi)$