



第三章 离散时间信号 和系统的频域分析

郑春红

电子工程学院

Email: chzheng@xidian.edu.cn

2021/10/12

信号与系统的分析方法

信号与系统的分析方法有**时域**、**变换域**两种。

- 时域分析法

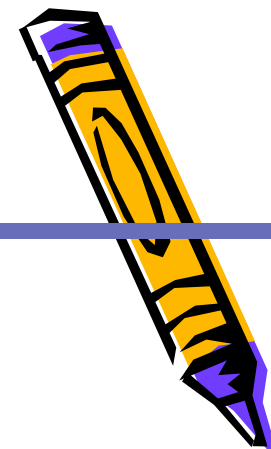
1. 连续时间信号与系统:

信号的时域运算, 时域分解, 卷积积分等

。

2. 离散时间信号与系统:

序列的变换与运算, 卷积和, 差分方程的求解。



变换域分析方法：

1. 连续时间信号与系统

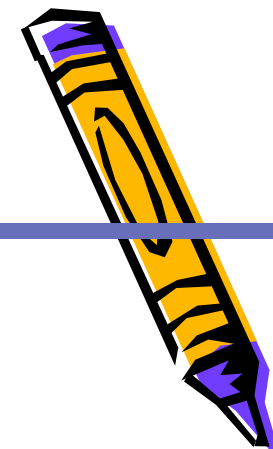
Laplace变换

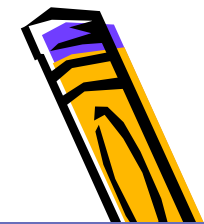
Fourier变换

2. 离散时间信号与系统

Fourier变换

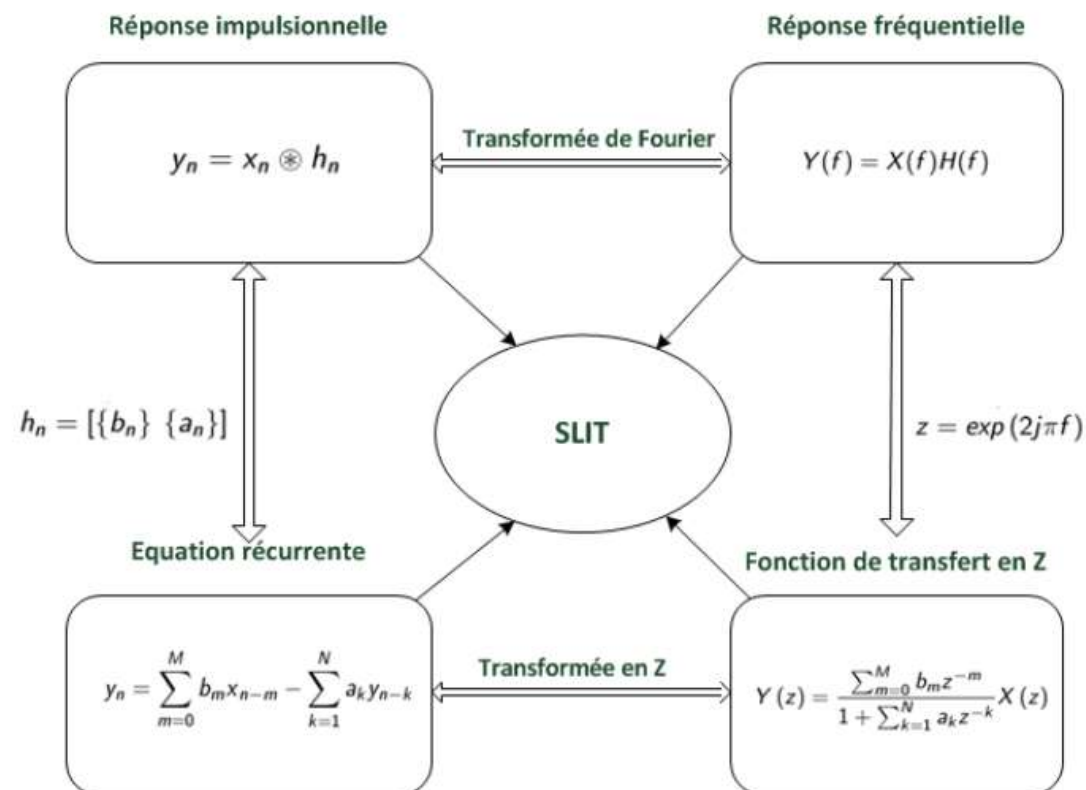
z变换



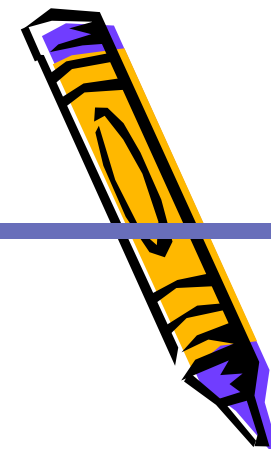


Récapitulatif

- Un SLIT est caractérisé (peut être représenté) par sa réponse impulsionnelle, son équation récurrente, sa fonction de transfert en Z ou sa réponse fréquentielle.
- Ces différentes représentations sont équivalentes



第三章 离散时间信号和系统的频域分析



- 3.1 序列傅里叶变换的定义
- 3.2 序列的 Z 变换
- 3.3 信号和系统的频域特性
- 3.4 梳状滤波器和最小相位系统



3.1 序列傅里叶变换的定义

1、序列傅里叶变换的定义

a). FT

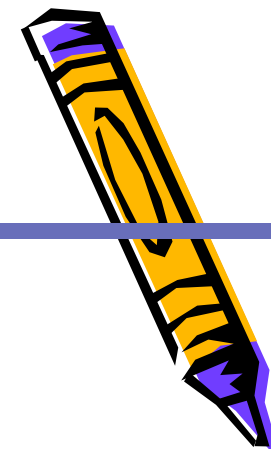
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bar{e}^{j\omega n} \quad (3-1)$$

简记为: $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(x(n))$

b). FT的反变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

简记为: $(x(n)) = \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})]$



3.1 序列傅里叶变换的定义

c). $X(e^{j\omega})$ 的表示方法

一般为复数，可用它的实部和虚部表示为

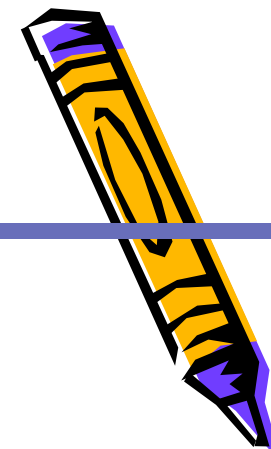
$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

或用幅度谱和相位谱表示为：

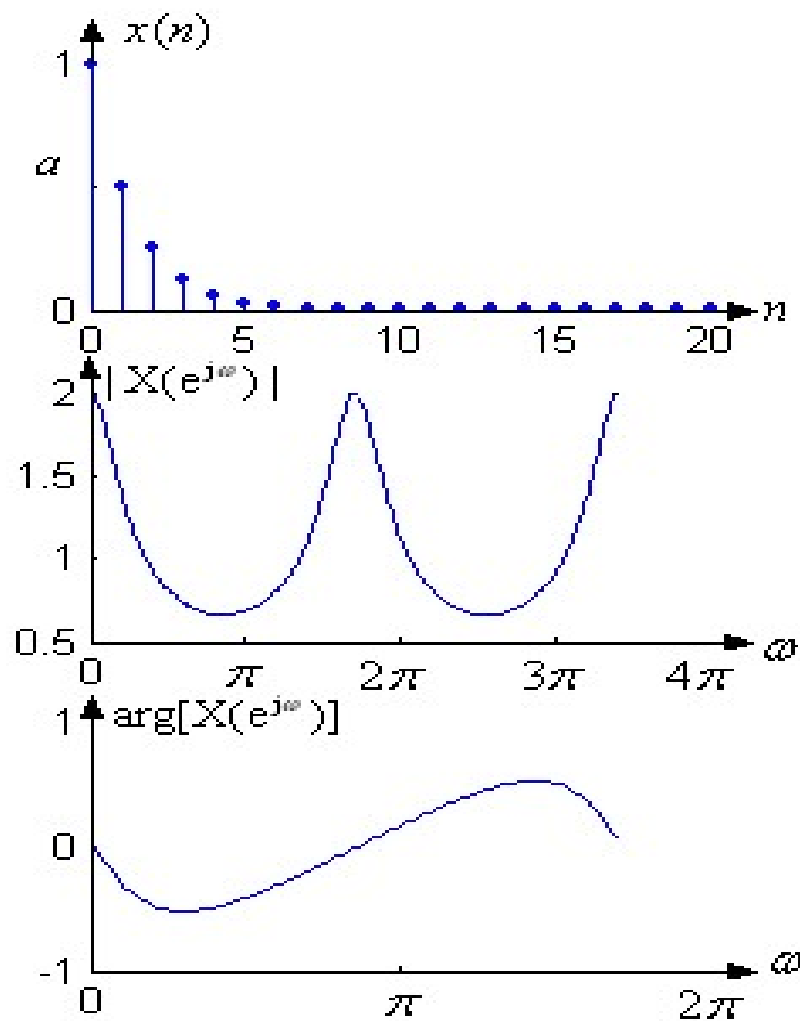
$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]} = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$X(\omega) = |X(e^{j\omega})| = [X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})] = \arctg \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$



3.1 序列傅里叶变换的定义



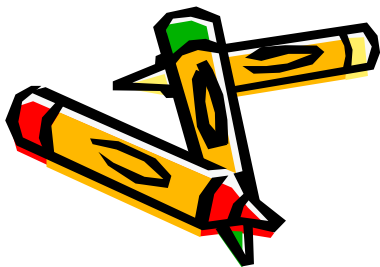
偶对称函数

奇对称函数

图3-1 信号傅里叶变换的模和相位

3.2 序列的 Z 变换

- 3.2.1 Z 变换的定义及收敛域
- 3.2.2 几种序列的 Z 变换及其收敛域
- 3.3.3 序列的 Z 变换与DTFT的关系
- 3.2.4 逆 Z 变换
- 3.2.5 Z 变换的性质和定理



3.2.1 Z变换的定义及收敛域

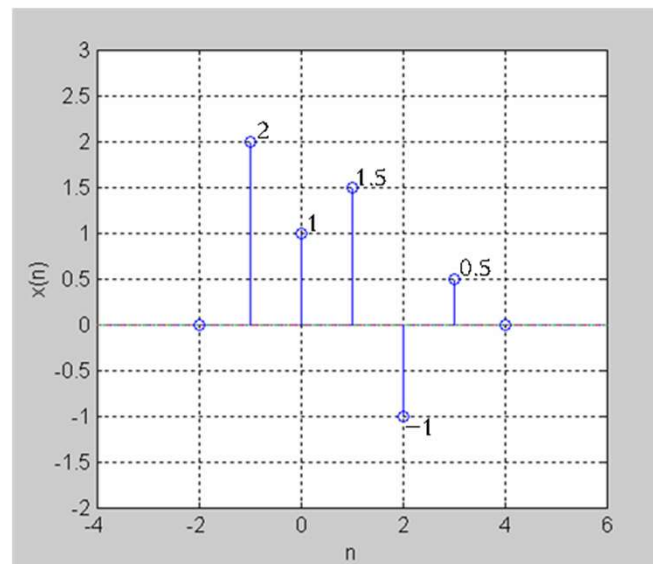
1、Z变换定义：

序列 $x(n)$ 的 z 变换定义为：

$$X(z) = \text{ZT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

z 是复变量，所在的复平面称为 z 平面

$$X(z) = 2z + 1 + 1.5z^{-1} - z^{-2} + 0.5z^{-3}$$



3.2.1 Z变换的定义及收敛域

2、z变换的收敛域与零极点

i)收敛域：对于任意给定序列 $x(n)$ ，使其z变换 $X(z)$ 收敛的所有z值的集合称为 $X(z)$ 的**收敛域**。

ii)收敛条件：级数收敛的**充要条件**是满足绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty$$

iii)零极点

$$\text{令 } X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

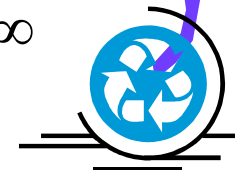
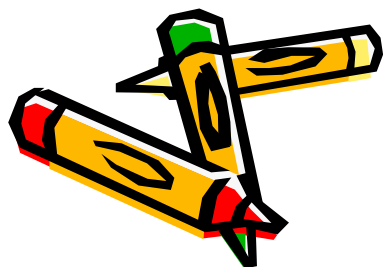
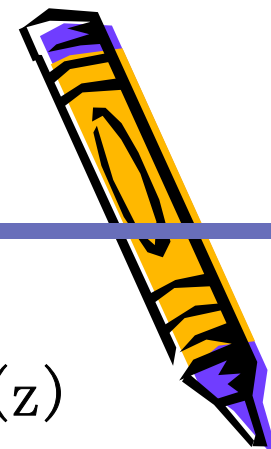
则 $X(z)$ 的零点：使 $X(z)=0$ 的点，

即 $P(z)=0$ 和当 $Q(z)$ 阶次高于 $P(z)$ 时 $Q(z) \rightarrow \infty$

$X(z)$ 的极点：使 $X(z) \rightarrow \infty$ 的点，

即 $Q(z)=0$ 和当 $P(z)$ 阶次高于 $Q(z)$ 时 $P(z) \rightarrow \infty$

Z变换+收敛域决定序列



3.2.2 几种序列的Z变换及其收敛域

例3-1 求序列 $x(n) = a^n u(n)$ 的Z变换及收敛域。

解:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= 1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + \cdots + (az^{-1})^n \cdots \end{aligned}$$

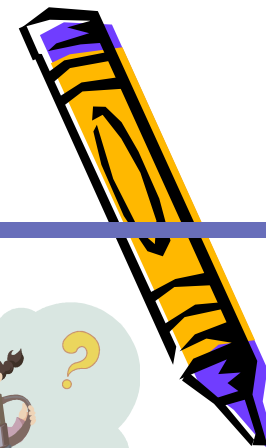
当 $|z| > |a|$ 时, 这是无穷递缩等比级数。

$$q = az^{-1}, S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}。$$

$z = a$ 为极点, 收敛域在圆 $|z| = |a|$ 外。

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad \text{收敛域: } |z| > |a|$$

*收敛域一定在模最大的极点所在的圆外。



3.2.2 几种序列的Z变换及其收敛域

例3-2 求序列 $x(n] = -b^n u(-n-1)$ Z变换及收敛域。

解:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -b^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n} z^n$$
$$= -[b^{-1}z + (b^{-1}z)^2 + \cdots + (b^{-1}z)^n + \cdots]$$

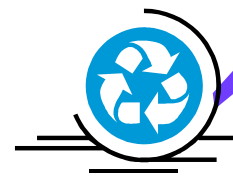


同样的, 当 $|b| > |z|$ 时, 这是无穷递缩等比级数, 收敛。

故其Z变换为:
$$X(z) = -\frac{b^{-1}z}{1 - b^{-1}z}$$

$$= \frac{z}{z - b} \quad \text{收敛域: } |z| < |b|$$

*收敛域一定在模最小的极点所在的圆内。



3.2.3 序列的Z变换与DTFT的关系

序列 $x(n)$ 的Z变换:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

序列 $x(n)$ 的DTFT为:

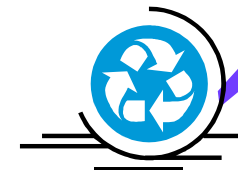
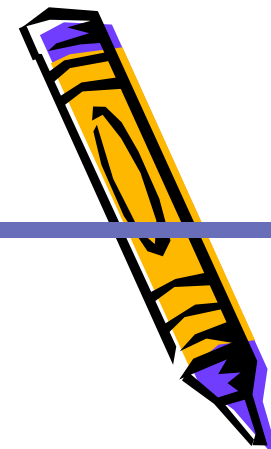
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$X(z)$ 的收敛域包含单位圆, 令 $z = e^{j\omega}$

则

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}$$

所以, 序列在单位圆上的Z变换为序列的傅氏变换。



3.2.4 逆Z变换

1、定义

已知序列 $x(n)$ 的Z变换 $X(z)$ 及其收敛域, 反过来求序列 $x(n)$ 的变换称作逆Z变换。

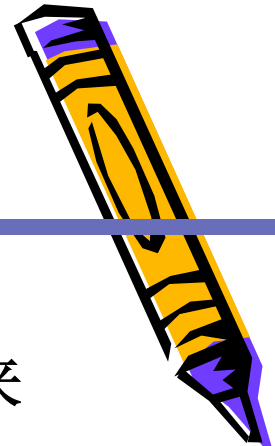
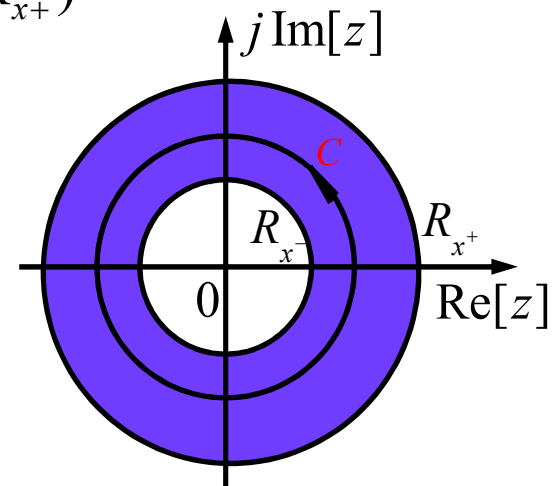
$$x(n) = \text{IZT}[X(z)]$$

z变换公式:

$$\text{正: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\text{反: } x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz, \quad c \in (R_{x-}, R_{x+})$$

C为环形收敛域内环绕原点的一条逆时针闭合单围线。



3.2.4 逆Z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

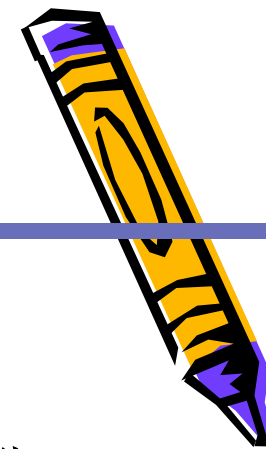
同乘 z^{k-1} , 并在收敛域中取一条包含原点的闭合曲线做围线积分。

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz$$

根据柯西定理: $\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-n+k-1} dz = x(k) \quad (\text{由于 } -n+k=0)$$

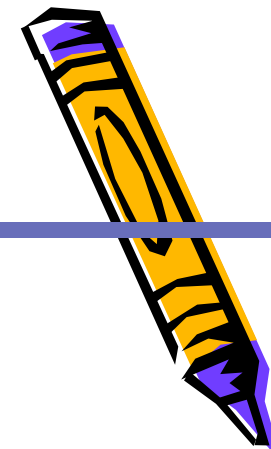
即: $x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad c \in (R_{x-}, R_{x+})$



3.2.4 逆Z变换

2、z反变换的求解方法：

- 长除法
- 部分分式展开法
- 留数法



3.2.4 逆Z变换

a) 长除法（幂级数法）

把 $X(z)$ 展开成幂级数

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \cdots + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

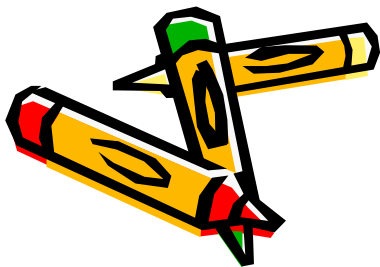
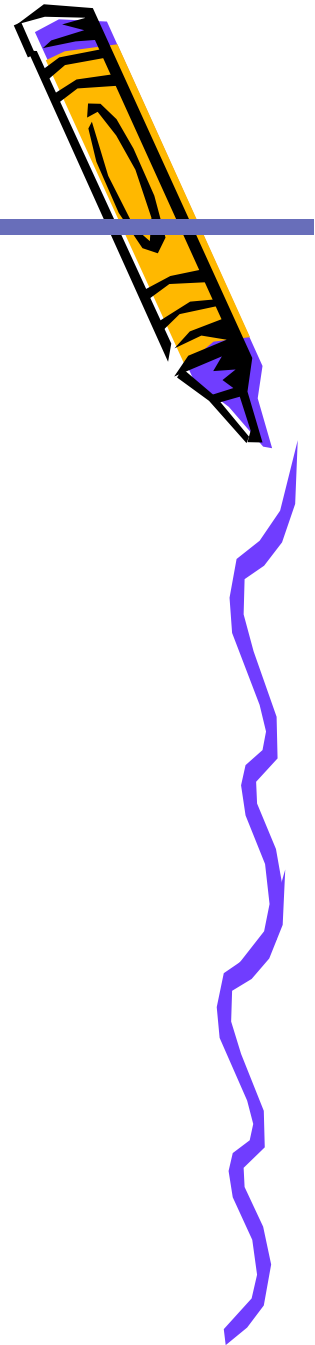
级数的系数就是序列 $x(n)$ 。

若：收敛域为 $|z| > R_{x-}$ ， $x(n)$ 为因果序列（右边序列），

则 $X(z)$ 展成 z 的负幂级数。

收敛域为 $|z| < R_{x+}$ ， $x(n)$ 为左边序列，

$X(z)$ 展成 z 的正幂级数。



3.2.4 逆Z变换

例3-3 试用长除法求 $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ $|z| > |a|$

的z反变换。

解：由X(z)的收敛域判定x(n)是一个右边序列，
将X(z)展开成负幂级数。



$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \end{aligned}$$
$$\begin{array}{r} 1 - az^{-1} \overline{) 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots} \\ \underline{1 - az^{-1}} \phantom{+ a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots} \\ az^{-1} - a^2z^{-2} \phantom{+ a^3z^{-3} + \cdots} \\ \underline{az^{-1} - a^2z^{-2}} \phantom{+ a^3z^{-3} + \cdots} \\ a^2z^{-2} - a^3z^{-3} \\ \underline{a^2z^{-2} - a^3z^{-3}} \\ a^3z^{-3} \\ \vdots \end{array}$$

$$\therefore x(n) = a^n u(n)$$



3.2.4 逆Z变换

例3-4 试用长除法求 $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$

的z反变换。

解：由X(z)的收敛域判定x(n)是一个左边序列，
将X(z)展开成正幂级数。

$$X(z) = -[a^{-1}z + a^{-2}z^2 + a^{-3}z^3 + \cdots]$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$\therefore x(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$-a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \cdots$$

$$\begin{array}{r} -az^{-1} + 1 \overline{) 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 - a^{-1}z \\ \hline a^{-1}z \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^{-1}z - a^{-2}z^2 \\ \hline a^{-2}z^2 \end{array}$$

⋮



3.2.4 逆Z变换

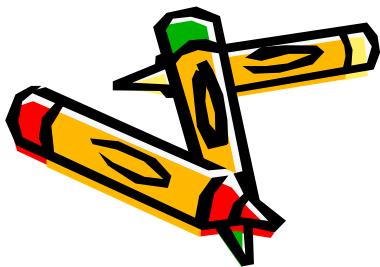
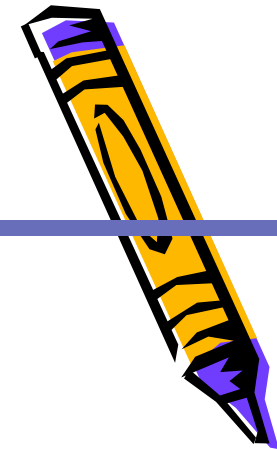
b) 部分分式展开法

$X(z)$ 是 z 的有理分式，可分解成部分分式：

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = X_1(z) + X_2(z) + \cdots + X_K(z)$$

对各部分分式求 z 反变换：

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{IZT}[X(z)] \\ &= \text{IZT}[X_1(z)] + \text{IZT}[X_2(z)] + \cdots + \text{IZT}[X_k(z)] \end{aligned}$$



3.2.4 逆Z变换

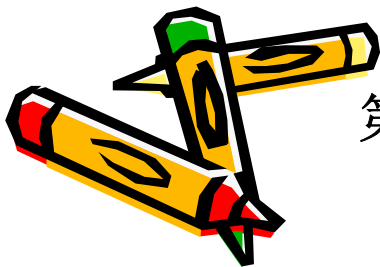
$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

仅考虑**X(z)**只有**N**个一阶极点

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n} + \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} r_k &= \operatorname{Res} \left[\frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_k} & k = 1, 2, \dots, N \\ &= X(z)(1 - p_k z^{-1}) \Big|_{z=p_k} \end{aligned}$$

第一项的逆**z**变换是单位脉冲序列**δ(n)**及其延迟序列的组合。



3.2.4 逆Z变换

例3-5 利用部分分式法，求

$X(z) = 1/(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})$, $|z| > 2$
的 z 反变换。

解：

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - 2)(z - 0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z - 2)(z - 0.5)} = \frac{A_1}{z - 2} + \frac{A_2}{z - 0.5}$$



3.2.4 逆Z变换

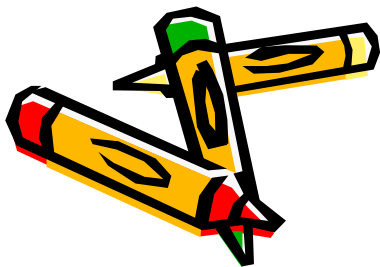
$$r_1 = [(z-2) \frac{X(z)}{z}]_{z=2} = \frac{4}{3}$$

$$r_2 = [(z-0.5) \frac{X(z)}{z}]_{z=0.5} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore X(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{z}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-0.5}$$

又 $|z| > 2$, 序列是一个右序列

$$x(n) = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (0.5)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



3.2.4 逆Z变换

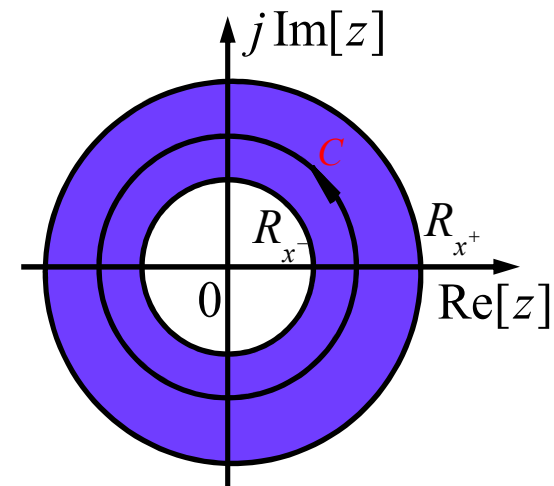
c) 留数法

根据复变函数理论，若函数 $X(z)$ 在环状区域
 $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$ ($0 \leq R_{x^-}, R_{x^+} \leq \infty$) 内是解析的，则在此区域内
 $X(z)$ 可展开成罗朗级数，即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^{-n} \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

其中 $C_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

围线 c 是在 $X(z)$ 的环状收敛域内环绕
原点的一条反时针方向的闭合单围线。



3.2.4 逆Z变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad c \in (R_{x_-}, R_{x_+})$$

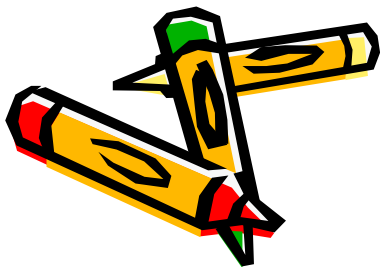
利用留数定理求围线积分，令 $F(z) = X(z)z^{n-1}$

若**F(z)**在围线**c**上连续，在**c**内有**K**个极点**p_k**，则：

$$x(n) = \sum_k \text{Res}[F(z)]_{z=p_k}$$

若**F(z)**在**c**外有**m**个极点**p_m**，且分母多项式**z**的阶次比分子多项式高二阶或二阶以上，则：

$$x(n) = -\sum_m \text{Res}[F(z)]_{z=p_m}$$

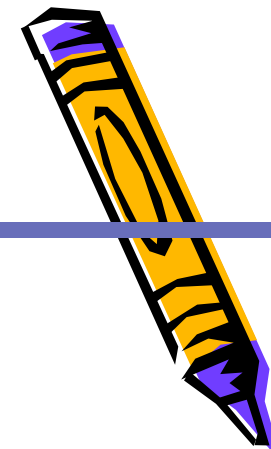


3.2.4 逆Z变换

留数的计算公式

单阶极点的留数：

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[X(z)z^{n-1}, p_k\right] & \quad k=1,2,\cdots,N \\ & = X(z)z^{n-1}(z-p_k)\Big|_{z=p_k} \end{aligned}$$



3.2.4 逆Z变换

例3-6 已知 $X(z) = \frac{z^2}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}$, $\frac{1}{4} < |z| < 4$, 求z反变换。

解:

$$X(z) \cdot z^{n-1} = \frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}$$

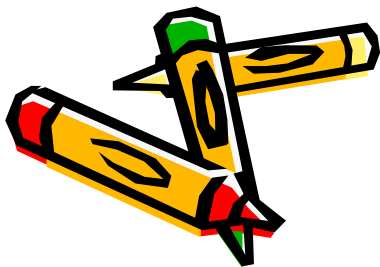


1) 当 $n \geq -1$ 时, z^{n+1} 不会构成极点, 所以这时C内只

有一个一阶极点 $p_1 = \frac{1}{4}$ 因此

$$x(n) = \text{Res}[z^{n+1} / (4-z)(z-\frac{1}{4})]_{z=\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4})^{n+1}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{15} \cdot 4^{-n}, n \geq -1$$



3.2.4 逆Z变换

2) 当 $n \leq -2$ 时, $X(z)z^{n-1}$ 中的 z^{n+1} 构成 $n+1$ 阶极点。

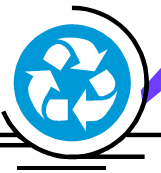
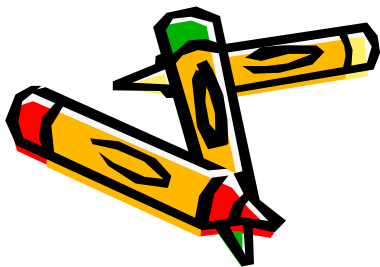
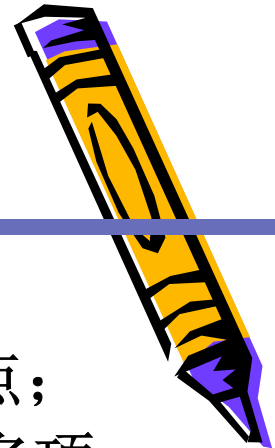
因此 C 内有极点: $z=1/4$ (一阶), $z=0$ 为 $(n+1)$ 阶极点;
而在 C 外仅有 $z=4$ (一阶) 这个极点, 且 $F(z)$ 的分母多项式阶次高于分子多项式阶次 2 次以上,

$$x(n) = -\operatorname{Res}\left[z^{n+1} / (4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)\right]_{z=4}$$

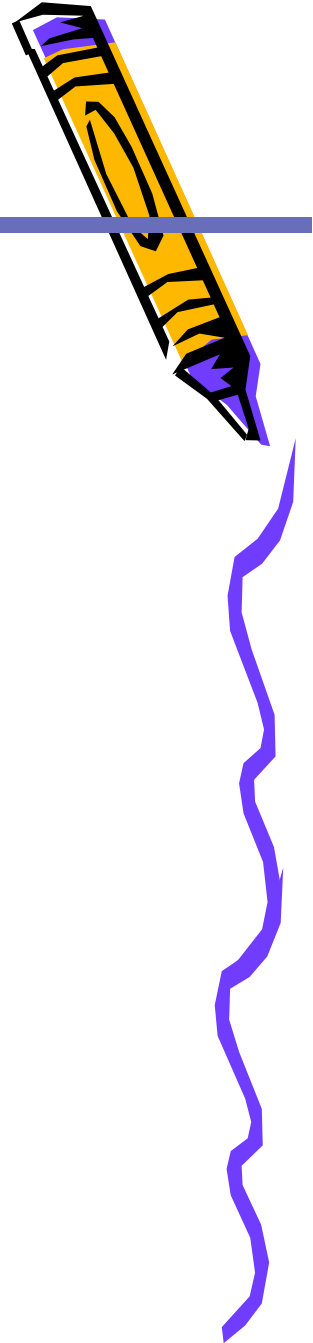
$$= \frac{(4)^{n+1}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{15} \cdot 4^{n+2}, n \leq -2$$

$$\text{因此 } x(n) = \begin{cases} \frac{1}{15} 4^{-n}, & n \geq -1 \\ \frac{1}{15} 4^{n+2}, & n \leq -2 \end{cases}$$

$$\therefore x(n) = \frac{4^{-n}}{15} u(n+1) + \frac{4^{n+2}}{15} u(-n-2)$$



3.3 利用 Z 变换分析信号和系统的频域特性

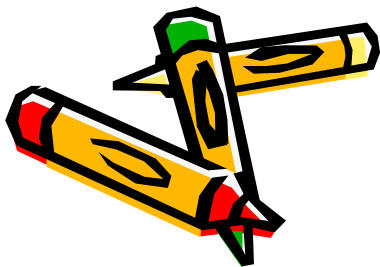


3.3.1 离散时间LTI的频域分析

3.3.2 频率响应与系统函数

3.3.3 利用系统函数的极点分布
分析系统的因果性和稳定性

3.3.4 利用系统的零极点分布
分析系统的频率特性



3.3.1 离散时间LTI的频域分析

1、差分方程的 z 变换解：

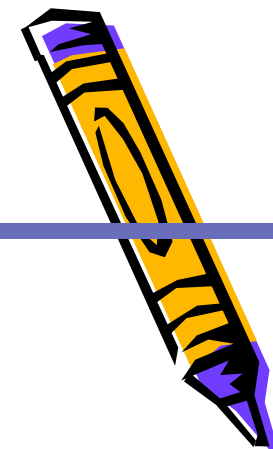
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i), \quad a_0 = 1$$

系统的全响应：零输入响应+零状态响应

零状态响应=输入序列*单位脉冲响应

零输入响应怎么求？

假定系统是因果系统。



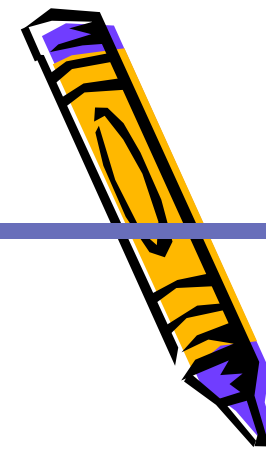
3.3.1 离散时间LTI的频域分析

设
$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n}$$

则
$$\begin{aligned} \text{ZT}[y(n-m)] &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m)z^{-n} = z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m)z^{-(n-m)} \\ &= z^{-m} \sum_{l=-m}^{\infty} y(l)z^{-l} = z^{-m} \left[\sum_{l=0}^{\infty} y(l)z^{-l} + \sum_{l=-m}^{-1} y(l)z^{-l} \right] \\ &= z^{-m} \left[Y(z) + \sum_{l=-m}^{-1} y(l)z^{-l} \right] \end{aligned}$$

利用上式对差分方程进行单边 z 变换

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l} \right] = \sum_{i=0}^M b_i X(z)z^{-i}, \quad a_0 = 1$$



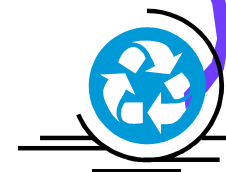
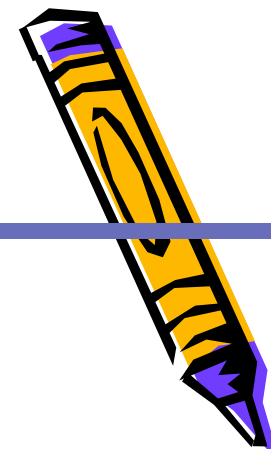
3.3.1 离散时间LTI的频域分析

整理可得：

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad a_0 = 1$$

式中，第一项与系统的初始条件无关，为零状态解；
第二项与系统的输入无关，为零输入解。

将 $Y(z)$ 做逆 z 变换，则可以得到输出全响应 $y(n)$ 。



3.3.2 频率响应与系统函数

1、频率响应：

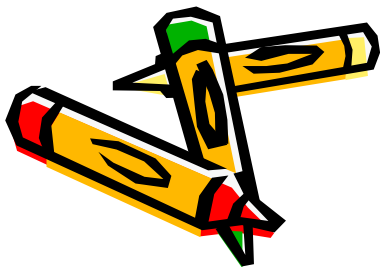
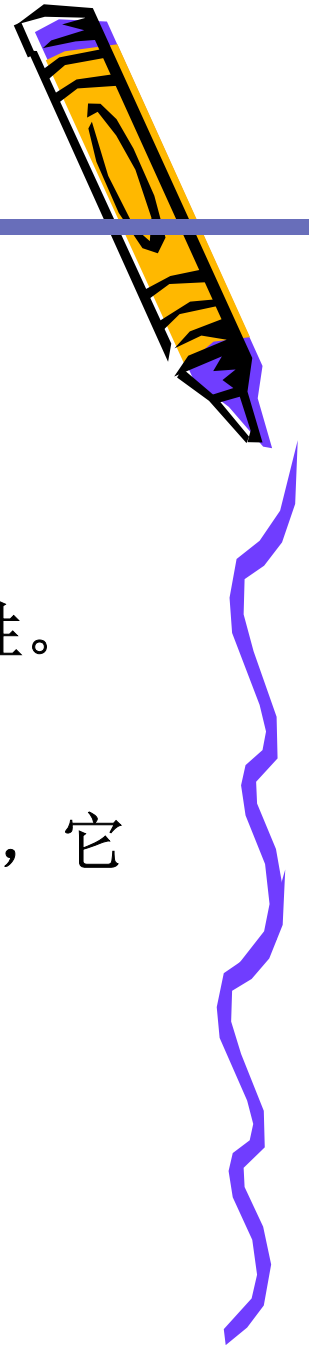
对 $h(n)$ 进行傅里叶变换得到 $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$H(e^{j\omega})$ 称为频率响应，它表征了系统的频率特性。

2、系统函数：

对 $h(n)$ 进行 z 变换得到 $H(z)$ ， $H(z)$ 称为系统函数，它表征了系统的复频域特性。



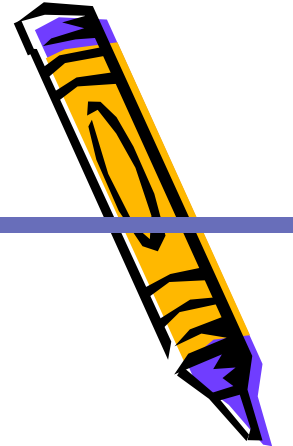
3.3.2 频率响应与系统函数

频率响应与系统函数的关系：

$H(e^{j\omega})$ 与 $H(z)$ 之间关系如下式：

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

说明单位圆 $z = e^{j\omega}$ 上的系统函数就是系统的频率响应。



3.3.2 频率响应与系统函数

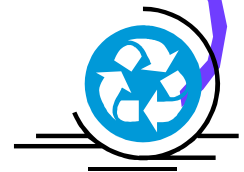
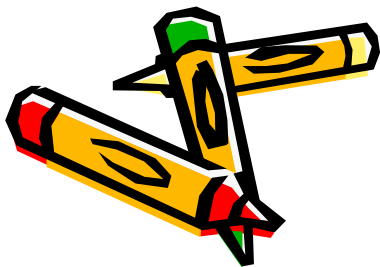
系统函数可写作：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$= b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M z - z_i}{\prod_{k=1}^N z - p_k}$$

$z_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 是系统函数的零点

$p_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 是系统函数的极点



3.3.3 利用系统函数的极点分布 分析系统的因果性和稳定性

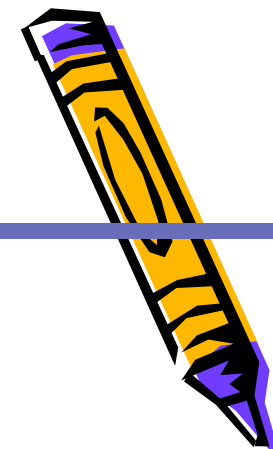
因果系统的充要条件： $h(n) = 0, \quad n < 0$

其系统函数的收敛域为： $R_{x-} < |z| \leq \infty$

稳定系统的充要条件： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

其系统函数的收敛域包含单位圆。

因果稳定系统的系统函数 **$H(z)$** 的所有极点
一定分布在单位圆内。



3.3.3 利用系统函数的极点分布 分析系统的因果性和稳定性

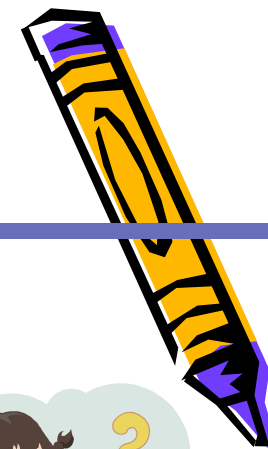
例3—7已知 $H(z) = \frac{1-a^2}{1+a^2-az^{-1}-az}$, $|a| < 1$, a 为实常数
分析其因果性和稳定性。

解: $H(z)$ 的极点为 $z = a$ $z = a^{-1}$

(1) 收敛域 $a^{-1} < |z| \leq \infty$, 对应的系统是因果系统, 但由于收敛域不包含单位圆, 因此是不稳定系统。

(2) 收敛域 $0 \leq |z| < a$, 对应的系统是非因果且不稳定。

(3) 收敛域 $a^{-1} < |z| < a$, 对应的系统是非因果系统, 但由于收敛域包含单位圆, 因此是稳定系统。



3.3.3 利用系统函数的极点分布 分析系统的因果性和稳定性

$H(z)$ 的三种收敛域中，前两种系统不稳定，不能选用；最后一种收敛域，系统稳定但非因果，还是不能具体实现，因此严格讲，这样的系统是无法具体实现的。

但是我们利用数字系统或者说计算机的存贮性质，可以近似实现第三种情况。

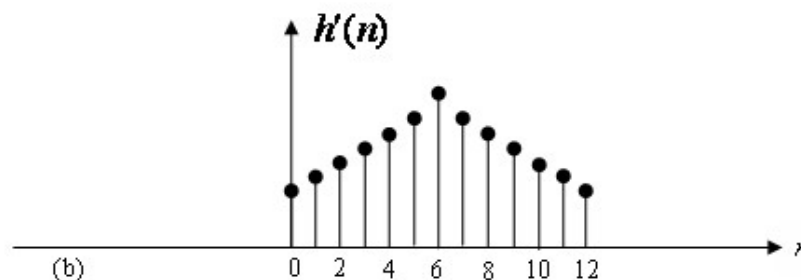
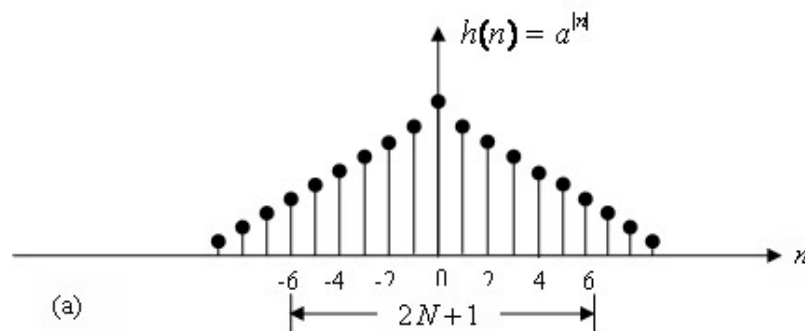


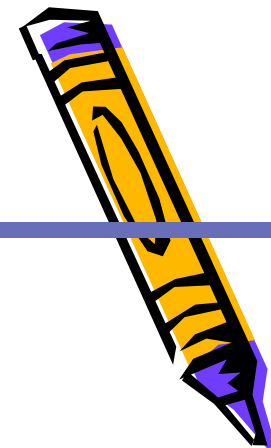
图 3-15 例 3.10 图示



3.3.4 利用系统的零极点分布 分析系统的频率特性

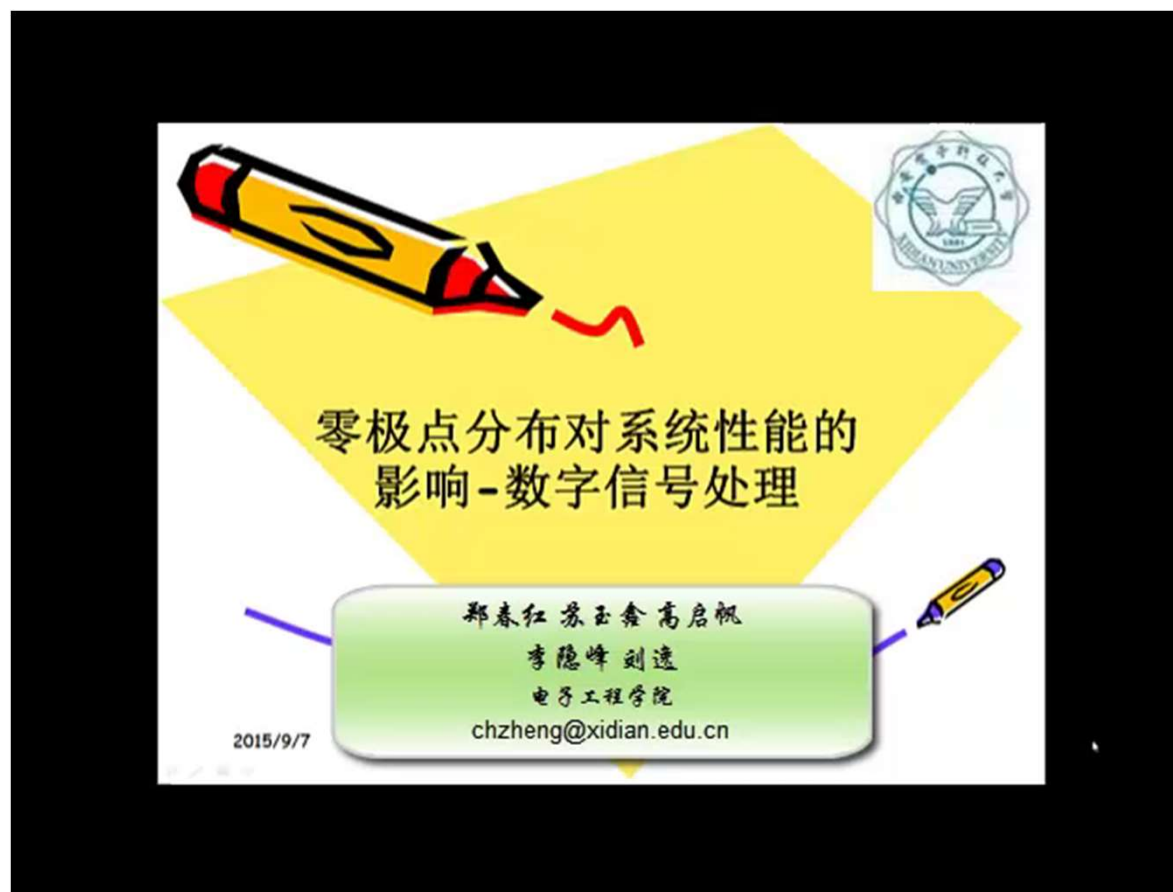
$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = A z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - c_i)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{i=1}^M (e^{j\omega} - c_i)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]} \\ &= |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)} \end{aligned}$$



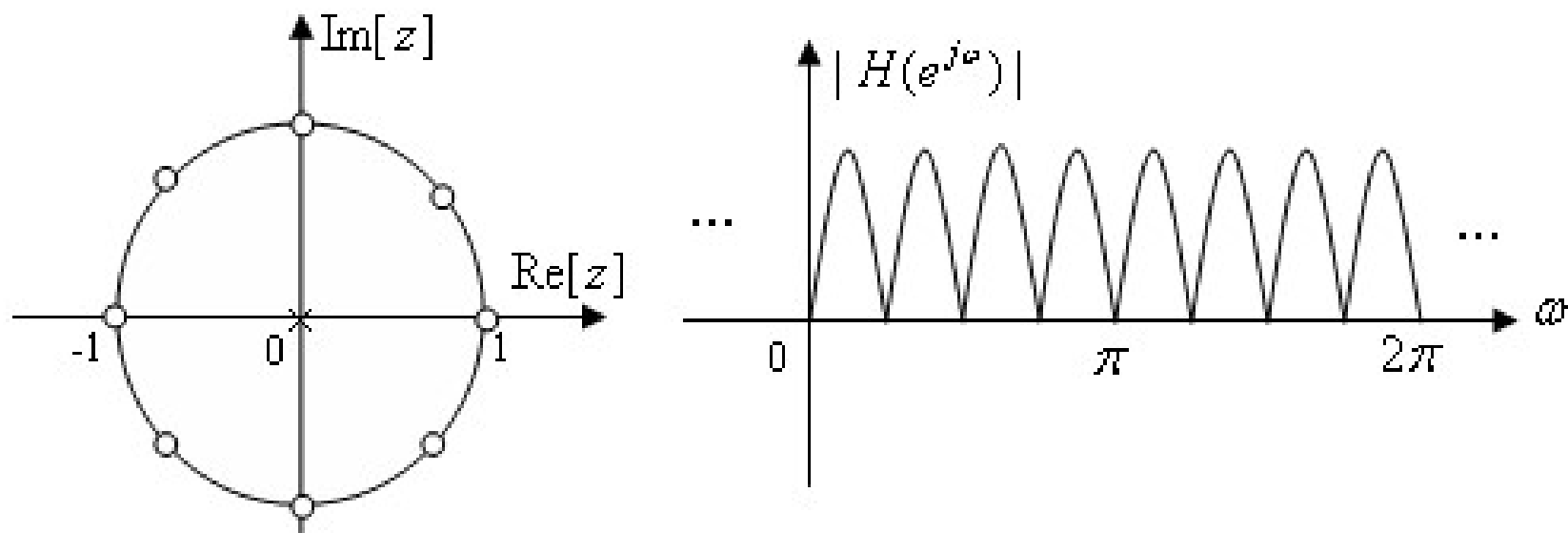
3.3.4 利用系统的零极点分布 分析系统的频率特性

■ 微课展示



3.4 梳状滤波器和最小相位系统

1、梳状滤波器



$$H_c(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

3.4 梳状滤波器和最小相位系统

2、最小相位系统

系统的零极点都在单位圆内的因果系统，称为最小相位系统，系统函数记为 $H_{\min}(z)$

由于最小相位系统的相位值最大，确切的术语应为

最小相位滞后系统

