



第四章 离散傅立叶变换

郑春红

电子工程学院

Email: chzheng@xidian.edu.cn

2021/10/12

周期序列的离散傅里叶级数及性质

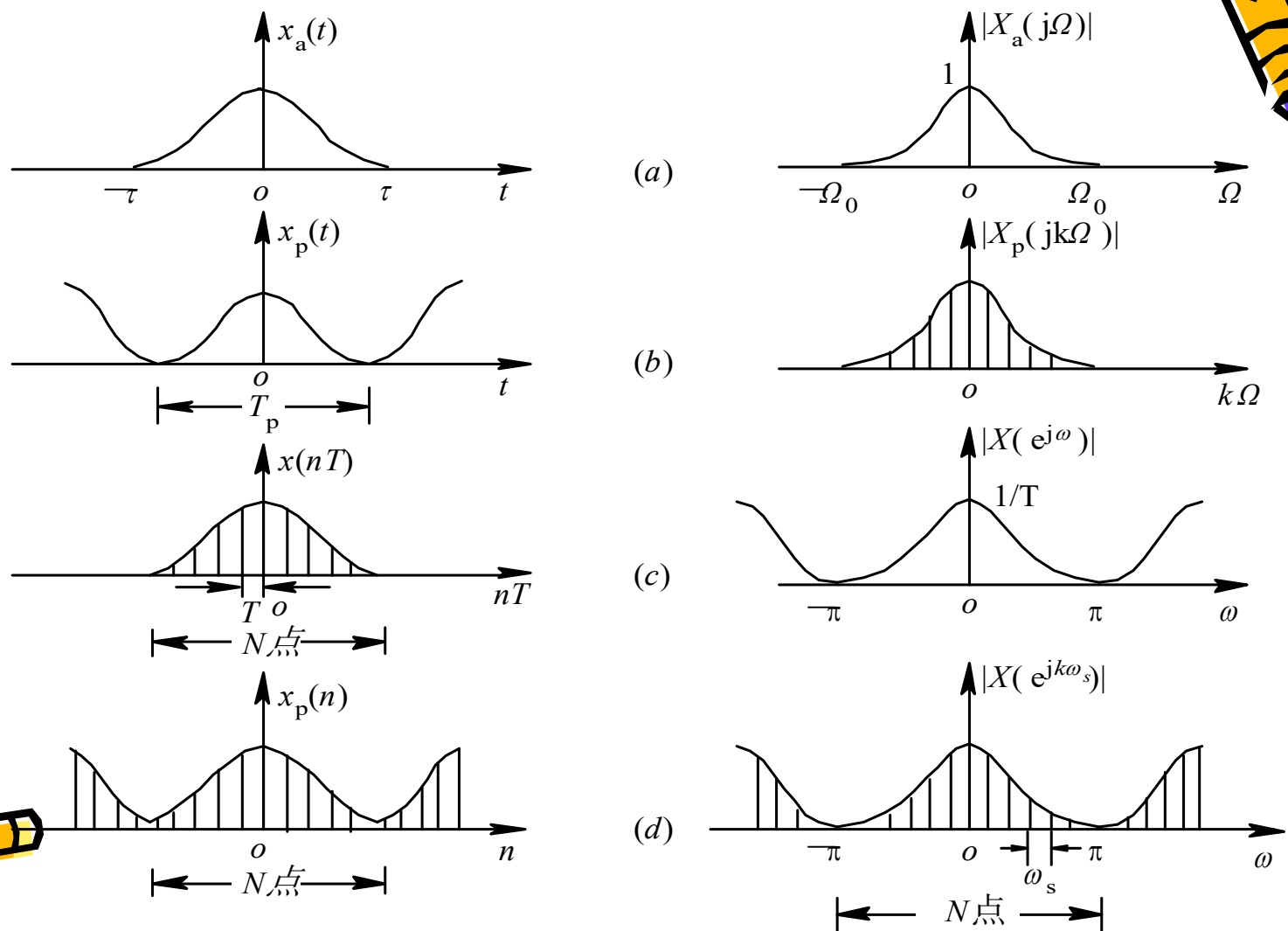


图 4-1 各种形式的傅里叶变换

周期序列的离散傅里叶级数及性质

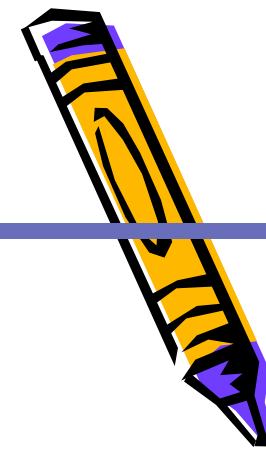


表4-1 四种傅里叶变换形式

时间函数	频率函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期	非周期和离散
离散和非周期	周期和连续
离散和周期	周期和离散



4.1 周期序列的离散傅里叶级数及性质

1、周期序列的离散傅里叶级数(DFS)

设 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列，

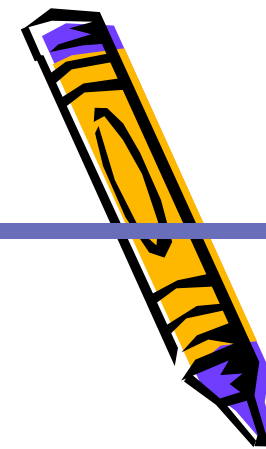
即 $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$, r 为任意整数。

$\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数为

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4-1)$$

式中, $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数

如何求解 k 次谐波的系数?



4.1 周期序列的离散傅里叶级数及性质

定义 W_N 为 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

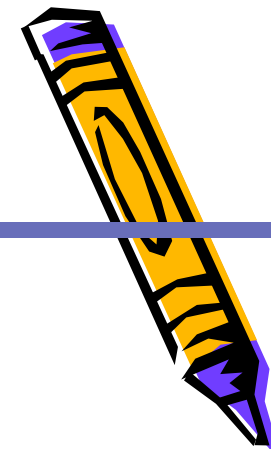
周期序列的傅里叶级数（**DFS**）变换对为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$$

式中， n 和 k 都是离散变量。如果将 n 当作时间变量， k 当作频率变量，

- 则DFS [·] 表示时域到频域的离散傅里叶级数正变换，IDFS [·] 表示由频域到时域的离散傅里叶级数反变换。

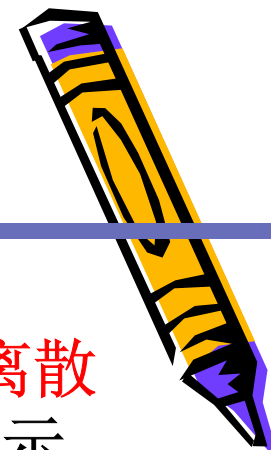


4.2 离散傅里叶变换(DFT)

- 1、定义：离散傅里叶变换（**DFT**）就是用周期序列的**离散傅里叶级数**表示式推导得到**有限长序列**的离散频域表示。

设 $x(n)$ 为有限长序列，长度为 N ，把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 的以 N 为周期的周期延拓， $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列，而称 $\tilde{x}(n)$ 为 $x(n)$ 的周期延拓。

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$



4.2 离散傅里叶变换(DFT)

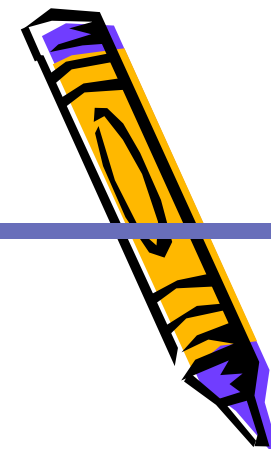
有限长序列的离散傅里叶变换

$x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换(DFT)

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$X(k)$ 的 N 点离散傅里叶反变换(IDFT)

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$



4.2 离散傅里叶变换(DFT)

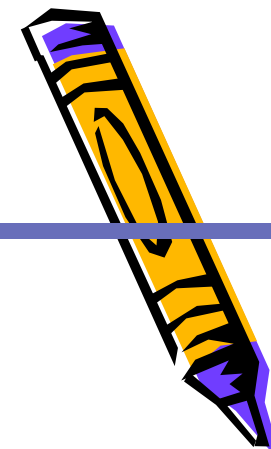
2、DFT与DTFT、Z变换的关系

$$a) \quad X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$b) \quad X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

DFT的物理意义:

$X(k)$ 可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换（频谱函数） $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔离散抽取（频域采样），其采样间隔为 $\omega_N = 2\pi/N$ 。



4.2 离散傅里叶变换(DFT)

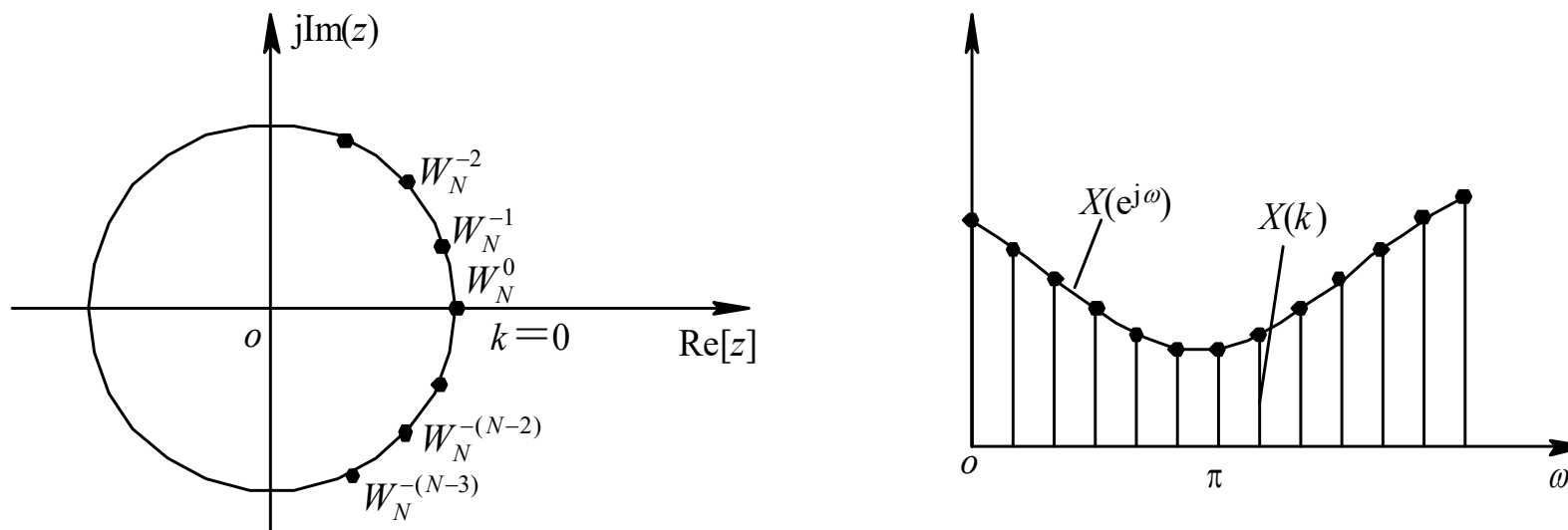


图 4-2 DFT与序列傅里叶变换（DTFT）、Z变换的关系

长度 N 不同，则DFT的结果也不同。
当DFT的变换区间长度大于序列 $x(n)$ 的长度时，不会改变序列的频谱特性，但DFT却不同。



4.2 离散傅里叶变换(DFT)

C)由DFT表示Z变换或DTFT——频域采样定理

内插公式:
$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z)$$

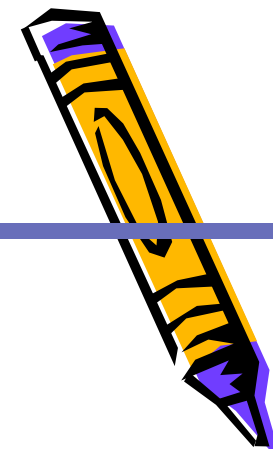
内插函数:
$$\varphi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$W_N^{-Nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(-Nk)} = e^{j2\pi k} = 1$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$



$W_N^{-Nk} = ?$

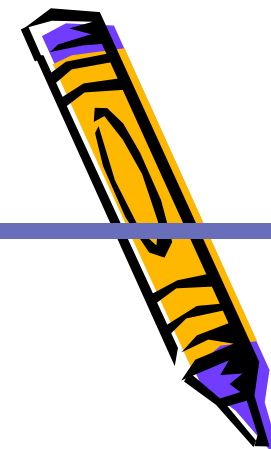


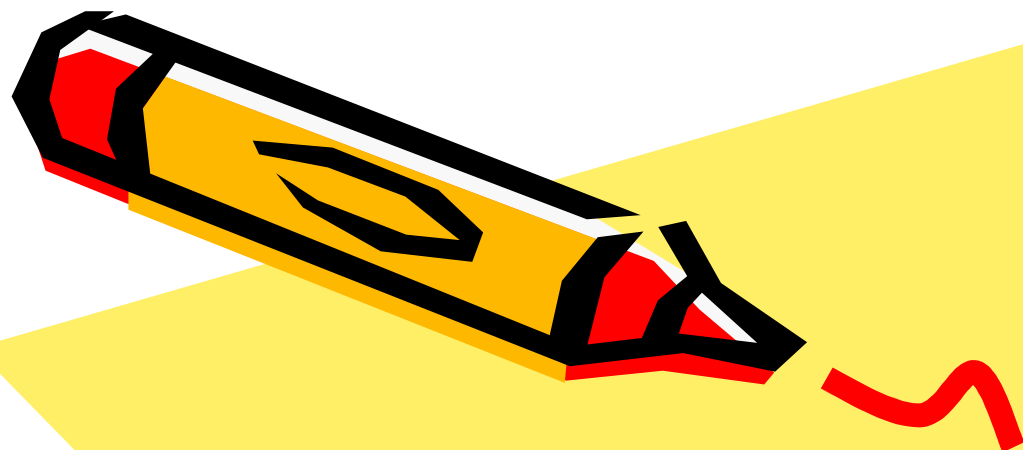
4.2 离散傅里叶变换(DFT)

类似的，可以得到信号**频谱函数**的内插公式和内插函数：

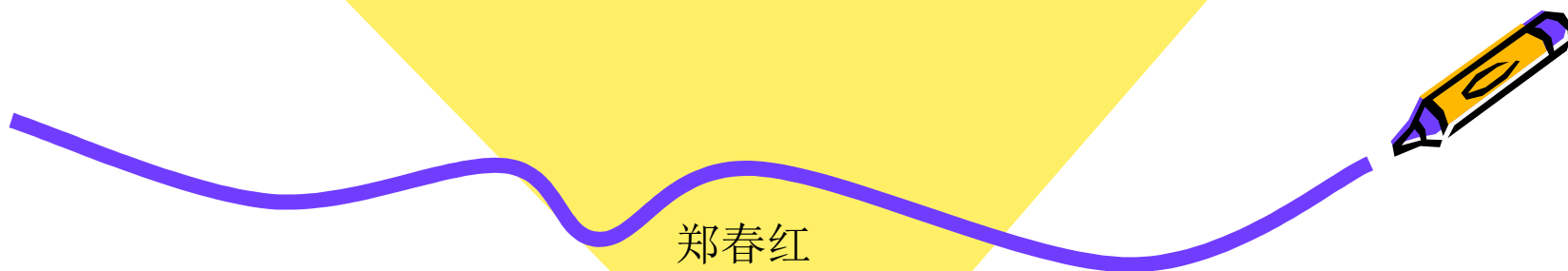
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(\omega)$$

$$\varphi_k(\omega) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)}}$$





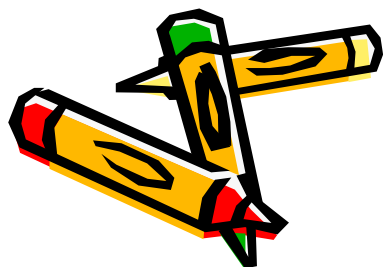
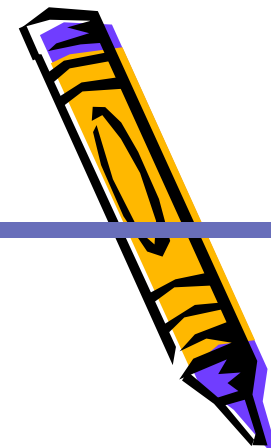
第五章 **IIR**数字滤波器的设计



郑春红
电子工程学院
Email: chzheng@xidian.edu.cn

第五章 **IIR**数字滤波器的设计

- 5.1 基本概念及技术指标
- 5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计;
- 5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器;
- 5.4 数字高通、带通和带阻滤波器的设计。



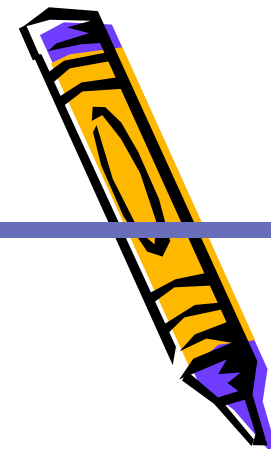
5.1 基本概念及技术指标

数字滤波器：

- 是指输入输出均为数字信号，通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。

优点：

- 高精度、稳定、体积小、重量轻、灵活，不要求阻抗匹配，可实现特殊滤波功能



5.1 基本概念及技术指标

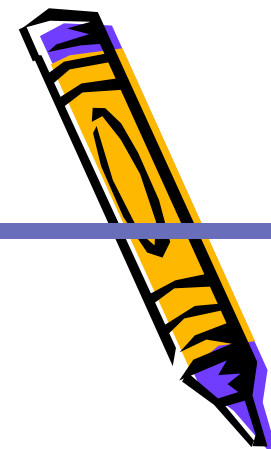
1、数字滤波器的分类

经典滤波器： 选频滤波器

现代滤波器： 维纳滤波器

卡尔曼滤波器

自适应滤波器等



5.1 基本概念及技术指标

按功能分: 经典滤波器又可分为低通、高通、带通、带阻四种滤波器

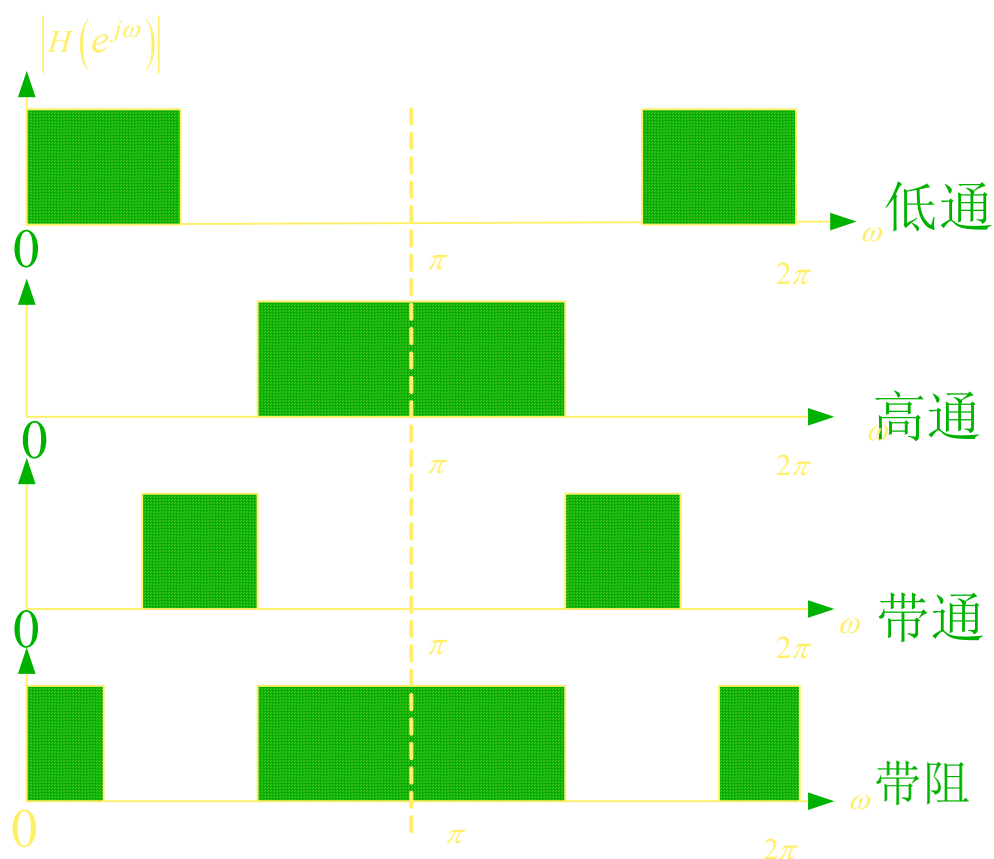


图5-1 理想低通、高通、带通和带阻滤波器幅度特性

5.1 基本概念及技术指标

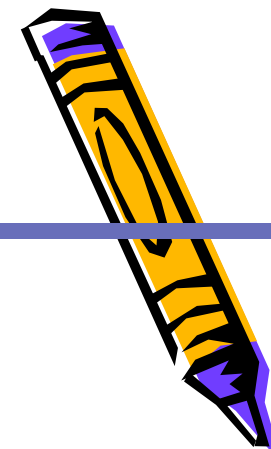
按实现的网络结构或单位抽样响应分：

IIR滤波器（**N**阶）

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

FIR滤波器（**N-1**阶）

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$



es de filtres numériques

grandes classes de filtres numériques

- Les filtres non récurrents ou filtres FIR (Finite Impulse Response)
 - Leur réponse impulsionnelle s'annule au bout d'un certain temps (nombre fini d'éléments).
 - La sortie de ces filtres ne dépend que de l'entrée (entrée courante et entrées précédentes).

$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} \dots b_N x_{n-N}$$

- Leur transmittance n'admet pas de pôles

$$Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} X(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}$$

- Ils sont donc stables.
- Ils n'ont pas d'équivalents analogiques.

es de filtres numériques

grandes classes de filtres numériques

- **Les filtres récurrents** ou filtres IIR (Infinite Impulse Response)
 - Leur réponse impulsionnelle ne s'annule pas (nombre infini d'éléments).
 - La sortie de ces filtres dépend de l'entrée (entrée courante et entrées précédentes) et des sorties précédentes.

$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} + \sum_{i=1}^M a_i y_{n-i}$$

- Leur transmittance admet des pôles

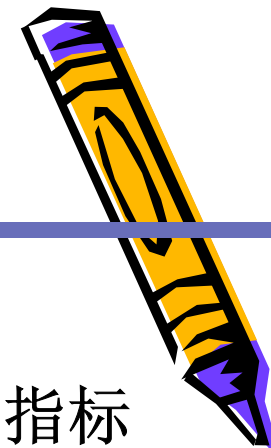
$$Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} X(z) + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i} Y(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}}$$

- Le problème de stabilité se pose.
- Sont synthétisables à partir de gabarits analogiques.

5.1 基本概念及技术指标

2、数字滤波器的设计过程

- 按设计任务，确定滤波器性能要求，制定技术指标
- 用一个因果稳定的离散**LTI**系统的系统函数 **$H(z)$** 逼近此性能指标
- 利用有限精度算法实现此系统函数：如运算结构、字长的选择等
- 实际技术实现：软件法、硬件法或**DSP**芯片法



5.1 基本概念及技术指标

3、IIR数字滤波器的设计方法

用一因果稳定的离散LTI系统逼近给定的性能要求：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

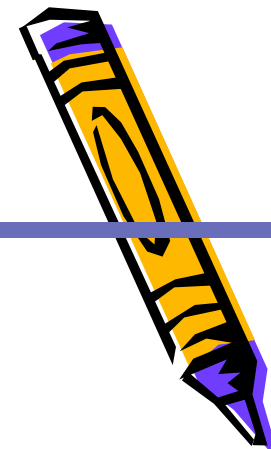
即为求滤波器的各系数：

$$a_k, b_k$$

s 平面逼近：模拟滤波器

z 平面逼近：数字滤波器

- 先设计模拟滤波器，再转换为数字滤波器
- 计算机辅助设计法



5.1 基本概念及技术指标

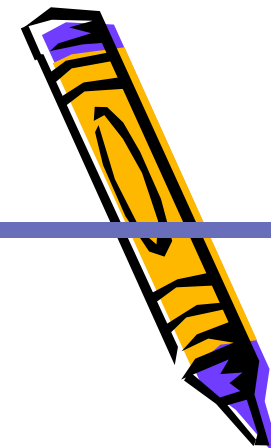
4、数字滤波器的技术指标

- 选频滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\beta(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ 为幅频特性：表示信号通过该滤波器后各频率成分的衰减情况

$\beta(\omega)$ 为相频特性：反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况



5.1 基本概念及技术指标

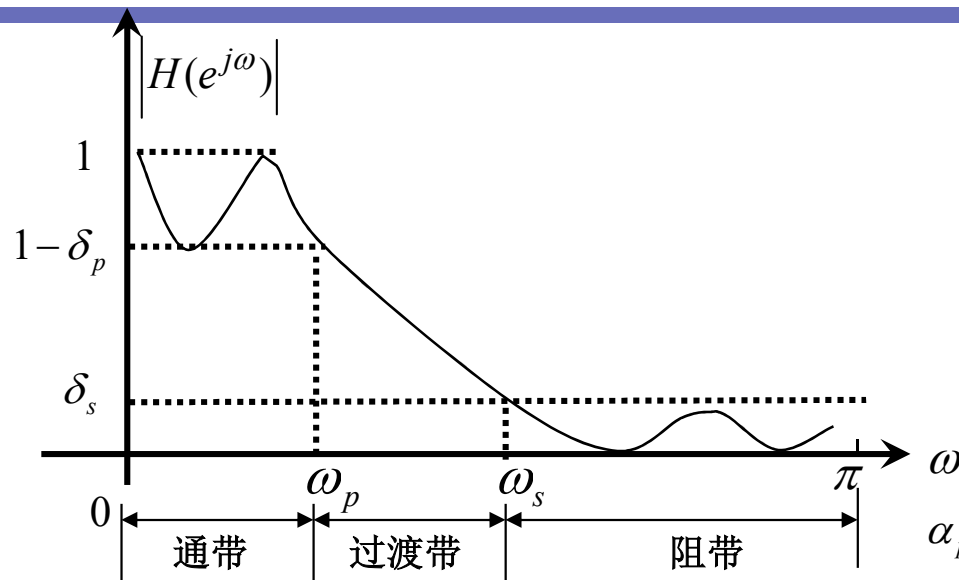


图5-2 逼近理想低通滤波器

当幅度下降到 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\omega = \omega_c$ ，此时 $\alpha_p = 3\text{dB}$ ，称 ω_c 为 3dB 通带截止频率。



过渡带一般尽可能窄
阶数尽可能低

ω_p ：通带截止频率

ω_s ：阻带截止频率

通带最大衰减 α_p

$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j\omega})|_{\max}}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| = -20 \lg(1 - \delta_p)$$

α_p 越小，通带越平坦

阻带最小衰减 α_s

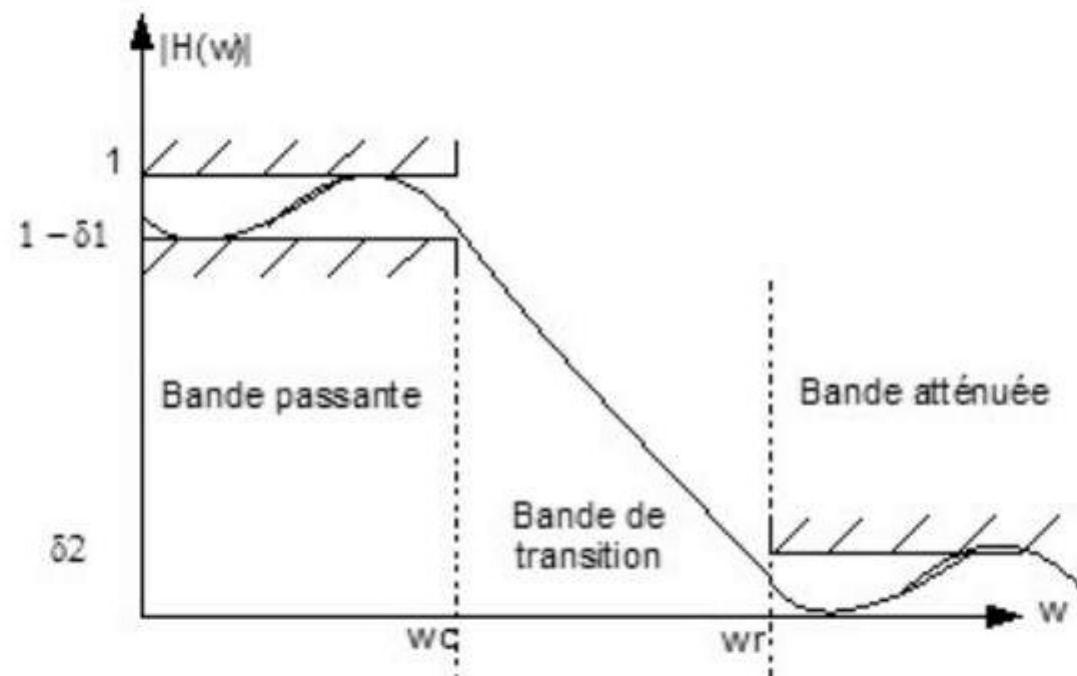
$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j\omega})|_{\max}}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = -20 \lg(\delta_s)$$

α_s 越小，阻带衰减越大

其中： $|H(e^{j\omega})|_{\max}$ 归一化为 1

Spécification du gabarit réel d'un filtre passe-bas

Les spécifications portent sur



- la bande passante : fréquences de coupures,
- la bande de transition : (l'ordre du filtre),
- les ondulations en bande passante et en bande atténuée.

5.1 基本概念及技术指标

5、数字滤波器的设计方法

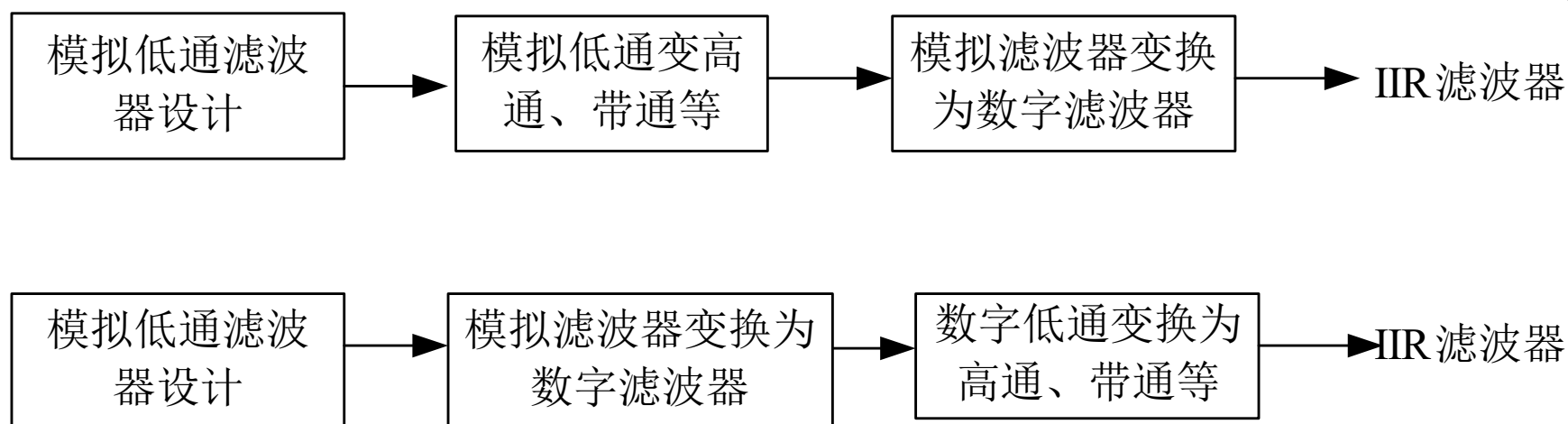
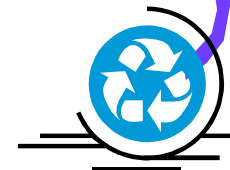


图5-3 IIR滤波器的设计方法



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

巴特沃思滤波器的低通模平方函数表示

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad N = 1, 2, \dots$$

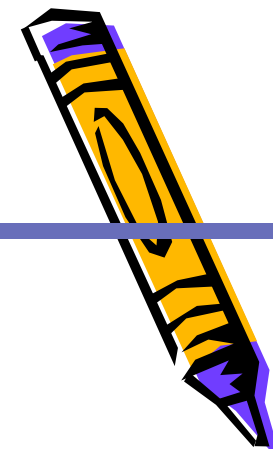
巴特沃斯滤波器的主要特点

a. 对所有的N, $|H_a(j\Omega)|_{\Omega=0}^2 = 1$ 。

b. 对所有的N, $|H_a(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c}^2 = \frac{1}{2}$ $|H_a(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = 0.707$
 $20 \lg |H_a(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = 3 \text{ dB}$

c. $|H_a(j\Omega)|^2$ 是 Ω 的单调下降函数。

d. $|H_a(j\Omega)|^2$ 随着阶次N的增大而更接近于理想低通滤波器。



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

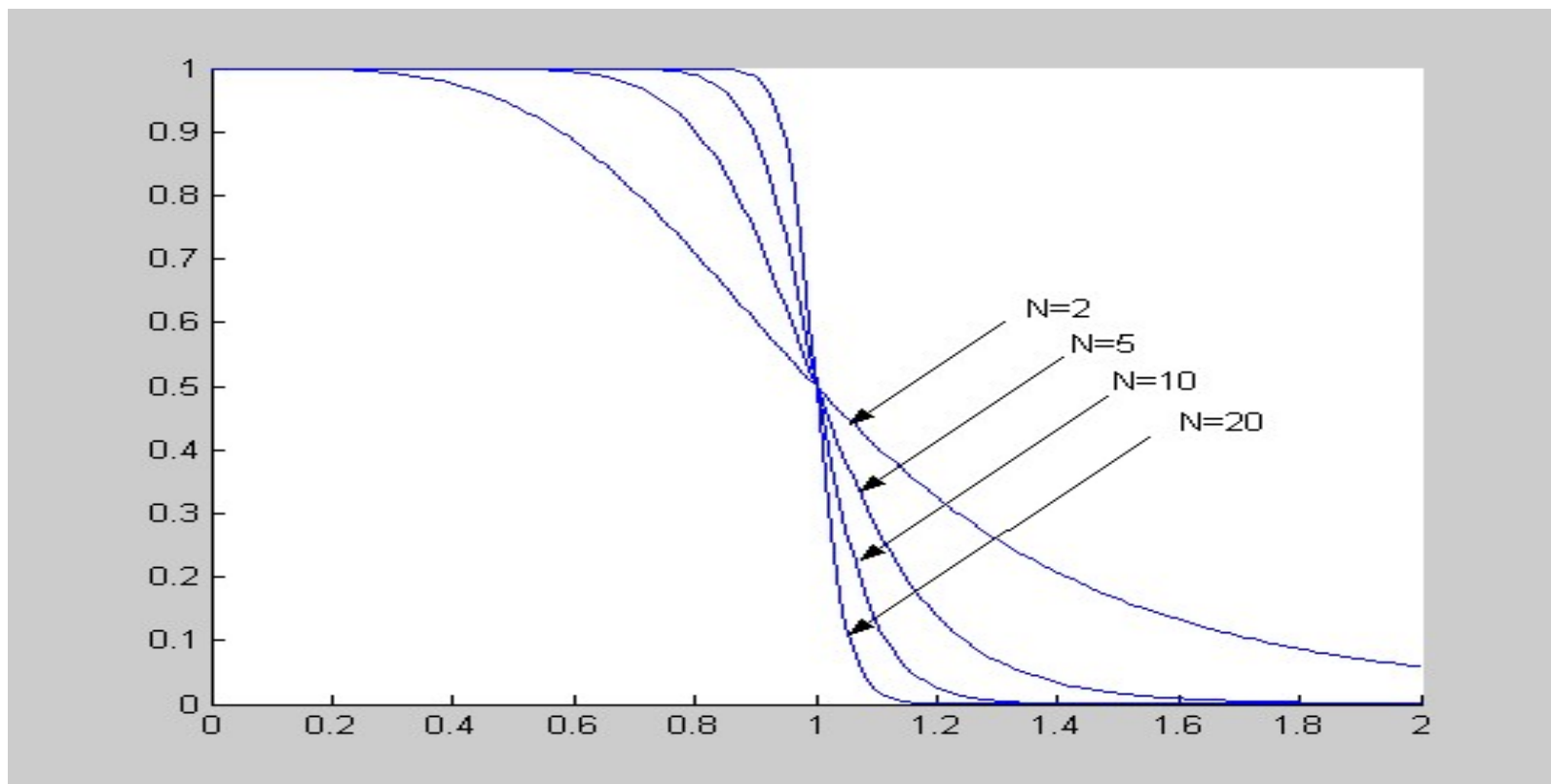


图4-4 巴特沃思低通滤波平方幅频特性函数

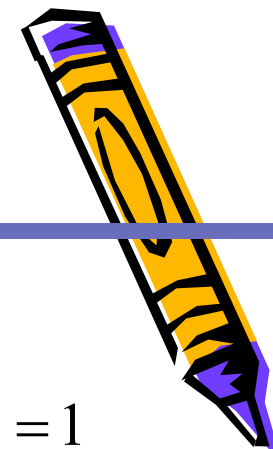
5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

归一化的巴特沃思低通滤波器，其**3dB**截止频率 $\Omega_c = 1$

其幅频响应的平方函数为 $|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2N}}$

3dB截止频率为 Ω_c 的巴特沃思低通滤波器：

$$H_a(s) = H_n(s / \Omega_c)$$



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

- 系统函数和极点分布：

设巴特沃斯的系统函数 $H_a(s)$ ，则频率响应是

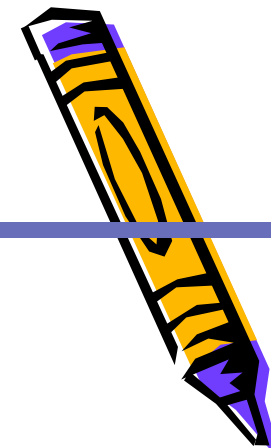
$$H_a(j\Omega) = H_a(s) \Big|_{s=j\Omega}$$

$$\left| H_a(j\Omega) \right|^2 = H_a(j\Omega) H_a^*(j\Omega) = H_a(s) H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

$$H_a(s) H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)^{2N}}$$

令上式分母为零可以得到 $H_a(s) H_a(-s)$ 的 $2N$ 个极点 s_k

$$1 + \left(\frac{s_k}{j\Omega_c} \right)^{2N} = 0$$



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

解得当N为偶数时则 $S_k = \Omega_c e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi}, k = 1, 2, \dots, 2N$

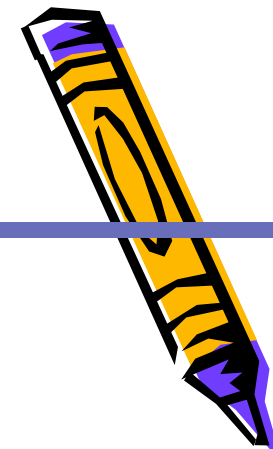
N为奇数: $S_k = \Omega_c e^{j\frac{2k}{2N}\pi}, k = 1, 2, \dots, 2N$

- $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点均匀分布在s平面的单位圆上，共有**2N**个角度间隔为 **π/N** 的极点；
- 极点关于j ω 轴对称；
- 不会落在虚轴上；
- 巴特沃思低通滤波器没有零点。

选s左半平面的**N**个极点构成系统函数，即满足

$$\frac{1}{2} < k < N + \frac{1}{2}$$

$$p_k = \Omega_c e^{j\pi(\frac{2k+N-1}{2N})}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

系统函数为:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}$$

设计过程:

1) 由给定的 α_p, Ω_p 和 α_s, Ω_s 确定滤波器的 N, Ω_c

巴特沃思低通滤波技术指标关系式为

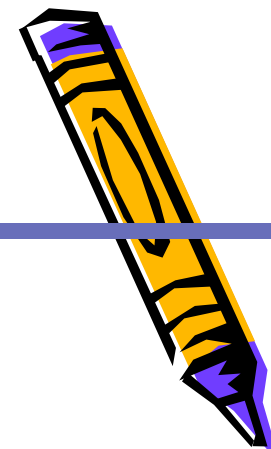
$$\alpha_p \geq -20 \lg |H_a(j\Omega)|, \quad \Omega \leq \Omega_p \quad ; \quad \Omega_p \text{ 为通带边界频率}$$

$$\alpha_s \leq -20 \lg |H_a(j\Omega)|, \quad \Omega \geq \Omega_s \quad ; \quad \Omega_s \text{ 为阻带边界频率}$$



$$\alpha_p \geq -10 \log \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N}}$$

$$\alpha_s \leq -10 \log \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N}}$$



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

化简后得

$$\left(\Omega_p / \Omega_c\right)^{2N} \leq 10^{0.1\alpha_p} - 1$$

$$\left(\Omega_s / \Omega_c\right)^{2N} \geq 10^{0.1\alpha_s} - 1$$

两式相比消去后得

$$\left(\Omega_p / \Omega_s\right)^{2N} \leq \left(10^{0.1\alpha_p} - 1\right) / \left(10^{0.1\alpha_s} - 1\right)$$

$$N \geq \frac{\lg\left[\left(10^{0.1\alpha_p} - 1\right) / \left(10^{0.1\alpha_s} - 1\right)\right]}{2 \lg\left(\Omega_p / \Omega_s\right)}$$

- 取满足上式的最小整数 **N** 作为滤波器的阶数。

5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

$$\Omega_{cp} = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_p} - 1}} \quad \text{或} \quad \Omega_{cs} = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_{sp}} - 1}}$$

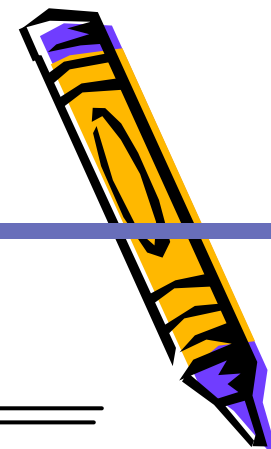
实际设计时,

$$\Omega_{cp} \leq \Omega_c \leq \Omega_{cs}$$

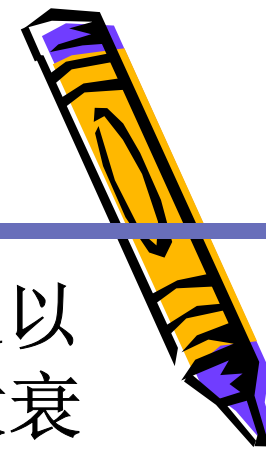
2) 利用**N**个极点求滤波器的系统函数

(利用公式法或直接查表**p205**的表**6.3.1**)

3) 利用去归一化得到**3db**截止频率为 Ω_c 的巴特沃思模拟低通滤波器的系统函数**H_a** (s)



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计



例5.1 设计一巴特沃思低通滤波器，使其满足以下指标：通带边频 $\Omega_p = 20\text{rad/s}$ ，通带的最大衰减为 $\alpha_p = 2\text{dB}$ ，阻带边频为 $\Omega_s = 30\text{rad/s}$ ，阻带的最小衰减为 $\alpha_s = 10\text{dB}$ 。

解 确定阶数**N**

$$N \geq \frac{\lg[(10^{0.1\alpha_p} - 1)(10^{0.1\alpha_s} - 1)]}{2 \lg(\Omega_p / \Omega_s)} = 3.371$$

N=4

查表得四阶巴特沃思多项式，得归一化系统函数表达式

$$H_a(\hat{s}) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$



5.2 巴特沃思模拟低通滤波器设计

$$\Omega_{cp} = \frac{20}{\sqrt[2 \times 4]{10^{0.1 \times 2} - 1}} = 21.387 \quad \Omega_{cs} = \frac{30}{\sqrt[2 \times 4]{10^{0.1 \times 10} - 1}} = 35.520$$

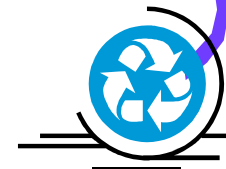
工程上可取： $\Omega_{cp} \leq \Omega_c \leq \Omega_{cs}$

简单起见 取 $\Omega_c = \Omega_{cp}$

去归一化：

用 s/Ω_c 替换式系统函数中的 \hat{s} ，构成巴特沃思滤波器传输函数 $H(s)$ 为

$$H_a(s) = \frac{2.09 \times 10^5}{s^4 + 55.88s^3 + 1.562 \times 10^3 s^2 + 2.556 \times 10^4 s + 2.09 \times 10^5}$$



5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

- 设计思想:

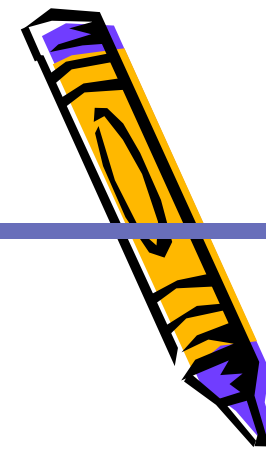
s 平面 \rightarrow z 平面

模拟系统 $H_a(s) \rightarrow H(z)$ 数字系统

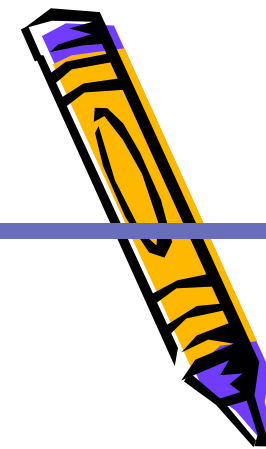
- $H(z)$ 的频率响应要能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应,
即 s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆
- 因果稳定的 $H_a(s)$ 映射到因果稳定的 $H(z)$,
即 s 平面的左半平面 $\text{Re}[s] < 0$
映射到 z 平面的单位圆内 $|z| < 1$

- 设计方法:

- 脉冲响应不变法 (**Impulse Invariance**)
- 双线性变换法 (**Bilinear Transform**)



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器



1. 脉冲响应不变法

A 变换原理

数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$

模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$


$$h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} \quad T \text{—抽样周期}$$



$H_a(s) \rightarrow h_a(t)$ 用拉普拉斯逆变换

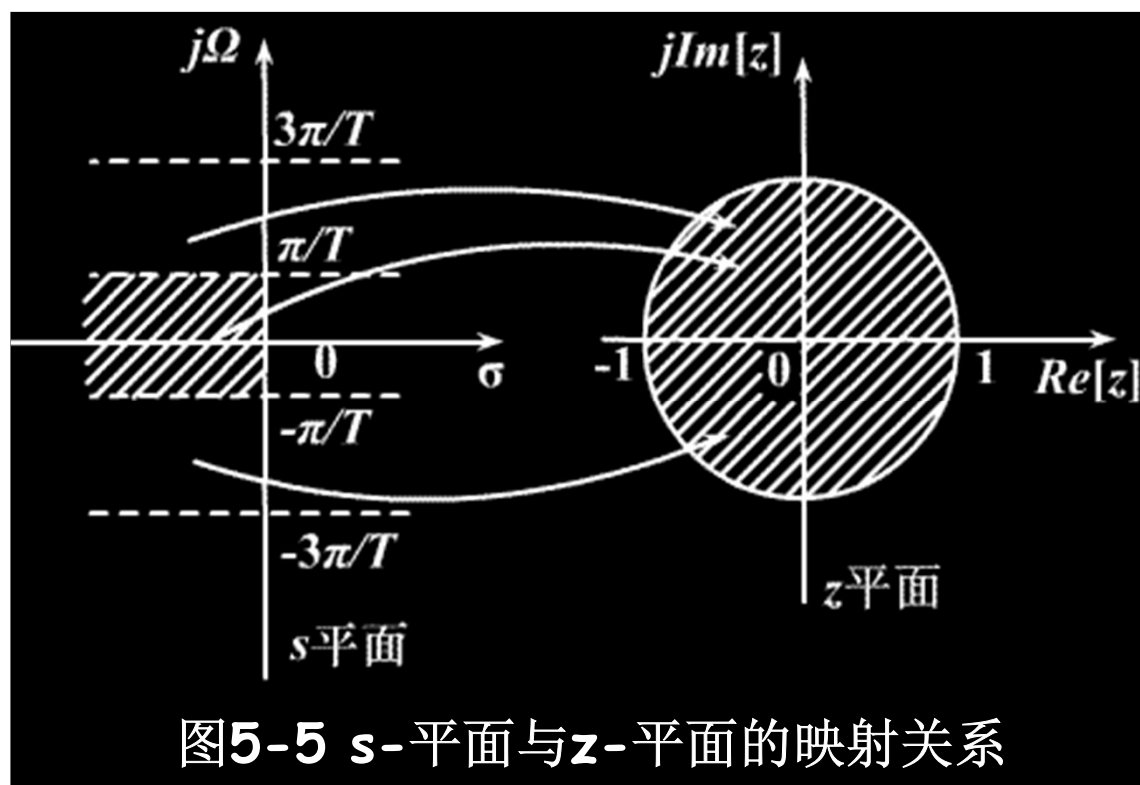
$$H(z) \quad H_a(s)$$

设 $H_a(s)$ 只有一阶极点，且分母的阶次高于分子的阶次，则


$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k} \xrightarrow{z=e^{sT}} H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

B. s-平面与z-平面的映射关系



$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} = re^{j\omega}$$

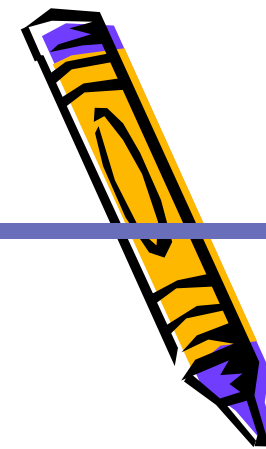
$$(s = \sigma + j\Omega; z = re^{j\omega})$$

$$\sigma = 0 \text{ 时, } r = 1$$

$$\Rightarrow \sigma < 0 \text{ 时, } r < 1$$

$$\sigma > 0 \text{ 时, } r > 1$$

5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器



c. 设计方法

a) 确定采样间隔**T**:

由于 $\Omega_s < \pi/T$, 通常取 $T=1$

b) 由数字滤波器频率指标 $\omega_p \omega_s$ 确定模拟滤波器的频率指标

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T}, \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{T}$$

c) 设计模拟滤波器 $H_a(s)$

d) 用脉冲响应不变法求数字滤波器 $H(z)$

考虑当**T**较小时 $H(e^{j\omega})$ 会有太高的增益, 可取

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

此时:

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

D 混迭失真

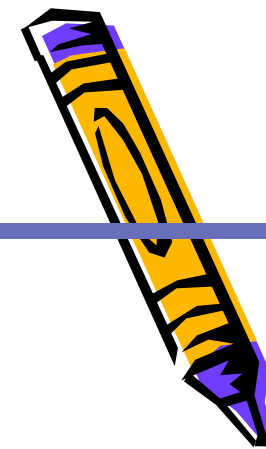
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓，周期为 $2\pi/T$

仅当
$$h_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$$

数字滤波器的频响在折叠频率内重现模拟滤波器的频响而不产生混迭失真：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi$$



5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

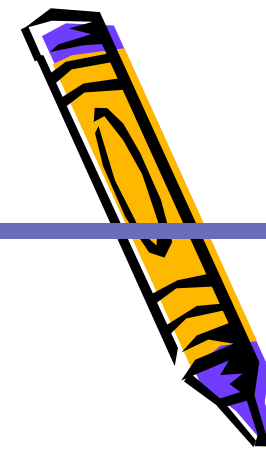
E 消除混迭失真

- 实际系统不可能严格限带，都会混迭失真，在
 $|\Omega| > \Omega_s / 2$ 处衰减越快，失真越小

$$\bullet \quad f_s \uparrow \quad T \downarrow \quad \frac{\pi}{T} \uparrow \quad \frac{\Omega_s}{2} \uparrow \quad \text{混迭} \downarrow$$

- 当滤波器的设计指标以数字域频率 ω_c 给定时，**能不
能**通过提高抽样频率来改善混迭现象

$$f_s \uparrow \quad T \downarrow \quad \frac{\pi}{T} \uparrow \quad \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right] \uparrow$$
$$T \downarrow \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} \uparrow$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

例：设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

试用脉冲响应不变法，设计**IIR**数字滤波器

解：据题意，得数字滤波器的系统函数：

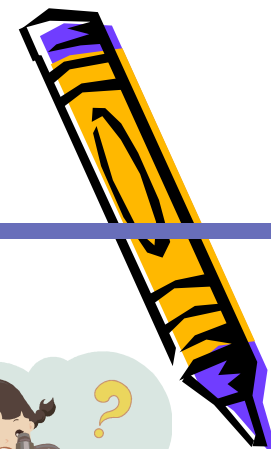
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-3T} z^{-1}} \\ &= \frac{T(e^{-T} - e^{-3T})z^{-1}}{1 - (e^{-T} + e^{-3T})z^{-1} + e^{-4T}z^{-2}} \end{aligned}$$

设 $T = 1\text{s}$ ，则

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$



5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

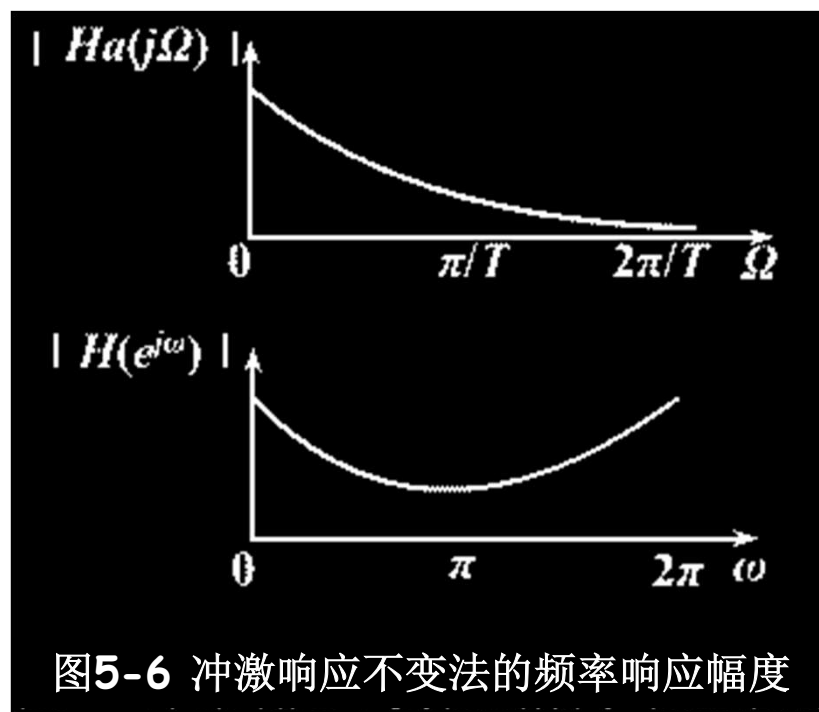
$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

模拟滤波器的频率响应:

$$H_a(j\Omega) = \frac{2}{(3 - \Omega^2) + j4\Omega}$$

数字滤波器的频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.318e^{-j\omega}}{1 - 0.4177e^{-j\omega} + 0.01831e^{-j2\omega}}$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器



■ F 优缺点

• 优点:

- $h(n)$ 完全模仿模拟滤波器的单位脉冲响应 $h_a(t)$
时域逼近良好

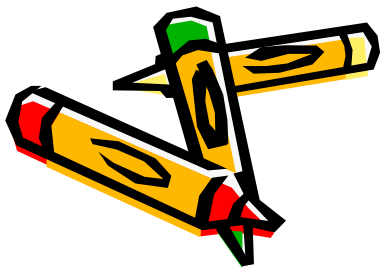
- 保持线性关系: $\omega = \Omega T$

线性相位模拟滤波器转变为线性相位数字滤波器

• 缺点:

- 频率响应混迭

只适用于限带的低通、带通滤波器



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

2. 双线性变换法

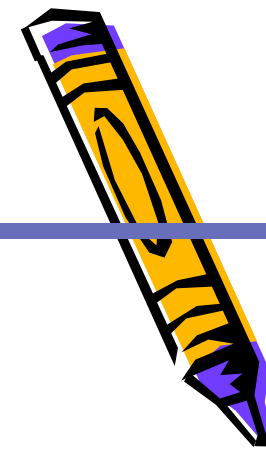
A 变换原理

使数字滤波器的频率响应

与模拟滤波器的频率响应相似。

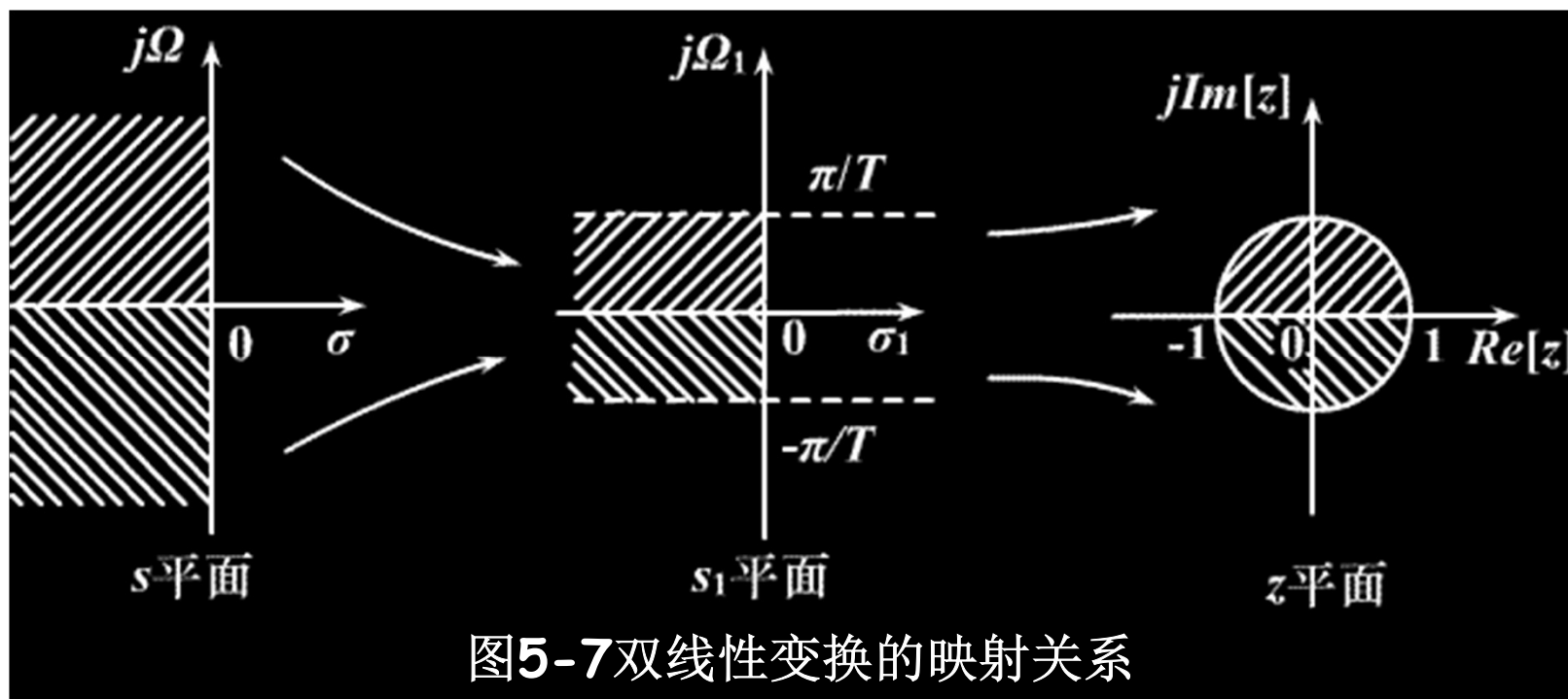
克服脉冲响应不变法**频谱混叠**

利用数值积分将模拟变换转换为数字系统。



5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

B. s -平面与 z -平面的映射关系

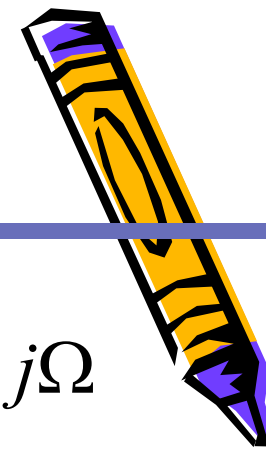


$$\Omega : [-\infty, \infty] \quad \Omega = \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \quad \Omega_1 : \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$$

$$= \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

$$z = e^{s_1 T}$$

5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器



$$\Omega = \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2} = \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\cos \frac{\Omega_1 T}{2}} = \frac{\frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{2j}}{\frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{2}}$$

$$s = j\Omega$$

$$s_1 = j\Omega_1$$

$$s = j\Omega = \frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}} = \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} \times e^{-\frac{s_1 T}{2}} \times e^{\frac{s_1 T}{2}}$$

$$= \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = e^{s_1 T}$$

$$\therefore s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = \frac{1 + s}{1 - s}$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

- 为使模拟滤波器某一频率与数字滤波器的任一频率有对应关系，引入系数 c

$$\Omega = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2}$$

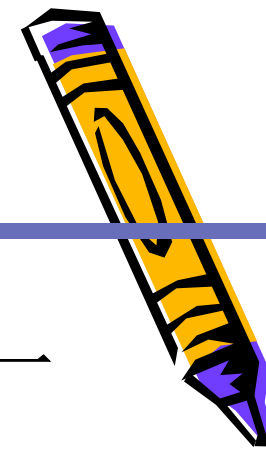
$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = \frac{c + s}{c - s}$$

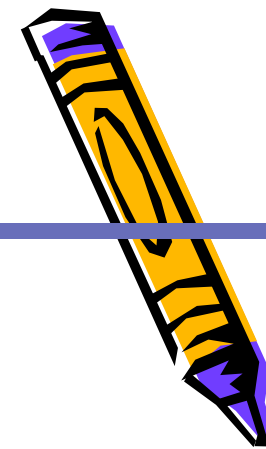
当 Ω_1 较小时，有 $\Omega = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2} \approx c \frac{\Omega_1 T}{2}$

$$c = \frac{2}{T}$$

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器



s 平面虚轴 \longleftrightarrow z 平面单位圆

$$s = \sigma + j\Omega \quad z = \frac{2/T + s}{2/T - s} = \frac{2/T + \sigma + j\Omega}{2/T - \sigma - j\Omega}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{(2/T + \sigma)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{(2/T - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

s 平面 \longleftrightarrow z 平面

$$\sigma < 0 \quad |z| < 1$$

左半平面 \longleftrightarrow 单位圆内

$$\sigma > 0 \quad |z| > 1$$

右半平面 \longleftrightarrow 单位圆外

$$\sigma = 0 \quad |z| = 1$$

虚轴 \longleftrightarrow 单位圆上



5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

C 优缺点

- 优点：避免了频率响应的混迭现象

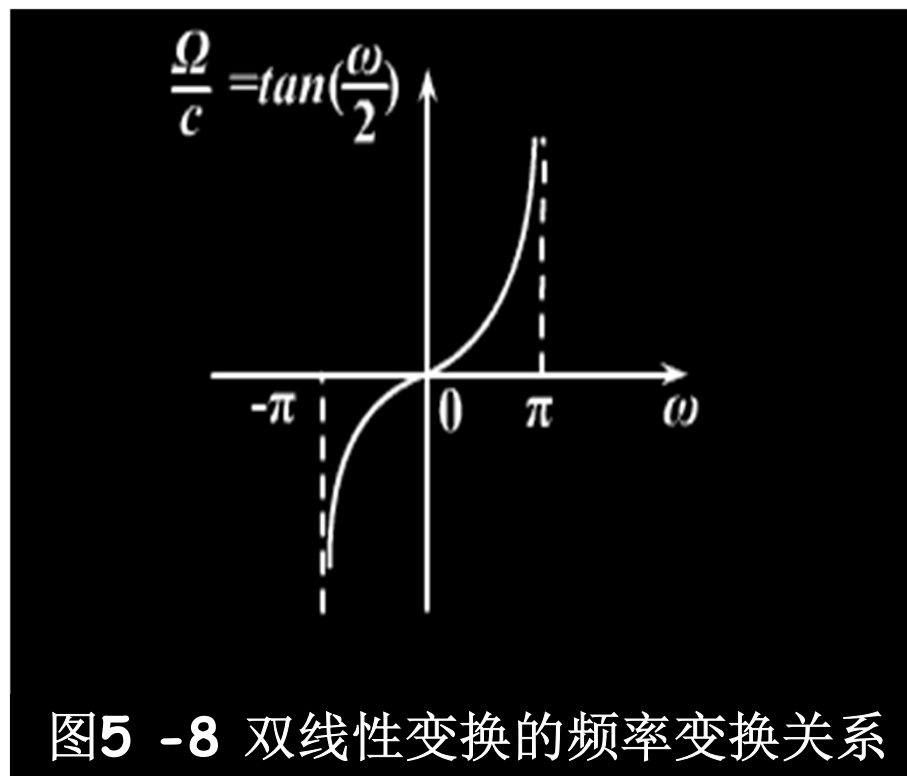
$$\Omega = c \cdot \tan \frac{\omega}{2}$$

s 平面与 z 平面为单值变换

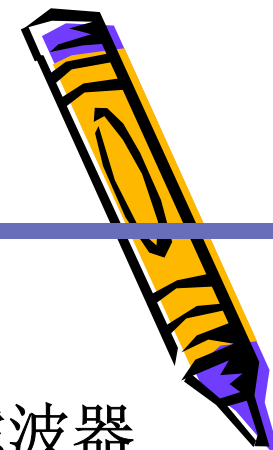
$$\Omega > 0 \quad \omega > 0$$

$$\Omega < 0 \quad \omega < 0$$

$$\Omega \rightarrow \infty \quad \omega = \pi$$



5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

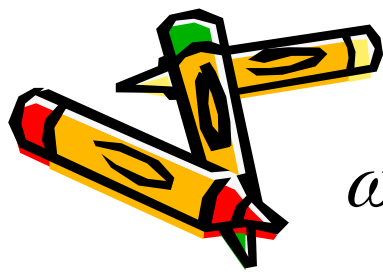


- 缺点：除了零频率附近， Ω 与 ω 之间严重非线性

1) 线性相位模拟滤波器 \rightarrow 非线性相位数字滤波器

2) 要求模拟滤波器的幅频响应为分段常数型，不然会产生畸变

分段常数型模拟滤波器经变换后仍为分段常数型数字滤波器，但临界频率点产生畸变


$$\Omega_1 = \omega_1 / T$$
$$\omega = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{c} \right) \neq \omega_1$$

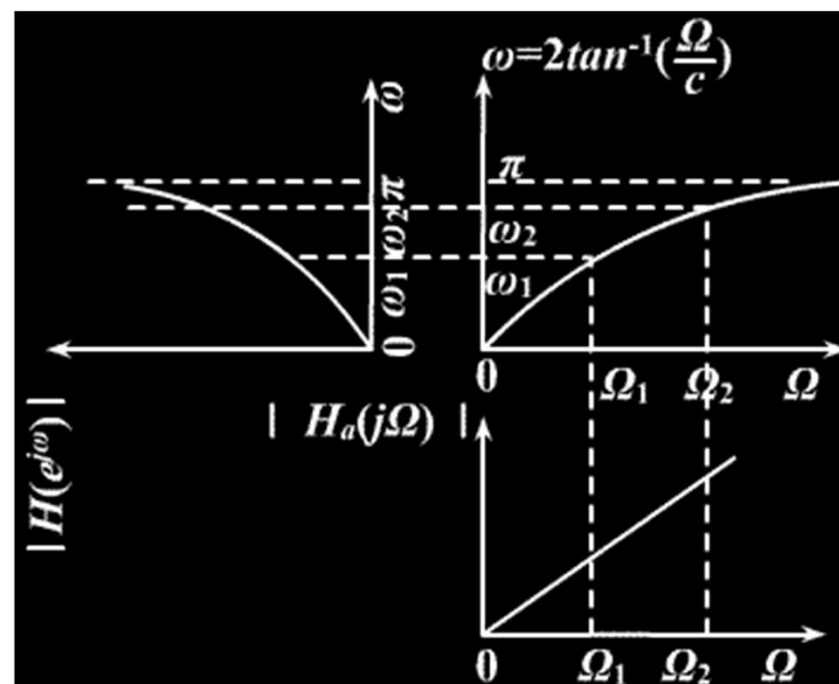


图5-9 理想微分器经双线性变换后幅频响应产生畸变

5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

- 预畸变

给定数字滤波器的截止频率 ω_1 ，则

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \cdot \tan \frac{\omega_1}{2}$$

按 Ω_1 设计模拟滤波器，经双线性变换后，即可得到 ω_1 为截止频率的数字滤波器

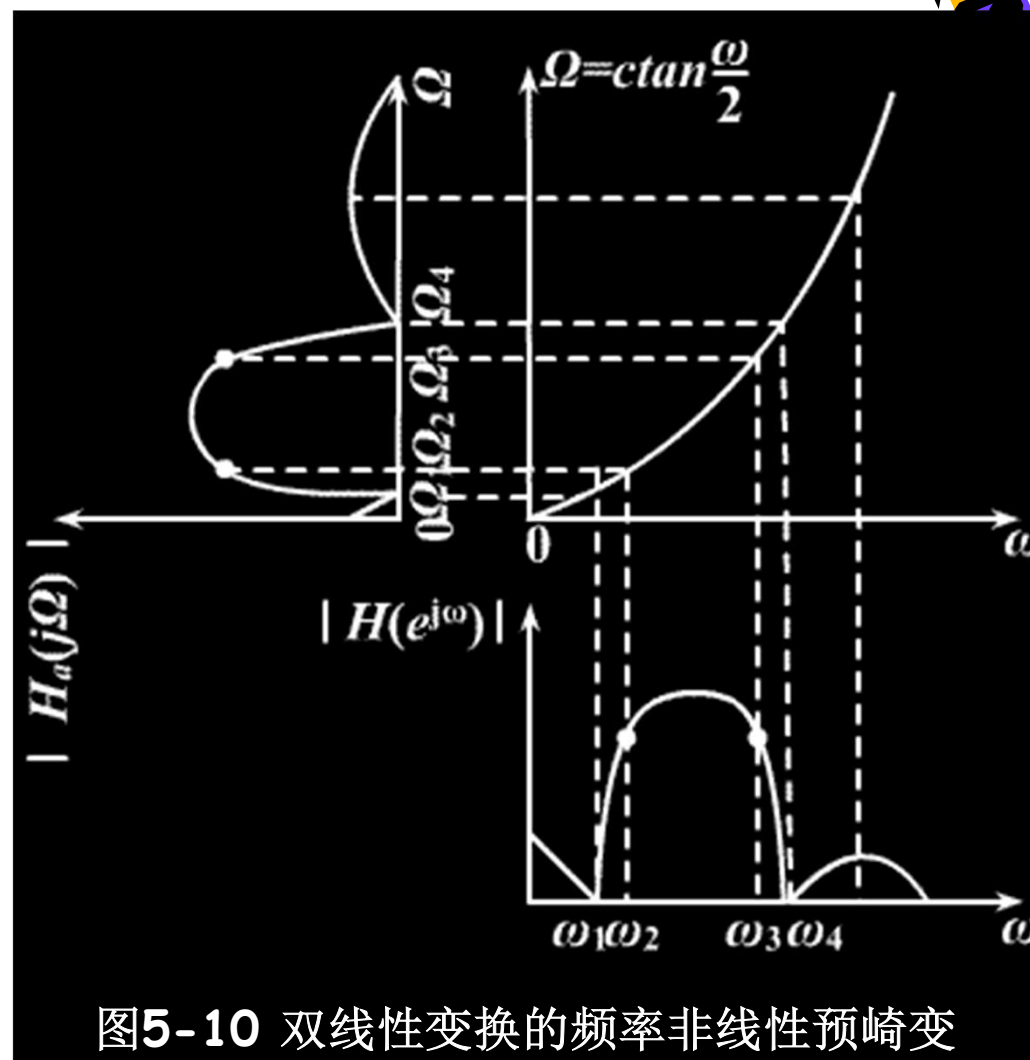


图5-10 双线性变换的频率非线性预畸变

5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

D 设计方法


a)确定采样间隔**T**: $\Omega_c T = 1$

b)由数字滤波器频率指标 $\omega_p \omega_s$ 确定模拟滤波器的频率指标

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \quad \Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

c)设计模拟滤波器 $H_a(s)$

d)用双线性变换法求数字滤波器 $H(z)$


$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

- 例：设计**Butterworth**数字低通滤波器，要求在频率低于 0.2π *rad*的通带内幅度特性下降小于**1dB**。在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于**15dB**。分别用**脉冲响应不变法**和双线性变换法。

1) 由数字滤波器的技术指标：

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$

2) 得模拟滤波器的技术指标：选 $T = 1 \text{ s}$

$$\Omega_p = \omega_p / T = 0.2\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \omega_s / T = 0.3\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha_s = 15\text{dB}$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

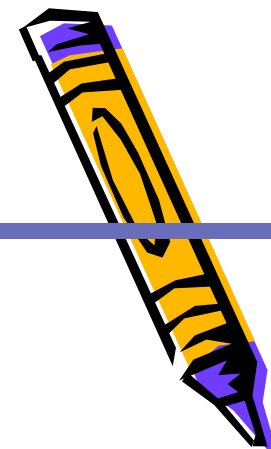
a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.5 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.884 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\alpha_p} - 1 \right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7032 \quad rad / s$$

用**通带**技术指标，使**阻带**特性较好，改善混迭失真



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

或者

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$

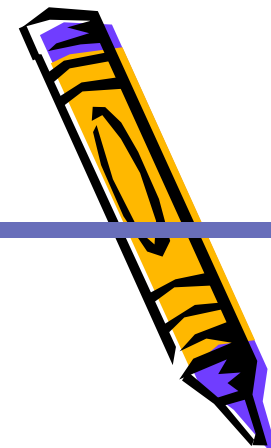
b') 由 $N = 6$ ，直接查表得

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

$$= \frac{0.1209}{s^6 + 2.716s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.121s + 0.1209}$$



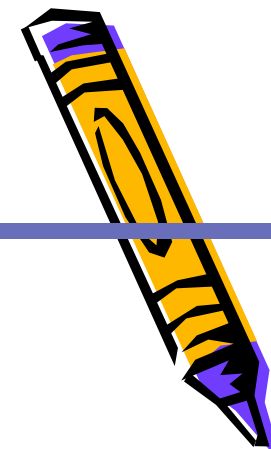
5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

4) 将 $H_a(s)$ 展成部分分式形式:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

变换成**Butterworth**数字滤波器:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \\ &= \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 0.1297z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} \\ &\quad + \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}} \end{aligned}$$



5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

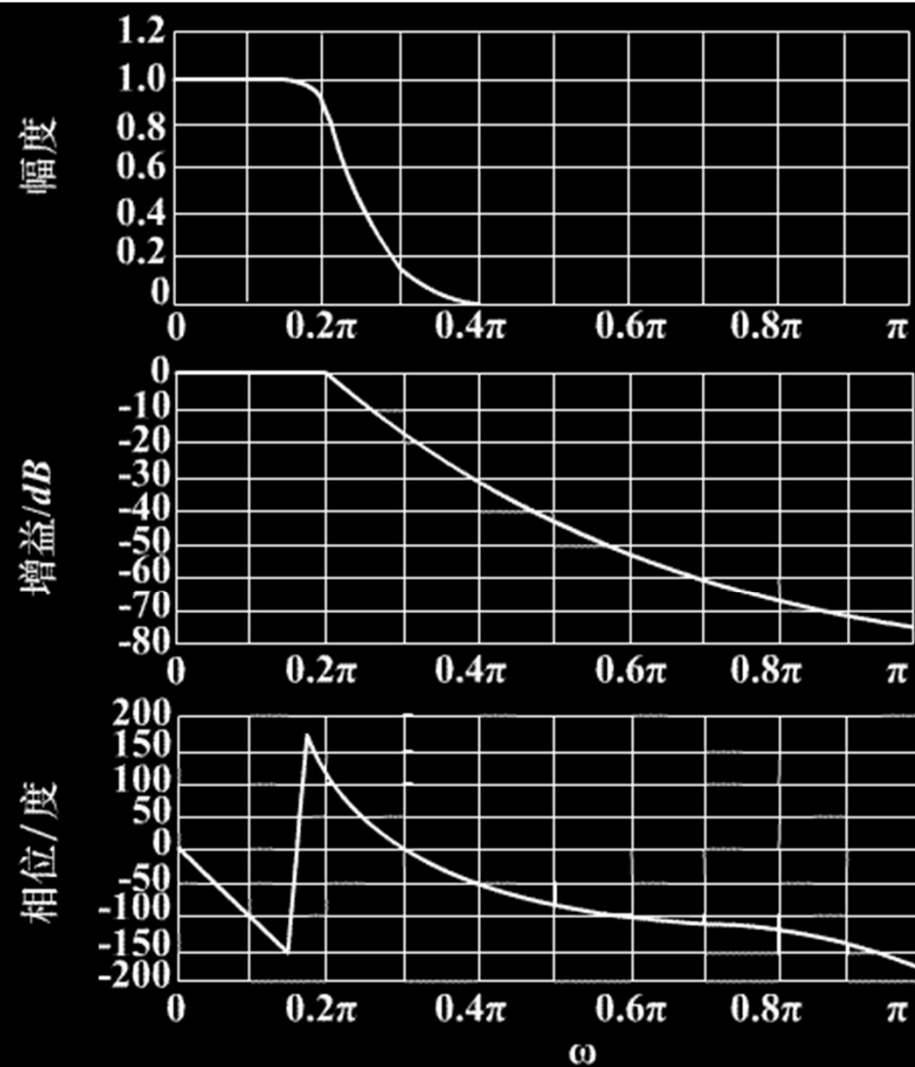


图5-11 用脉冲响应不变法设计的六阶巴特沃思低通数字滤波器频率响应

5.3 用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

- 例：设计**Butterworth**数字低通滤波器，要求在频率低于 $0.2\pi \text{ rad}$ 的通带内幅度特性下降小于 **1dB**。在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于 **15dB**。分别用脉冲响应不变法和**双线性变换法**。

1) 由数字滤波器的技术指标：

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$

2) 考虑预畸变，得模拟滤波器的技术指标：选 $T = 1\text{s}$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = 1.019 \text{ rad/s} \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

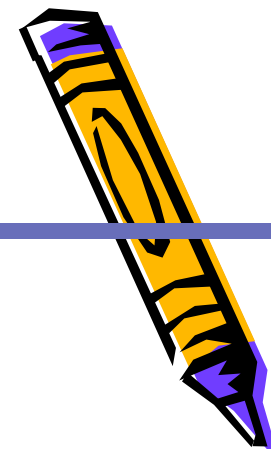
a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.568 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.306 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\alpha_s} - 1 \right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7662 \quad rad / s$$

用**阻带**技术指标，使**通带**特性较好，因无混迭问题



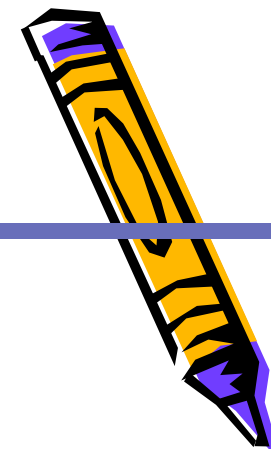
5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

或者

b') 由 $N = 6$ ，直接查表得

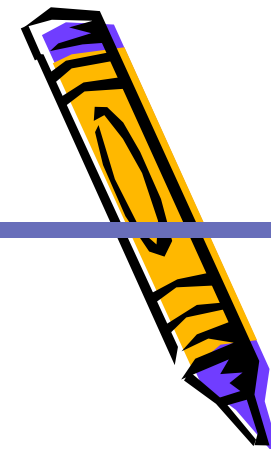
$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

0.2024

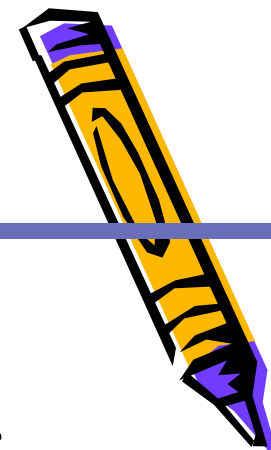
$$= \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$



5.3 用模拟滤波器设计**IIR**数字滤波器

4) 将 $H_a(s)$ 变换成**Butterworth**数字滤波器:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{(1-1.268z^{-1}+0.7051z^{-2})} \cdot \frac{1}{(1-1.010z^{-1}+0.358z^{-2})} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})} \end{aligned}$$



5.4 数字高通、带通和带阻滤波器的设计

两种方法：

- (1) 低通模拟滤波器 \rightarrow 所需类型模拟滤波器 \rightarrow 所需类型数字滤波器。
(2) 低通模拟滤波器 \leftarrow 低通数字滤波器 \leftarrow 所需类型数字滤波器。

模拟频
带转换

双线性
变换

脉冲响应不变法或
双线性变换

数字频
带转换

