第二章　控制系统的数学模型

引 言(P12)

定义：控制系统的数学模型是描述实际系统各物理量之间关系的数学表达式。

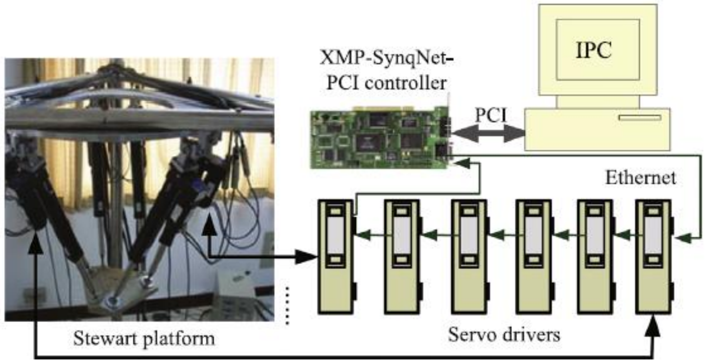
数学模型的用途(意义)：

分析和设计系统（simulation）

建模方法：

1）分析法

2）实验法



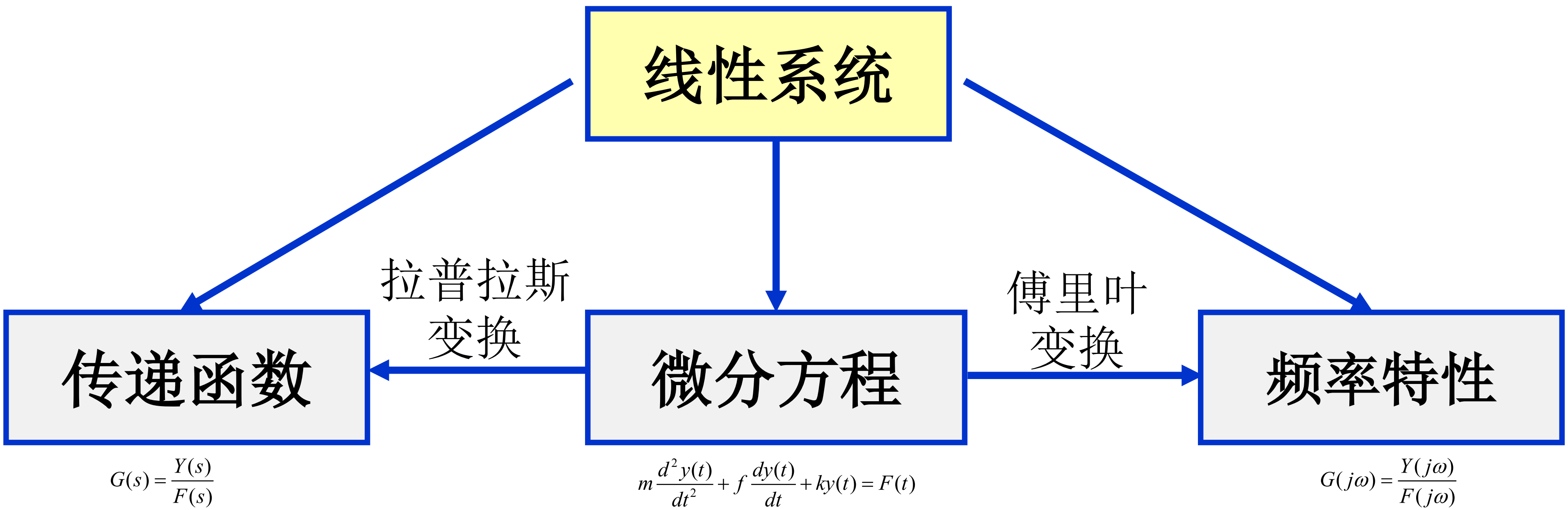
*讨论：无模型控制(**model-free**)？*

数学模型的形式：

时域：微分方程、差分方程、状态方程

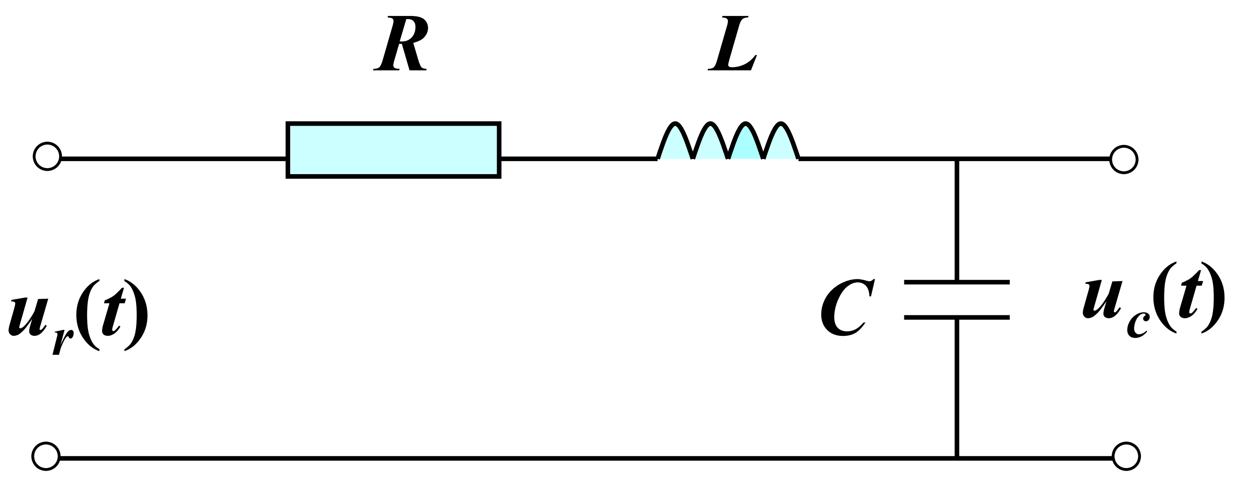
频域：频率特性、信号流图

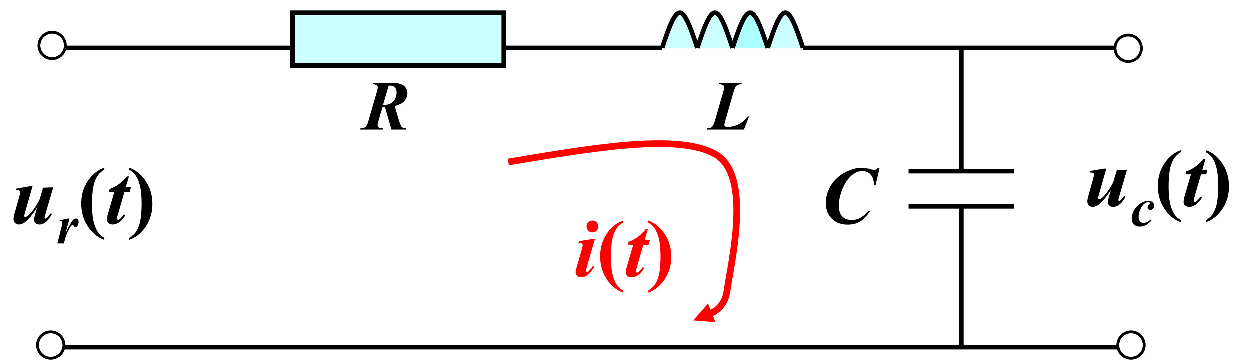
复（频）域：传递函数、结构图（方框图、框图）



2.1 建立数学模型的一般方法

例1：如图所示的RLC电路，建立以电容两端电压$u_c(t)$为输出量，输入电压$u_r(t)$为输入量的运动方程。





解：由基尔霍夫电压定律（KVL） 得

$$u_r(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_c(t) \qquad (1)$$

又有 $i(t) = C\dfrac{du_c(t)}{dt}$ （2）

将（2）代入（1），消去中间变量$i(t)$得：

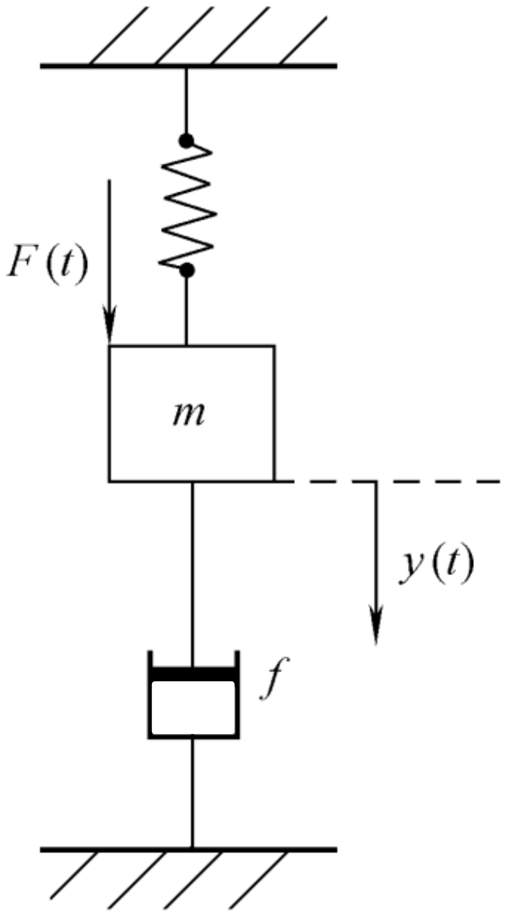
$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

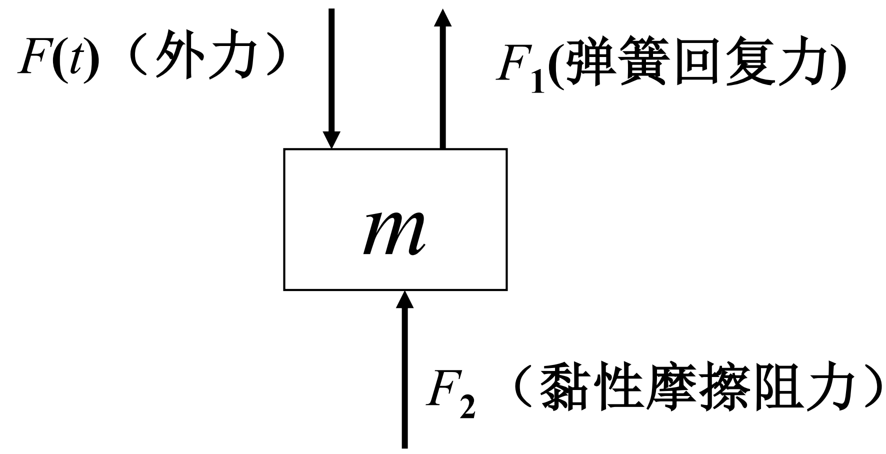
例2:机械位移系统,物体在外力$F(t)$ 作用下产生位移 $y(t)$，写出其运动方程。

分析：输入$F(t)$，输出$y(t)$

理论依据:牛顿第二定律,即物体所受的合外力等于物体质量与加速度的乘积.

$$\sum F = ma$$





解：$F_1 = ky(t)$

$$F_2 = f\frac{dy(t)}{dt}$$

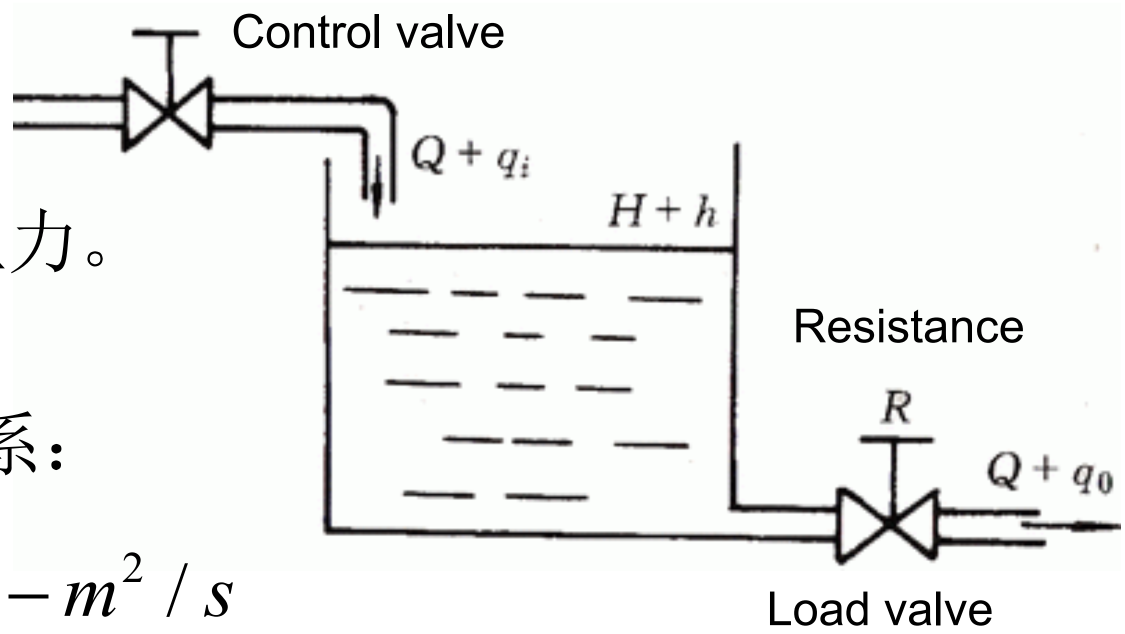
$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\Rightarrow F(t) - F_1 - F_2 = ma$$

得 $F(t) - ky(t) - f\dfrac{dy(t)}{dt} = m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$

整理得到：$m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + f\dfrac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$

例3：单容水槽模型



R-液阻，流出端负载阀门的阻力。

平衡状态：$h=0$

稳态流速Q和稳态液位H的关系：

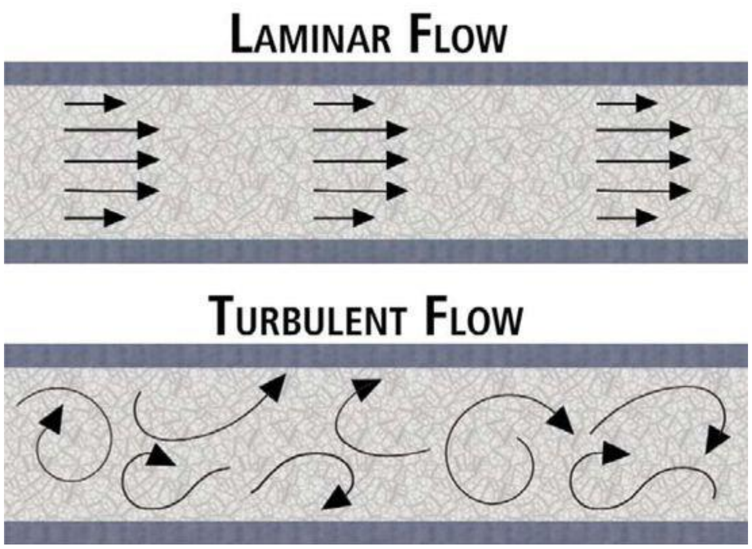
(物理的)　　　　薄片状的

$Q=KH$　　laminar　　$K-m^2/s$

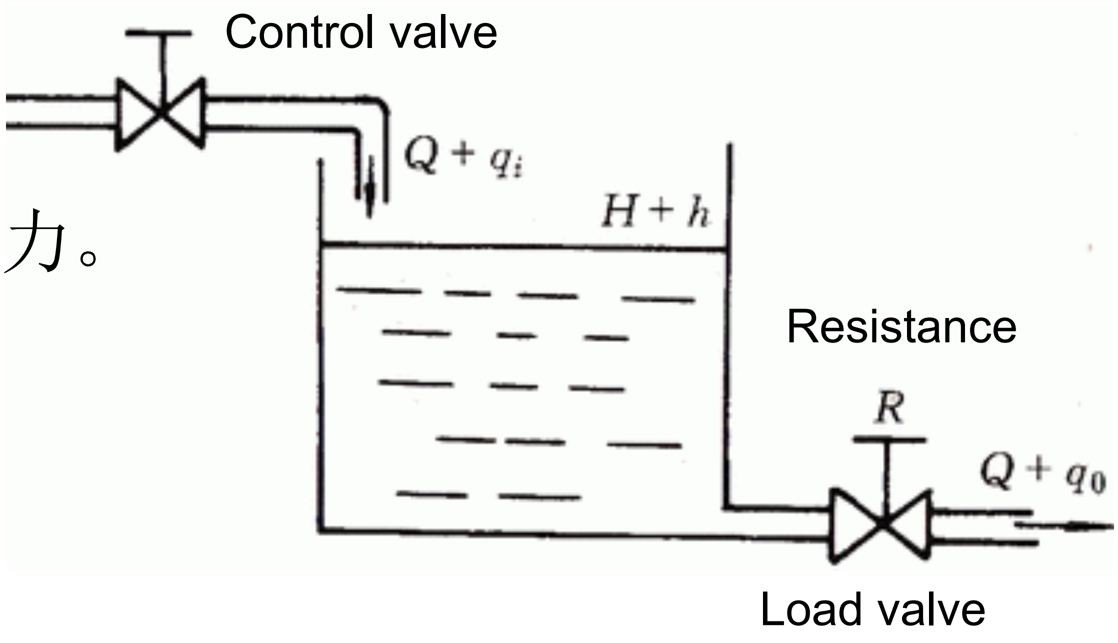
$$R=\frac{dH}{dQ}=\frac{H}{Q}$$

$Q=K\sqrt{H}$　　turbulent　　$K-m^{2.5}/s$

$$R=\frac{dH}{dQ}=\frac{2H}{Q}$$



例3:单容水槽模型



R-液阻，流出端负载阀门的阻力。

平衡状态：$h=0$

C-容量系数，m^2

$$\left.\begin{aligned} Cdh &= (q_i - q_o)\,dt \\ q_o &= \frac{h}{R} \end{aligned}\right\} \qquad RC\frac{dh}{dt}+h=Rq_i$$

根据上述两个例子，归纳出列写系统微分方程的一般步骤：(P17)

1）确定系统的输入、输出量；

2）根据已知的物理或化学定律，列写运动过程的微分方程；

3）消去中间变量，写出输入、输出量的微分方程；

4）整理，写成微分方程的标准形式（输出量在左，输入量在右，按照降阶次进行排列）。

许多表面上看来似乎毫无共同之处的控制系统，其运动规律可能完全一样可以用一个运动方程来表示，称它们为**结构相似系统**。

上例的机械位移系统和RLC电路就可以用同一个数学表达式分析，具有相同的数学模型。

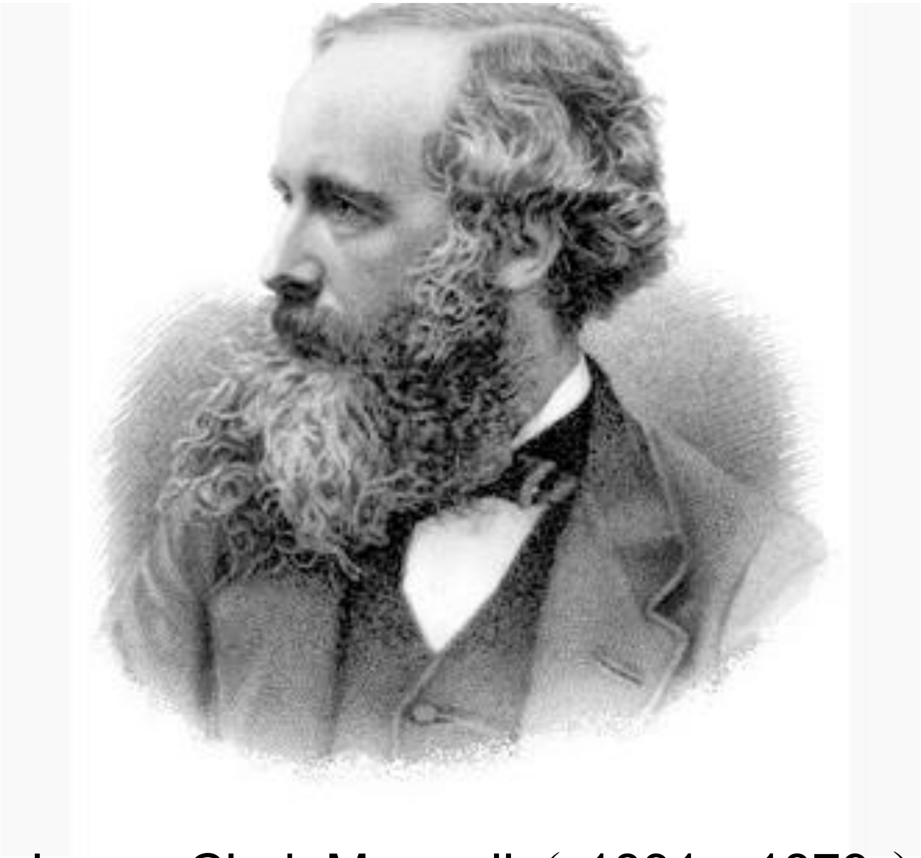
机电模拟

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+f\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=F(t)$$

电磁感应与电机的发展

Michael Faraday（ 1791～1867 ）
英国物理学家、化学家。
被称为“电学之父”和“交流电之父”。



James Clerk Maxwell（ 1831～1879 ）
英国物理学家、数学家。经典电动力学的创始人，统计物理学的奠基人之一。

电磁感应与电机的发展

1866年，W. Siemens， 自激（自励）式直流发电机；

1882年，T. Edison, 当时容量最大的发电机，第一个直流电的发电站和民用照明系统（NY）；

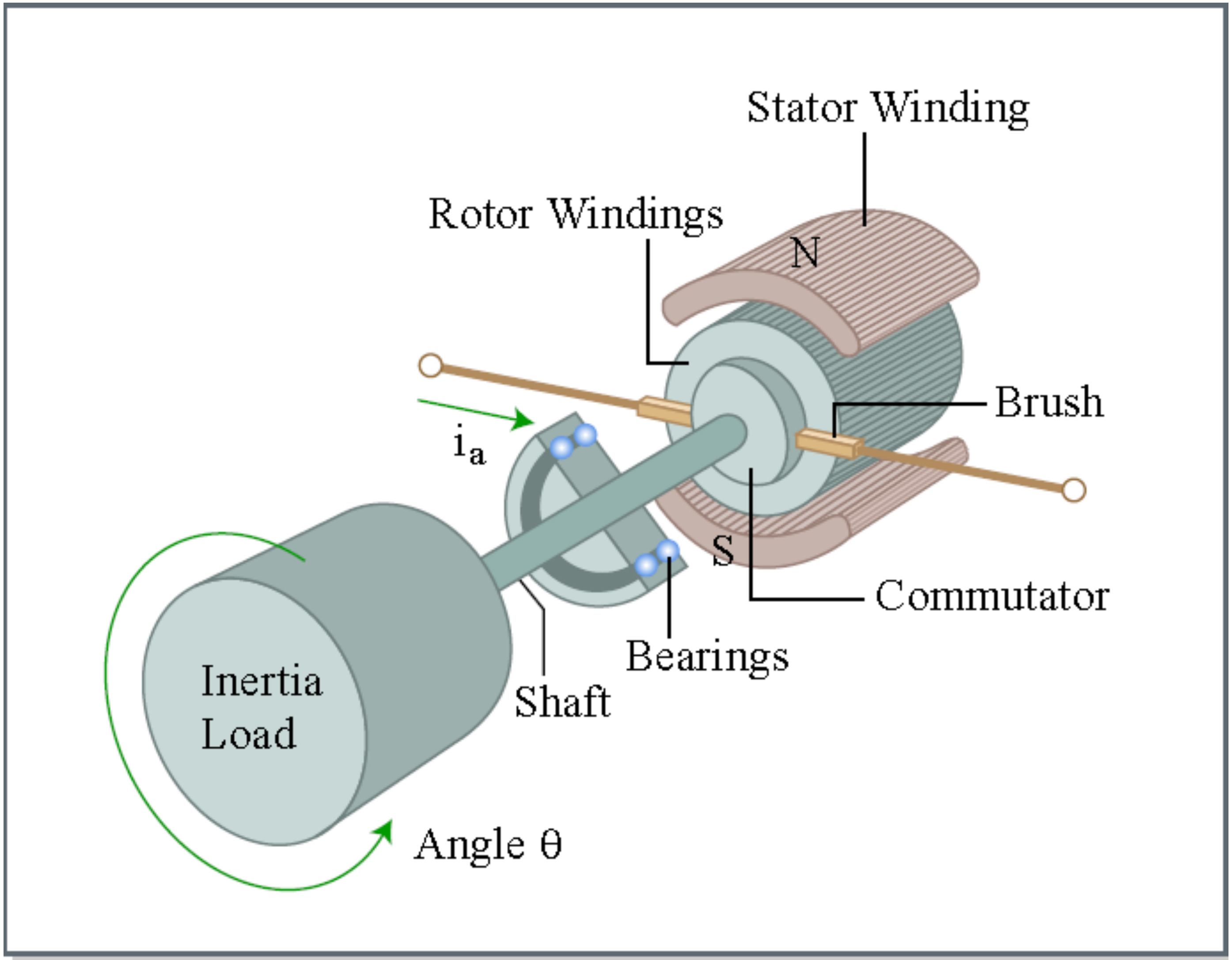
1930s，伏打电池供电的电动机，不实用；

1869年，比利时工程师 Z. Gramme直流发电机；

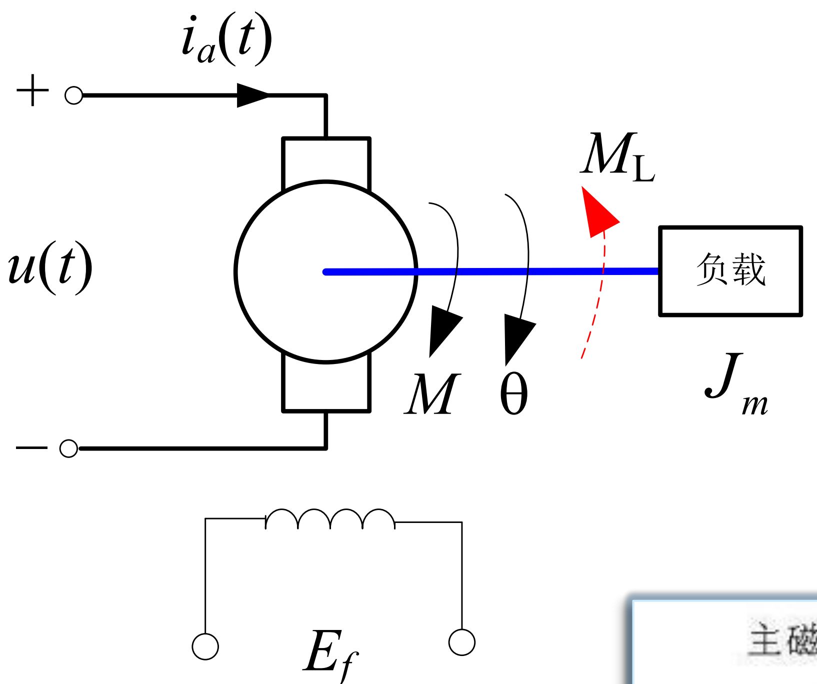
1873年，维也纳世界博览会，操作者失误将两台发电机接起来了，一台发电机发出的电流流入第二台发电机的电枢线圈，第二台发电机令人吃惊地转了起来。人们恍然大悟：发电机和电动机是可逆的！

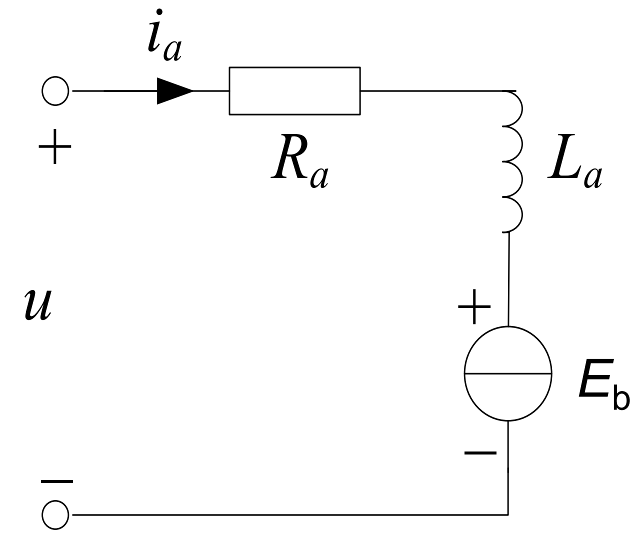
Gramme是第一个制造出商品化、实用电动机的人。

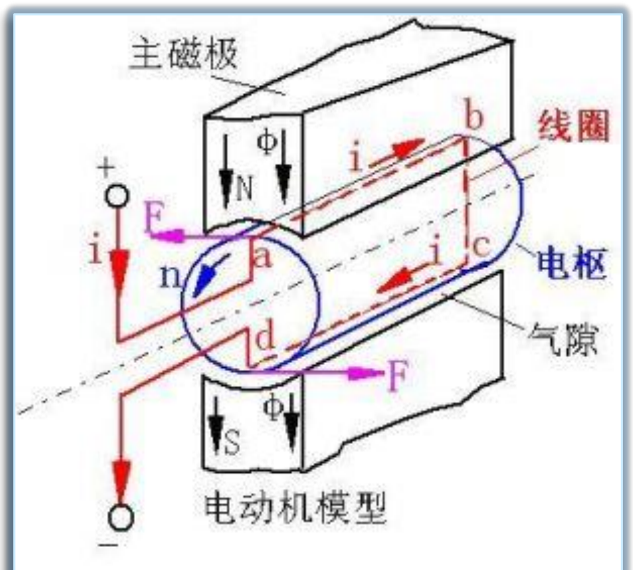
例4:直流他励电机的数学模型（机电系统，P14）



例4:直流他励电机的数学模型（机电系统，P14）







解： 由基尔霍夫电压定律（KVL）得

$$L_a\frac{di_a}{dt}+R_ai_a+E_b=u \qquad ①$$

电机电枢反电动势 $E_b=K_b\dfrac{d\theta}{dt}$ ② 反电动势系数K_b

由刚体转动定律得 $J_m\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=M-f_m\dfrac{d\theta}{dt}-M_L$ ③

电机的电磁转矩 $M=K_ai_a$ ④ 电磁转矩系数K_a

③代入④，及②代入①，得

$$L_aJ_m\frac{d^3\theta}{dt^3}+\left(L_af_m+R_aJ_m\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(K_aK_b+R_af_m\right)\frac{d\theta}{dt}=K_au-\frac{L_a}{K_a}\frac{dM_L}{dt}-\frac{R_a}{K_a}M_L$$

$$L_aJ_m\frac{d^3\theta}{dt^3}+\left(L_af_m+R_aJ_m\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(K_aK_b+R_af_m\right)\frac{d\theta}{dt}=K_au-\frac{L_a}{K_a}\frac{dM_L}{dt}-\frac{R_a}{K_a}M_L$$

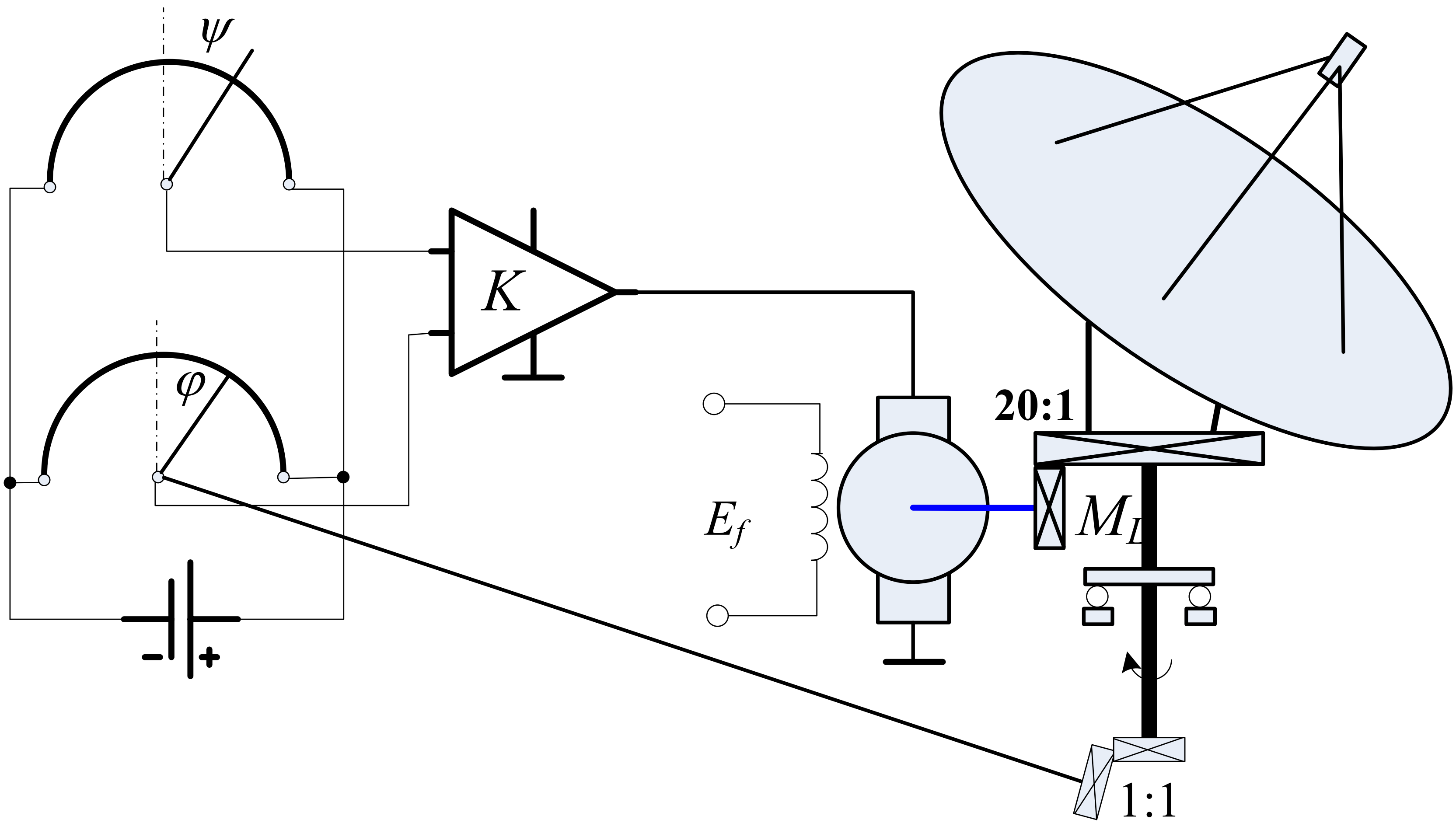
$$M_L=0\Rightarrow \underline{L_aJ_m\frac{d^3\theta}{dt^3}+\left(L_af_m+R_aJ_m\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(K_aK_b+R_af_m\right)\frac{d\theta}{dt}=K_au}$$

$$\begin{cases}M_L=0\\L_a\approx 0\end{cases}\Rightarrow \underline{R_aJ_m\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(K_aK_b+R_af_m\right)\frac{d\theta}{dt}=K_au}$$

$$\begin{cases}M_L=0\\L_a\approx 0\\T_m\triangleq\dfrac{R_aJ_m}{K_aK_b+R_af_m}\\K_m\triangleq\dfrac{K_a}{K_aK_b+R_af_m}\end{cases}\Rightarrow T_m\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\theta}{dt}=K_mu$$

$$\begin{cases} M_L = 0 \\ L_a \approx 0 \\ T_m \triangleq \dfrac{R_a J_m}{K_a K_b + R_a f_m} \\ K_m \triangleq \dfrac{K_a}{K_a K_b + R_a f_m} \\ K_a \approx K_b \triangleq k_d \\ f_m \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} T_m = \dfrac{R_a J_m}{k_d^2} \\ K_m = \dfrac{1}{k_d} \end{array}} \Rightarrow T_m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{k_d} u$$

$$\Rightarrow T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} u$$



作业：2.1

2.2 非线性及线性化(P16)

- 严格地讲，实际物理器件或系统都是非线性的。

例如：弹簧 $k=f(x)$, 电阻、电容受温度的影响。

处理方法：①简化模型，直接忽略非线性的影响；

（电阻、电容、电位器、齿轮组）

②微偏线性化（切线线性化、小偏差法）

非线性关系： $y=f(x)$

在工作点(x_0, y_0)附近进行泰勒级数展开

$$y = f(x) = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \cdots$$

$$y = f(x) = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

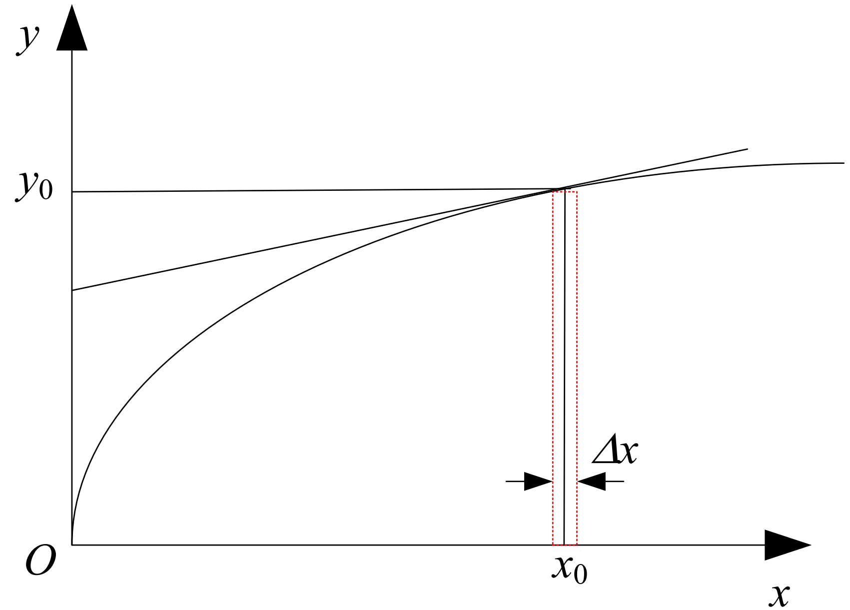
忽略二次及高次项，有

$$y = y_0 + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0)$$

$$or\ \Delta y = y - y_0$$

$$= K(x - x_0) = K\Delta x$$

线性 $K = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$



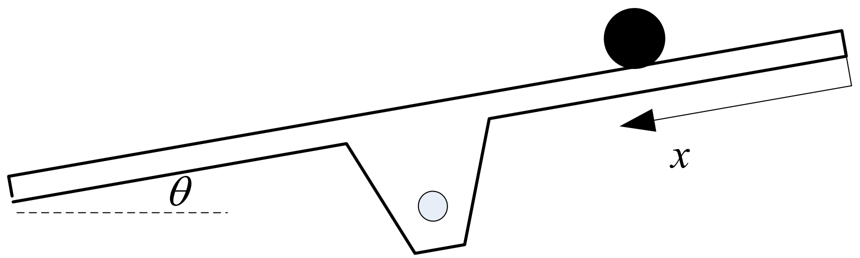
Note:

(1)上述非线性环节不是本质非线性特性（如间隙、饱和特性）等；

(2)实际的工作情况在工作点附近；

(3)变量的变化必须是小范围的，其近似程度与工作点附近的非线性情况及变量变化范围有关。

例5: 建立球杆系统（ball-beam system）的数学模型。



解： 由牛顿第二定律得

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta$$

$$\ddot{x} = g\sin\theta$$ nonlinear

$$y = f(x) = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

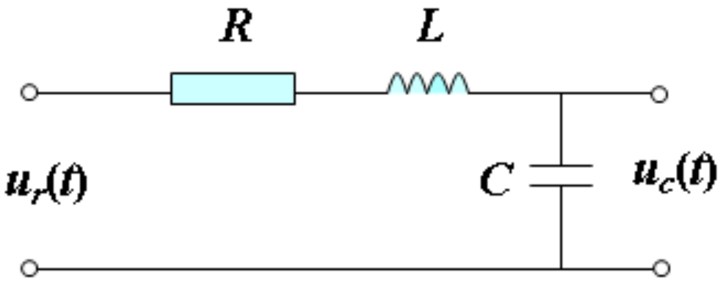
$$\frac{d^n \sin\theta}{d\theta} = \sin(\theta + \frac{n\pi}{2}) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sin\theta = 0 + \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 \cdots$$

线性化模型 $\ddot{x} = g\theta$

- 作业：**2.0，2.1，2.2**

2.3 传递函数 (P18)
Fonction de transfert



$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

使用微分方程的困惑：

1）表达繁琐；

2）求解麻烦！

传递函数也称为**系统函数**，是描述系统输入和输出关系的**复变量增益函数**，并不能反映系统的内部状态，因此适合于黑箱模型。

Quelques transformées de Laplace

Signaux		
Dirac	$\delta(t)$	1
Échelon	u(t)	$\dfrac{1}{p}$
Rampe	r(t)	$\dfrac{1}{p^2}$

Propriétés	
Linéarité	$\mathscr{L}\,[\lambda_1.f_1(t) + \lambda_2.f_2(t)] = \lambda_1.F_1(t) + \lambda_2.F_2(p)$
Dérivation	$\mathscr{L}\,[df(t)/dt] = p.F(p) - f(0^+)$
Intégration	$\mathscr{L}\,[\int f(t)/dt] = F(p)\,/p$
Retard	$\mathscr{L}\,[f(t-\tau)] = e^{-\tau p}.\,F(p)$
Théorème de la valeur finale 终值定理	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} p.F(p)$
Théorème de la valeur initiale 初值定理	$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{p\to\infty} p.F(p)$

2.3 传递函数 (P18)
Fonction de transfert

一、传递函数的定义和概念

以上一节例（1）RLC电路的微分方程为例：

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

设初始状态为零，对上式进行拉普拉斯变换，得到：

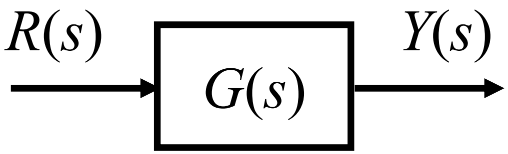
$$LCs^2U_c(s)+RCsU_c(s)+U_c(s)=U_r(s)$$

一、传递函数的定义和概念

$$LCs^2U_c(s)+RCsU_c(s)+U_c(s)=U_r(s)$$

$$(LCs^2+RCs+1)\ U_c(s)=U_r(s)$$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\boxed{\frac{1}{LCs^2+RCs+1}}$$



$$G(s)=\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{零初始条件下}}$$

定义：零初始条件下，系统输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比称为该系统的传递函数。

一般形式：

设线性定常系统（元件）的微分方程是：

$$a_n \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

$y(t)$为系统的输出，$r(t)$为系统的输入，则零初始条件下，对上式两边取拉普拉斯变换，得到系统的**传递函数**为：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \quad (n \geq m)$$

分母中s 的最高阶次 n 即为系统的阶次。

$$D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$$

$D(s)=0$即是系统的**特征方程**（characteristic equation）。

传递函数的两种特殊表达形式：

头1

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{k\,b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

零极点形式

式中，$s=z_i(i=1,2\cdots m)$是$N(s)=0$的根，称为传递函数的零点(zero)；

$s=p_i(i=1,2\cdots n)$是特征方程$D(s)=0$的根，称为特征根(eigenvalue)；

$s=p_i(i=1,2\cdots n)$也是传递函数的极点(pole)。

频率形式

尾1

$$G(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}$$

时常数形式

jω

二、传递函数的性质

(1)传递函数与微分方程一一对应；【等价性、相通性】

(2)传递函数描述了系统的外部特性，不反映系统的任何内部物理信息；【黑箱原则】

(3)传递函数只取决于系统本身的结构和参数，而与输入和初始条件等外部因素无关；

(4)未经特别说明，分子分母不含相消因子；

(5)传递函数一旦确定，系统在一定的输入信号下的动态特性就确定了。

(6)传递函数是有量纲的（dimensional）。

三、传递函数的求法

（1）根据系统的微分方程求传递函数

$$\frac{d}{dt} \to s, \frac{d^2}{dt^2} \to s^2, y(t) \to Y(s)$$

例：求直流他励伺服电机的传递函数

$$T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} u \Rightarrow \ T_m s\Omega(s) + \Omega(s) = \frac{1}{k_d} U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1/k_d}{T_m s + 1}$$

三、传递函数的求法

（1）根据系统的微分方程求传递函数

$$\frac{d}{dt} \to s, \frac{d^2}{dt^2} \to s^2, y(t) \to Y(s)$$

课堂练习：求传递函数

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

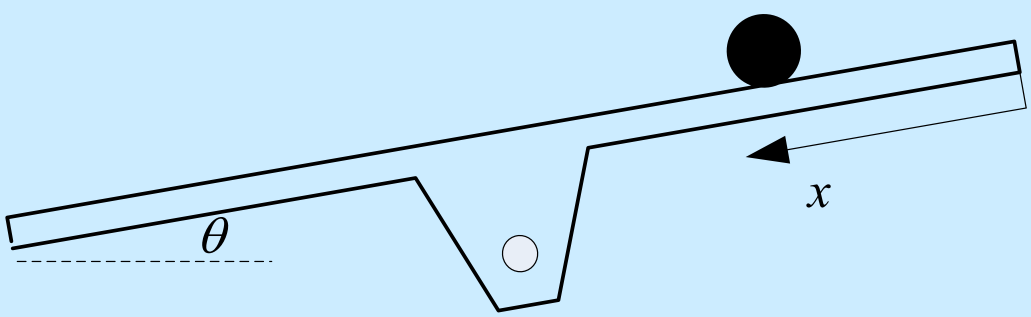
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

三、传递函数的求法

（1）根据系统的微分方程求传递函数

$$\frac{d}{dt}\to s,\frac{d^2}{dt^2}\to s^2,y(t)\to Y(s)$$

课堂练习（续）：求传递函数



$$\ddot{x}=g\theta$$

三、传递函数的求法

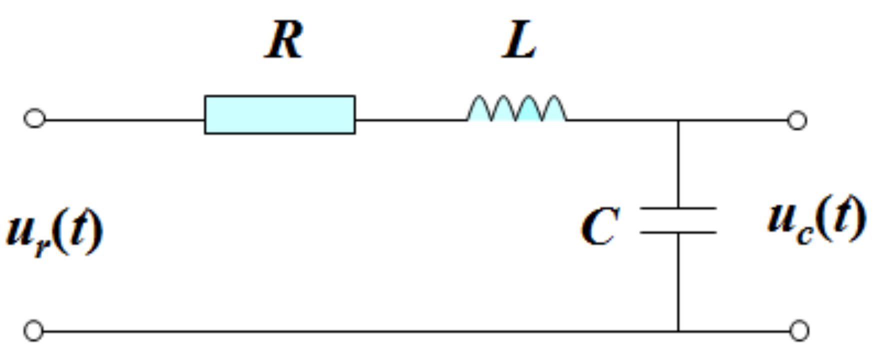
（1）根据系统的微分方程求传递函数

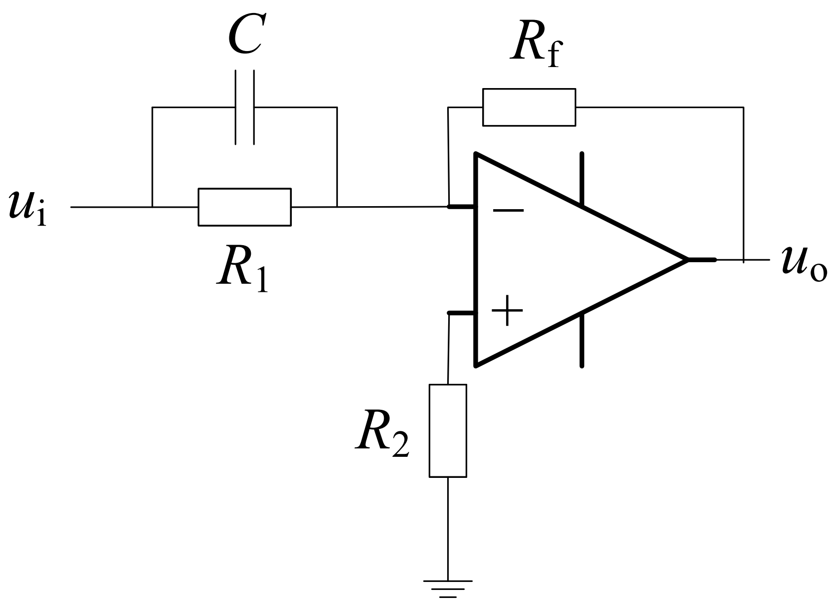
$$\frac{d}{dt} \to s, \frac{d^2}{dt^2} \to s^2, y(t) \to Y(s)$$

（2）电路网络的复阻抗法

元件	复阻抗表达式
电阻器	R
电容器	$1/sC$
电感器	sL

课堂练习：列写传递函数及微分方程。





2.4 典型环节（P20）

1）比例环节（放大环节）：

$$y(t) = Kr(t)$$

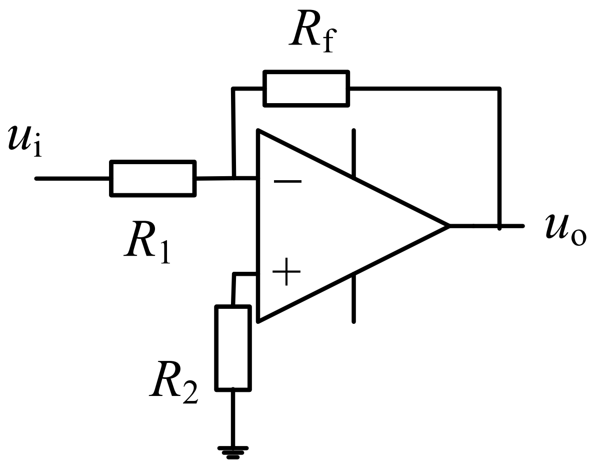
式中 K——环节的比例系数，为一常量。

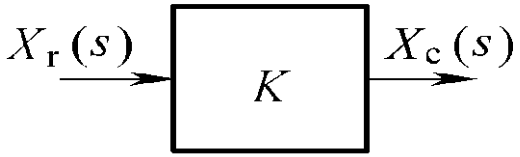
传递函数为： $$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K$$

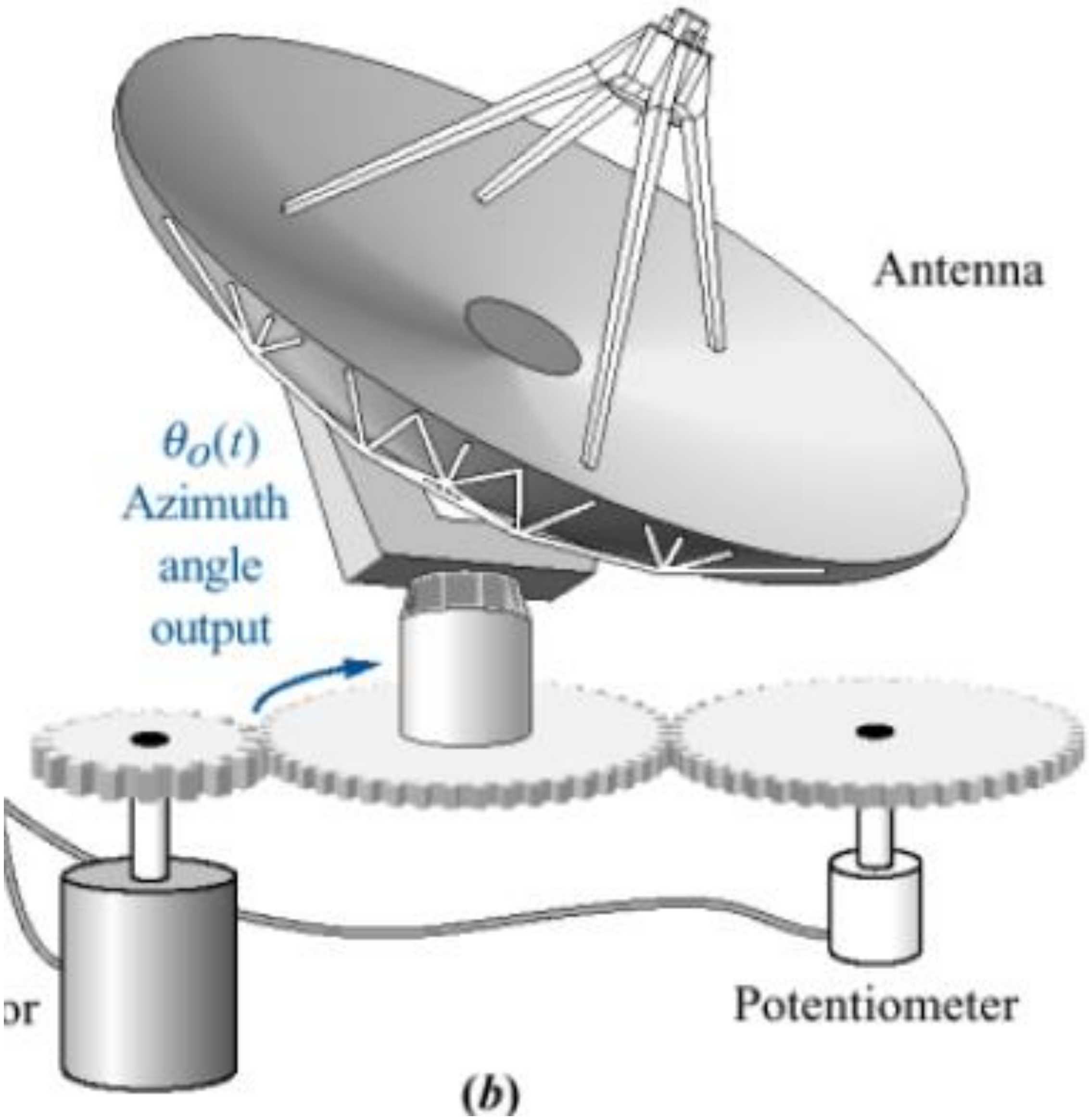
<u>特点</u>：输入输出量成比例，无失真和时间延迟。

$G(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{1+Ts}$ 惯性

<u>实例</u>：运算放大器，齿轮，电阻(电位器）等。







2）惯（惰）性环节：

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t)$$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{Ts+1}$

式中 T ——惯性环节的时间常数。

<u>特点</u>：含一个储能元件，对突变的输入，其输出不能立即复现，输出无振荡。

<u>实例</u>：RC网络，直流伺服电动机，电炉，液位。

3）积分环节：

$$y(t)=\int r(t)dt$$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{s}$

特点：输出量与输入量的积分成正比例，当输入消失，输出具有记忆功能。

实例：速度与位移的关系，积分器等。

4）理想微分环节：

$$y(t)=\frac{dr(t)}{dt}$$

传递函数为： $G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=s$

特点：输出量正比输入量变化的速度，能预示输入信号的变化趋势。

实例：测速发电机。

5）（一阶）微分环节：

跟踪

$\frac{Ts+1}{\tau s+1}$

$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}$

$$y(t)=\frac{dr(t)}{dt}+r(t)$$

传递函数为：$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=s+1$

<u>特点</u>：理想微分环节在实际系统的体现。

<u>实例</u>：RL有源网络。

6）二阶微分环节：

$$y(t)=\tau^2\frac{d^2r(t)}{dt^2}+2\zeta\tau\frac{dr(t)}{dt}+r(t)$$

传递函数为：$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1$

式中 τ——环节的时间常数。

特点：输出量与输入量成二阶微分关系。

实例：RLC电路。

7）振荡环节：

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t)$$

传递函数为：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}(0<\zeta<1)$$

<u>特点</u>：环节中有两个独立的储能元件，并可进行能量交换，其输出呈现振荡形式。

<u>实例</u>：RLC电路，弹簧质量阻尼器系统。

8）延迟环节：

$$y(t) = r(t-\tau)$$

传递函数为：$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

式中 τ——延迟时间

特点：输出量能准确复现输入量，但须延迟一固定的时间间隔。

实例：管道压力、流量等物理量，网络。

课堂练习：回答以下系统由什么典型环节组成？

$$G_1(s)=\frac{K(3s+1)}{s(5s+1)(s^2+2s+8)}$$

$$G_2(s)=\frac{2(s^2+s+4)}{s^2(s^2+4s+4)}$$

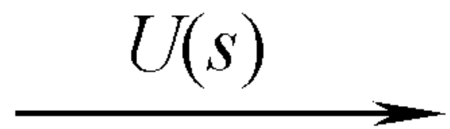
$$G_3(s)=\frac{1}{s^2+4}$$

第二章　控制系统的数学模型

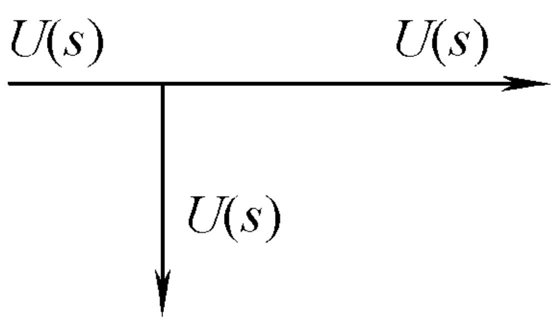
2.5 动态结构图（框图）（P24）

一、动态结构图的组成

1、信号线：有箭头的直线，箭头表示信号传递方向。

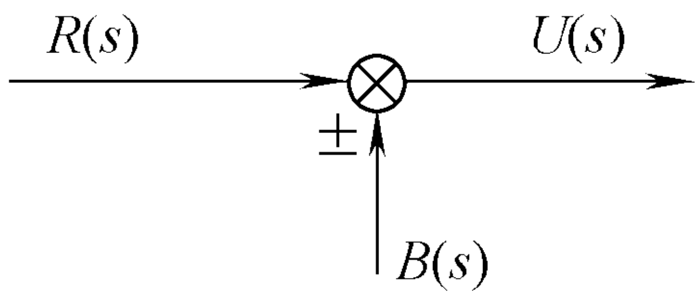


2、引出点：信号引出或测量的位置。

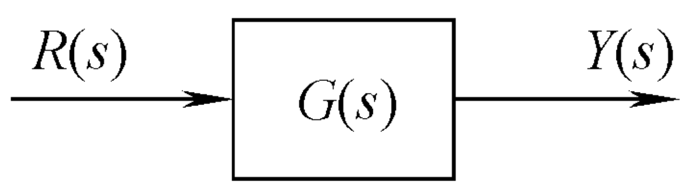


从同一信号线上引出的信号，数值和性质完全相同。

3、综合点：对两个或两个以上的信号进行代数运算，“＋”表示相加，常省略，“－”表示相减。



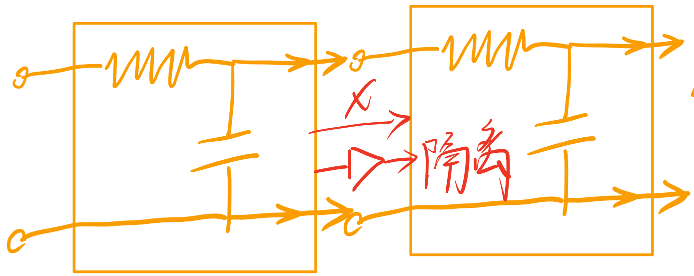
4、方框(环节)：表示典型环节或其组合，框内为对应的传递函数。



$$Y(s) = R(s)G(s)$$

二、典型连接及等效变换

1、串联等效



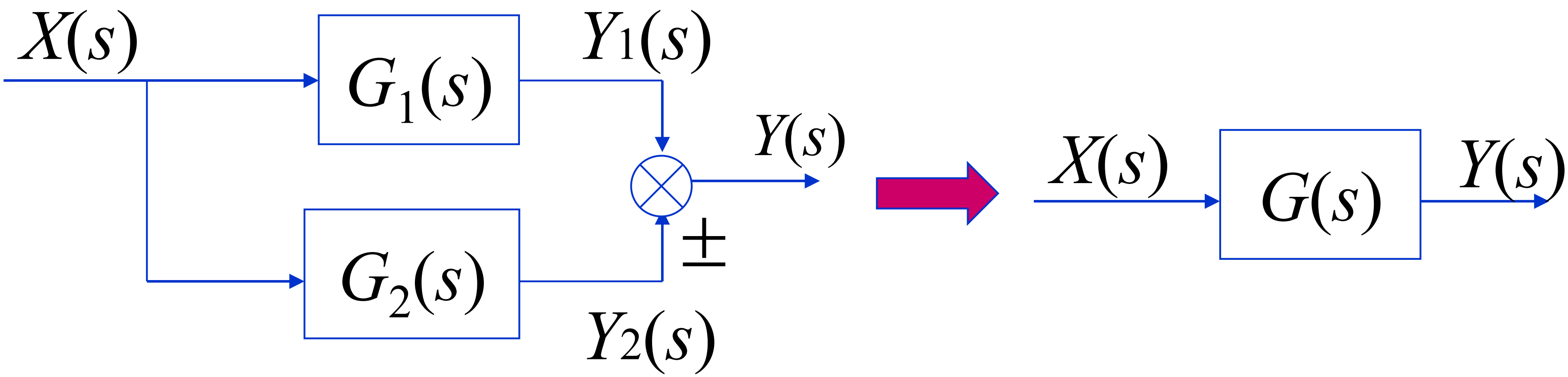
$$X(s) \longrightarrow \boxed{G_1(s)} \xrightarrow{X_1(s)} \boxed{G_2(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

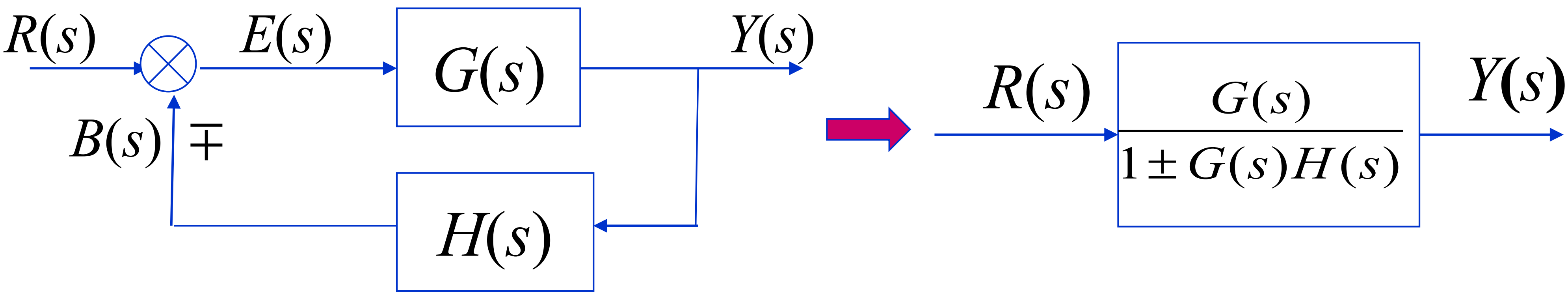
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

2、并联等效



$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$$

3、反馈等效（回路等效）



$$Y(s)=E(s)G(s),\ E(s)=R(s)\mp B(s),\ B(s)=Y(s)H(s)$$

$$Y(s)=[R(s)\mp B(s)]G(s)=R(s)G(s)\mp Y(s)G(s)H(s)$$

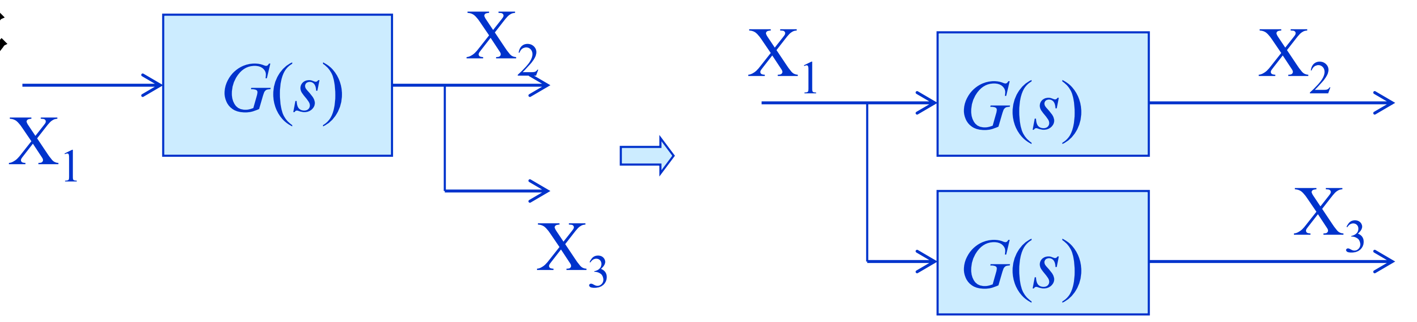
$$Y(s)[1\pm G(s)H(s)]=R(s)G(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\Phi(s)=\frac{G(s)}{1\pm G(s)H(s)}$$

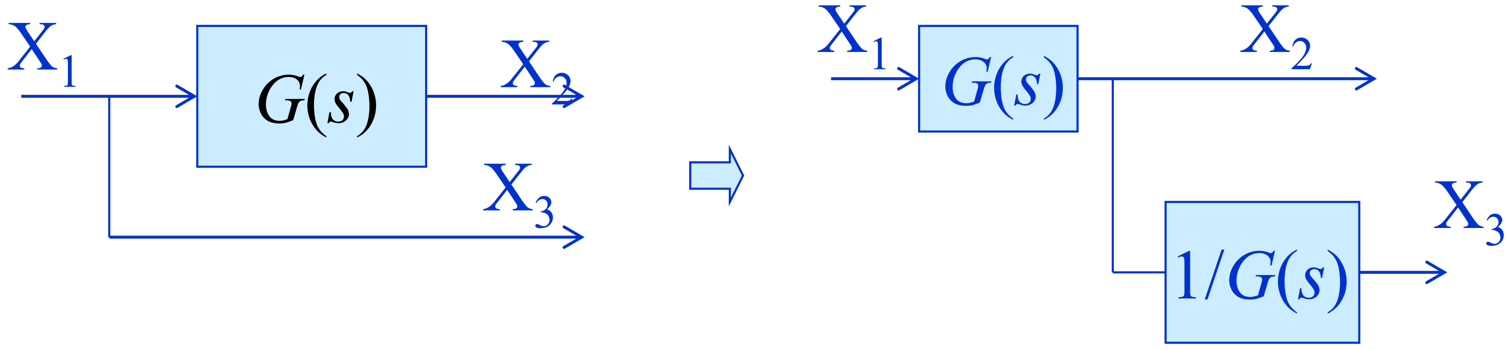
三、等效移动

1、引出点的移动

1）前移

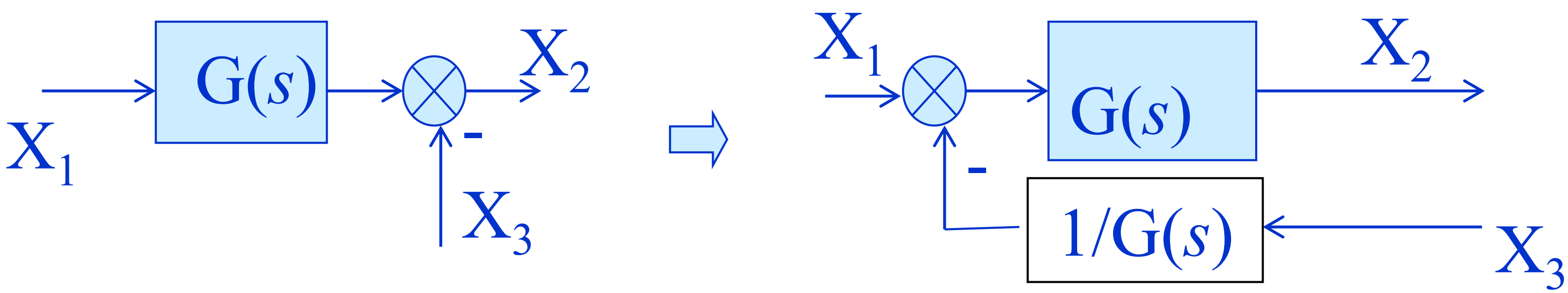


2）后移

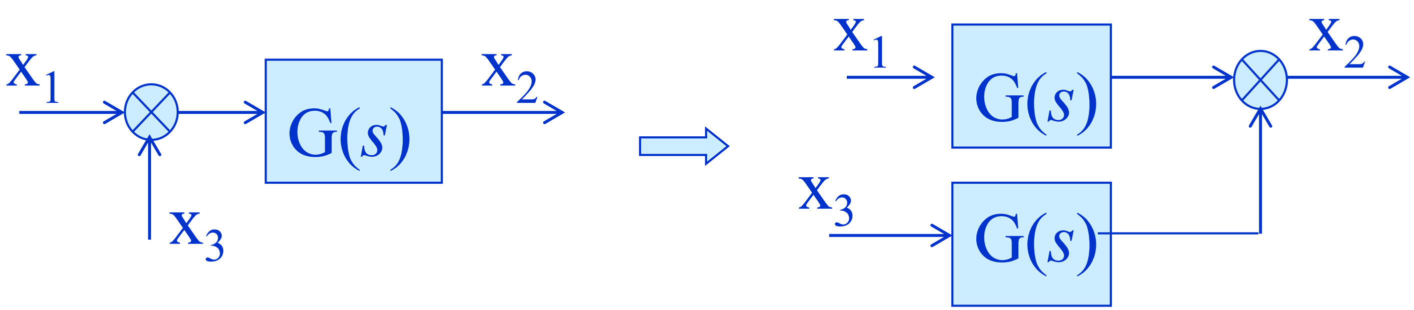


2、综合点的移动

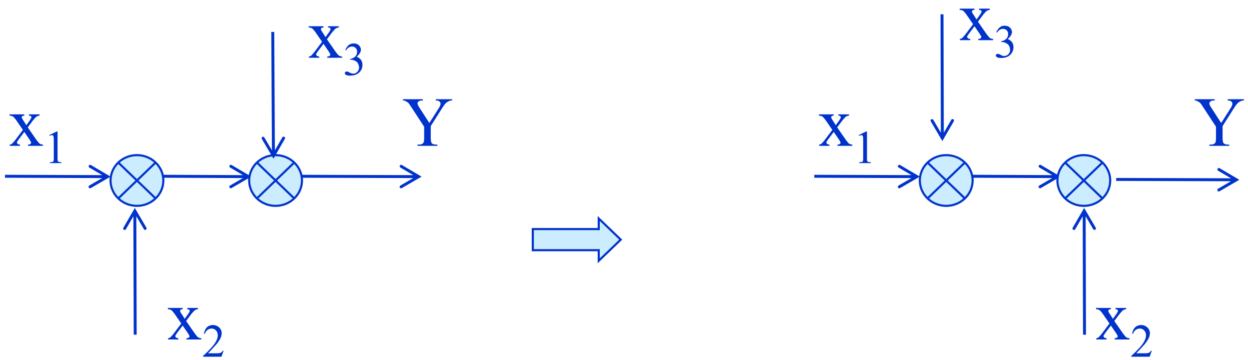
1）前移



2）后移



3）相邻综合点移动



NOTE：

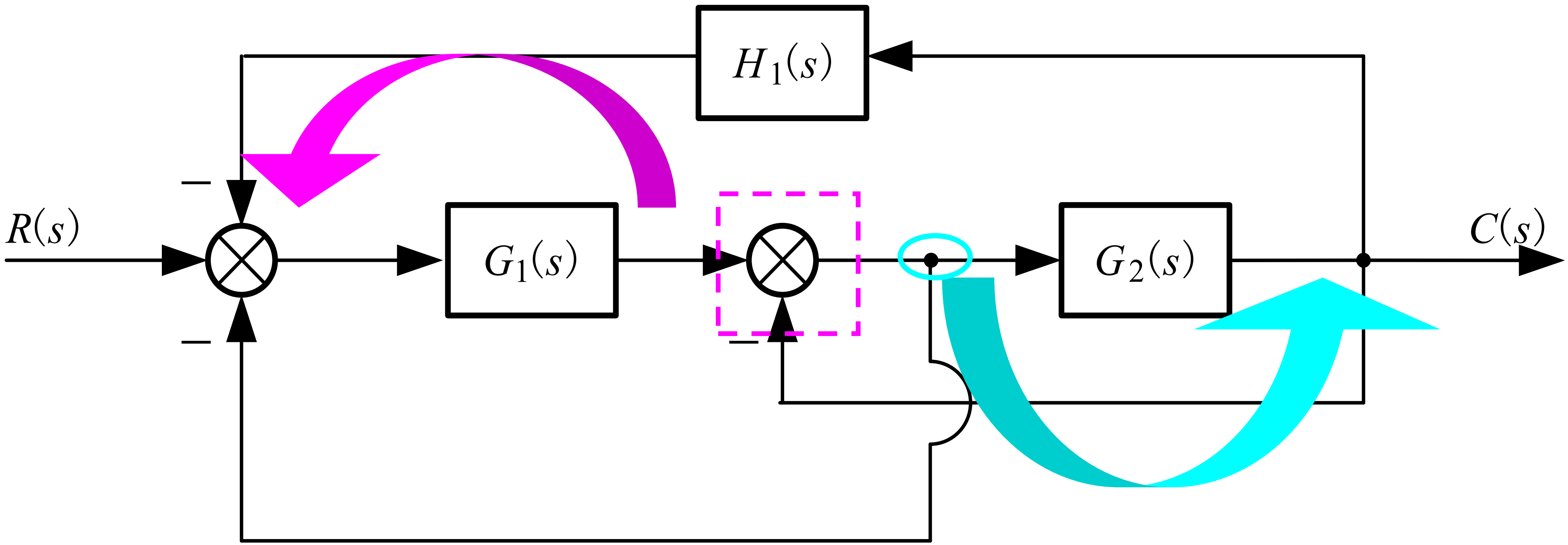
（1）反馈等效优先；

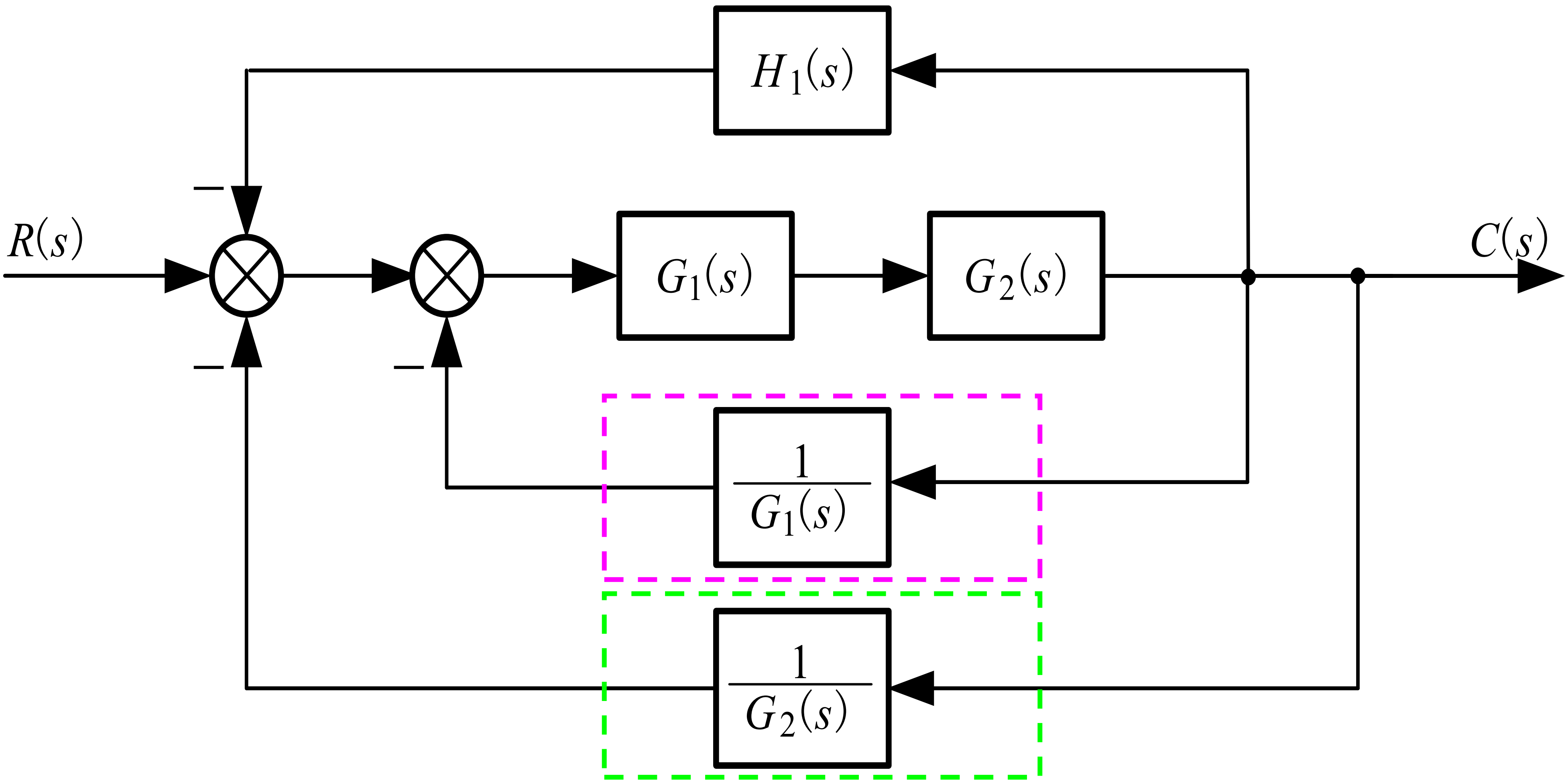
（2）引出点移向引出点，综合点移向综合点；

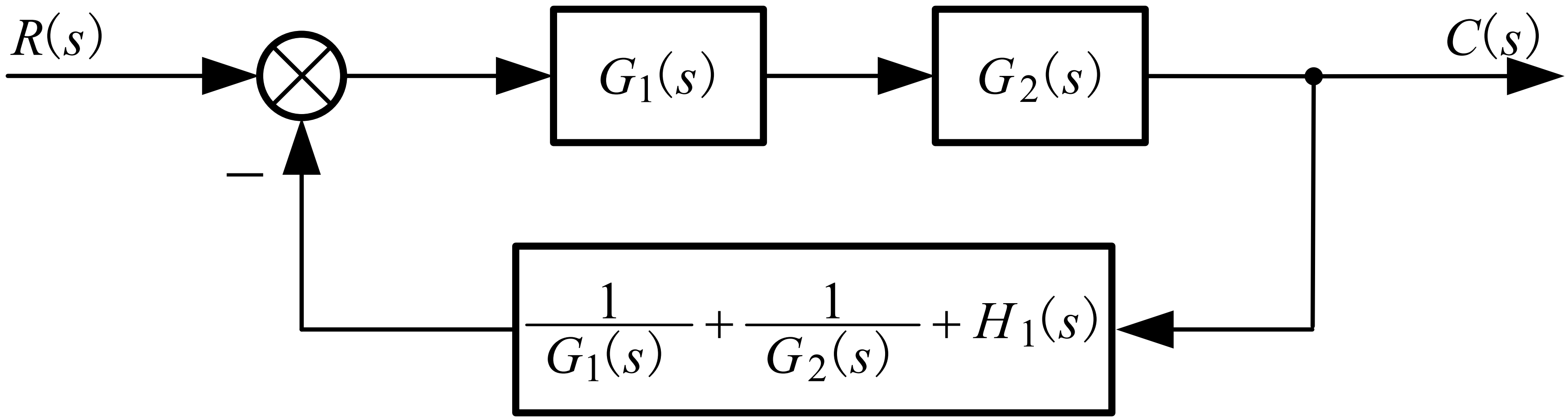
（3）相邻的引出点可以互换位置，也可以合并；

（4）相邻的综合点可以互换位置，也可以合并。

例：试简化系统结构图，并求出系统的传递函数。

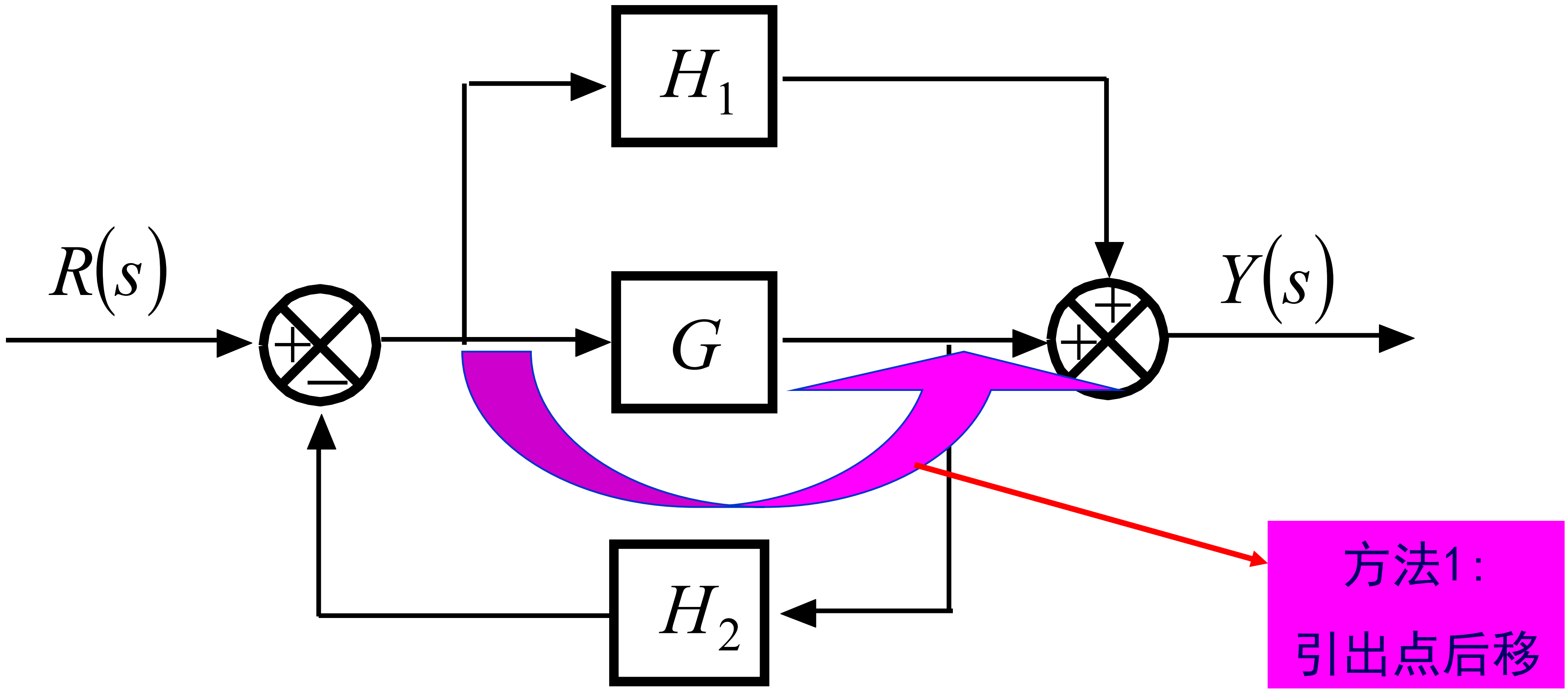



R(s)
C(s)
H1(s)
G1(s)
G2(s)
1/G1(s)
1/G2(s)
—
—
—

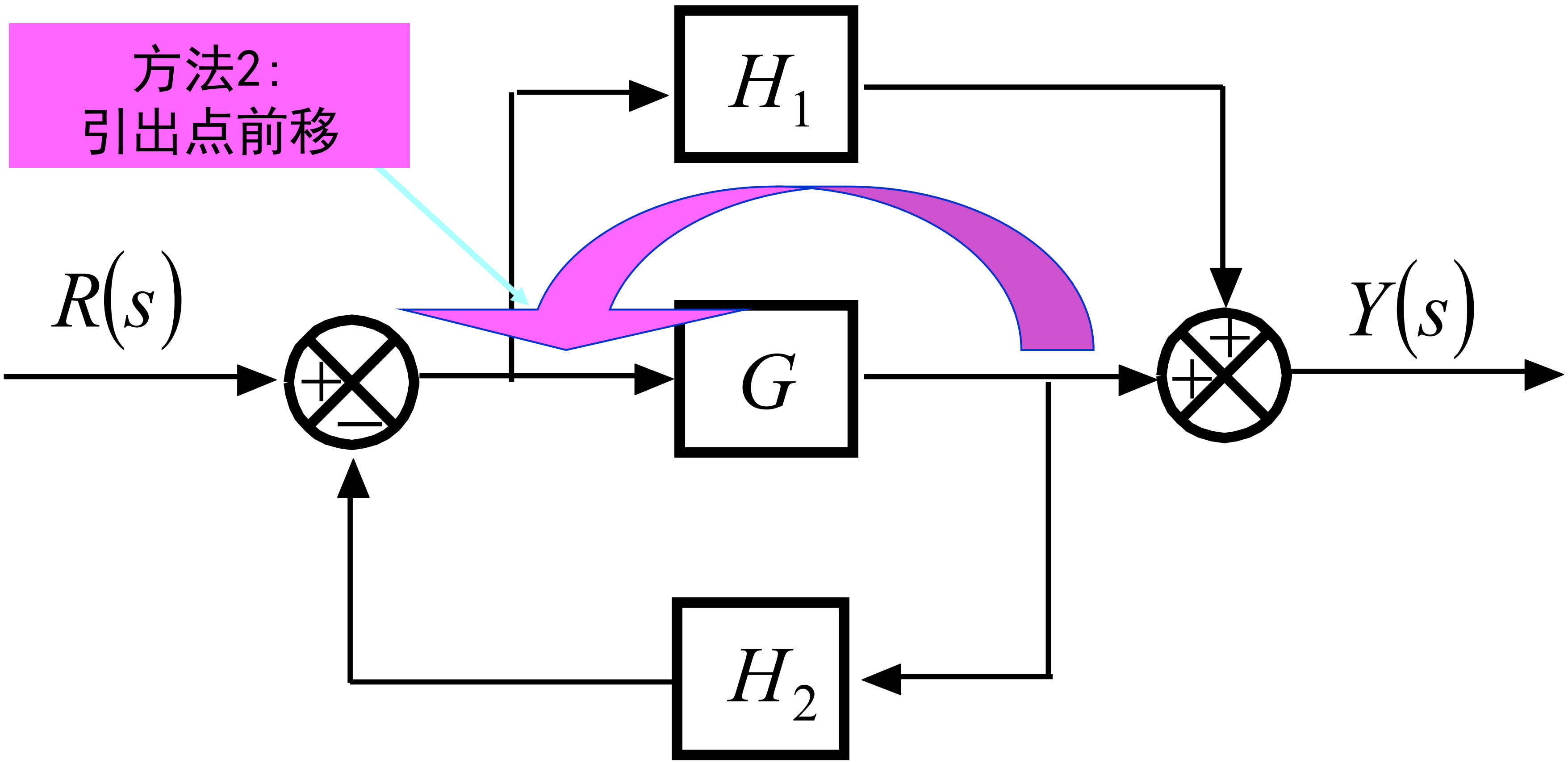


$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)+G_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

例：试简化系统结构图，并求系统传递函数。

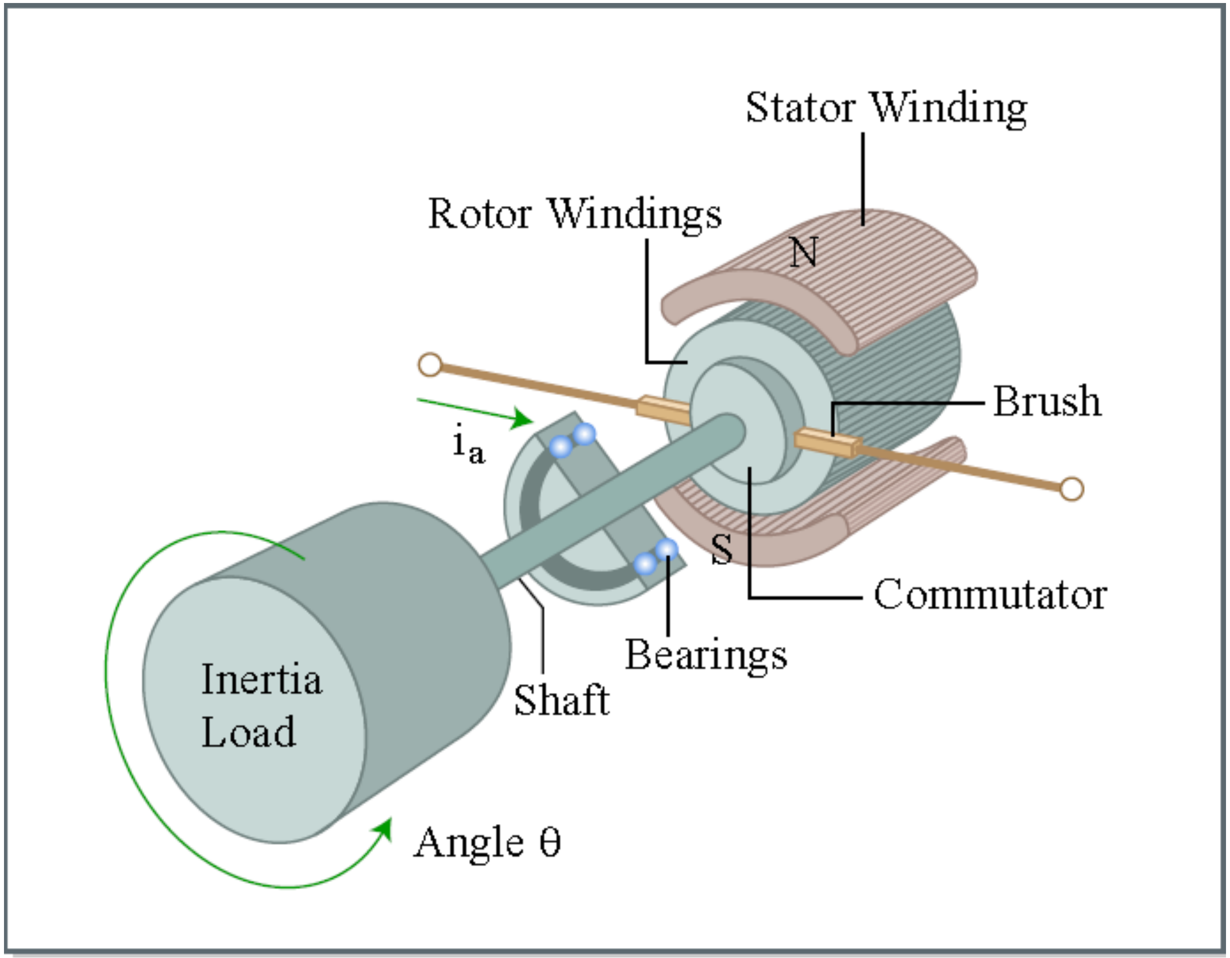


$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G+H_1}{1+GH_2}$$

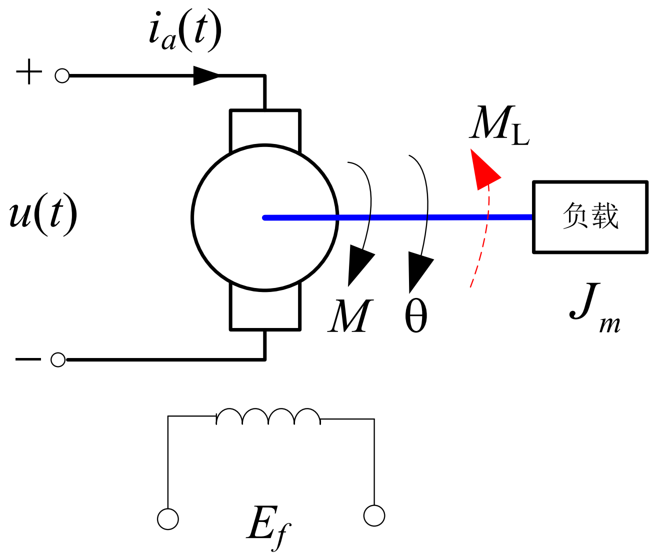


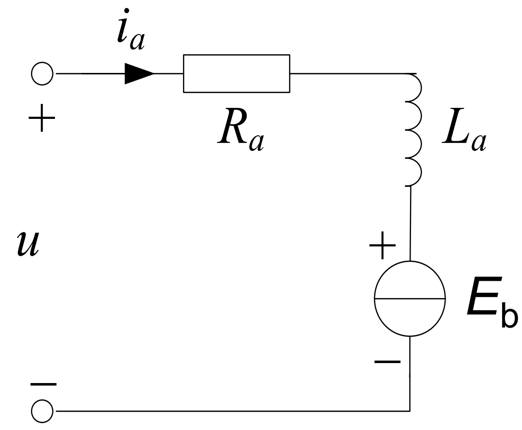
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G+H_1}{1+GH_2}$$

例:直流他励电机的数学模型（机电系统，P14）



例:直流他励电机的数学模型（机电系统，P14）





$$E_b = k_d \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$E_b(s) = k_d s\theta(s)$$

代入

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_b = u \quad \Rightarrow sL_a I_a(s) + R_a I_a(s) + E_b(s) = U(s)$$

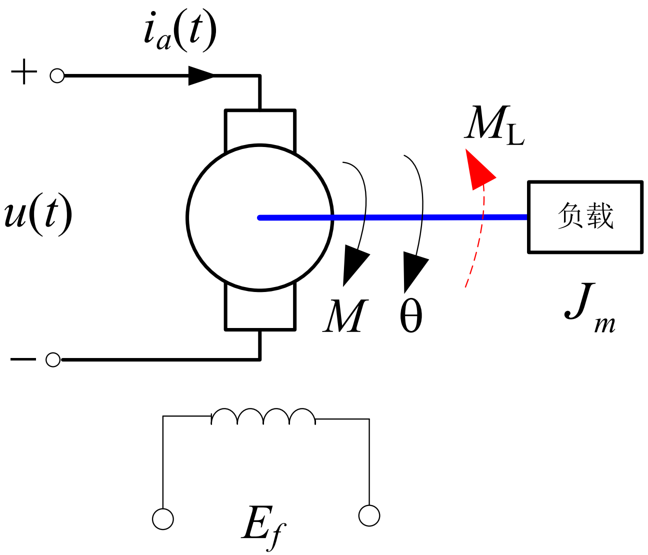
基尔霍夫电压定律

$$\Rightarrow I_a(s) = \frac{U(s) - sk_d\theta(s)}{sL_a + R_a}$$

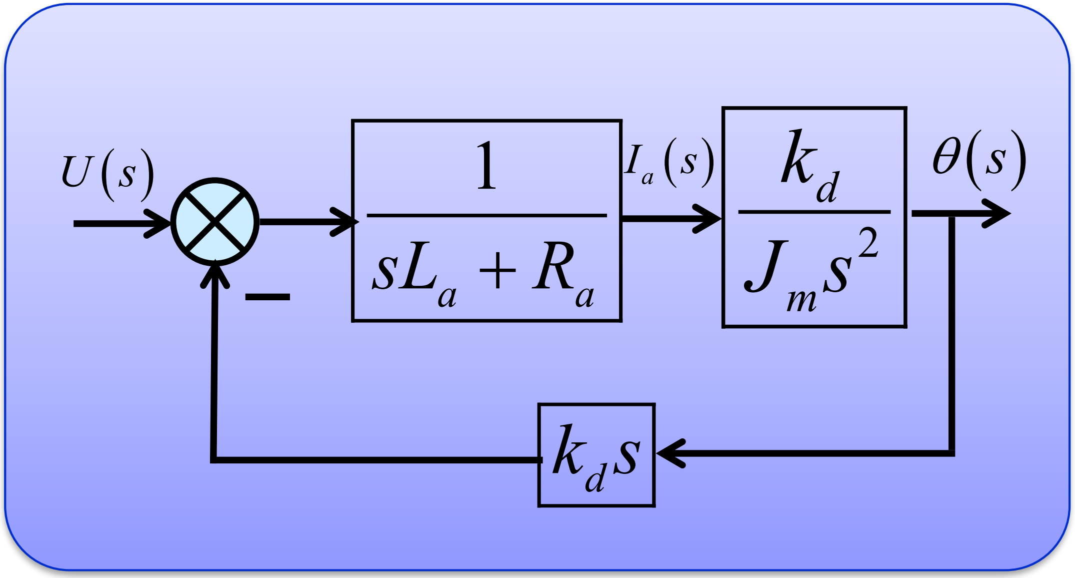
刚体定轴转动定律

$$J_m \frac{d^2\theta}{dt^2} = M = k_d i_a \quad \Rightarrow s^2 J_m \theta(s) = k_d I_a(s) \Rightarrow \theta(s) = \frac{k_d}{J_m s^2} I_a(s)$$

例:直流他励电机的数学模型（机电系统，P14）



$$\Rightarrow \begin{cases} I_a(s) = \dfrac{U(s) - sk_d\theta(s)}{sL_a + R_a} \\ \theta(s) = \dfrac{k_d}{J_m s^2} I_a(s) \end{cases}$$

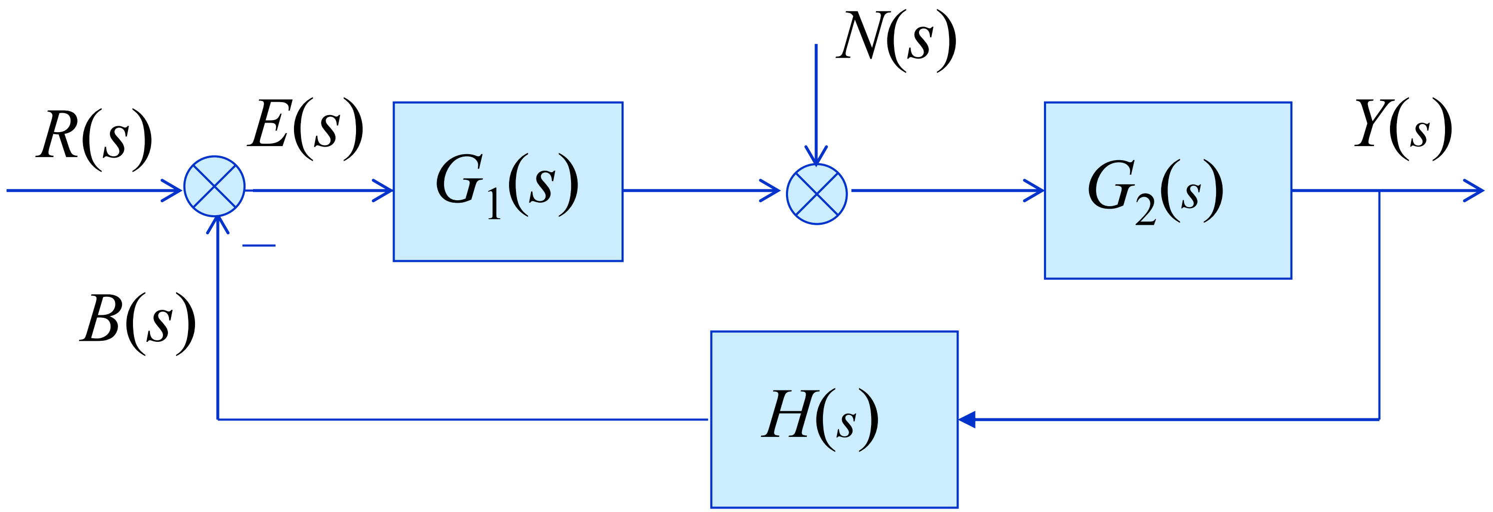


$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{1}{k_d}}{s\left(\dfrac{R_a J_m}{k_d^2}s + 1\right)}$$

T_m 机电时常数

- 作业：2.3，2.4

2.6 控制系统的传递函数(P34)



开环传递函数：当闭环打开时，主反馈量与参考输入的拉普拉斯象函数之比。

闭环传递函数：当闭环闭合时，以外部加到闭环上的某变量为输入，以闭环的某受控量为输出的传递函数。

开环传递函数 $G_o(s)$ 列写规则：

组成闭环的各串联框的传递函数相乘，反号；

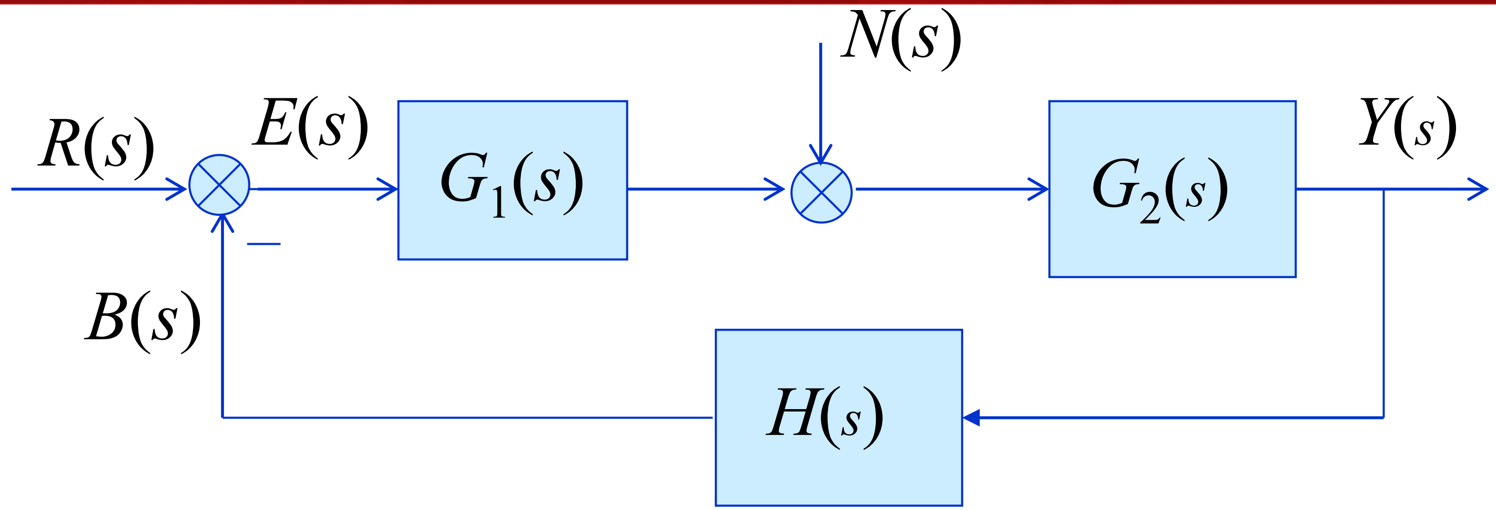
闭环传递函数 $\Phi(s)$ 列写规则：

1）若列写从A到B的闭环传递函数，在闭环中保留A→B通道，想象中断开 B→A通道，把A→B的传递函数作为分子；

2）把组成闭环的各串联框的传递函数相乘，反号加1，作为分母。

Note： 闭环传递函数的分母 = 开环传递函数 + 1 ；

闭环特征方程： $1 + G_0(s) = 0$ ；



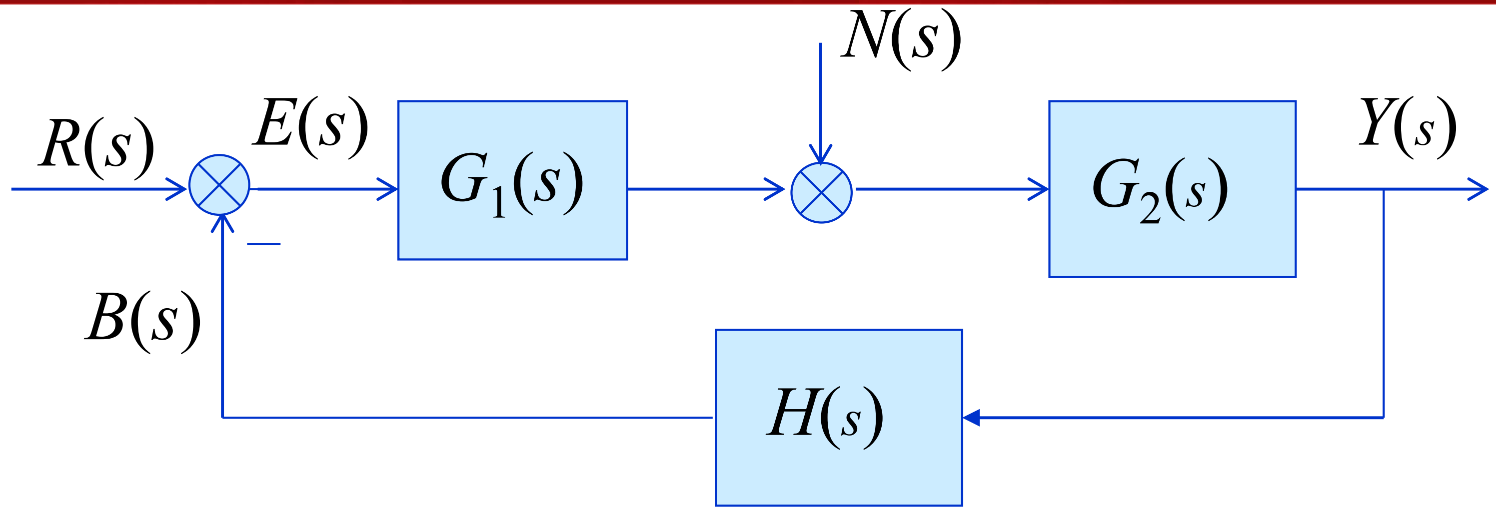
1. 系统的开环传递函数

按规则：组成闭环的各串联框的传递函数相乘，反号

$$G_o(s)=\frac{B(s)}{R(s)}=G_1(s)G_2(s)H(s)$$

2. 输入作用下系统的闭环传递函数 $\Phi(s)$

$$N(s)=0,\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

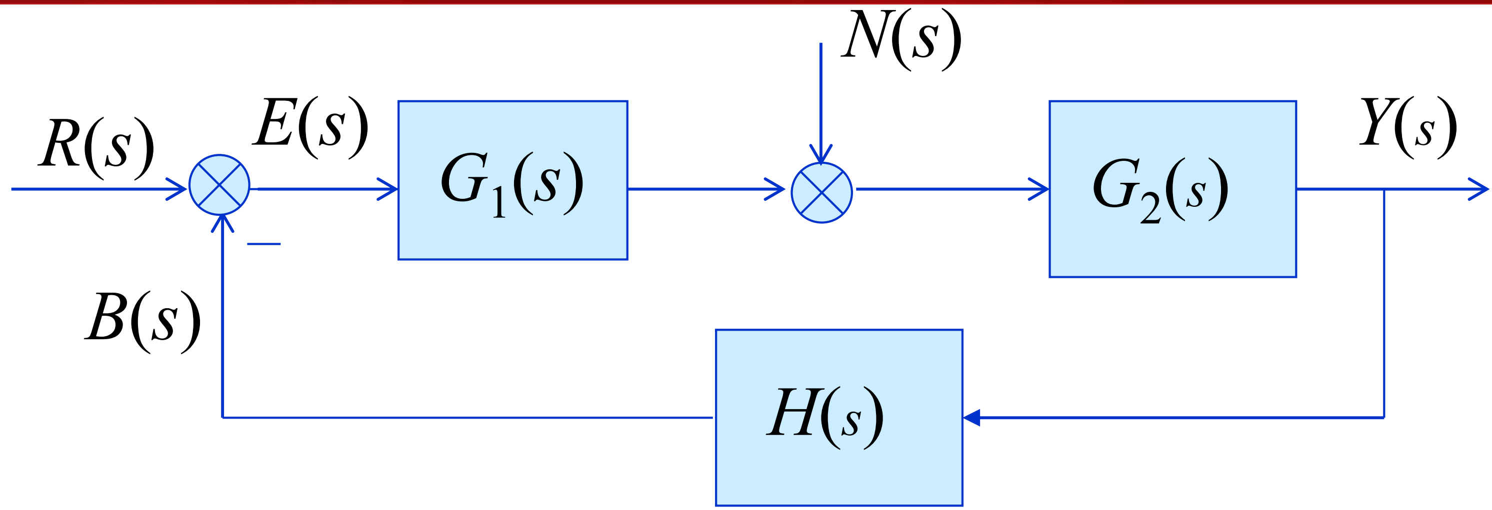


3. 扰动作用下系统的闭环传递函数 $\Phi_n(s)$

$$R(s)=0, \Phi_n(s)=\frac{Y(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

4. 系统的总输出

$$Y(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

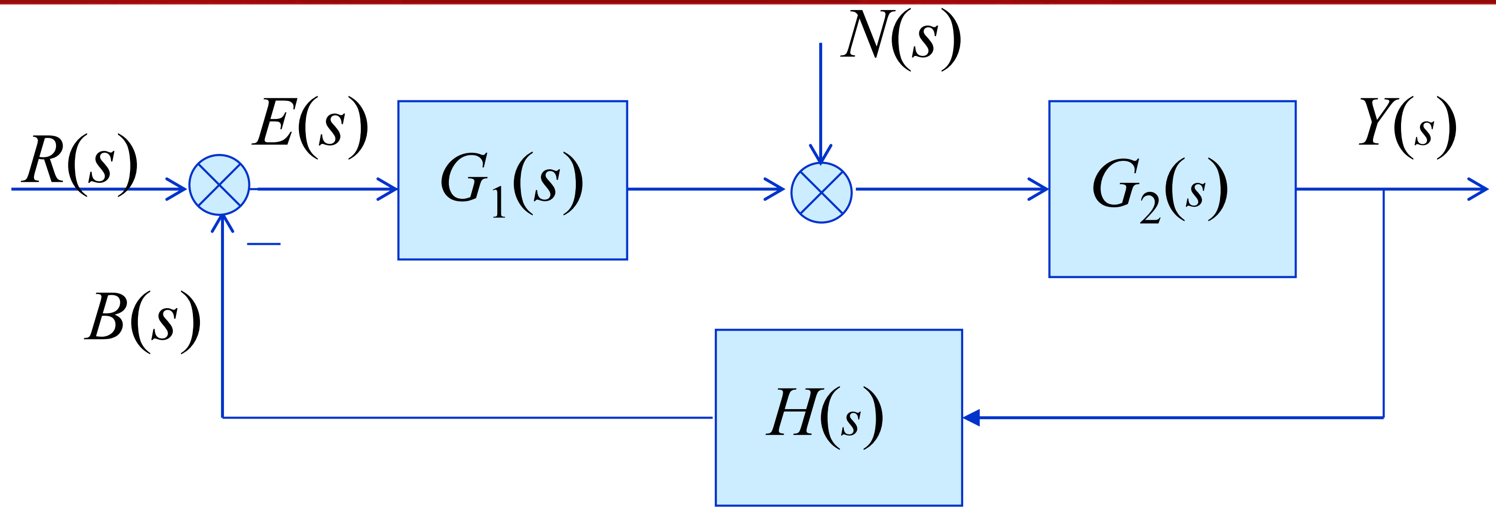


5. 误差传递函数

误差信号$E(s)=R(s)-B(s)$

输入作用下的误差传递函数 $\Phi_e(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

扰动作用下的误差传递函数 $\Phi_{en}(s)=\dfrac{E(s)}{N(s)}=\dfrac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$



6. 系统的总误差

$$E(s) = R(s)\Phi_e(s) + N(s)\Phi_{en}(s)$$

- **作业：2.5，2.6**

本章小结

- 建立控制系统微分方程的方法
- 牢固掌握系统传递函数的定义及求解方法
- 能熟练地进行动态结构图等效变换
- 控制系统中各种传递函数的定义及求解方法