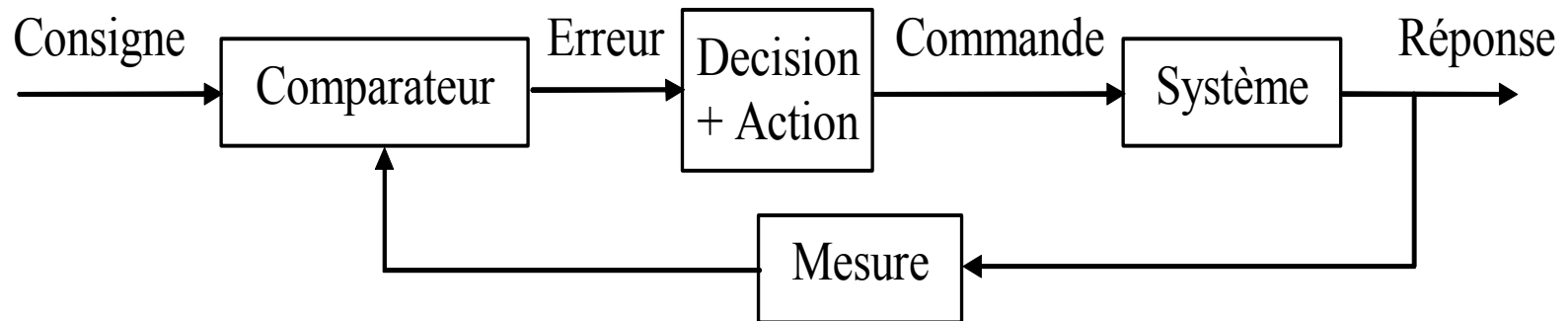


线性伺服系统

Systemes Asservis Linéaires

Automatique S5



Nadia Aït-Ahmed

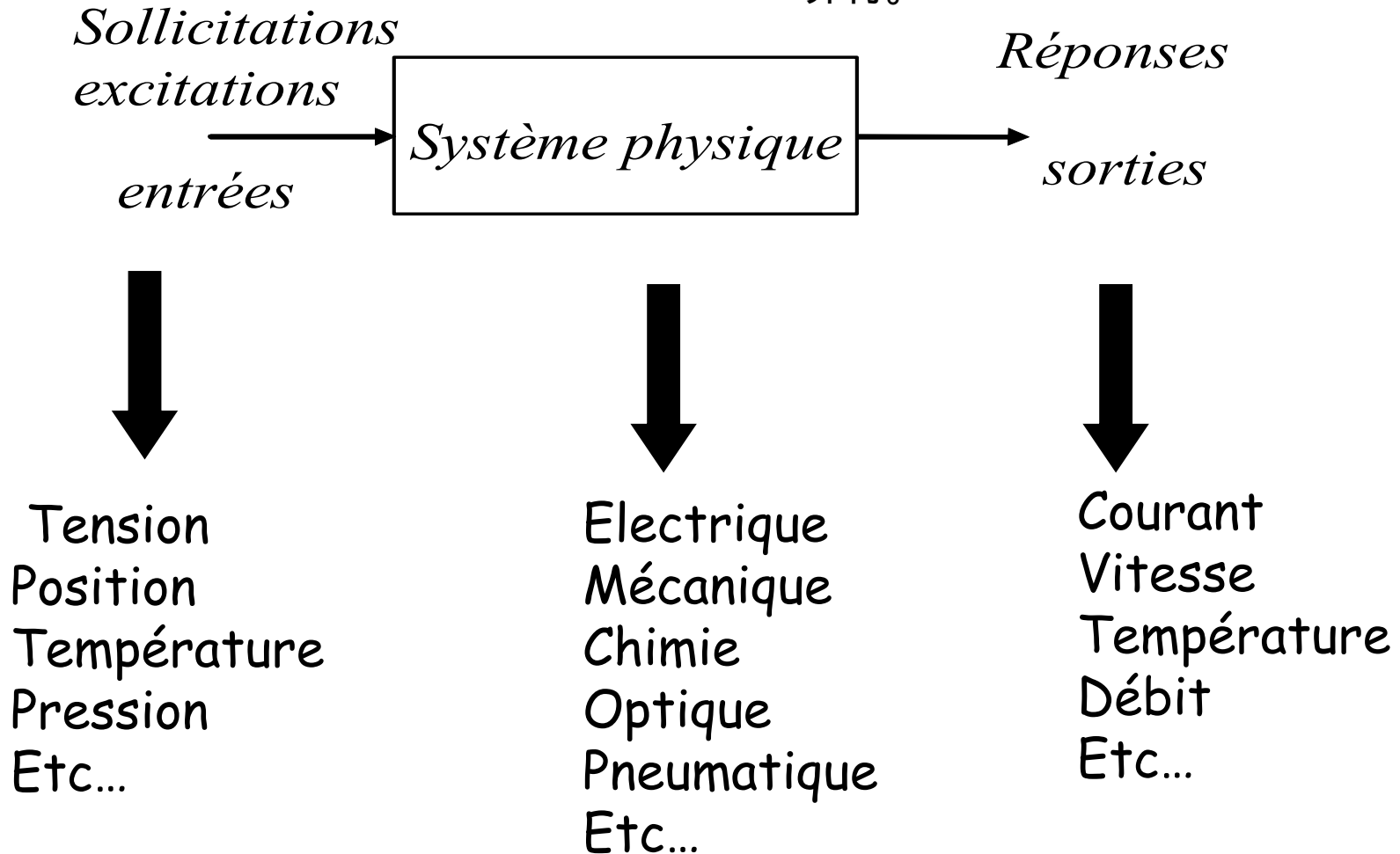
Sommaire

Introduction	3
CHAPITRE I: Modélisation des systèmes linéaires	13
CHAPITRE II: Systèmes de base	27
CHAPITRE III: Représentation graphique	50
CHAPITRE IV: Stabilité des systèmes linéaires continus	65
CHAPITRE V: Performances des systèmes asservis linéaires	84
CHAPITRE VI: Principe de la compensation	88
CHAPITRE VII: Méthodes de synthèse du PID	94
REFERENCES	103

Introduction:

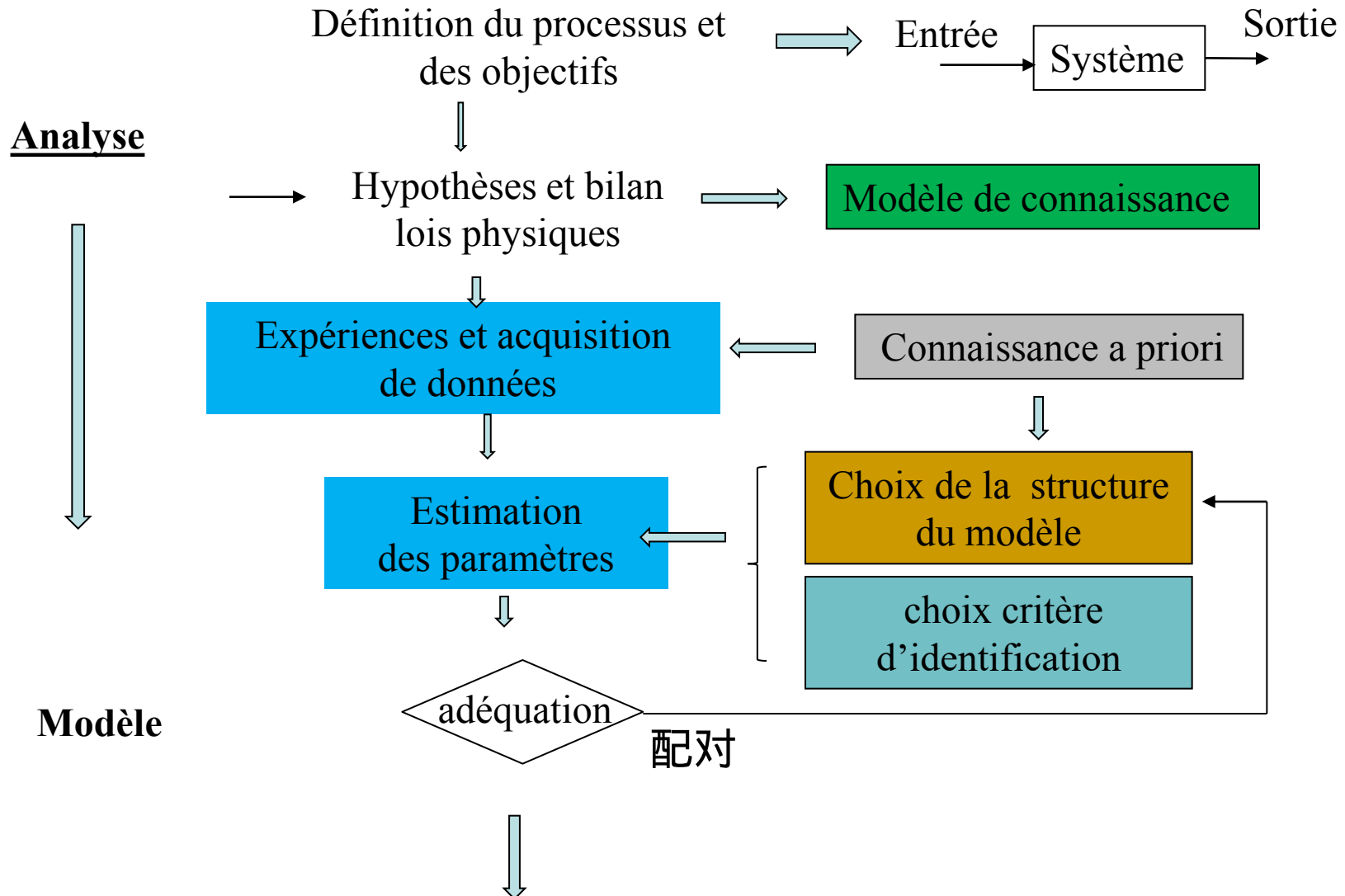
La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des **réponses**

(**effets**) à des **sollicitations** (**causes**). 大多数物理系统都可以描述为将反应（效果）与压力（原因）相匹配的运算符。

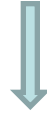


Analyse et synthèse des systèmes

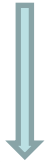
Cahier des charges: 规格



Modèle adéquat



Analyse temporelle



Equations
différentielles

Equation différentielle
matricielle
(représentation d'état)
矩阵微分方程
(状态表示)

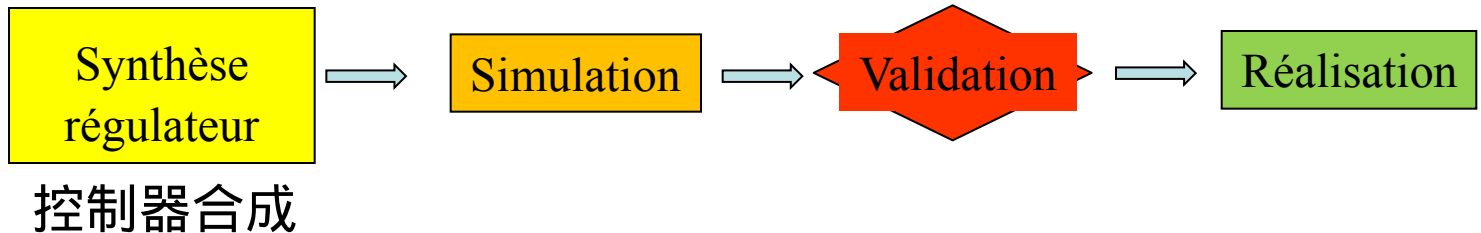
Analyse fréquentielle



Transformée de Laplace

Fonction de transfert

Synthèse

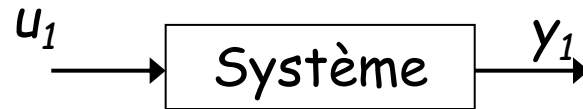


A. Définitions 如果一个系统受具有常数系数的线性微分方程支配，则称该系统为线性系统。

Un système est dit linéaire s'il est régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Définition mathématique de la linéarité :

Soit y_1 la réponse du système pour une entrée u_1 :



Soit y_2 la réponse du système pour une entrée u_2 :



Alors, le système est linéaire si et seulement si $y_1 + y_2$ est la réponse du système pour une entrée $u_1 + u_2$



αy_1 est la réponse du système pour une entrée αu_1 et ceci quel que soit u_1 , u_2 et α .

Dans le cas contraire le système est non linéaire.

* Un système asservi est linéaire s'il n'est composé que de systèmes linéaires (correcteur, système à commander, mesure, ...)
如果伺服控制系统仅由线性系统（校正器、受控系统、测量等）组成，则该系统为线性系统。

* Un système (asservi) est dit continu lorsque l'entrée, la sortie et toutes les variables intermédiaires sont des fonctions continues du temps au sens mathématique de la continuité.

当输入、输出和所有中间变量都是数学意义上的时间连续函数时，我们就说这个（伺服）系统是连续的。

B. Système en boucle ouverte et système en boucle fermée

* On appelle un **système de commande** tout système qui fournit une ou plusieurs grandeurs de sorties fonctions d'une ou plusieurs grandeurs d'entrées. On dit, alors, que l'entrée commande la sortie. L'entrée est appelée variable de commande (entrée ou commande) et la sortie variable commandée (sortie ou réponse).

* Quand un système ne possède qu'une seule entrée et une seule sortie on parle de **système monovariante** (système **SISO : Single Input Single Output**). Dans le cas contraire (plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties) on parle de **système multivariante** (système **MIMO : Multi Input Multi Output**).

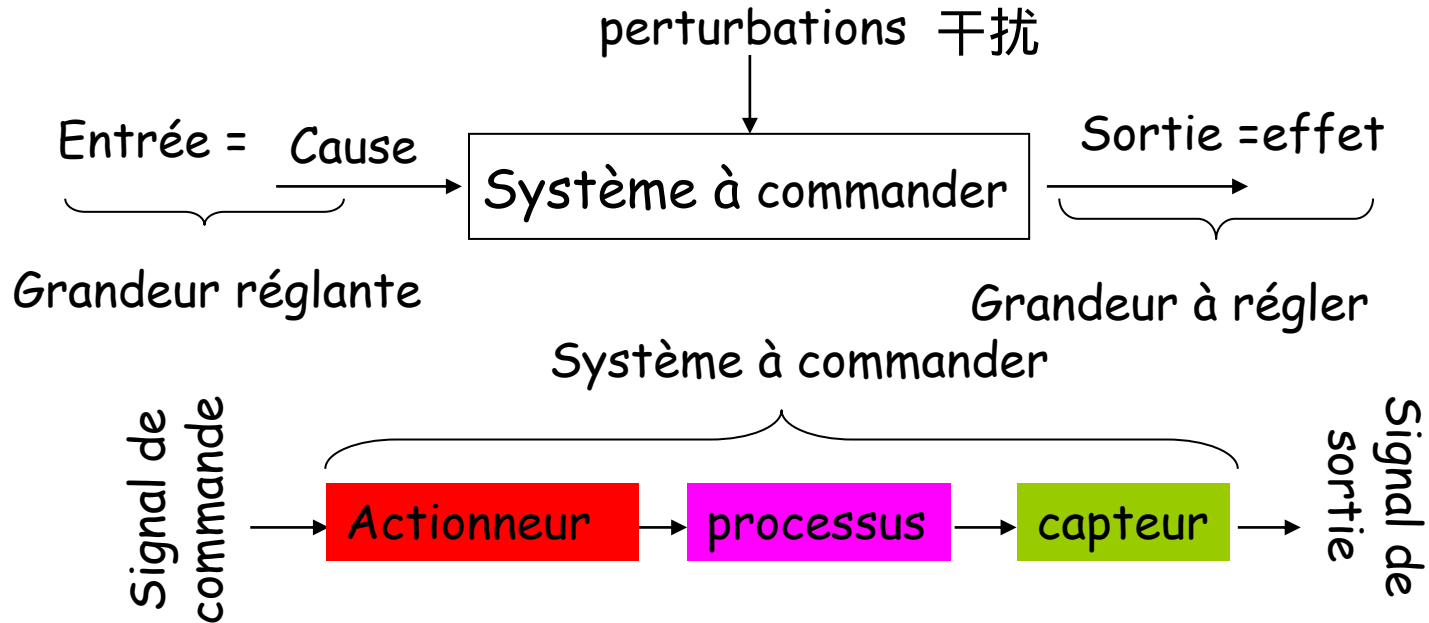
* On peut distinguer deux types de systèmes : les **systèmes bouclés** (en **boucle fermée**) et les **systèmes non bouclés** (en **boucle ouverte**).

Le système de commande est un système qui fournit une ou plusieurs grandeurs de sorties fonctions d'une ou plusieurs grandeurs d'entrées. On dit, alors, que l'entrée commande la sortie. L'entrée est appelée variable de commande (entrée ou commande) et la sortie variable commandée (sortie ou réponse).

Quand un système ne possède qu'une seule entrée et une seule sortie on parle de **système monovariante** (système **SISO : Single Input Single Output**). Dans le cas contraire (plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties) on parle de **système multivariante** (système **MIMO : Multi Input Multi Output**).

On peut distinguer deux types de systèmes : les **systèmes bouclés** (en **boucle fermée**) et les **systèmes non bouclés** (en **boucle ouverte**).

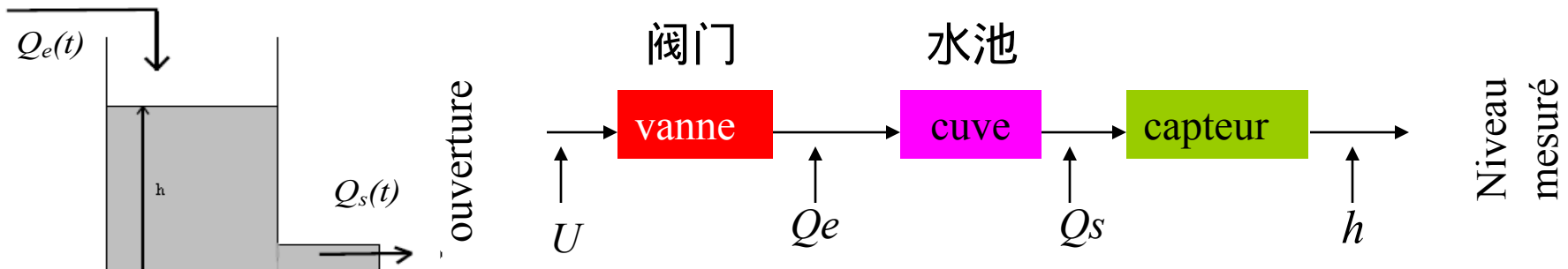
C- Structure d'un système en boucle ouverte



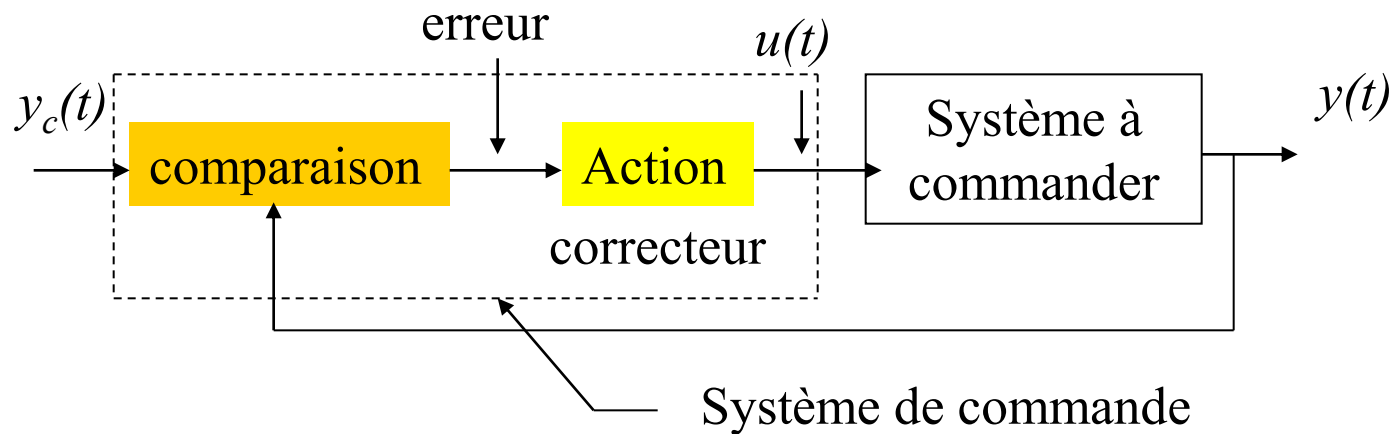
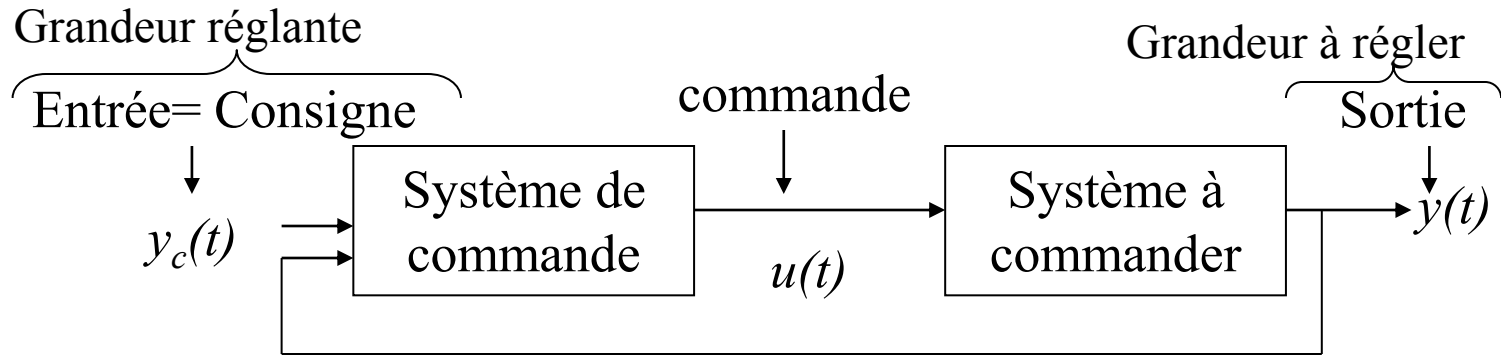
Cas monovariante: une entrée, une sortie (SISO)

单变量情况：一个输入，一个输出（SISO）

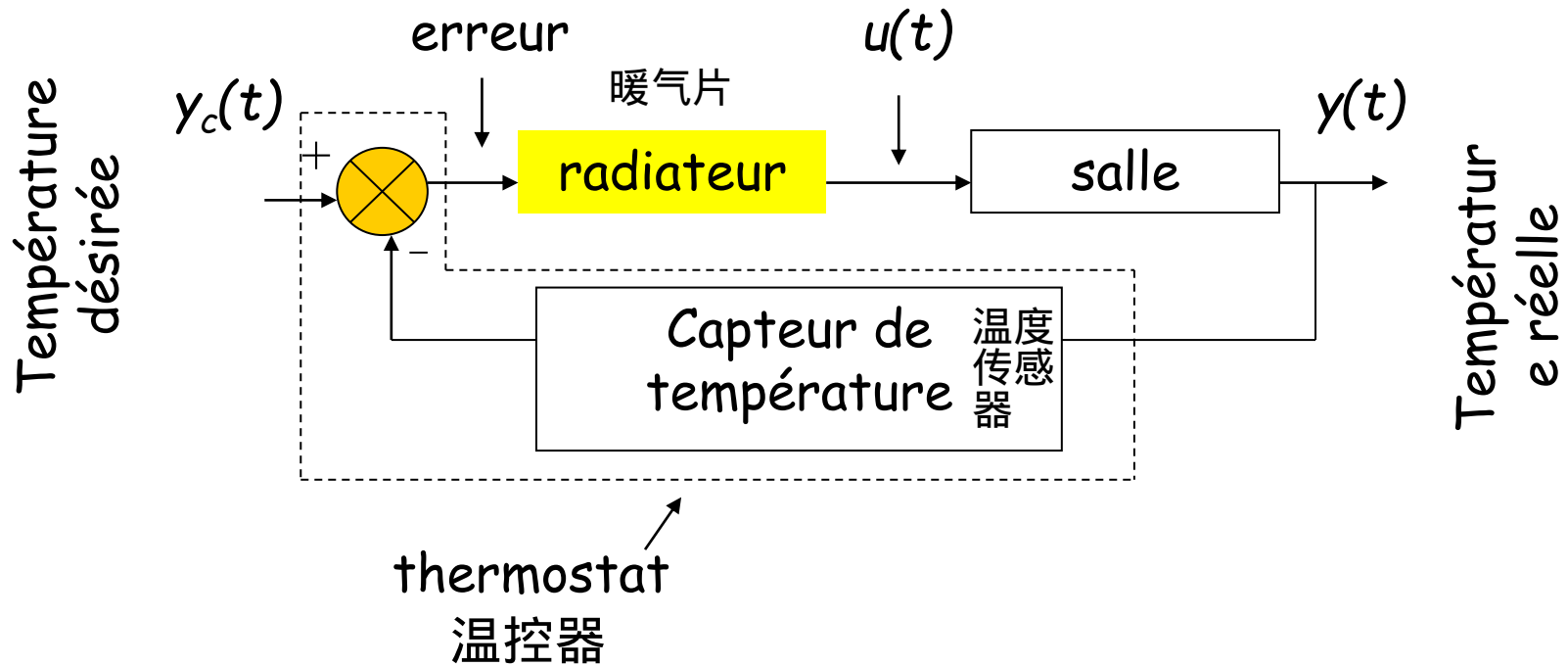
Réglage niveau d'eau



D. Structure générale d'un système en boucle fermée



Exemple: régulation de température



Modélisation des systèmes:

Équations différentielles, Fonction de transfert

Etude des systèmes base:

- Réponse temporelle aux entrées types
- Réponse fréquentielle

系统建模：
微分方程、传递函数
基本系统研究：
- 对典型输入的时间响应
- 频率响应

Performances:

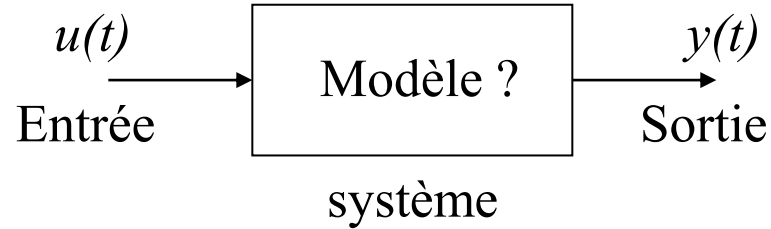
稳定性 - Stabilité: Critères algébriques et graphiques
- Précision 精度.

稳定性 *精度* *代数* *图形*

Synthèse de régulateurs des systèmes linéaires:

合成

Chapitre I: Modélisation des systèmes linéaires



I.1. Représentation par équation différentielle 微分方程

L'équation différentielle qui relie l'entrée à la sortie, d'un système linéaire monovariante, est de la forme :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

L'équation différentielle est d'ordre n .

Il faut que $n \geq m$

L'ordre du système est : n

Les coefficients a_i et b_i sont constants

Le système peut-être représenté par le schéma suivant :

Conditions Initiales (C.I)

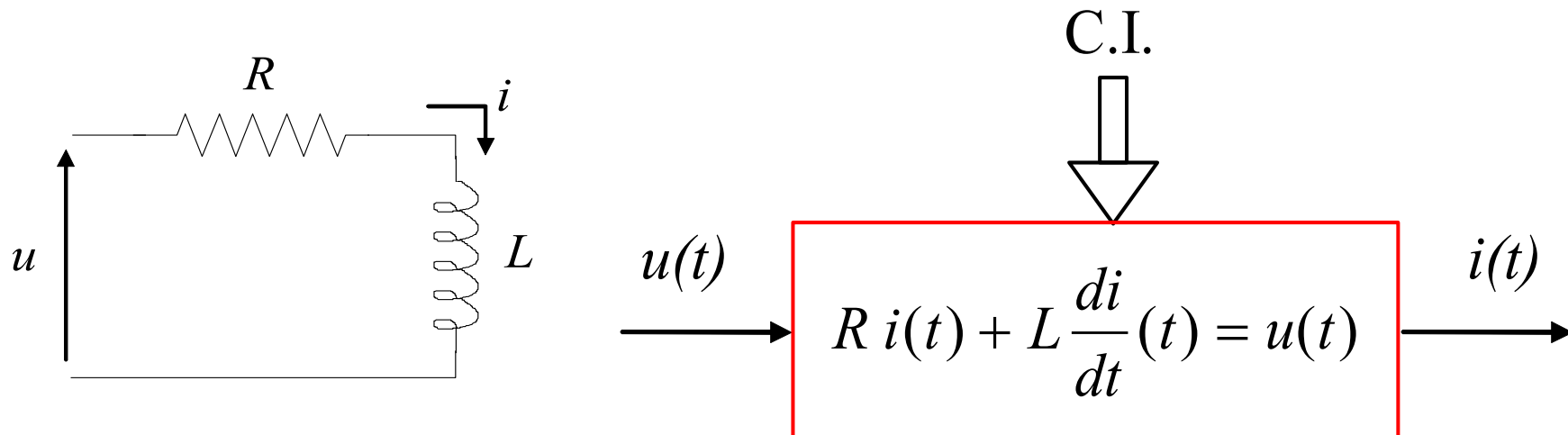


General differential equation for a system:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Input: $u(t)$ → Output: $y(t)$

Exemple : Considérons un circuit R L, où le signal d'entrée est la tension u et la sortie est le courant i qui circule dans le circuit :

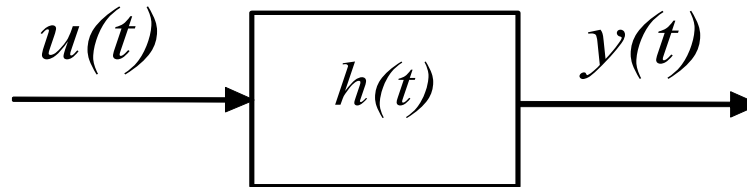


Le circuit (R,L) est d'ordre 1

I.2. Représentation par fonction de transfert

I.2.1 Définition :

Soient $u(t)$, $h(t)$ et $y(t)$ des fonctions nulles pour $t < 0$, qui sont respectivement l'entrée, la réponse impulsionnelle et la sortie d'un système causal.



La relation temporelle qui relie $y(t)$ à $u(t)$ est le produit de convolution: $y(t) = h * u(t)$.

On sait que la **Transformée de Laplace** convertit le produit de convolution du domaine temporel en un produit de fonctions complexes dans le domaine fréquentiel.

时域卷积

$$y(t) = h * u(t) \xrightarrow[\text{T.L.}]{\text{T.F.}} Y(p) = H(p) U(p), \text{ avec}$$

$$H(p) = \mathcal{L}(h(t))$$

T.L.

$H(p)$ est appelée **transmittance**, ou **fonction de transfert** du système.

Si le système est représenté par une équation différentielle du type:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

On applique la **T**ransformée de **L**aplace:

- En considérant que les C.I = 0
- En utilisant: la propriété de la linéarité et la propriété de dérivation

On obtient la fonction de transfert du système :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Remarques : $m=n$: 这种系统被称为 "恒定增益系统" 或者 "单位增益系统"。这是因为当频率趋于无穷大时, 系统的增益趋于一个常数, 而这个常数是分子和分母最高阶项的系数之比。

- L'ordre du système est $n = \text{degrés du polynôme } D(p)$

- si $m=n$ on parle de **système propre**

- si $m < n$ on parle de **système strictement propre**

$m < n$: 这种系统被称为 "适当的系统" 或 "严格适当系统"。这是指系统的相位和增益在频率趋于无穷大时都趋于零。尤其对 $m < n-1$, 系统称为严格适当。严格适当系统有利于系统的因果性和实用实现, 因为其阶数更小, 意味着系统的输出不会在输入之前出现响应。

- Les racines du polynôme $D(p)=0$ sont les **pôles du système** 极点

- Les racines du polynôme $N(p)=0$ sont les **zéros du système** 零点

- 系统的时间响应取决于输入的性质

- 频率响应取决于系统的阶次

- La réponse temporelle du système dépend de la nature d'entrée 时域响应 \rightarrow 自然系统

- La réponse fréquentielle dépend de l'ordre du système 频域响应 \rightarrow 系统阶数

- Si les conditions initiales sont non nulles alors:

- 如果初始条件不为零, 那么

$Y(p) = \underbrace{\text{réponse forcée liée à l'entrée}} + \underbrace{\text{réponse libre liée aux CI}}$

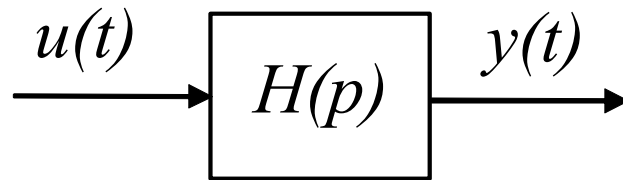
\uparrow
 $H(p) U(p)$
与输入相联系的强迫反应
 $C.I = 0$

\uparrow
Entrée nulle
($u(t)=0$)
初始条件

与初始条件相关联的自由响应

Convention d'écriture :

Dans une représentation par schéma bloc des signaux et des systèmes, on préfère souvent la notation temporelle pour les signaux (soit $u(t)$, $y(t)$), mais la notation transfert pour les systèmes (soit $H(p)$) : 在信号和系统的框图表示法中，我们通常喜欢用时间符号表示信号（即 $u(t)$ 、 $y(t)$ ），而用转移符号表示系统（即 $H(p)$ ）。

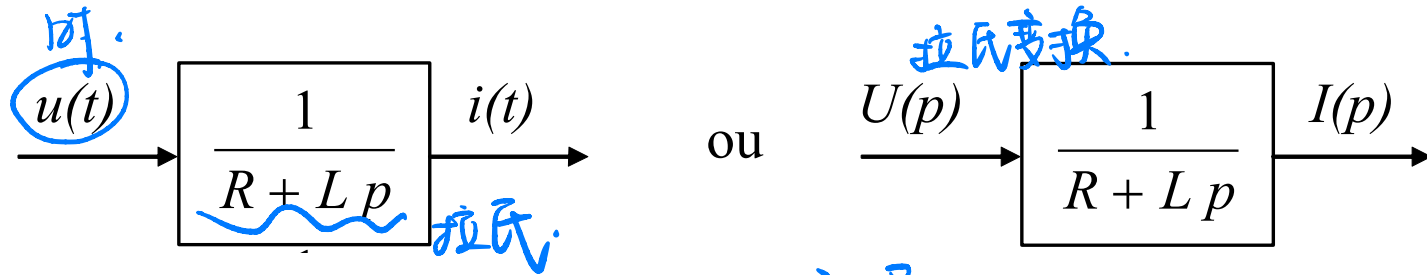


Exemple : *Circuit (R,L)* 将拉普拉斯变换应用于之前得到的微分方程，可以得到如下结果：
En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle obtenue précédemment, on arrive au résultat suivant :

$$R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) = U(p) \quad \Rightarrow \quad H(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{R + Lp}$$

Si les Conditions Initiales = 0, (soit C.I = 0)

Le système peut être représenté par le schéma bloc suivant :



I.2.2 Interprétation physique de la fonction de transfert :

* Si on soumet le système à une entrée type impulsion :
 $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(p) = 1$, sa réponse sera alors : $Y(p) = H(p)$
 La fonction de transfert d'un système est, alors, la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

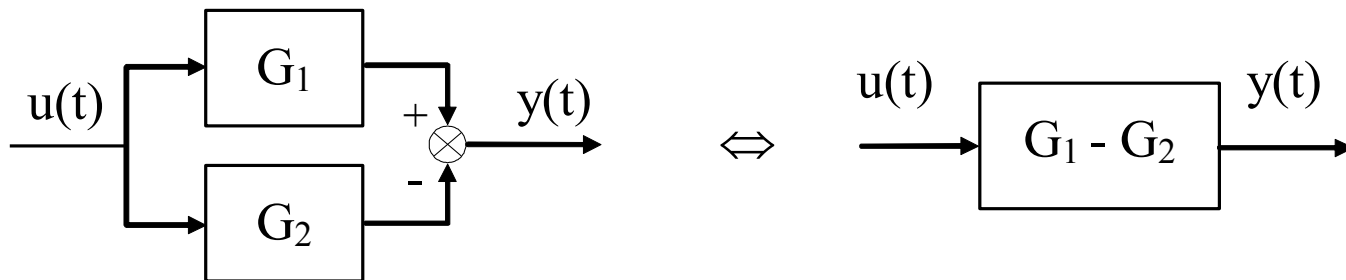
* Si on soumet le système à une entrée type échelon unitaire :
 $u(t) = \Gamma(t) \Rightarrow U(p) = 1/p$, sa réponse sera alors : $Y(p) = H(p)/p \Rightarrow H(p) = p Y(p)$

La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la dérivée de sa réponse indicielle.

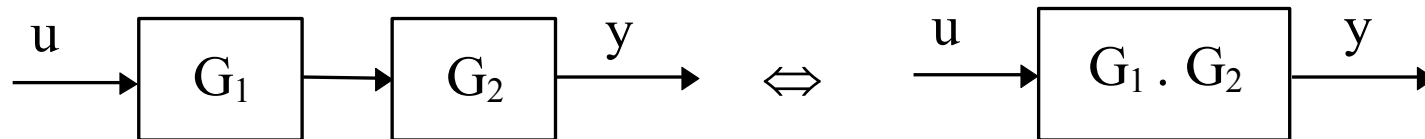
I.3. Algèbre des diagrammes:

Les propriétés de linéarité des transferts se traduisent par les transformations de diagramme suivantes :

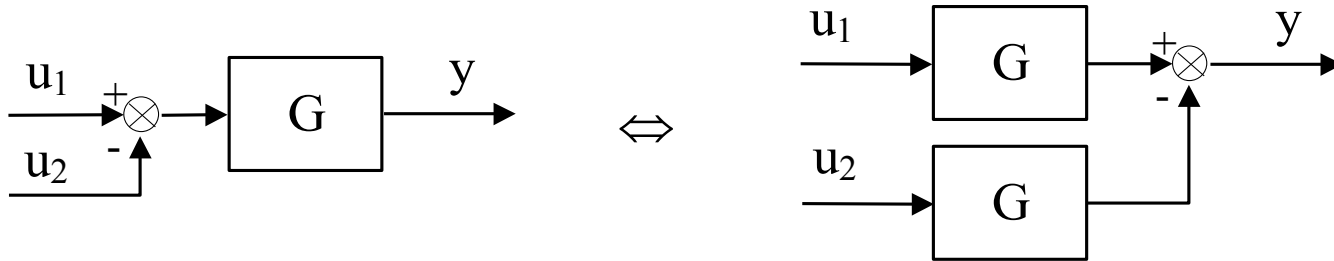
* Transmittance en parallèle :



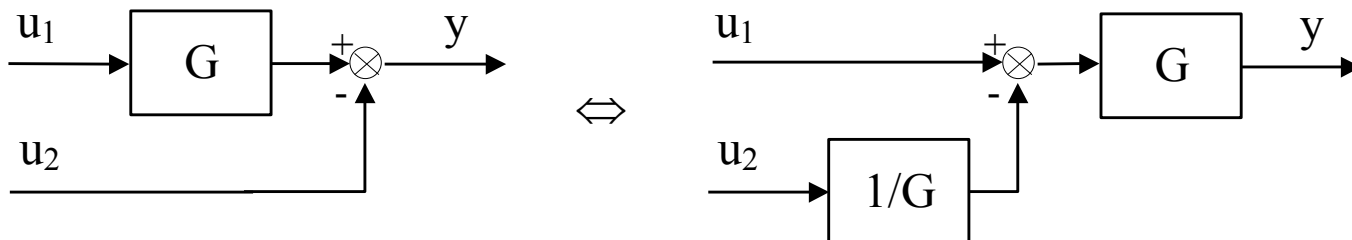
* Transmittance en série (cascade) :



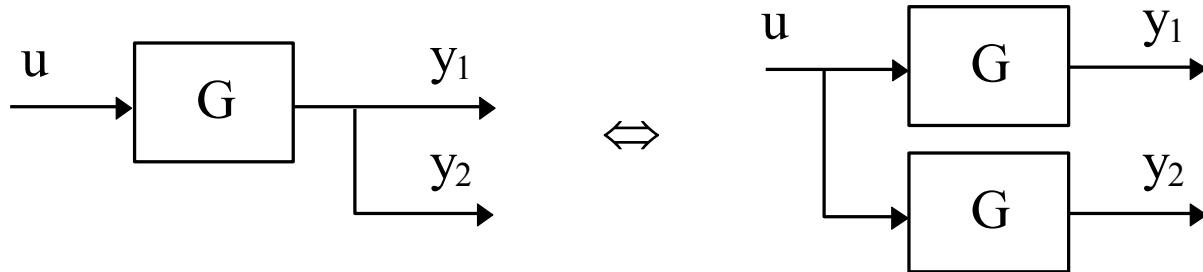
* Déplacement d'un bloc en amont d'un comparateur (ou sommateur) :



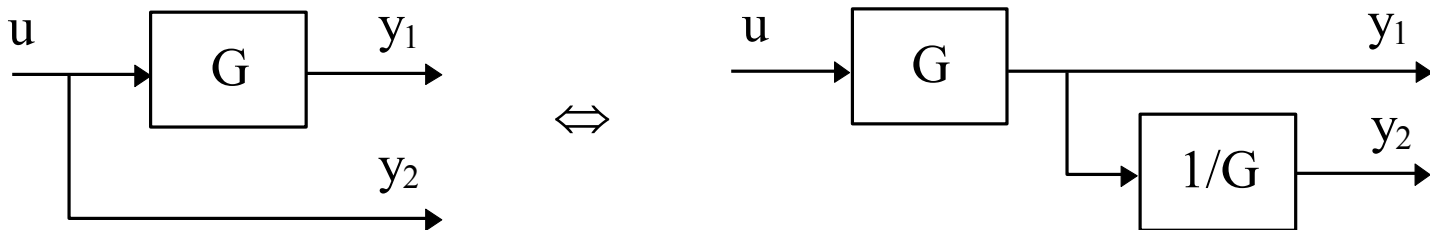
* Déplacement d'un bloc en aval d'un comparateur (ou sommateur)



* Déplacement d'un bloc en aval d'un point de prélèvement :

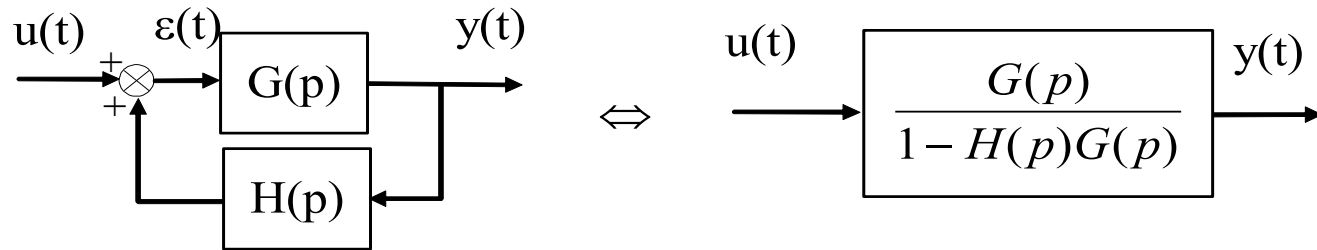


* Déplacement d'un bloc en amont d'un point de prélèvement :



Fonction de transfert d'un système bouclé, règle de Mason :

La forme canonique d'un système bouclé : 循环系统的典型形式:



$$\left. \begin{array}{l} Y(p) = G(p)\varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) = U(p) + H(p)Y(p) \end{array} \right\} \Rightarrow Y(p) = G(p)(U(p) + H(p)Y(p))$$

$$\Rightarrow Y(p)(1 - H(p)G(p)) = G(p)U(p)$$

La fonction de transfert du système bouclé est donc :

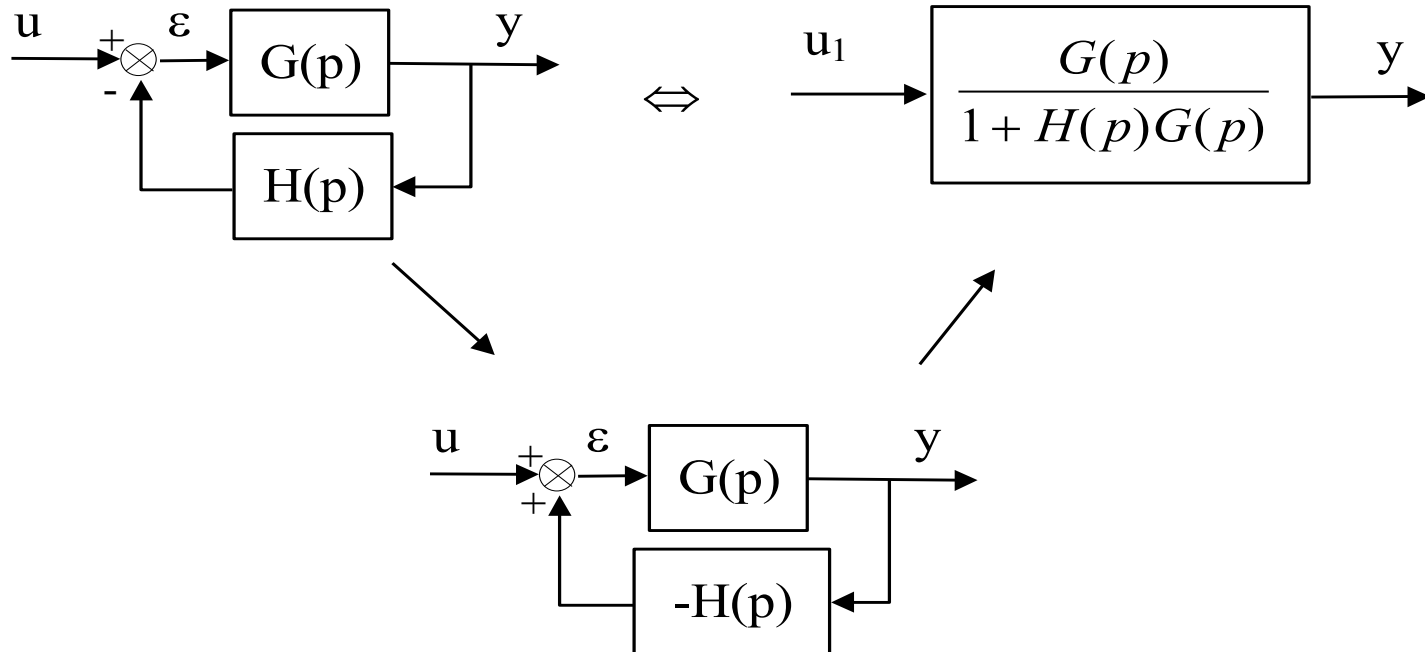
$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G(p)}{1 - H(p)G(p)}$$

La règle de Mason s'énonce comme suit :

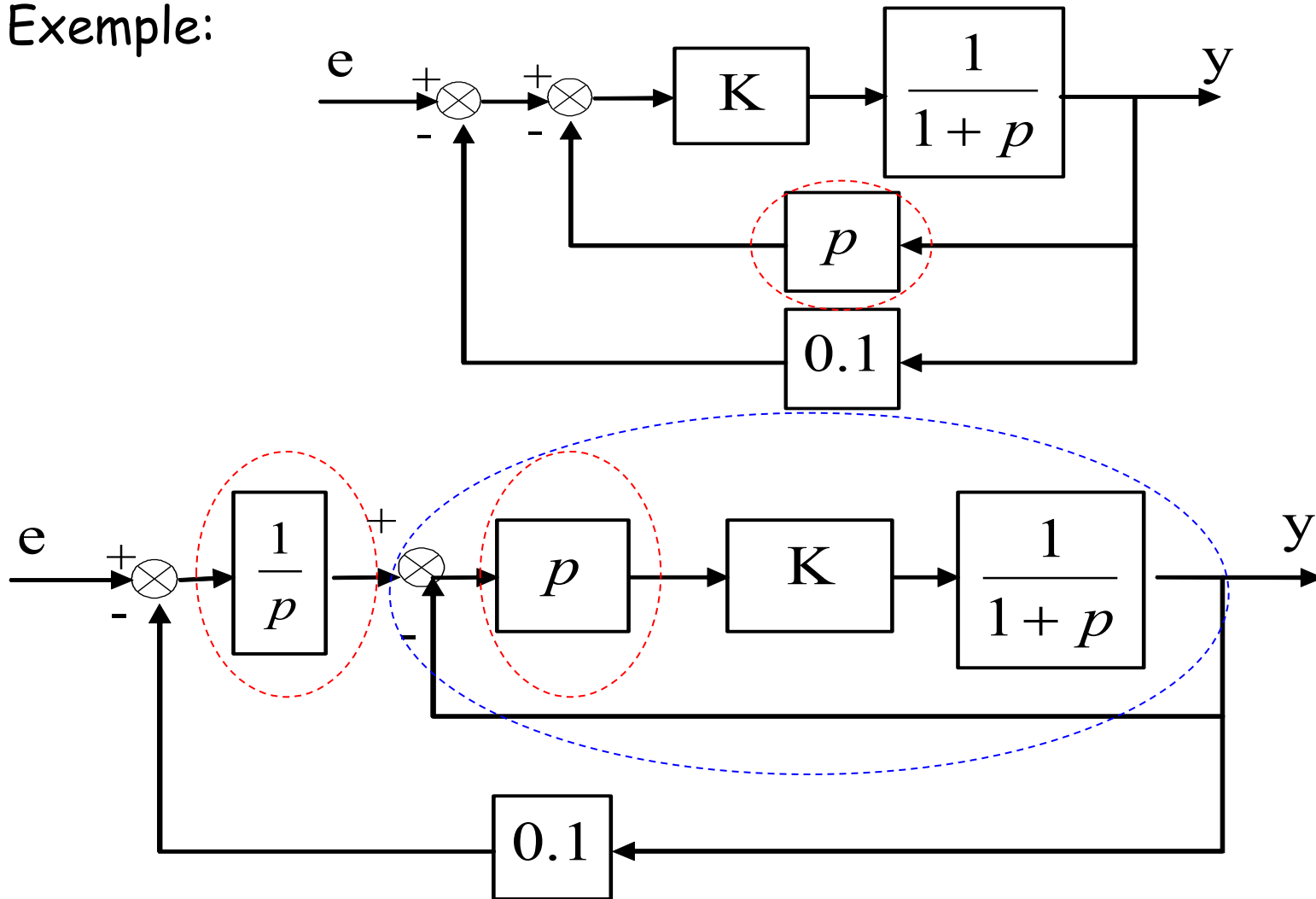
La transmittance entre une variable d'entrée u et une variable de sortie y est égale au produit de toutes les transmittances directes, divisé par les différences de retour (i.e. $1 - \ll$ le produit des transmittances directes et des transmittances de retour \gg).

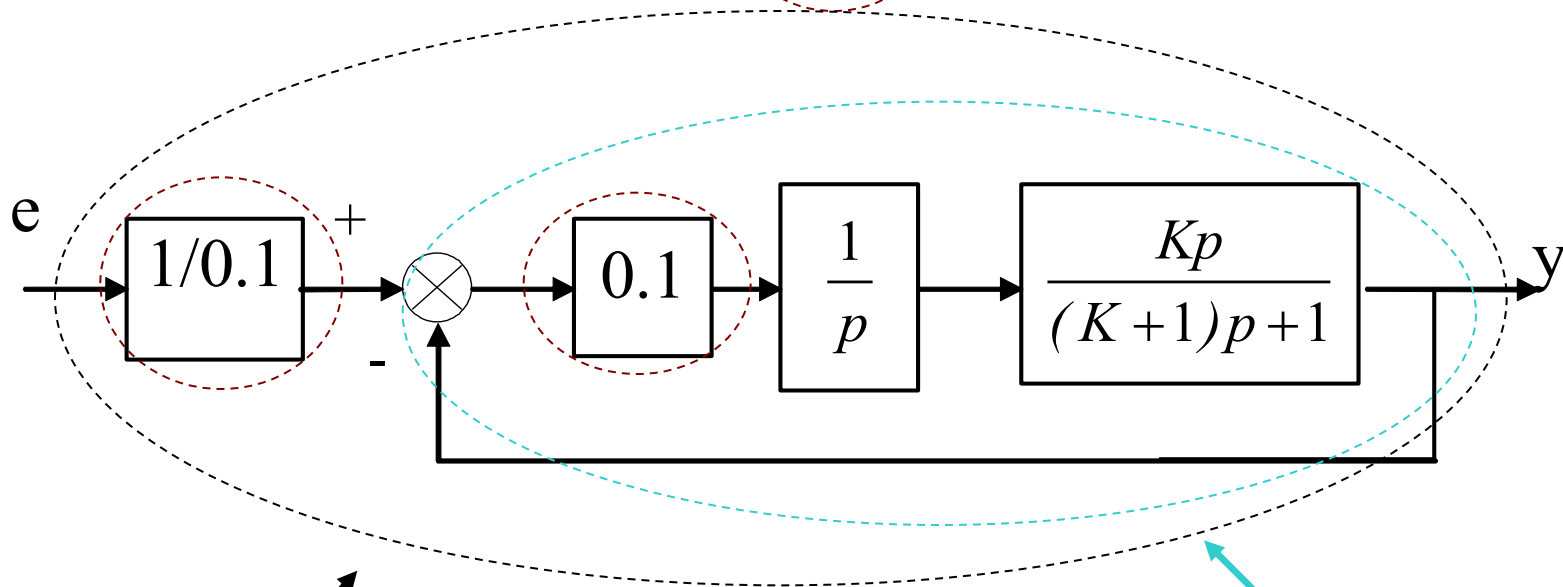
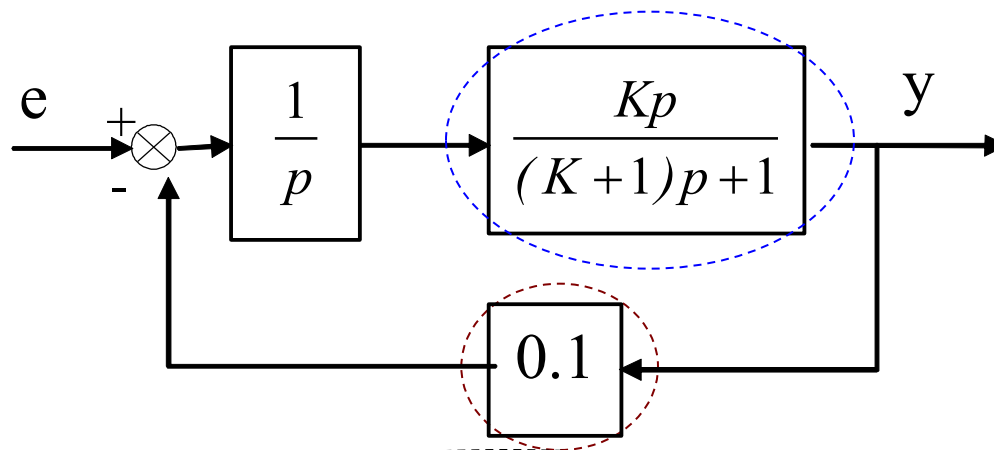
输入变量 u 和输出变量 y 之间的传递函数等于所有直接传递函数的乘积除以返回差（即 $1 -$ “直接传递函数和反馈传递函数的乘积”）。

Cas d'une boucle de contre réaction :



Exemple:





FTBF: $\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K}{(K+1)p+1+0.1K}$

$\frac{0.1K}{(K+1)p+1+0.1K}$

Chapitre II :

Systèmes de Base

II.1. Systèmes du premier ordre

II.1.1 Définition et exemple

Un système du premier ordre est modélisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre de la forme : 一阶系统是由一阶线性微分方程模拟的，该方程具有恒定系数，其形式为：

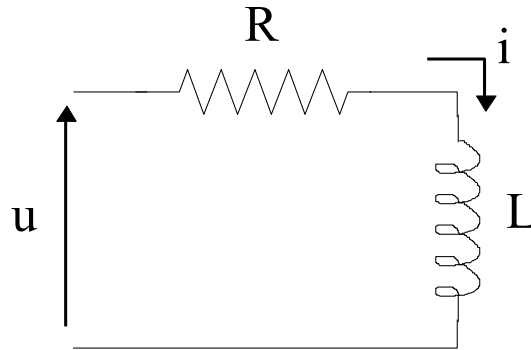
$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K.u$$

constante de temps

gain statique

Exemple :

On s'intéresse au courant $i(t)$ qui traverse une inductance :



L'équation différentielle qui caractérise ce système est :

$$R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) = u(t) \Rightarrow \left(\frac{L}{R} \frac{di}{dt}(t) + i(t) \right) = \left(\frac{1}{R} u(t) \right)$$

La constante de temps

Le gain statique

II.1.2 Fonction de transfert associée à un système du premier ordre:

La transformée de Laplace de l'équation différentielle précédente est :

$$\tau(pY(p) - y(0)) + Y(p) = K.U(p)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} U(p) + \frac{\tau}{1 + \tau p} y(0)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} U(p) \quad (\underline{\text{C.I}} = 0)$$

Fonction de Transfert: $G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$

II.1.3 Réponses d'un système du premier ordre aux entrées types: 一阶系统对标准输入的响应

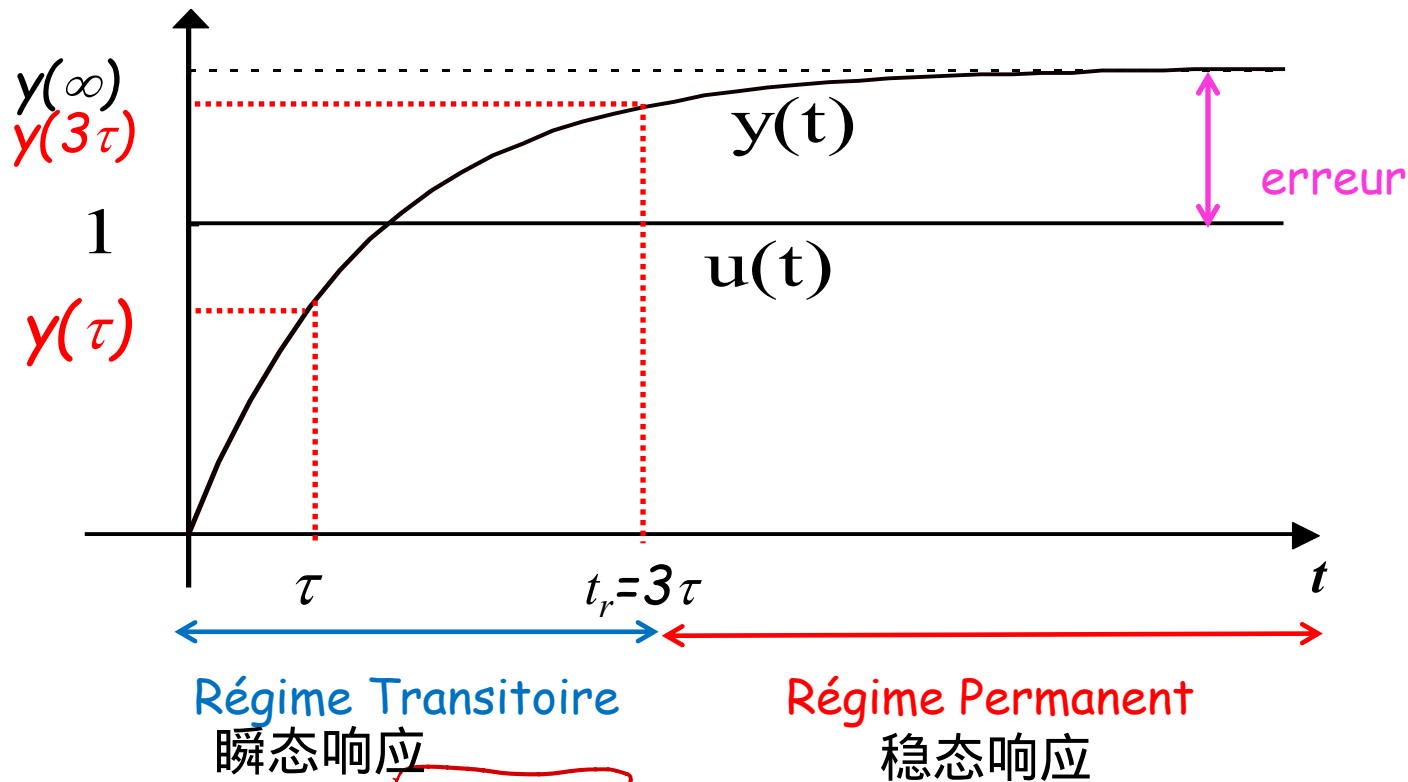
a- Réponse indicielle (réponse à un échelon unitaire) :

$$\text{un échelon unitaire} \Rightarrow u(t) = \Gamma(t) \Rightarrow U(p) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)} \frac{1}{p}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



gain statique $\Rightarrow K = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$, t_r = temps de réponse à 95%

Pour $t = \tau$, on a $y(\tau) = 0.63 y(\infty)$, $t = 3\tau$, on a $y(3\tau) = 0.95 y(\infty)$

心里有数！

Calcul de l'erreur Erreur:

$$\varepsilon(t) = u(t) - y(t) \quad \text{ou} \quad \varepsilon(p) = U(p) - Y(p)$$

Or $Y(p) = G(p) U(p)$ soit:

$$\varepsilon(p) = U(p) - G(p)U(p) = (1 - G(p))U(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left(1 - \frac{K}{1 + \tau p}\right) \frac{1}{P}$$

On applique le théorème de la valeur finale: 我们应用终值定理:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p (U(p) - Y(p)) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(1 - \frac{K}{1 + \tau p}\right) \frac{1}{P} = 1 - K$$

Si $K > 1$ alors $\varepsilon(\infty) < 0$, Si $K < 1$ alors $\varepsilon(\infty) > 0$

Si $K = 1$ alors $\varepsilon(\infty) = 0$

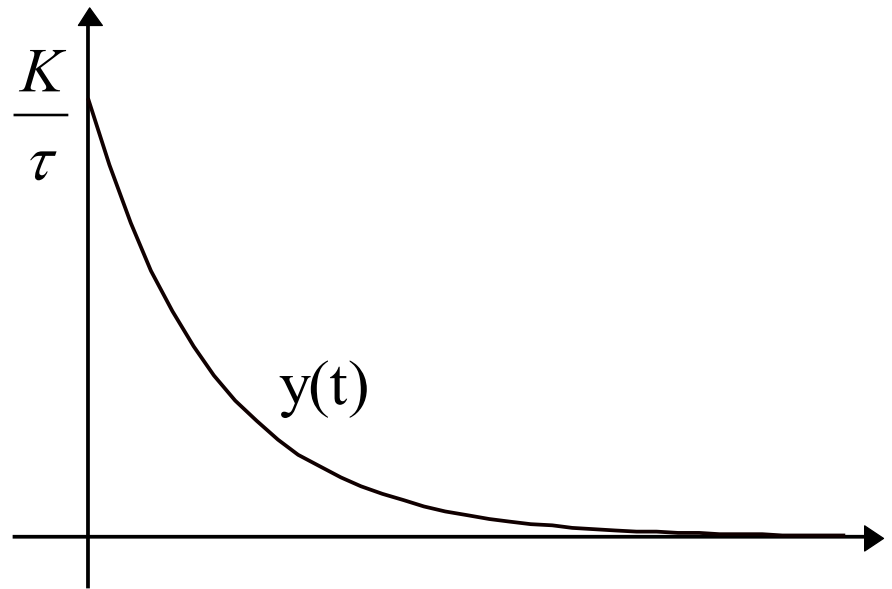
b- Réponse impulsionnelle (réponse à une impulsion) :

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(p) = 1$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



c- Réponse à une rampe :

$$u(t) = a.t \quad \Rightarrow \quad U(p) = \frac{a}{p^2}$$

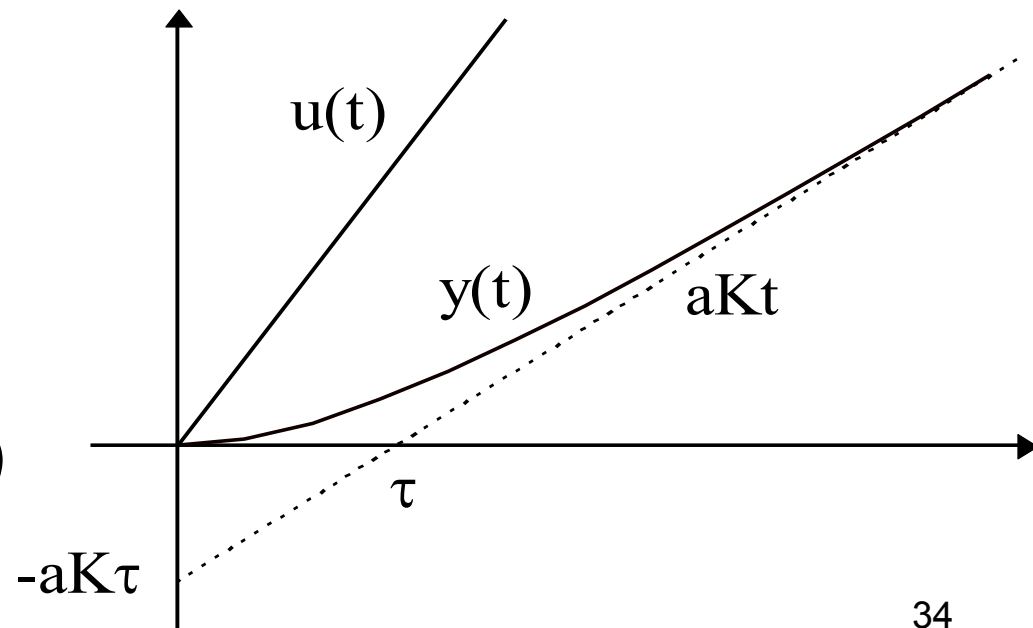
$$\Rightarrow Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{a}{p^2}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$y(t) = aK \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Pour $t \rightarrow +\infty$

une asymptote : $y = aK(t - \tau)$



d- Réponse sinusoïdale (réponse harmonique, réponse à une entrée sinusoïdale) :

$$u(t) = E_0 \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$y(t) = \frac{KE_0\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \left(\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$t \gg \tau$ alors $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0 \Rightarrow$ On est en régime permanent

$$y(t) = A(\omega)E_0 \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

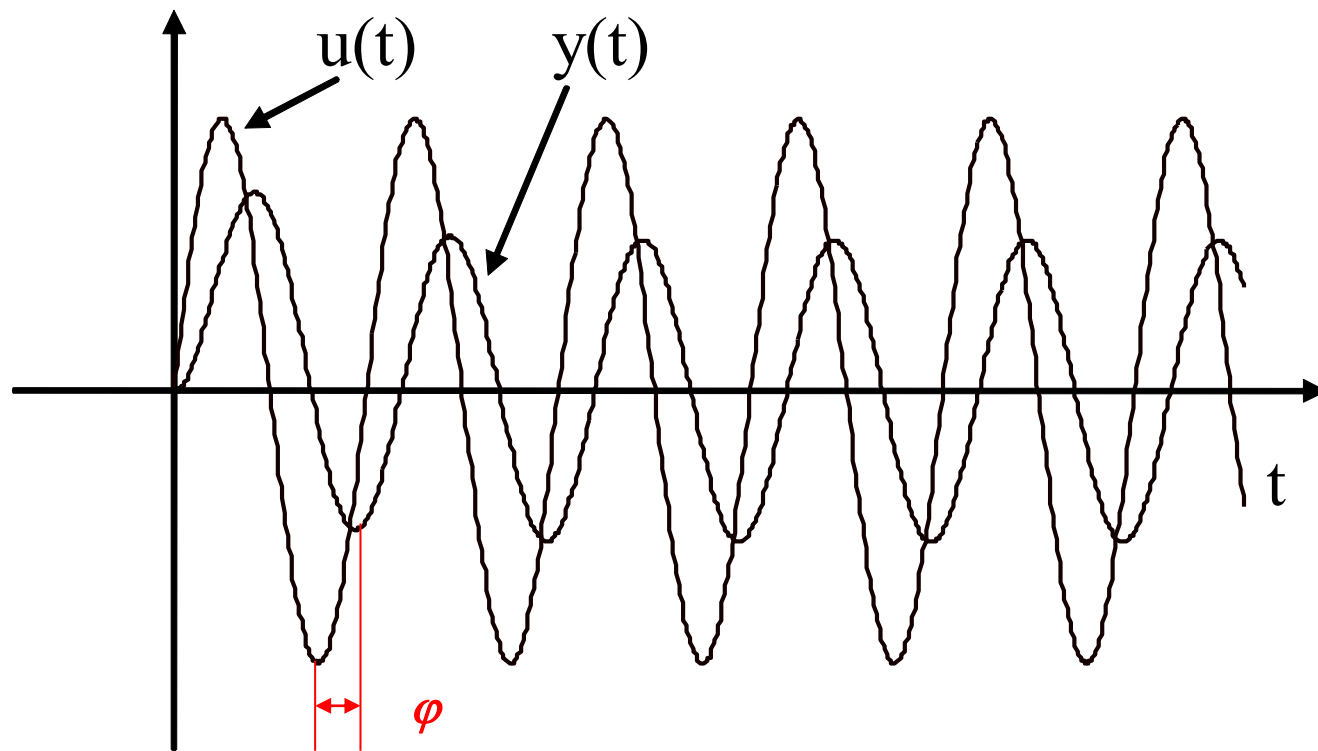
$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)|$$

$$\varphi = \text{Arg}(G(j\omega))$$

Théorème : *En régime permanent, la réponse à une entrée sinusoïdale d'un système linéaire (modélisé par $G(p)$) est sinusoïdale de même pulsation que l'entrée mais amplifiée de $|G(j\omega)|$ et déphasée par rapport à l'entrée de $\text{Arg}(G(j\omega))$.*

在稳定状态下，线性系统（以 $G(p)$ 为模型）对正弦输入的响应是正弦波，其脉动与输入相同，但被 $|G(j\omega)|$ 放大，相位相对于输入被 $\text{Arg}(G(j\omega))$ 偏移。



II.2 Systèmes du second ordre

II.2.1 Définition et exemple

Dans le cas général, un système linéaire du second ordre est modélisé par une équation différentielle de la forme :

$$c \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = \gamma \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \beta \frac{du(t)}{dt} + \alpha u(t)$$

Suivant que α , β et γ soient nuls ou pas, on obtient des filtres du second ordre dits passe-bas, passe-haut, passe-bande, ...

En commande des systèmes, on a généralement affaire à des systèmes passe-bas de la forme: 在系统控制中，我们通常处理形式如下的低通系统：

$$c \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = \alpha u(t)$$

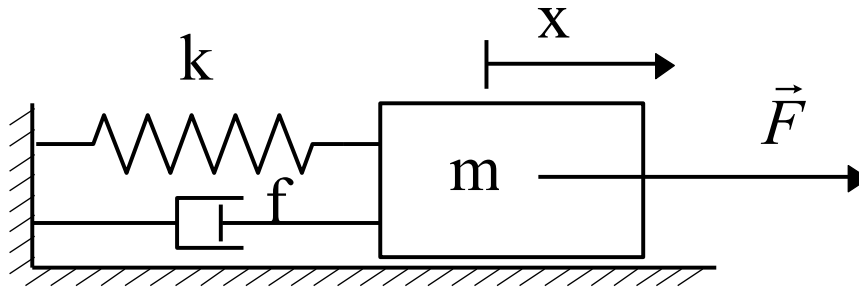
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t)$$

ω_n : pulsation naturelle (propre non amortie) du système

ξ : coefficient d'amortissement

K : gain statique

Exemple : On s'intéresse à la position d'une charge





L'équation dynamique est : $F(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{f}{2\sqrt{mk}} \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{k}$$

II.2.2 Fonction de transfert associée à un système du second ordre

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \quad \text{记}$$

II.2.3 Réponses aux entrées types

On désigne par p_1 et p_2 les racines de $p^2 + 2 \xi \omega_n p + \omega_n^2 = 0$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{K \omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

掌握

* pour $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ les racines sont réelles et distinctes

$$\begin{cases} p_1 = -\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 = -\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases} \quad \text{Régime apériodique} \quad \text{过阻尼响应}$$

* pour $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow$ une racine réelle double

$$p_1 = p_2 = -\omega_n \quad \text{Régime apériodique critique} \quad \text{临界阻尼}$$

* pour $\xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ les racines sont complexes conjuguées

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Régime oscillatoire amortie (pseudo-oscillatoire)} \\ \text{欠阻尼} \end{array}$$

a- Réponse indicielle : $U(p) = 1/p$

掌握

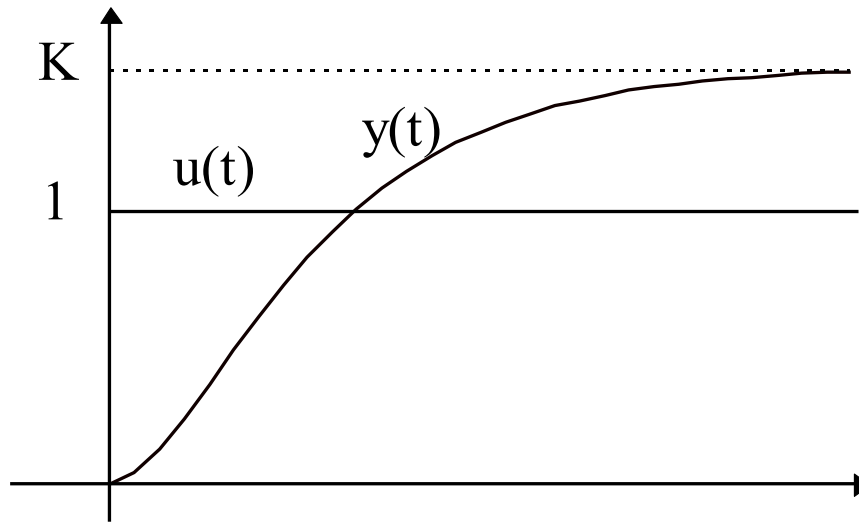
* Régime apériodique $\xi > 1$: ①

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{2\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right]$$

ou

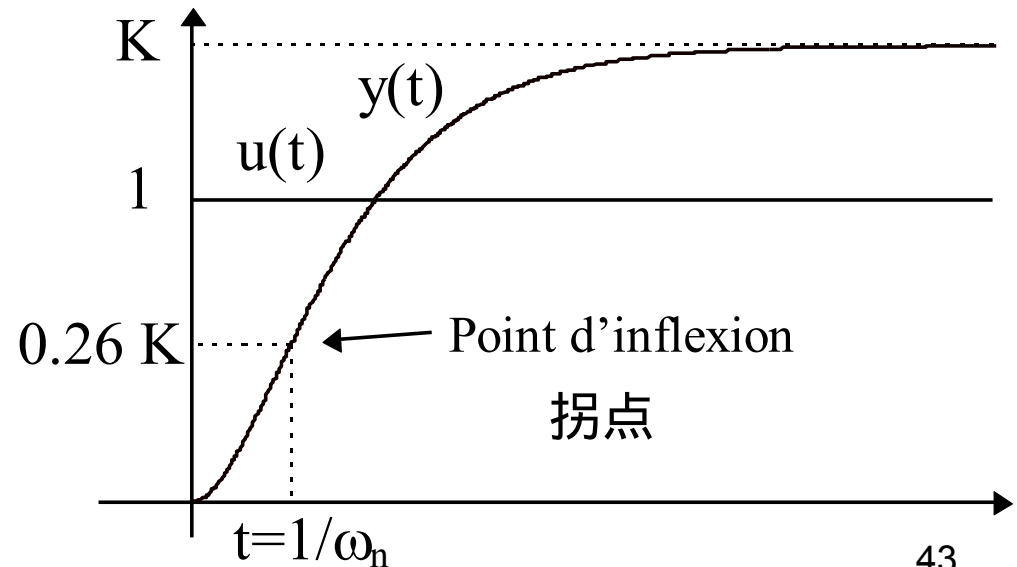
$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \quad \text{Avec} \quad \begin{array}{l} T_2 = -\frac{1}{p_2} \\ T_1 = -\frac{1}{p_1} \end{array}$$

不考这个响应



* Régime apériodique critique ^② $\xi = 1$:

$$y(t) = K[1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}]$$



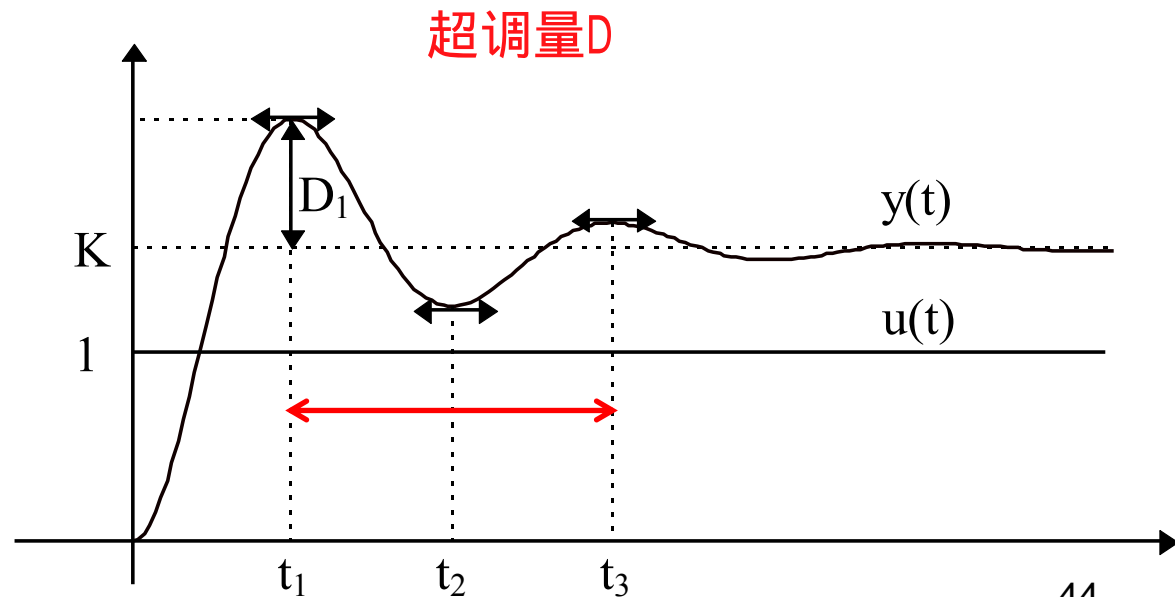
* Régime pseudo-oscillatoire : $0 < \xi < 0.707$:

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_p t + \Phi) e^{-\xi \omega_n t} \right]$$

avec $\begin{cases} \cos(\Phi) = \xi \\ \sin(\Phi) = \sqrt{1 - \xi^2} \end{cases} \quad \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

T_p : période des oscillations

ω_p : pulsation propre
固有频率



La valeur du premier dépassement est : 第一次超限的值为 :

$$D_1 = \frac{y(t_1) - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \text{肯定考}$$

Ce dépassement est donné en pourcentage : $D_1\% = 100 D_1$

Instants des dépassements: $t = t_k = \frac{k\pi}{\omega_p}$

Premier dépassement: $t_1 = \frac{\pi}{\omega_p}$

常用系数要背

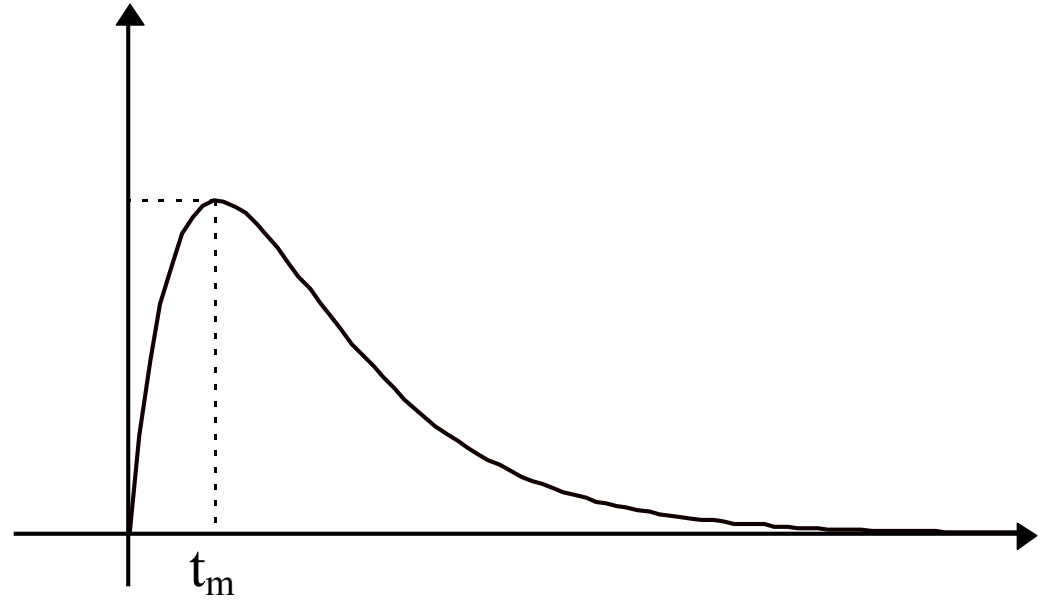
b- Réponse impulsionnelle : $U(p) = 1$

* Régime apériodique $\xi > 1$:

$$y(t) = -K \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \right)$$

冲激相应不用看，一般都是阶跃和斜坡

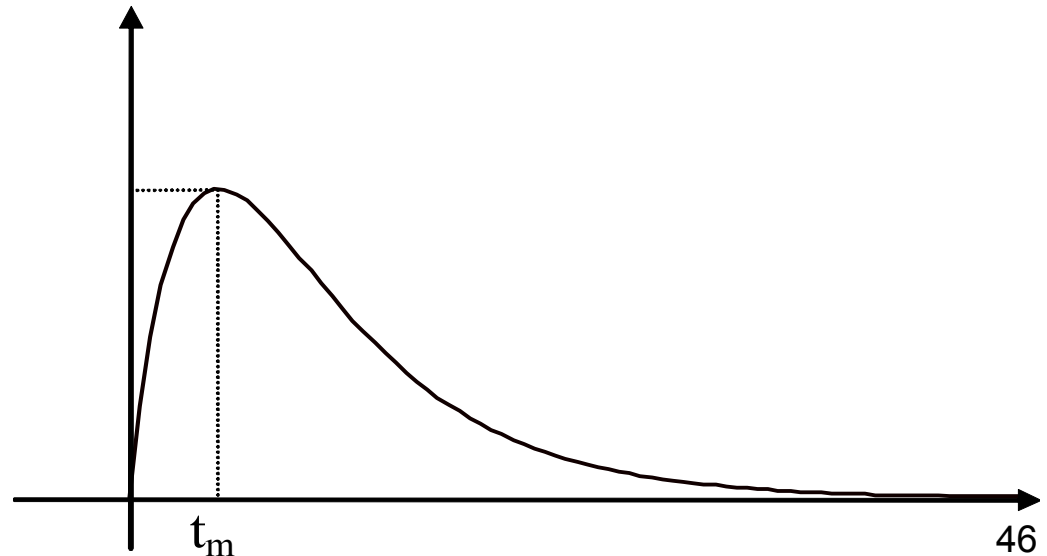
$$t_m = \frac{\text{Log}(-p_1) - \text{Log}(-p_2)}{p_2 - p_1}$$



* Régime apériodique critique $\xi = 1$:

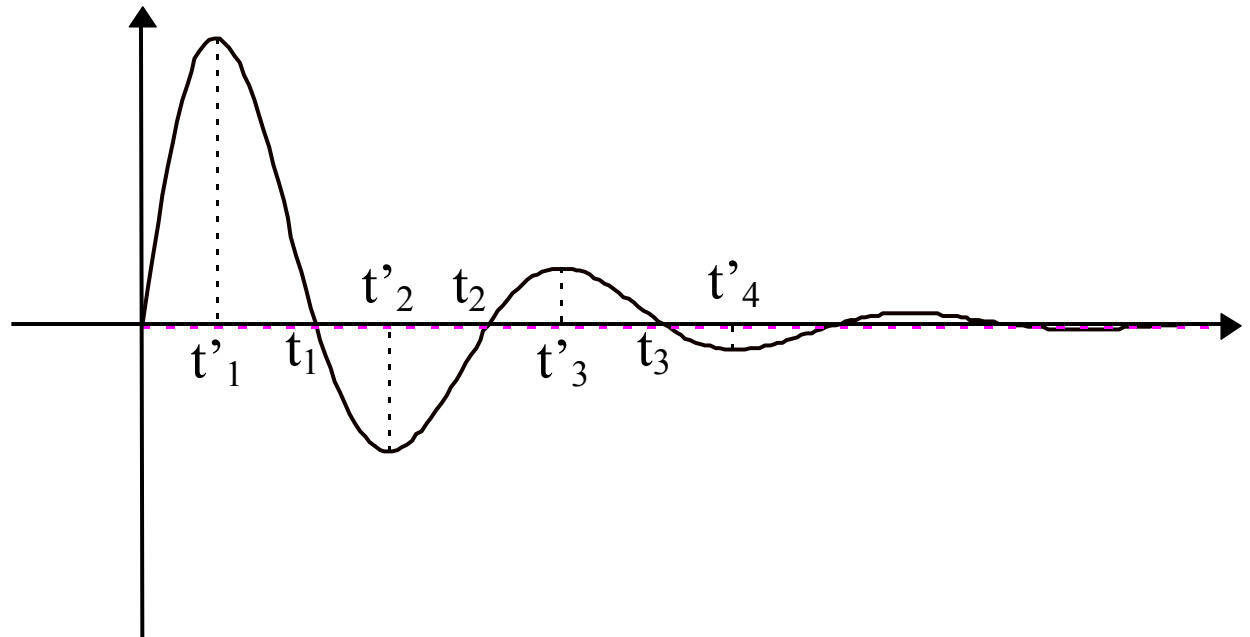
$$y(t) = K\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$$t_m = \frac{1}{\omega_n}$$



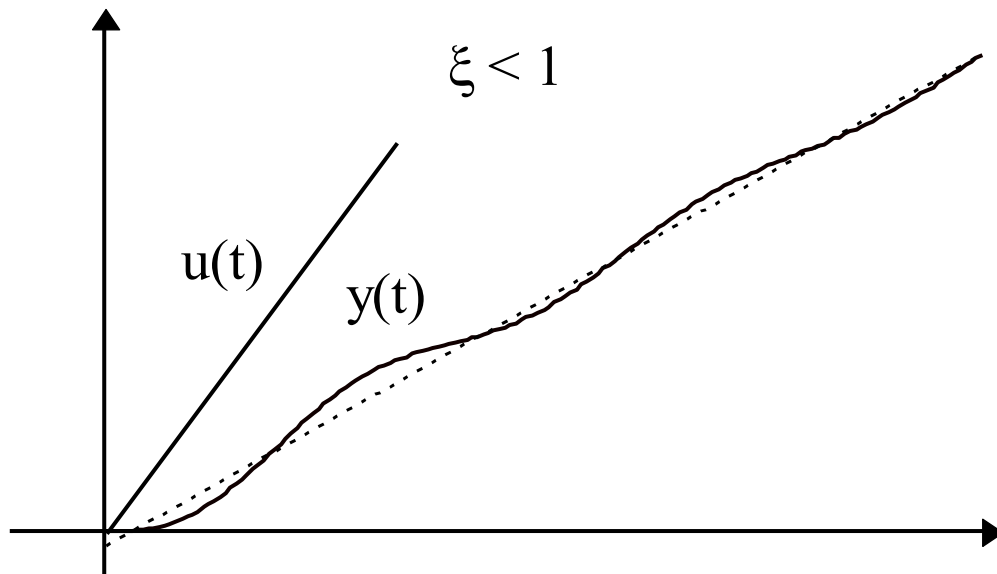
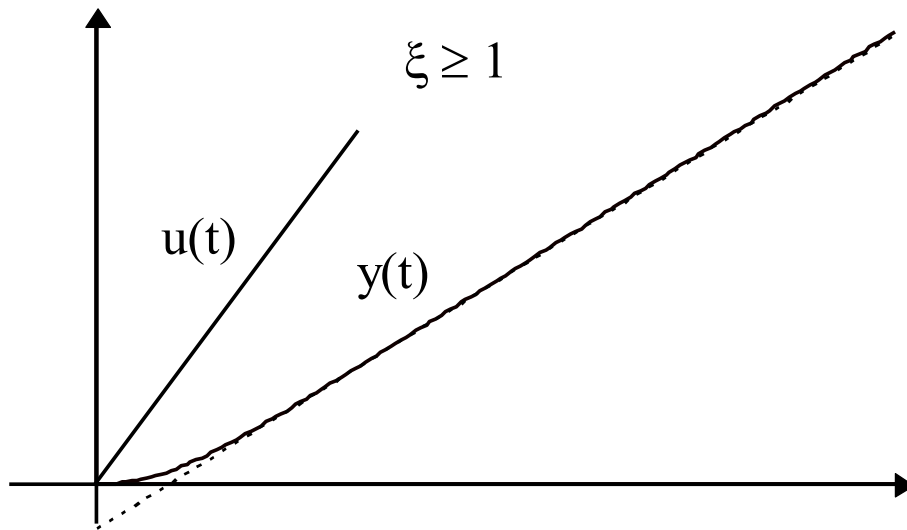
* Régime pseudo-oscillatoire $0 < \xi < 1$:

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_p t) e^{-\xi\omega_n t}$$



$$t = t'_k = \frac{(k-1)\pi + \Phi}{\omega_p}$$

c- Réponse à une rampe : $U(p) = \frac{a}{p^2}$



d- Réponse sinusoïdale (réponse harmonique, réponse à une entrée sinusoïdale) :

$$U(p) = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

En régime permanent on obtient : $y(t) = A(\omega)E_0 \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

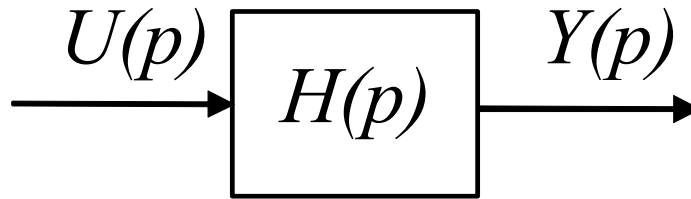
où :

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)) = -\text{arctg}\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Chapitre III :

Représentation graphique ou Réponse fréquentielle



根轨迹法 法方老师不讲

$$Y(p) = H(p)U(p) \quad p = j\omega \Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$$

Spectre de $y(t)$

Transformées de Fourier de $y(t)$ et $u(t)$

Module de $H(j\omega) \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|}$

Spectre de $u(t)$

Argument de $H(j\omega)$ ($\text{Arg}(H(j\omega))$) $\Rightarrow \varphi(j\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(Y(j\omega)) - \text{Arg}(U(j\omega))$

La fonction $H(j\omega)$ est la fonction de transfert du système (ou gain complexe du système). Elle fournit le gain réel $|H(j\omega)|$ et le déphasage $\varphi(j\omega)$. Elle traduit le comportement fréquentiel du système.

La représentation graphique permet de déduire, rapidement, **les performances** (rapidité, stabilité, ...) des systèmes

Les différentes représentations graphiques sont :

- Le diagramme de Black
- Le diagramme de Bode
- Le diagramme de Nyquist

掌握画渐近线

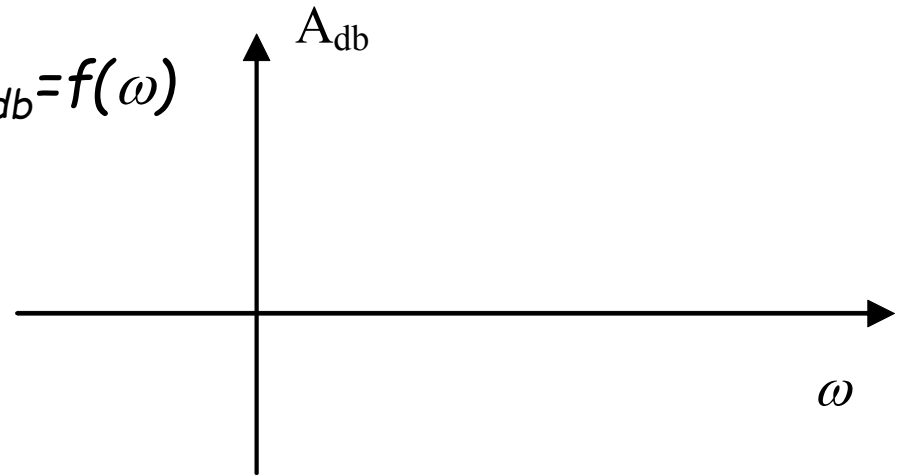
III.1 Le diagramme de Bode consiste en deux diagrammes, avec une échelle logarithmique en abscisse:

博德图由两个图组成，X 轴为对数刻度：

- Diagramme d'amplitude: $A_{db} = f(\omega)$

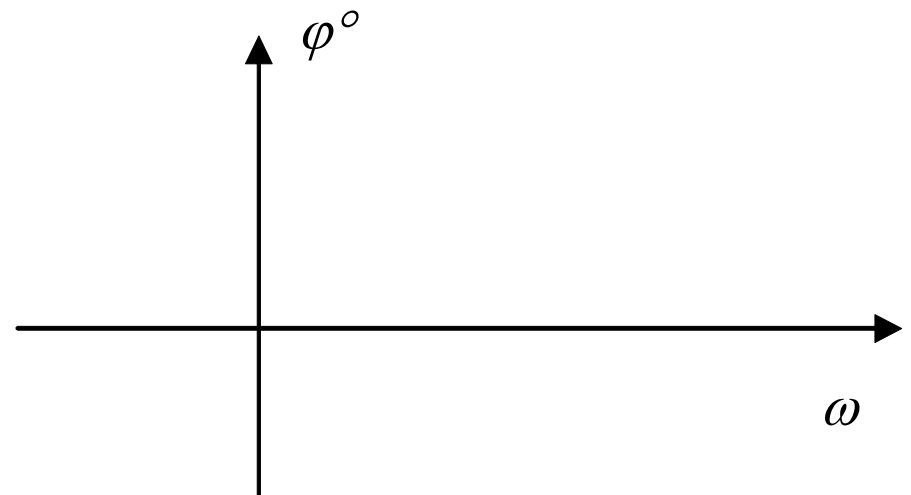
Amplitude en db :

$$A_{db} = 20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$$



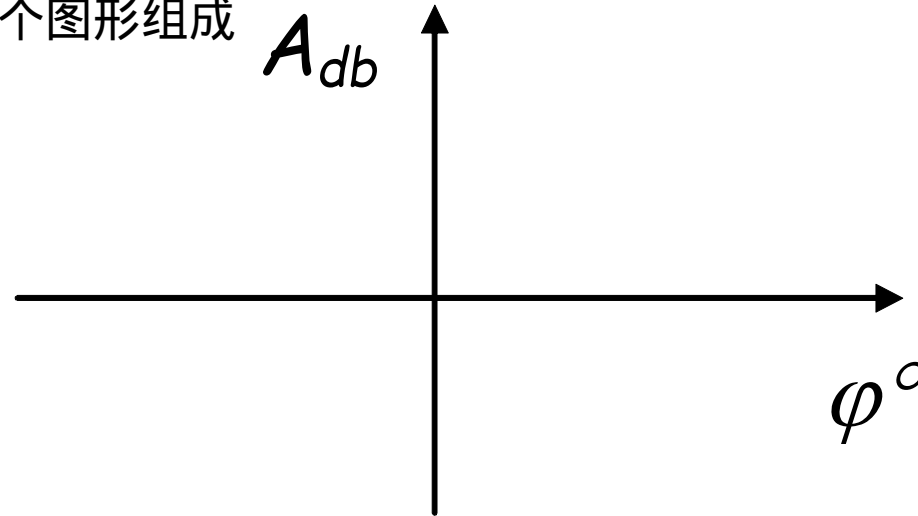
- Diagramme de phase: $\varphi = f(\omega)$

$\varphi = \text{Argument } H(j\omega)$



III.2 Le diagramme de Black-Nichols consiste en un graphique unique

布莱克-尼科尔斯图由一个图形组成



III. 3. *Représentation des systèmes de base*

III.3.1 *Système du premier ordre*

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \begin{matrix} p=j\omega \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{K}{1 + j\tau\omega} \right| = 20 \log_{10}(K) - 10 \log_{10}(1 + \tau^2\omega^2) \\ \text{Arg}(G(j\omega)) = -\arctg(\tau\omega) \end{cases}$$

Pour $\omega \rightarrow 0$ alors

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) = K_{dB} \\ \text{Arg}(G(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

On a 2 *asymptotes horizontales*:

- Une pour le module: la droite K_{dB}
- Une pour l'argument : *la droite 0°*

Pour $\omega \rightarrow +\infty$ alors

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty \\ \text{Arg}(G(j\omega)) \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$

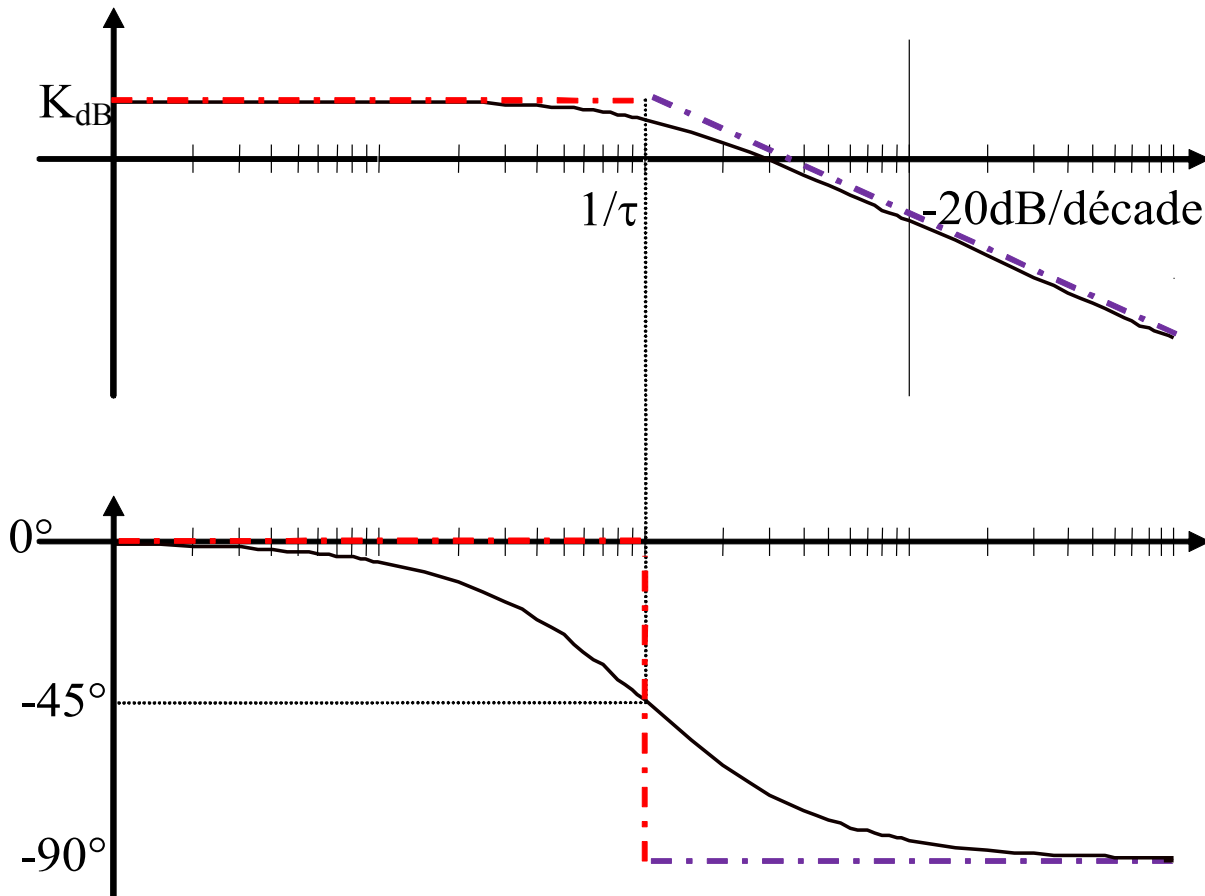
- Une *asymptote pour le module, de pente: -6db/octave ou -20db/décade*
- Une *asymptote horizontale pour l'argument : -90°*

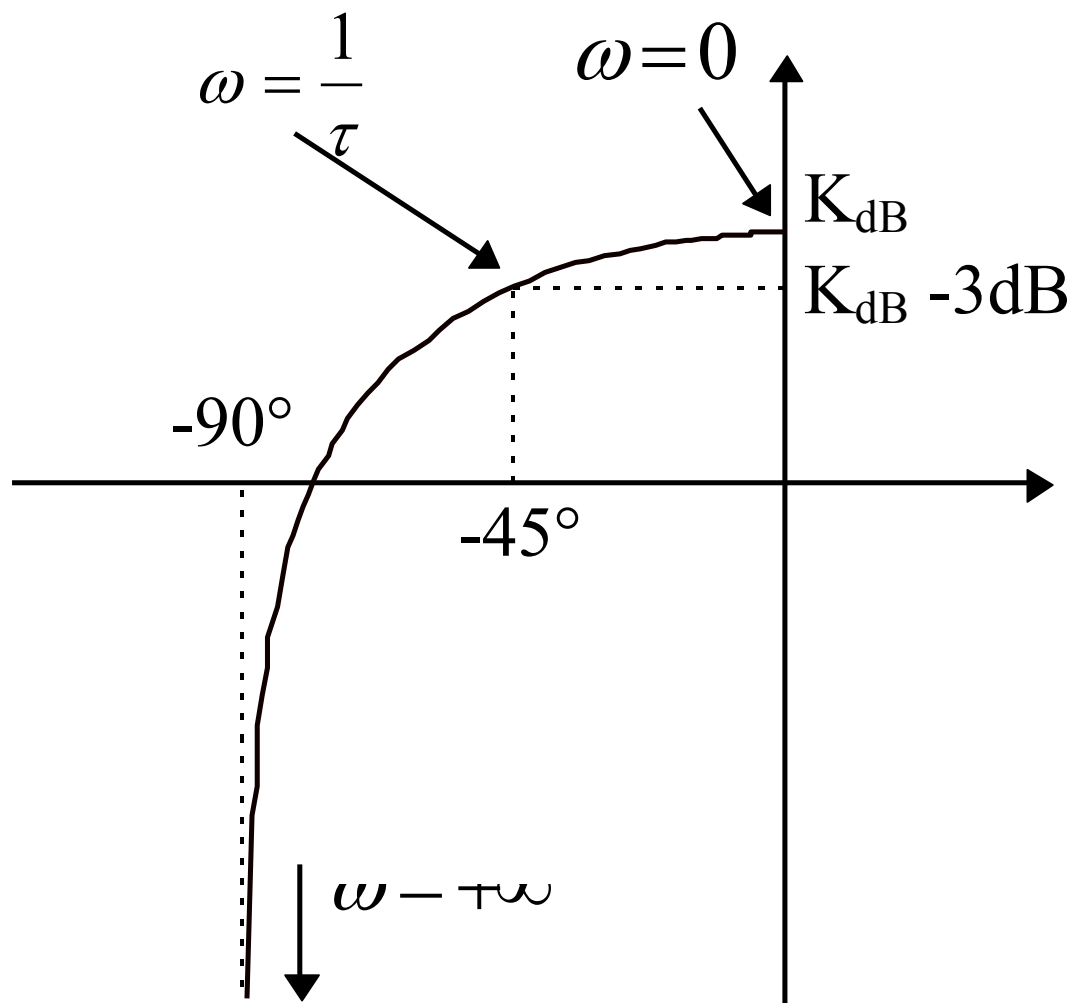
Pour $\omega \rightarrow 1/\tau$ alors

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} \rightarrow -3dB \\ \text{Arg}(G(j\omega)) \rightarrow -45^\circ \end{cases}$$

Si $K > 1$ alors $K_{dB} > 0 \text{ dB}$

+20dB为重点





III.3.2. Système du second ordre: cas gain $K=1$.

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_n\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}} \\ \varphi = \arg(G(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{dB} = 20\log_{10} \omega_n^2 - 10\log_{10}((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2) \\ \varphi = -\arctg\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)}\right) \end{cases}$$

Pour $\omega \rightarrow 0$ alors

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \text{Arg}(G(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 0dB \\ \text{Arg}(G(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

Pour $\omega \rightarrow +\infty$ alors

$$\begin{cases} |G(j\omega)| \rightarrow 0 \\ \text{Arg}(G(j\omega)) \rightarrow -180^\circ \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty \\ \text{Arg}(G(j\omega)) \rightarrow -180^\circ \end{cases}$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_n \text{ alors } \Rightarrow \begin{cases} A_{dB} = -20 \log_{10} 2\xi \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$$

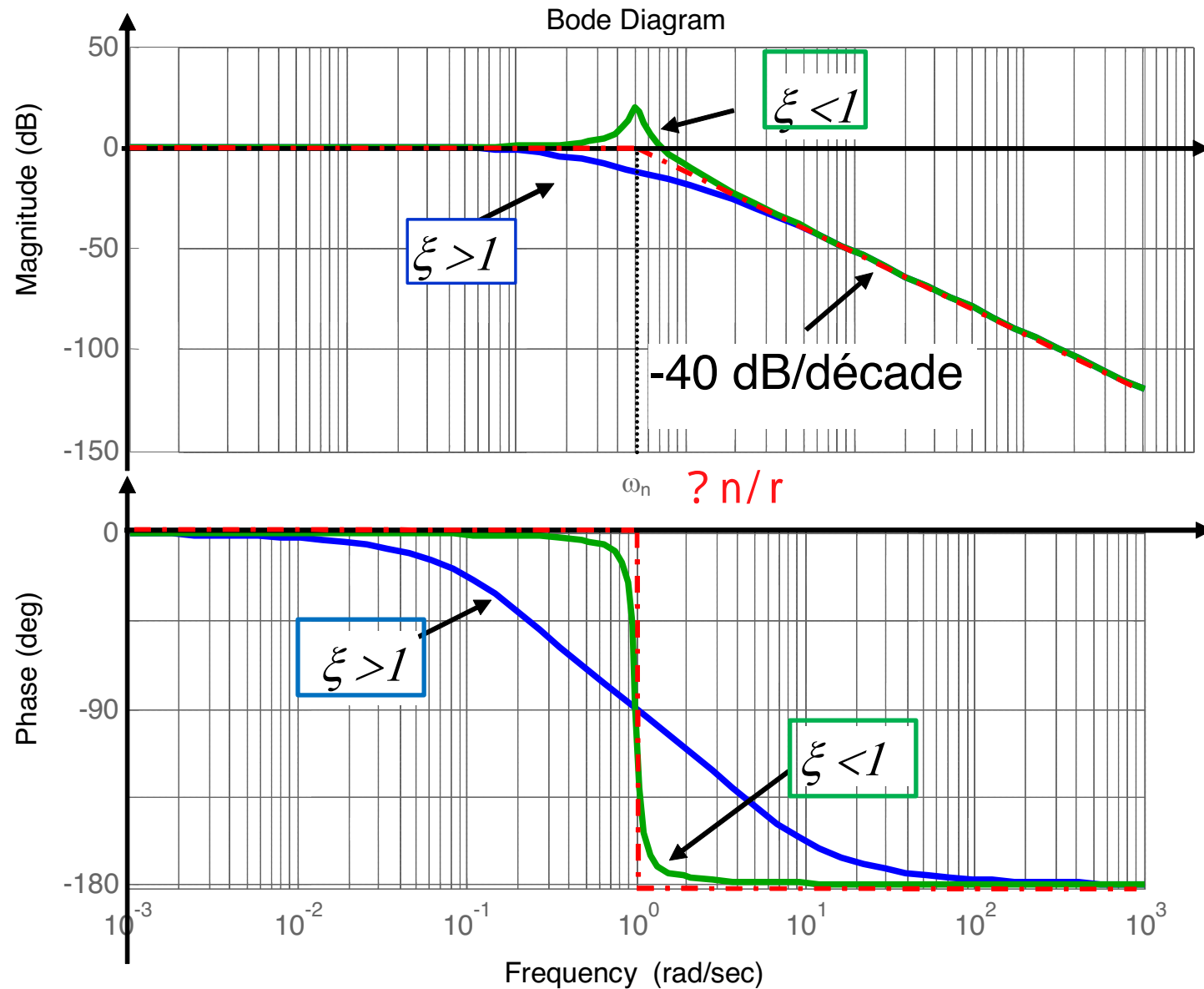
A_{db} est maximum pour $\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

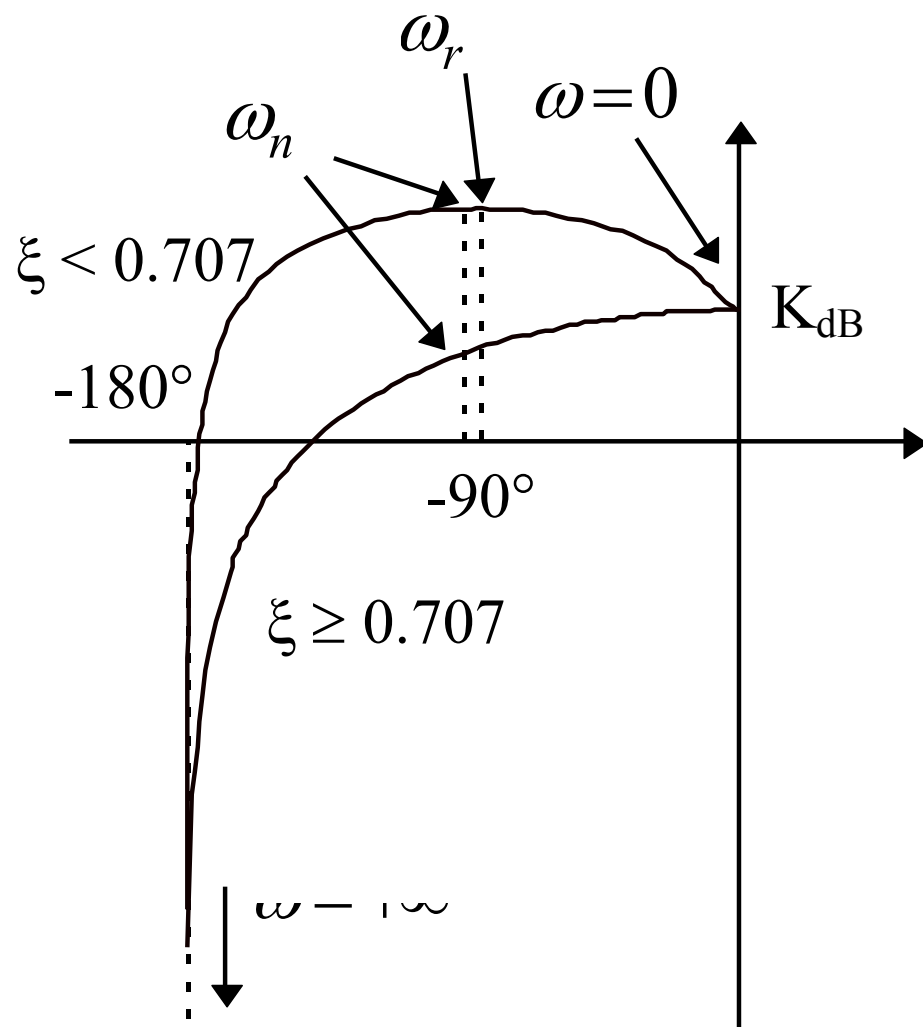
$$\text{Facteur de surtension} = \frac{A_{db}(\omega_r)}{A_{db}(0)} = Q = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

浪涌系数

La résonance n'existe que si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

共振



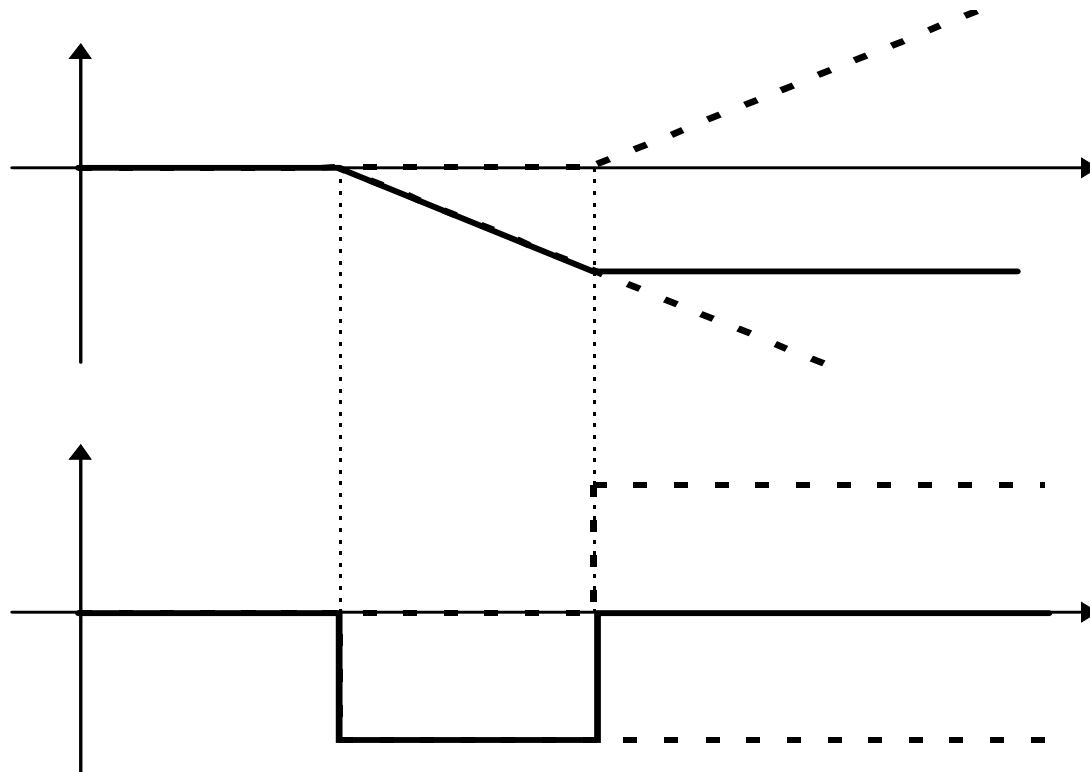


L'avantage du diagramme asymptotique dans le plan de Bode : le produit de plusieurs fonctions de transfert sera représenté par la somme géométrique de toutes les asymptotes de chaque fonction de transfert.

$$\text{Si } F(p) = F_1(p).F_2(p) \text{ alors } |F(j\omega)|_{dB} = |F_1(j\omega)|_{dB} + |F_2(j\omega)|_{dB}$$

$$\text{et } \text{Arg}(F(j\omega)) = \text{Arg}(F_1(j\omega)) + \text{Arg}(F_2(j\omega))$$

博德平面渐近图的优势：多个传递函数的乘积将由每个传递函数所有渐近线的几何和来表示。



III.4. Etude aux limites des systèmes d'ordre n

III.4.1 Fonction de transfert sans intégrateurs:

$$F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, n > m$$

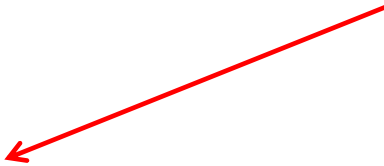
Pour $p \rightarrow 0$
($\omega \rightarrow 0$)

$$\boxed{F(p) \approx \frac{b_0}{a_0}} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| = \frac{b_0}{a_0} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |F(p)|_{db} = 20 \log_{10} \frac{b_0}{a_0} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}}$$

Pour $p \rightarrow +\infty$
($\omega \rightarrow 0$)

$$\boxed{F(p) \approx \frac{b_m}{a_n} p^{m-n}} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| = 0 \\ \varphi = (m-n) \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |F(p)|_{db} = -\infty \\ \varphi = (m-n) \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

III.4.2 Fonction de transfert *avec intégrateurs*:


$$F(p) = \frac{1}{p^k} \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, n > m$$

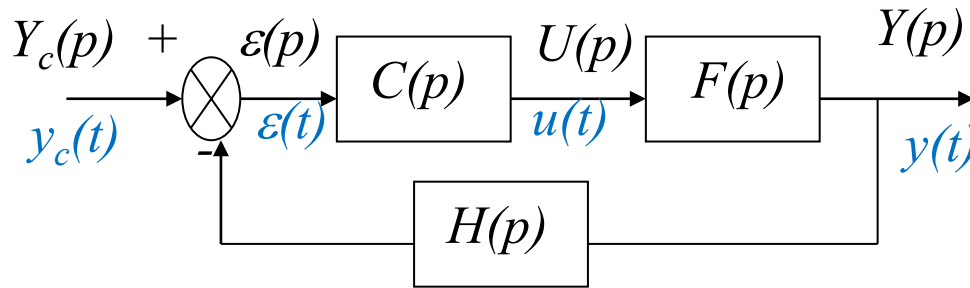
Pour $p \rightarrow 0$ alors

$$F(p) \approx \frac{b_0}{a_0 p^k} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| = +\infty \\ \varphi = -k \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)|_{db} = +\infty \\ \varphi = -k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour $p \rightarrow +\infty$ alors

$$F(p) \approx \frac{b_m}{a_n} p^{m-n-k} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| = 0 \\ \varphi = (m-n-k) \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)|_{db} = -\infty \\ \varphi = (m-n-k) \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

III.5. Fonction de Transfert en Boucle Fermée: FTBF

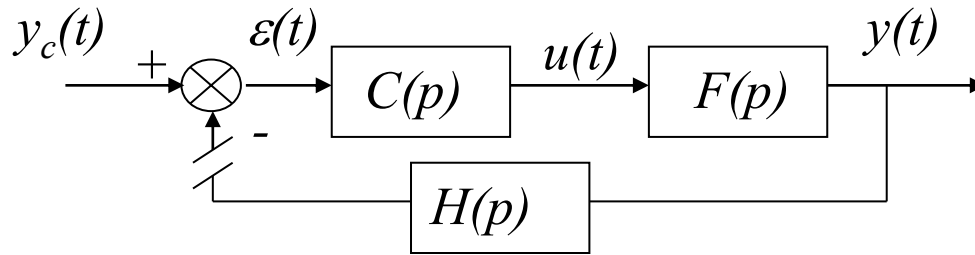


FTBF :

$$G(p) = \frac{C(p)F(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)}$$

$C(p)F(p)$: transfert de la chaîne directe et $H(p)$: transfert de la chaîne de retour

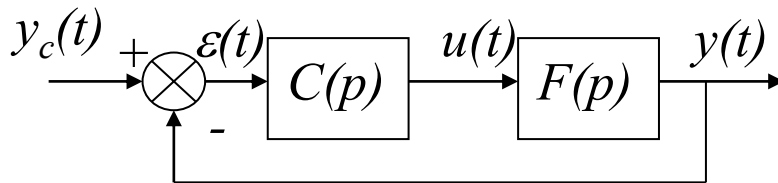
III.6 Fonction de Transfert en Boucle ouverte: FTBO



FTBO:

$$C(p)F(p)H(p)$$

Remarque: en général, le schéma fonctionnel d'un SAL peut se ramener au schéma suivant:

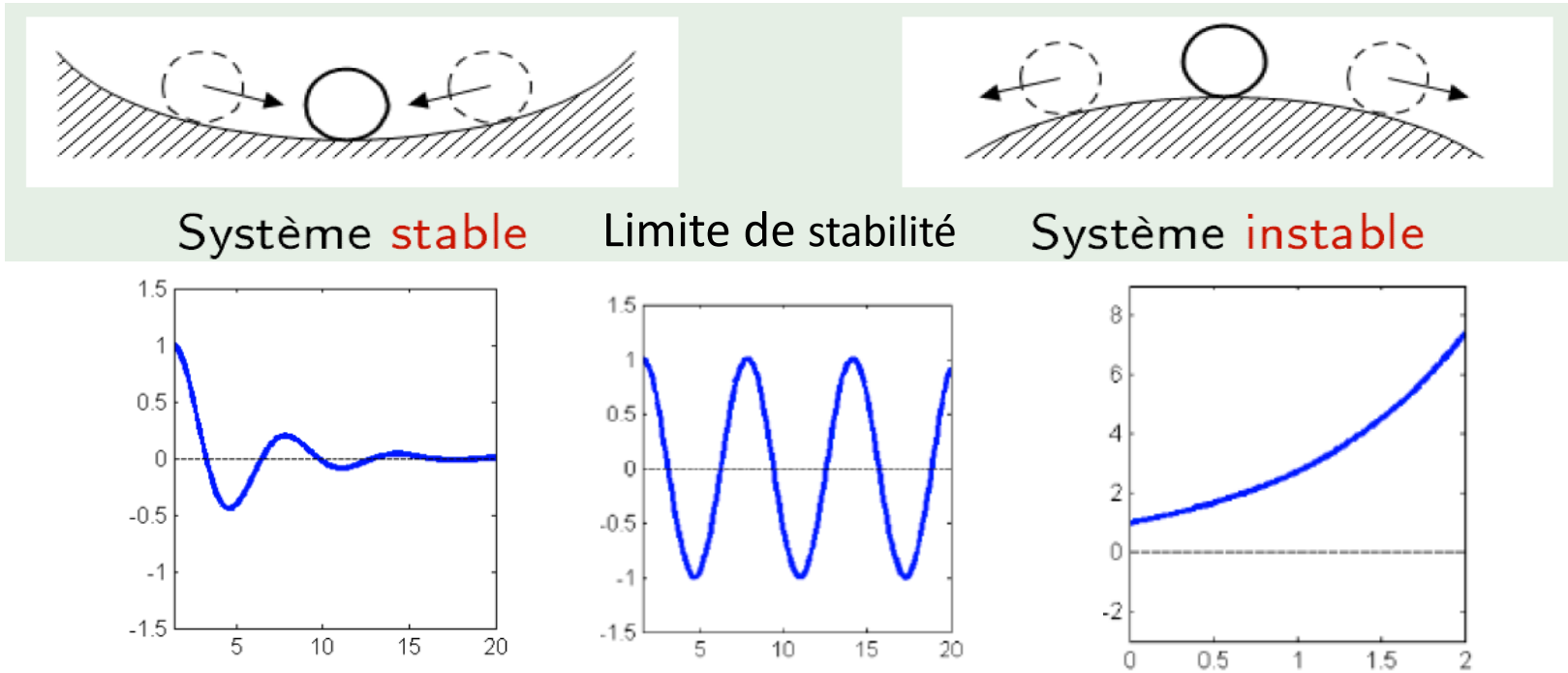


FTBF :

$$G(p) = \frac{C(p)F(p)}{1 + C(p)F(p)} = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

Chapitre IV : Stabilité des systèmes linéaires

IV.1. Généralités



Définition mathématique: Un système linéaire est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle $h(t)$, tend vers 0 quand le temps t tend vers l'infini (en régime permanent).

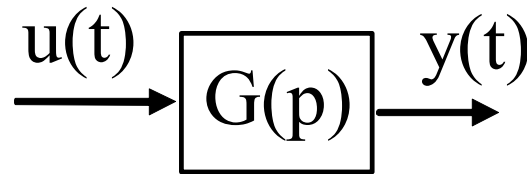
当时间 t 趋于无穷大 (稳态) 时, 线性系统的脉冲响应 $h(t)$ 趋于 0, 只有当且仅当这种情况下, 线性系统才是稳定的。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

IV.2. Condition nécessaire et suffisante de stabilité

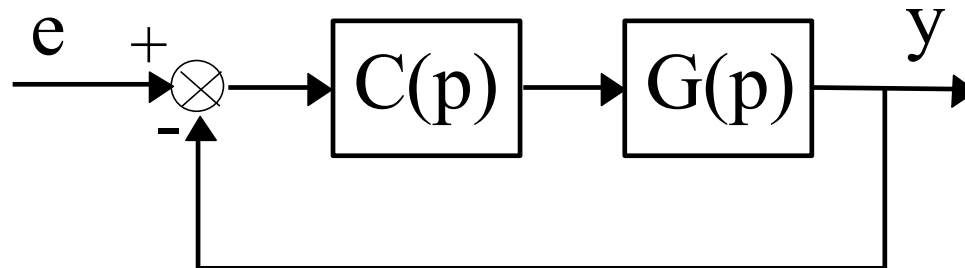
Théorème : *Un système linéaire continu est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.* On parle, alors, de stabilité asymptotique.

当且仅当连续线性系统的传递函数的所有极点都有严格的负实部时，该系统才是稳定的。这就是所谓的渐近稳定性。



Un système asservi linéaire est stable si et seulement si les racines de son équation caractéristique $1 + C(p)G(p) = 0$ sont toutes à parties réelles strictement négatives.

当且仅当线性伺服系统的特征方程 $1 + C(p)G(p) = 0$ 的根都有严格的负实部时，该系统才是稳定的。



* Relation entre les pôles et la réponse impulsionnelle :

Soit c_i et $a_i + jb_i$ les pôles réels et complexes de la fonction de transfert d'un système. La fonction de transfert de ce système peut-être décomposée en éléments simples de la manière suivante :

$$F(p) = \sum \frac{C_i}{p - c_i} + \sum \frac{A_i p + B_i}{(p - a_i)^2 + b_i^2}$$

sa réponse impulsionnelle est :

$$h(t) = \mathcal{TL}^{-1}(F(p)) = \sum C_i e^{c_i t} + \sum A'_i e^{a_i t} \sin(b_i t + \phi_i)$$

Si tous les c_i et a_i sont négatifs (les pôles sont à parties réelles négatives), alors tous les termes en exponentielle (transitoires) vont tendre vers 0 quand le temps t tend vers l'infini. Auquel cas $h(t)$ tend vers 0. Ce qui permet de conclure que le système est stable

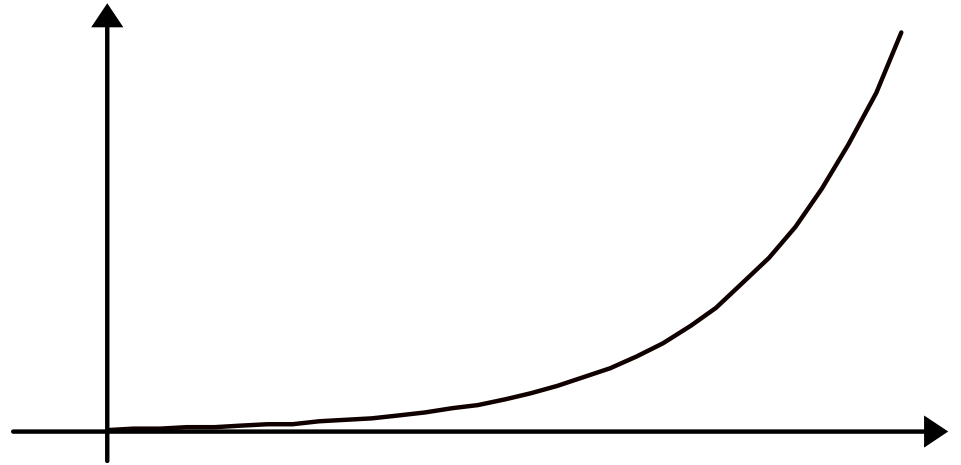
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \sum C_i e^{c_i t} + \sum A'_i e^{a_i t} \sin(b_i t + \phi_i)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

Si un des pôles est à partie réelle positive, alors le système est instable :

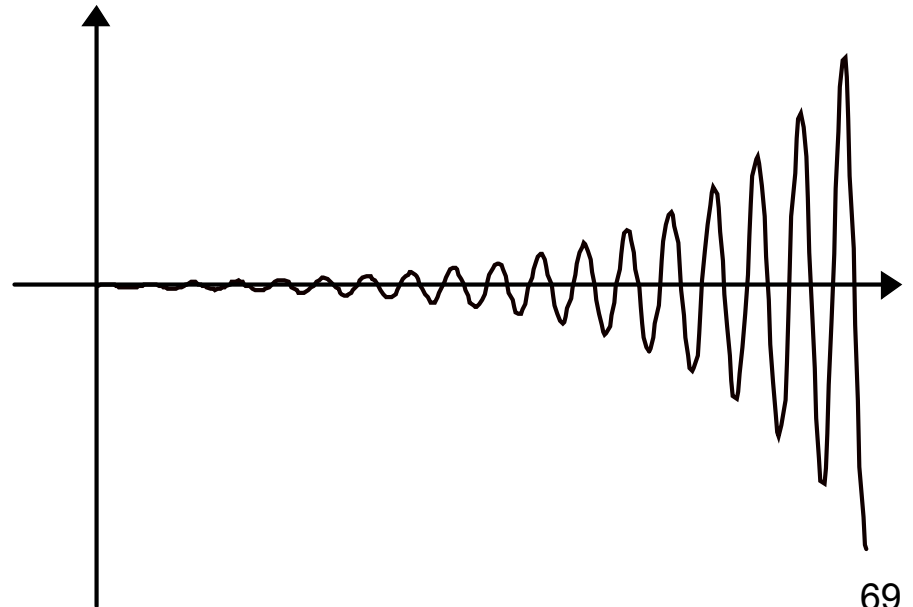
- de type divergent s'il s'agit d'un pôle réel positif

如果是正实数极点，则为发散型



- de type oscillatoire s'il s'agit d'un pôle complexe à partie réelle positive.

如果是实部为正的复数极点，则为振荡。



Cas limite : Cas où certains pôles de $F(p)$ sont sur l'axe des imaginaires (partie réelle nulle) ; les autres pôles étant situés dans le demi-plan de gauche (partie réelle négative).

极限情况：F(p) 的某些极点位于虚轴上（实部为零）；其他极点位于左半平面上（实部为负）。

* Si l'un des pôles imaginaires est multiple alors le système est instable. 如果一个系统有多个重合的纯虚数极点，那么这个系统被认为是不稳定的。

Exemples :

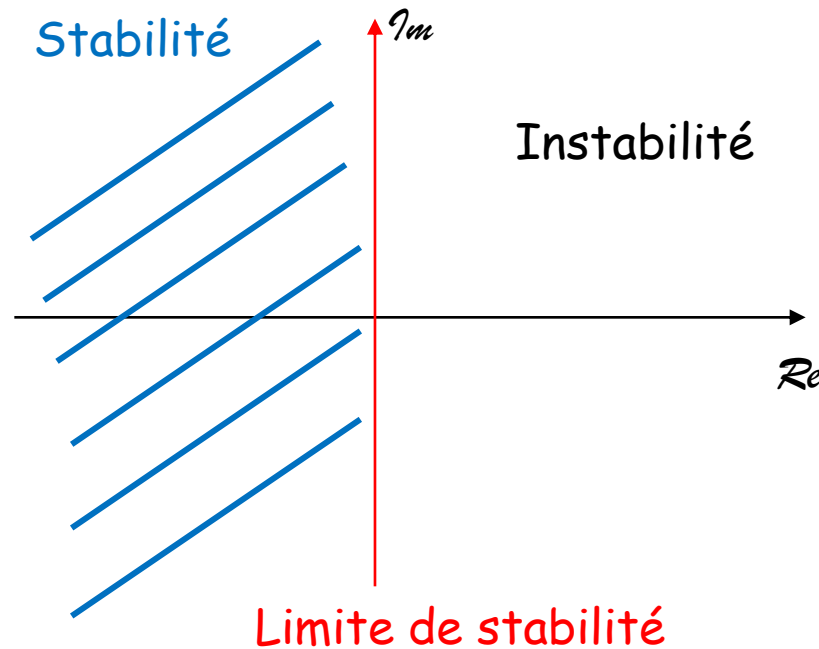
- Réponse de $1/p^2$ est t (tend, donc, vers l'infini quand le temps tend vers l'infini)
- Réponse de $1/(p^2+\omega^2)^2$ est $c(\sin(\omega t)-\omega t \cos(\omega t))$ (tend, aussi, vers l'infini quand le t tend vers l'infini)

* Si tous ces pôles imaginaires sont simples, le système ne revient pas à sa position d'équilibre, mais il ne s'en éloigne pas trop. On dit que le système est stable mais non asymptotiquement (limite de stabilité, ou stabilité simple).

如果一个系统的传递函数有所有纯虚数极点，并且这些极点都是简单（即每个极点的重数为1），那么系统不会回到其初始的平衡位置，但也不会离得太远。这种情况下，系统被称为稳定但⁷⁰不具有渐进稳定性，也称为边界稳定或简单稳定。

Exemples :

- . $1/p$ est 1 (il tend, donc, vers une valeur finie quand le temps tend vers l'infini).
- . $1/(p^2 + \omega^2)$ est $c(\sin(\omega t))$ (il reste dans une bande finie quand le temps tend vers l'infini).



IV.3. Critère algébrique de Routh 罗斯的代数标准

Ce critère permet de savoir si les racines d'une équation algébrique ont leurs parties réelles négatives sans avoir à la résoudre. On l'applique, alors, à l'équation caractéristique d'un système asservi linéaire (i.e. au dénominateur de sa fonction de transfert en boucle fermée). 这一准则可用于确定几何方程的根是否有负实部，而无需求解。然后将其应用于线性伺服系统的特征方程（即闭环传递函数的分母）。

a. Condition nécessaire :

La condition nécessaire de stabilité est que **tous les coefficients de l'équation algébrique sont de mêmes signes.**

稳定的必要条件是代数方程的所有系数符号相同

Cette condition nécessaire est suffisante si le degré de l'équation est inférieur ou égal à deux.

如果方程的阶数小于或等于 2，这个必要条件就足够了

b. Condition nécessaire et suffisante : Règle de Routh

Soit l'équation algébrique suivante : $a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
p^{n-2}	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$
p^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$
....
p^0	XXX	0	0
p^{-1}	0	0	073

Le critère de Routh s'énonce comme suit :

Le nombre de changement de signe dans la première colonne est égal au nombre de racines à parties réelles positives ou nulles de l'équation caractéristique.

En particulier, si tous les termes de la première colonne sont de même signe, alors le système est stable. Cette condition est nécessaire et suffisante.

第一列中符号变化的个数等于特征方程中实部为正或零的根的个数。特别是，如果第一列中所有项的符号都相同，那么系统就是稳定的。这个条件是必要且充分的


变号两次，则在右半平面有两个根

Exemple:

1- Soit le système asservi dont l'équation caractéristique est donnée par : $p^3 + 0.5 p^2 + 3 p + 3.5 = 0$

- La condition nécessaire est satisfaite: tous les coefficients sont de même signe*
- Le tableau de Routh est le suivant :*

p^3	1	3
p^2	0.5	3.5
p	-4	0
p^0	3.5	0
p^{-1}	0	0

The diagram shows a Routh array with five rows. The first column contains the powers of p: p^3, p^2, p, p^0, and p^-1. The second and third columns contain the coefficients. A light blue curved arrow points from the p^2 row to the p row, indicating a sign change from positive 0.5 to negative -4. Another light blue curved arrow points from the p row to the p^0 row, indicating a sign change from negative -4 to positive 3.5.

Le système est donc instable, du fait de la présence de deux changements de signe dans la première colonne.

Cas particuliers

• cas où $a_0 = 0$: il suffit de mettre l'équation sous la forme:
 $p(a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1) = 0$, puis on applique le critère de Routh
au terme qui est à l'intérieur de la parenthèse
(on remarque que l'on a déjà un pôle nul).

2- Soit l'équation caractéristique suivante :

$$p^4 + 0.5 p^3 + 3 p^2 + 3.5 p = 0 \Leftrightarrow p (p^3 + 0.5 p^2 + 3 p + 3.5) = 0$$



On a, donc, une racine nulle.

Soit l'équation caractéristique:

$$p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4 = 0$$

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p	0	0	0
p^0	?	?	0
p^{-1}	?	0	0

→ On a une ligne nulle. Problème: comment compléter le tableau??

Solution: on remonte au niveau de la ligne au dessus, et on calcul le polynôme auxiliaire et on complète le tableau

解决方法：回到上一行，计算辅助多项式并完成表格。

Dans le cas de l'exemple c'est la ligne 3, dont les coefficients sont ceux du polynôme p^2+4 . Ce polynôme est appelé : polynôme auxiliaire .

在示例中的第 3 行，其系数是多项式 p^2+4 的系数。这个多项式被称为辅助多项式。

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p	2	0	0
p^0	4	0	0
p^{-1}	0	0	0

→ Polynôme auxiliaire : $1 p^2 + 4$

2 est le coefficient de la dérivée du polynôme auxiliaire

Le système est, donc, stable mais non asymptotiquement puisqu'il possède deux pôles imaginaires pures ($p=\pm 2j$)

因此，系统是稳定的，但不是渐近稳定的，因为它有两个纯虚数极点

IV.4. Critères graphiques :

Ces critères s'appliquent seulement aux systèmes bouclés.

On vient de voir que la stabilité peut-être étudiée en utilisant des critères algébriques. Ces critères se basent sur la connaissance du modèle du système à étudier, d'où leur inconvénient. En effet, en industrie, un bon nombre de systèmes sont caractérisés par des données expérimentales (réponse fréquentielle, ...), et de par leurs complexités il est difficile de les modéliser. Pour cela, on fait appel à des critères graphiques.

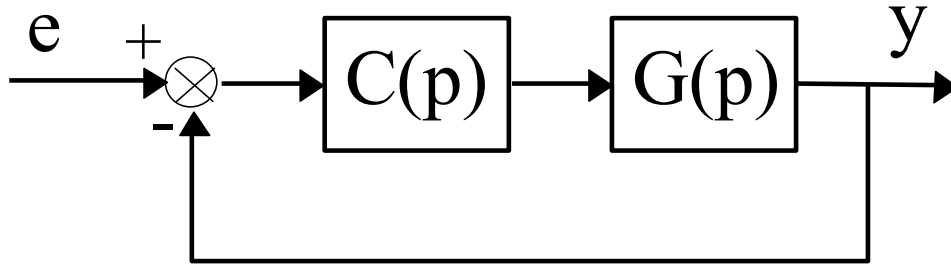
Critère de Nyquist, Règle du revers, Marges de stabilités (Marge de phase et Marge de gain).

这些标准只适用于闭环系统。

我们刚才已经看到，可以使用代数标准来研究稳定性。这些标准基于待研究系统模型的知识，因此有其缺点。在工业领域，许多系统都是通过实验数据（频率响应等）来描述的，由于其复杂性，很难对其进行建模。为此，我们使用图形标准

奈奎斯特准则、反面规则、稳定裕度（相位裕度和增益裕度）

Pour le système bouclé suivant :



la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

Si $C(p)G(p) = -1$ pour $\omega = \omega_{cr}$ alors $|F(p)|_{p=j\omega_{cr}} \rightarrow +\infty$

Donc la réponse du système va tendre vers l'infini ce qui permet de conclure que le système est instable

Si le lieu de $C(p)G(p)$ vient à passer au point -1, on a à la fréquence correspondante $1+C(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr})=0$, et la réponse du système va osciller avec la dite fréquence même en l'absence d'entrée (il faudrait en réalité qu'il y ait des conditions initiales non nulles ou des courants de fuites ou statiques non nulles et/ou des offsets dans le cas des circuits électriques : c'est le principe des oscillateurs en électronique).

Ce point -1 est appelé point critique.

Le point critique a pour coordonnées $(-180^\circ, 0\text{db})$ pour $\omega=\omega_{cr}$, dans les diagrammes fréquentiels de Bode et Black-Nichols.

如果 $C(p)G(p)$ 的位点越过 -1 点，那么在相应频率上 $1+C(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr})=0$ 时，即使没有输入，系统响应也会以上述频率振荡（实际上，在电路中必须有非零的初始条件或非零的泄漏或静态电流和/或偏移：这就是电子学中的振荡器原理）。

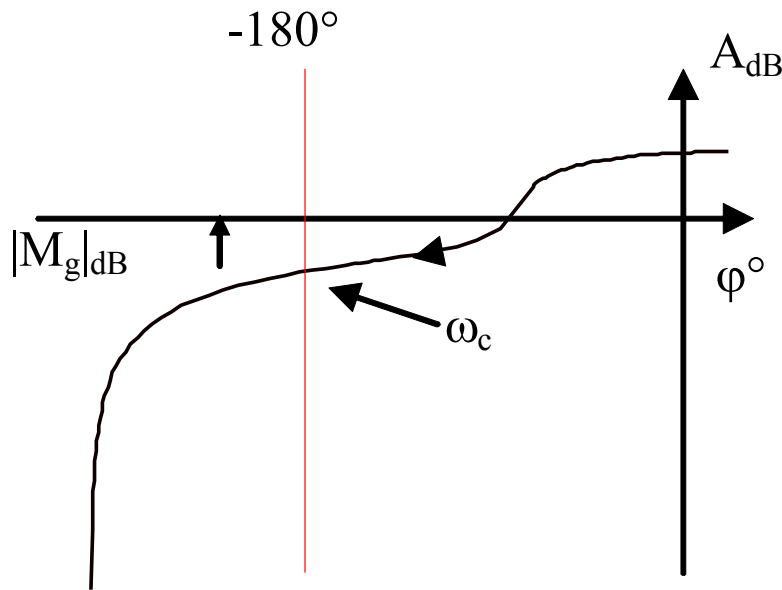
这个点 -1 被称为临界点

Marges de stabilité: 稳定裕度

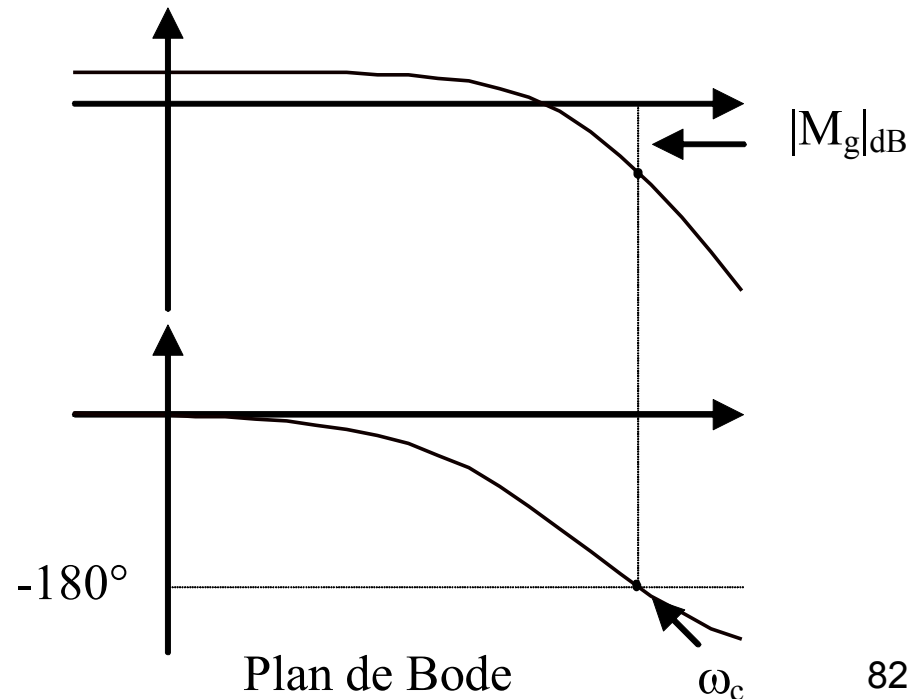
IV.1. Marge de gain: est le nombre dont le gain en boucle ouverte peut augmenter sans détruire la stabilité. On la note par M_g .

Calcul de M_g analytiquement: 增益裕度：是指在不破坏稳定性的情况下，开环增益可以增加的数值。用 M_g 表示

$$\omega_c / \arg(FTBO) = -180^\circ \text{ et on calcule } M_{g_{dB}} = -20 \log_{10} |FTBO|$$



Plan de Black-Nichols



Plan de Bode

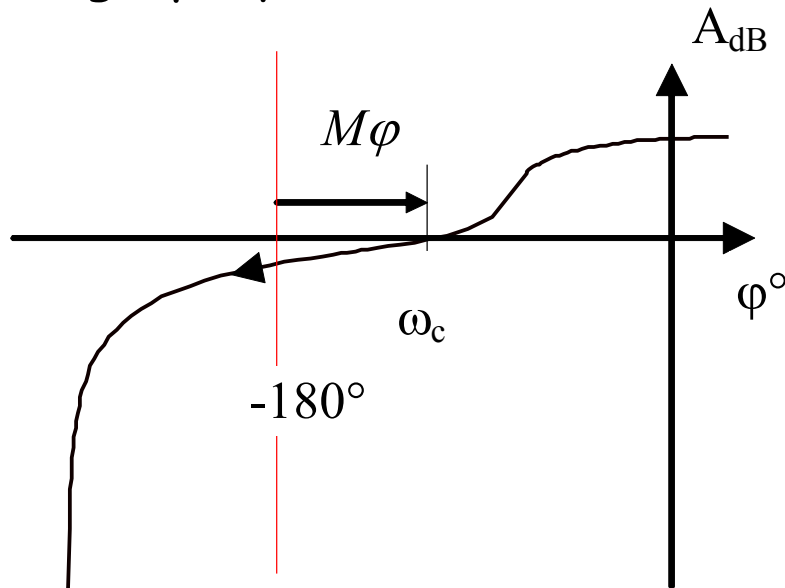
IV.2- Marge de phase: est le déphasage complémentaire qui dans la zone de résonance ferait passer le lieu de la FTBO de l'autre côté du point critique. On la note par $M\varphi$.

$M\varphi$ analytiquement:

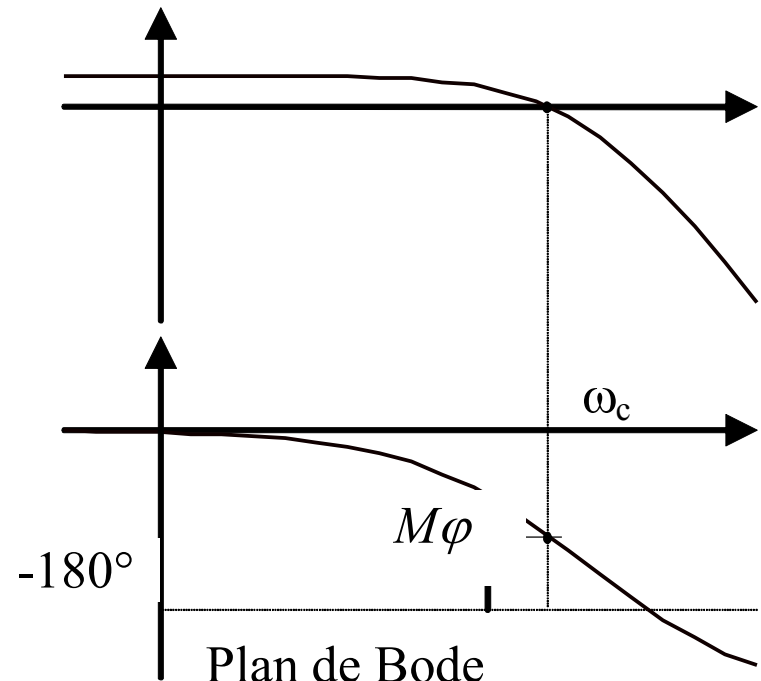
相位裕量：是指在共振区会导致 FTBO 位置通过临界点另一侧的互补相移。

$\omega_c / |FTBO|=1$ et on calcule $M\varphi = 180 + \arg(FTBO)$

$M\varphi$ graphiquement



Plan de Black-Nichols

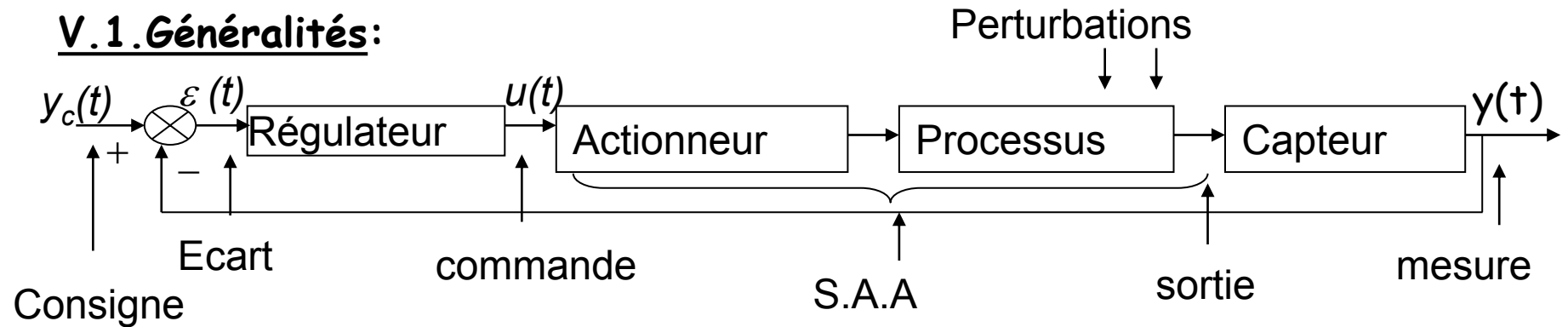


Plan de Bode

Chapitre V:

PERFORMANCES DES SYSTEMS ASSERVIS LINEAIRES

V.1. Généralités:



S.A.A: Système A Asservir composé d'un actionneur (ex: vanne) et du processus (ex: mélangeur). Il comporte 2 entrées: commande (ex: tension) et perturbation (ex: débit de fuite). 由执行器（如阀门）和过程（如混合器）组成的伺服控制系统。它有两个输入端：控制（如电压）和干扰（如泄漏率）。

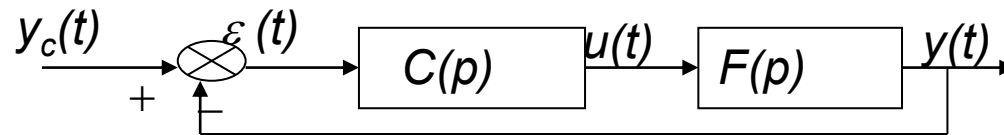
Régulateur (ou correcteur): contraint la grandeur à régler du processus à rester au voisinage de sa consigne en s'opposant en particulier aux perturbations. Il élabore la commande à partir de l'écart.

调节器（或校正器）：迫使需要调节的过程变量保持接近其设定点，特别是通过抵抗干扰。它根据偏差进行控制。

Capteur: il donne une image de la grandeur mesurée (ex: thermocouple délivre une tension électrique proportionnelle à une température).

传感器：提供被测物的图像（例如，热电偶提供与温度成正比的电压）。

On peut ramener la boucle d'asservissement au schéma suivant: 控制回路可简化为下图所示

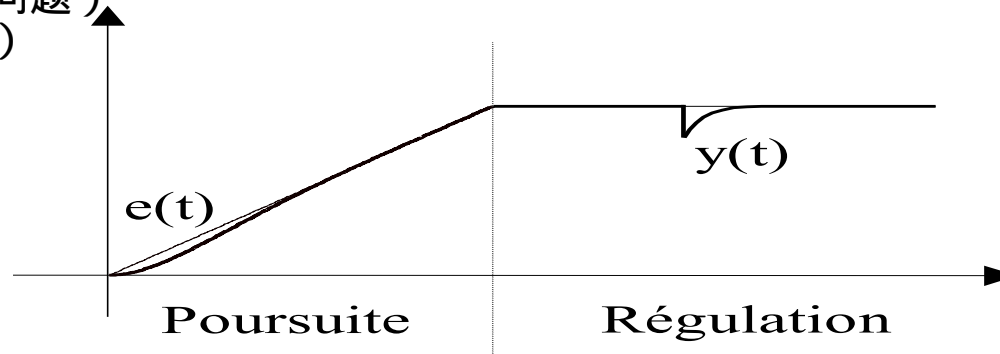


But: $y(t) = y_c(t)$ soit $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ le plus rapidement possible sans que le système ne devienne instable. 目标: $y(t) = y_c(t)$, $e(t)$ 尽快为 0 而系统不会变得不稳定

Cette condition doit être vérifiée:

- \forall la variation de l'entrée:
(Problème de poursuite) \longrightarrow rapidité.
- \forall la perturbation:
(Problème de régulation) \longrightarrow raideur

输入变化: (跟踪问题)
干扰: (调节问题)



V.2.Cahier des charges:

Le cahier des charges d'un système asservi comporte, en général, les conditions suivantes:

- Pour le régime permanent: faibles erreurs de position (lorsque la consigne est de type échelon et de traînage (lorsque la consigne est de type rampe).
- Pour le régime transitoire: rapide et bien amorti.
- Stabilité.

On a les compromis suivants à résoudre:

Performances

我们需要解决以下折衷方案:

rapidité, précision 速度、精度

Une régulation doit être:

- **précise** :

Consigne échelon: il faut **une intégration** en chaîne directe pour que le système soit précis 阶跃指令: 要使系统准确, 需要整合直接输出路

Consigne rampe: pour que l'erreur de traînage soit nulle, il faut **deux intégrations** en chaîne directe

斜坡指令: 要使阻力误差为零, 需要进行两次直接输出路积分。

- suffisamment **stable** : $M\phi$ et MG (diagrammes de Bode et Black)

伺服控制系统的规格一般包括以下条件:

- 稳态: 位置误差小 (当设定点为阶跃时), 阻力误差小 (当设定点为斜坡时)。
- 瞬态运行: 速度快, 阻尼好。
- 稳定性

Robustesse

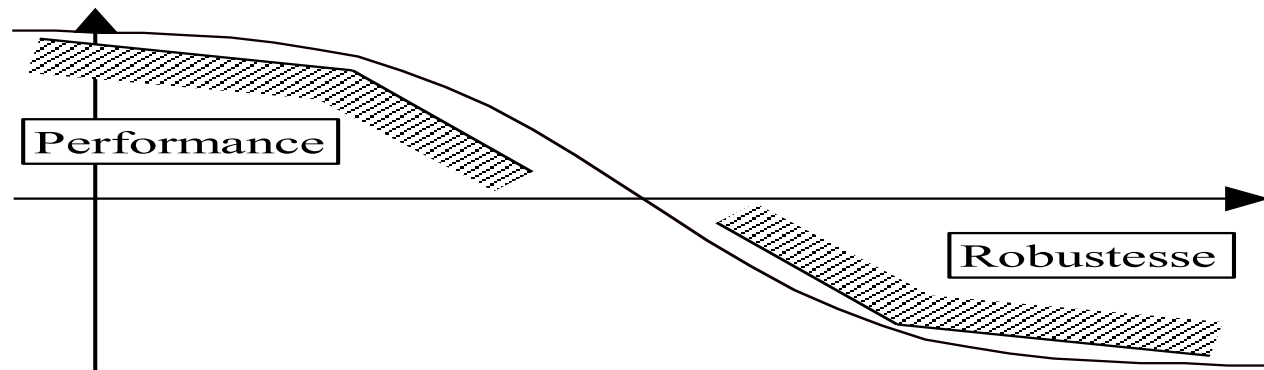
stabilité, insensibilité aux bruits

稳定, 对噪音不敏感

- La plus rapide possible, sous contrainte des deux critères précédents 在符合上述两个标准的前提下尽可能快地完成

- t_r , temps de réponse, minimum (réponse indicielle) 最小响应时间 (指数响应)
- B_p , bande passante, maximum (diagramme de Bode) 带宽, 最大值 (博德图)

D'où la dualité Performance-Robustesse. Solution: Gabarit
performance-robustesse 因此, 这就是性能-稳健性二元性。解: 性能-稳健性模板



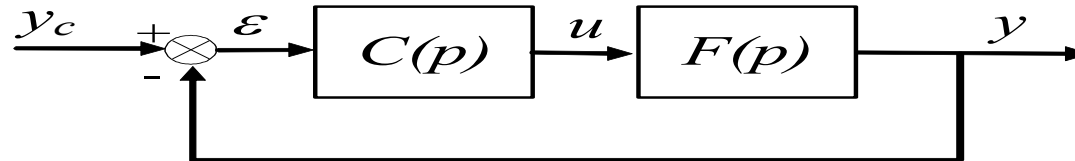
稳态误差Ess:
与输入信号有关
与增益有关
无差度阶数

Chapitre VI:

PRINCIPE DE LA COMPENSATION

补偿原则

VI.1. Généralités:



Dans le cas idéal on veut avoir $y(\infty) = y_c(\infty)$, i.e. avoir une FTBF $G(p)=1$.

La FTBF est donnée par :

$$G(p) = \frac{C(p)F(p)}{1 + C(p)F(p)}$$

Pour avoir $G(p) = 1$ il faut avoir $C(p)F(p)=+\infty \forall p$, ce qui est impossible.

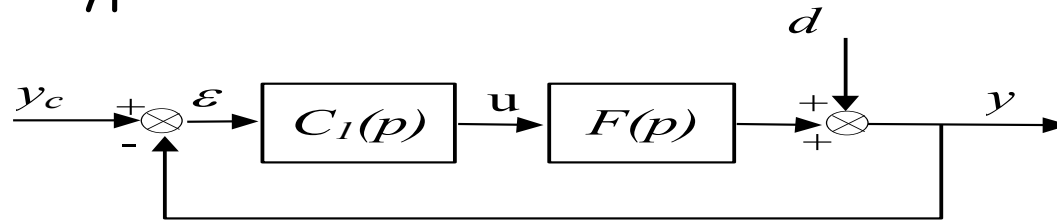
Une fois le cahier des charges fixé, la seconde étape consiste à synthétiser le correcteur $C(p)$ qui vérifie ce cahier des charges.

一旦设定了规范，第二步就是合成校正器 $C(p)$ ，以验证规范。

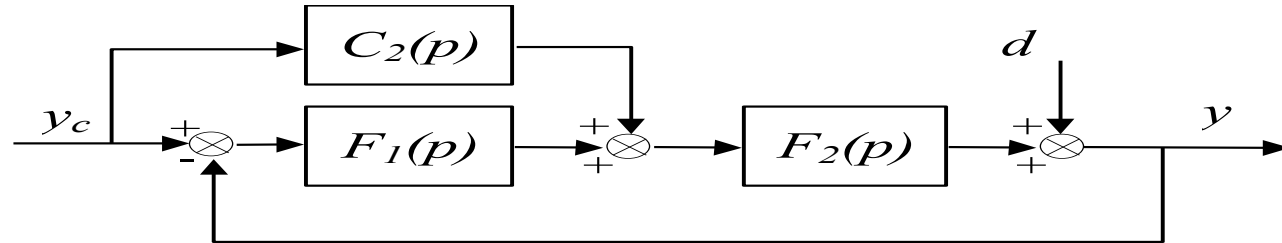
Il existe différentes méthodes de corrections :

校正方法有很多种：

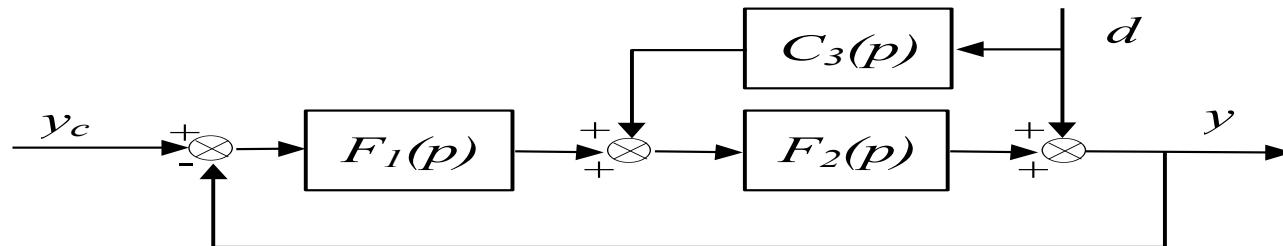
- Correcteur de type série ou cascade:



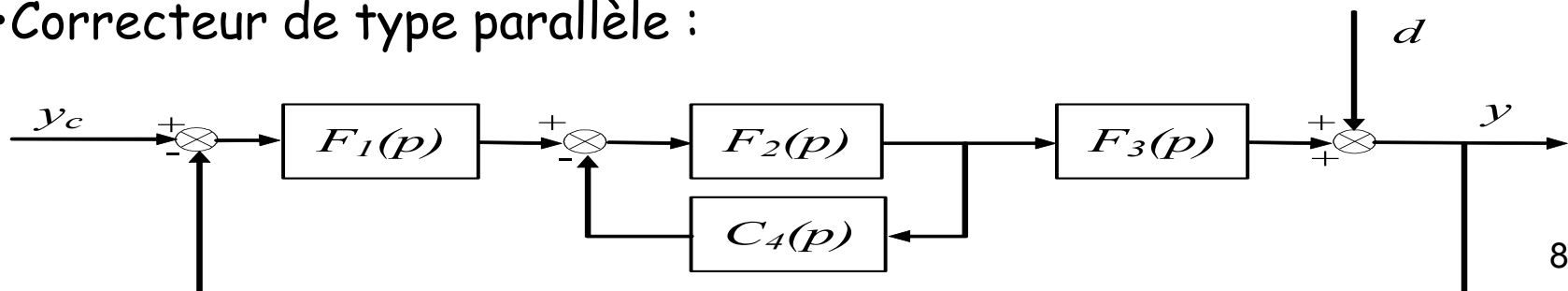
- Correcteur de type anticipation de l'entrée :



- Correcteur de type anticipation des perturbations :



- Correcteur de type parallèle :



Classification des régulateurs

1. Selon la nature de l'énergie qu'ils utilisent :

- Pneumatique : sortie 0.2 à 1 bar. Ils sont utilisés dans l'industrie chimique du gaz, ne présentent pas de danger d'explosion, de moins en moins utilisés car lents et encombrants.
- Electronique : sortie 4-20 mA utilisent des signaux analogiques à base d'amplificateurs opérationnels.
- Numérique : Sortie sous forme numérique. La technologie numérique permet d'avoir une grande souplesse : opération arithmétique, auto ajustage des coefficients, possibilité d'émettre ou de recevoir des données.

2. Selon le type d'action:

P-régulateur, PI Régulateur, PD régulateur, PID régulateur, Tout ou rien

3. Selon le sens d'action :

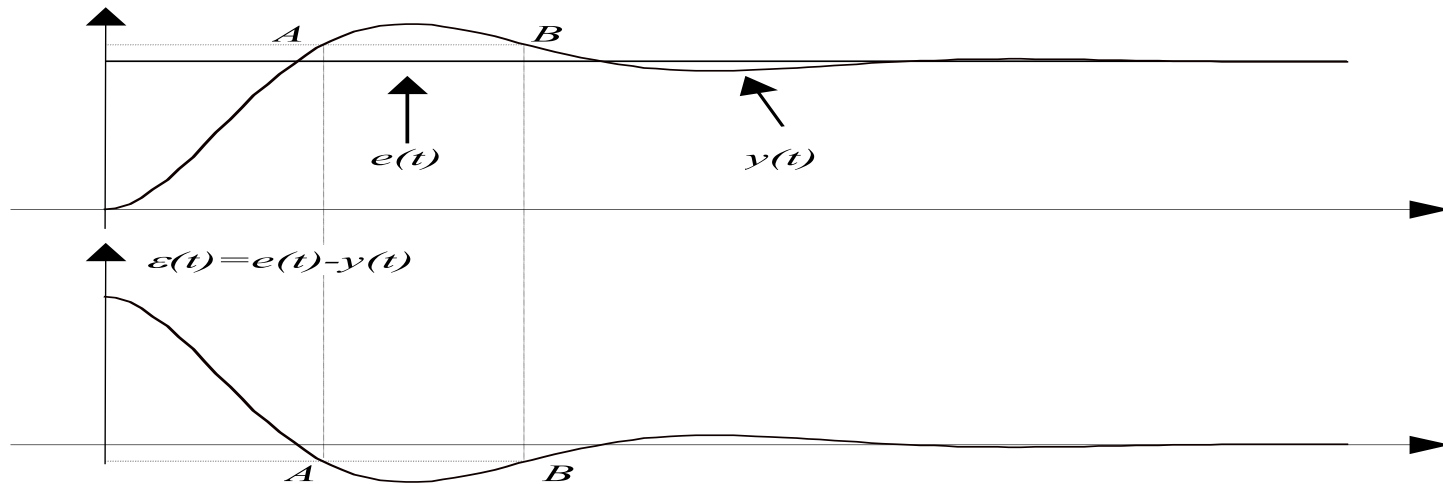
Le sens d'action est inversible et est choisi en fonction de celui de la vanne. Le sens de celle-ci est fixé en fonction des conditions de sécurité. Ainsi par exemple, une vanne de réglage d'un gaz combustible doit être fermée par manque d'air

. Direct - l'augmentation de la mesure provoque l'augmentation de la commande

. Inverse - l'augmentation de la mesure provoque la diminution de la commande

VI.2. Approche intuitive du problème:

La figure ci-dessous est la réponse indicielle d'un système asservi, représentée par la figure ci-dessous:



Plus l'erreur $\varepsilon(t)$ est important, plus le signal de commande ($u(t)$) doit être important pour ramener l'erreur vers zéro. Nous parlons de commande proportionnelle (P) 误差 $e(t)$ 越大, 控制信号 ($u(t)$) 就必须越大, 才能将误差减小为零。这就是所谓的比例控制 (P)。

$\varepsilon(t) \rightarrow u(t) \Rightarrow$ Nous parlons de commande proportionnelle (P).

Prendre en compte que la valeur de l'écart pour commander le système est souvent insuffisant: on a en particulier la même commande en A et en B bien que l'erreur en valeur absolue augmente en A et diminue en B. Pour cela, le signal de commande sera généré par:

$$\varepsilon(t) + \alpha \dot{\varepsilon}(t)$$

考虑到偏差值往往不足以对系统进行控制: 特别是, 虽然绝对值误差在 A 处增大而在 B 处减小, 但我们在 A 和 B 处的控制是相同的。因此, 控制信号将通过以下方式产生:

Nous parlons de commande proportionnelle - dérivée (PD).

Nous avons déjà vu qu'en rajoutant une intégration dans la chaîne directe nous annulons l'erreur statique 我们已经看到，通过在直接线路中添加积分，可以消除静态误差 $\varepsilon(t) = 0 \implies$ Nous parlons de commande intégrale (I).

Le signal de commande s'exprime alors comme suit :

$$u(t) = \underbrace{K\varepsilon(t)}_P + \underbrace{\beta \int \varepsilon(t)}_I + \underbrace{\alpha \dot{\varepsilon}(t)}_D$$

$$\xrightarrow{II} U(p) = \underbrace{K\varepsilon(p)}_P + \underbrace{\frac{\beta}{p} \varepsilon(p)}_I + \underbrace{\alpha p \varepsilon(p)}_D$$

En posant $T_d = \alpha$ et $T_i = 1/\beta$, nous obtenons la forme canonique d'un correcteur PID:

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$$

En résumé:

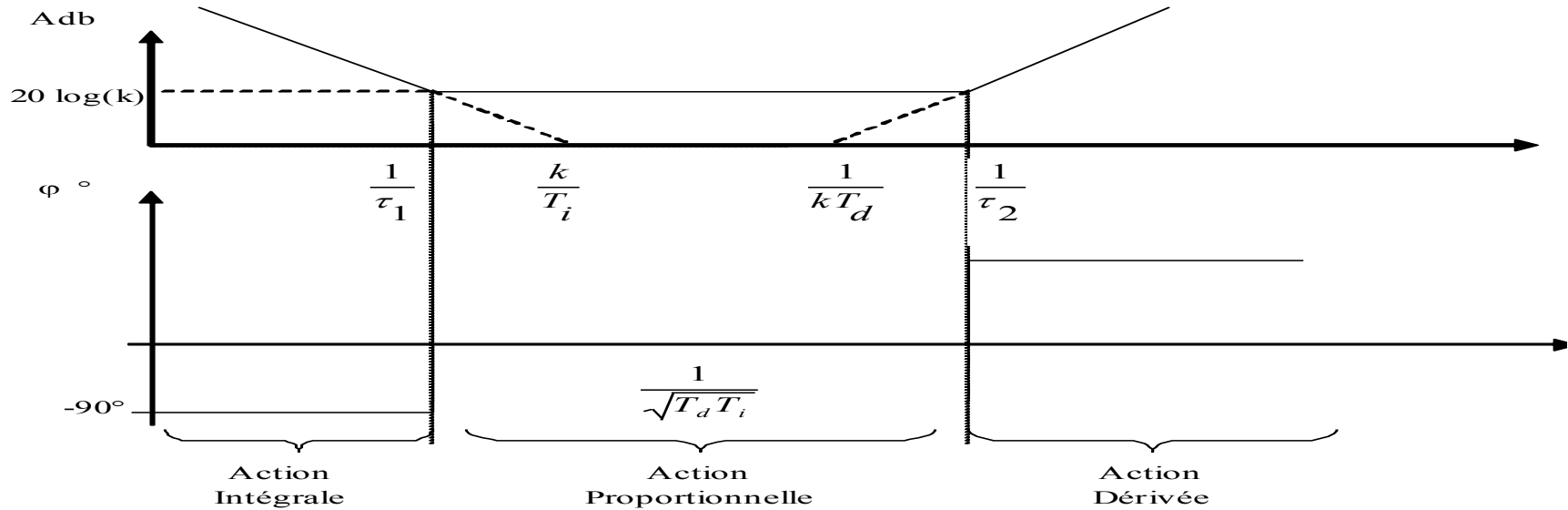
- L'action P augmente la précision dynamique : agit sur la rapidité.
- L'action I annule l'erreur statique: agit sur la précision.
- L'action D tend à stabiliser le système: agit sur la stabilité.

Ces trois actions sont complémentaires.

- 操作 P 增加动态精度：影响速度。
- 动作 I 消除静态误差：影响精度。
- 动作 D 使系统趋于稳定：影响稳定性。

Remarque: le dérivateur idéal $T_d p$ n'existe pas ; nous l'approximons par

$$\frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p}, \text{ avec } N \gg 1, (N \approx 10)$$



6.3. Différents correcteurs:

- P, PI, IP, PD, PID

- Avance de phase, retard de phase, Réseau avance-retard

相位提前、相位延迟、提前-延迟网络

Chapitre VII:

METHODES DE SYNTHESE DU P.I.D

实验方法：齐格勒-尼科尔斯法

VII.1-Méthodes expérimentales: Méthode de Ziegler - Nichols

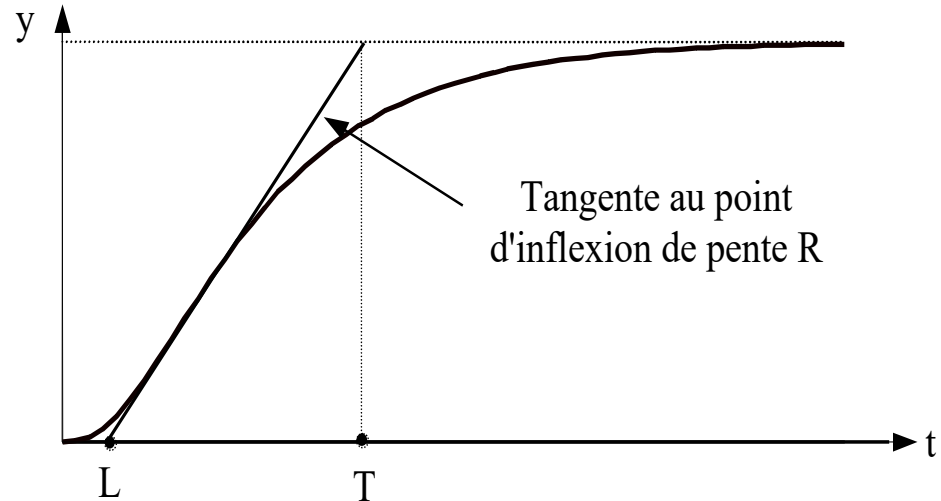
1-Essai indiciel en boucle ouverte

开环指数测试

Cette réponse peut être approximée par, si T est très grand devant L , par:

如果 T 与 L 相比非常大，
则该响应可近似为：

$$F(p) = \frac{RT}{1 + Tp}$$



• Régulateur proportionnel:

$C(p) = K$, avec

$$K = \frac{1}{LR}$$

• Régulateur proportionnel-Intégral:

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K_p + \frac{K_i}{p}, \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} K = \frac{0.9}{LR} \\ T_i = 3.3L \end{cases}$$

• Régulateur Proportionnel-Intégral-Dérivée:

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p, \quad \text{avec}$$

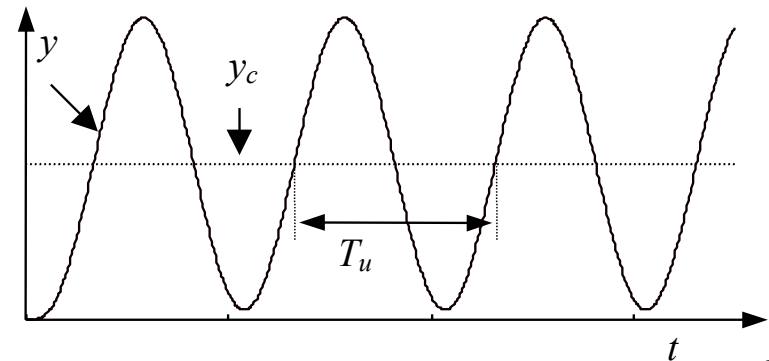
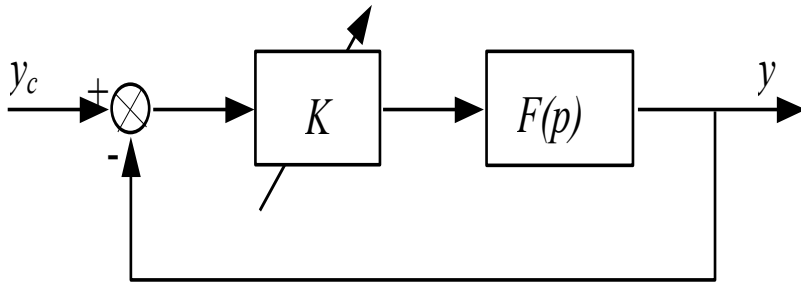
$$\begin{cases} K = \frac{1.2}{LR} \\ T_i = 2L \\ T_d = \frac{L}{2} \end{cases}$$

2-Essai indiciel en boucle fermée: (essai de pompage)

闭环指数测试：（泵送测试）

On utilise, d'abord, un correcteur proportionnel, on règle $K = K_u$ de telle sorte à avoir une réponse indicielle oscillante et non amortie. On prélève la période des oscillations T_u .

首先，我们使用比例校正器并调整 $K = K_u$ 以获得振荡和无阻尼的指数响应。取振荡周期 T_u 。



• Régulateur proportionnel:

$$C(p) = K, \quad \text{avec} \quad K = 0.5K_u$$

• Régulateur proportionnel-Intégral:

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K_p + \frac{K_i}{p}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = 0.45K_u \\ T_i = 0.83T_u \end{cases}$$

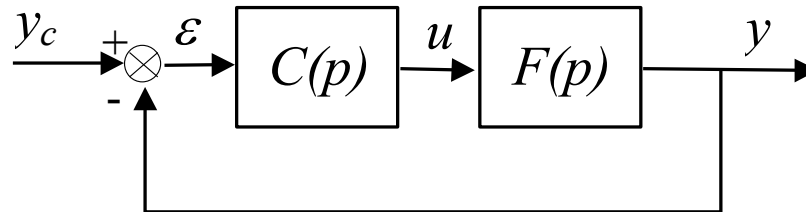
• Régulateur proportionnel-Intégral-Dérivée:

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = 0.6K_u \\ T_i = \frac{T_u}{2} \\ T_d = \frac{T_u}{8} \end{cases}$$

Une fois ces valeurs calculées, on peut modifier les paramètres autour de ces valeurs pour une amélioration sur site.

计算出这些值后，就可以修改其周围的参数，以改进效果。

VII.2.-Méthodes du modèle:



Soit $H(p)$ la FTBF désirée (modèle désiré en BF). $C(p)$ est la FT du régulateur à concevoir et $F(p)$ la FT du système à réguler.

设 $H(p)$ 为所需的 FTBF (所需的低频模型)。 $C(p)$ 是待设计控制器的 FT, $F(p)$ 是待控制系统的 FT。

$$H(p) = \frac{C(p)F(p)}{1 + C(p)F(p)} \Rightarrow C(p) = \frac{H(p)}{F(p)(1 - H(p))} = \frac{N_c(p)}{D_c(p)}$$

$C(p)$ 的可实现性要求:

La réalisabilité de $C(p)$ impose que le d° $D_c(p) \geq$ ou $=$ d° $N_c(p)$.

Il faut aussi nécessairement que les pôles de $C(p)$ soient stables
soit:

控制器传递函数 $C(p)$ 的分母的阶数 (度数) 必须大于或等于其分子的阶数。

racines de $D_c(p) = F(p)(1 - H(p)) = 0$ à parties réelles négatives

Synthèse du PID pour un système du 1^{er} et du 2nd ordre :

1- Système du 1^{er} ordre:

A- Compensation de pôles 极点补偿

系统中靠近虚轴的极点称为慢极点。这些极点会导致系统的响应时间变长，K 在这里通常指的是控制器增益。通过调节增益 K，可以将慢极点替换为快极点

Soit à asservir un système du 1^{er} ordre de la forme : $G(p) = \frac{G}{1 + \tau p}$

En BF on veut $F(p) = \frac{1}{1 + T_0 p}$ avec $T_0 = \frac{\tau}{n}$

Pour cela, l'utilisation d'un PI suffit: $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K \frac{1 + T_i p}{T_i p}$

$$\text{FTBF} \Rightarrow F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{KG(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p) + KG(1 + T_i p)}$$

en choisissant $T_i = \tau$, on compense le pôle de $G(p)$. Ce qui permet d'obtenir

$$F(p) = \frac{KG}{T_i p + KG} = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{KG} p} \Rightarrow \boxed{K = \frac{T_i}{T_0 G} = \frac{n T_i}{\tau G}}$$

***Cette technique est appelée "technique de compensation de pôles".
Ce qui revient à simplifier un pôle lent (grâce à T_i) et le remplacer par un pôle rapide (grâce à K).***

这一次，我们不再对一个极点进行补偿，而是将两个所需的极点置于无补偿的闭环中。由于系统和控制器（PI）都是一阶的，闭环系统自然也是二阶的。然后，我们固定两个所需的极点 p_1 和 p_2 ，就像我们可以固定阻尼系数 (ξ) 和自然频率 (ω_n) 一样。已知连接这些不同常数的关系为

B- Placement de pôles

Cette fois ci, au lieu de compenser un pôle on va placer deux pôles désirées en boucle fermée sans compensation. En effet, comme le système ainsi que le régulateur (le PI) sont du premier ordre, alors le système en boucle fermée est, naturellement, du second ordre.

On fixe, alors, les deux pôles désirées p_1 et p_2 , comme on peut fixer le coefficient d'amortissement (ξ) ainsi que la pulsation naturelle (ω_n). Sachant que les relations qui relient ses différentes constantes sont :

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

La fonction de transfert en boucle fermée, calculée précédemment, est :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{KG(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p) + KG(1+T_i p)} = \boxed{\frac{\frac{KG}{T_i \tau}(1+T_i p)}{p^2 + \frac{1+KG}{\tau} p + \frac{KG}{T_i \tau}}$$

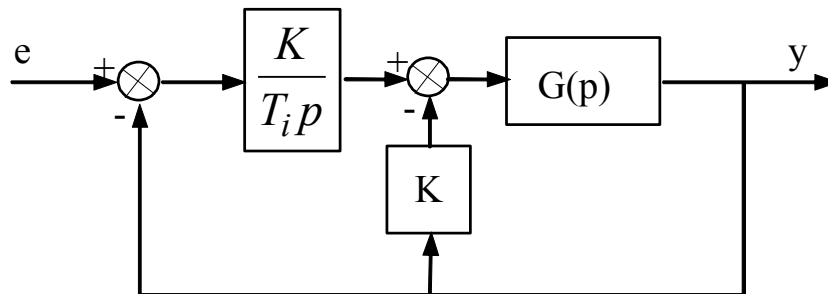
Par identification avec la dynamique d'un système du second ordre ($p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2$) on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} K = \frac{2\xi\omega_n\tau - 1}{G} \\ T_i = \frac{2\xi\omega_n\tau - 1}{\omega_n^2 \tau} \end{cases}}$$

Finalement, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2 (1 + T_i p)}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

On remarque la présence d'un zéro dans la FTBF ce qui pourrait poser un problème, si ce zéro s'avère lent ou instable. Si on est confronté à ce problème, on pourrait remplacer le régulateur PI par le régulateur IP suivant :



Pour les mêmes valeurs de K et de T_i , calculées précédemment, on obtient la fonction de transfert sans zéro suivante :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

2- Système du 2^{er} ordre:

Soit à asservir un système du 2^{er} ordre de la forme :

$$G(p) = \frac{b_0}{1 + a_1 p + a_2 p^2}$$

Les objectifs sont : une erreur statique nulle, une réponse à un échelon ayant un temps de montée t_M et un dépassement D (ou un temps de réponse t_r et un amortissement ξ). Soit une FTBF de la forme:

$$H(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Un PID avec l'action dérivée filtrée (pour filtrer les bruits de mesure), permet de satisfaire les conditions du cahier des charges:

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \tau_d p} \right), \quad \tau_d = \frac{T_d}{N}, \quad \frac{N}{1} \gg 1$$

La FTBF est :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{Kb_0 \left(1 + (T_i + \tau_d)p + T_i(T_d + \tau_d)p^2 \right)}{(1 + a_1 p + a_2 p^2)T_i p(1 + \tau_d p) + Kb_0 \left(1 + (T_i + \tau_d)p + T_i(T_d + \tau_d)p^2 \right)}$$

On choisit T_i , T_d et τ_d de telle sorte que les pôles de $G(p)$ soient simplifiés: $T_i + \tau_d = a_1$ et $T_i(T_d + \tau_d) = a_2$. On obtient alors :

$$F(p) = \frac{Kb_0}{T_i p(1 + \tau_d p) + Kb_0} = \frac{\frac{Kb_0}{T_i \tau_d}}{p^2 + \frac{1}{\tau_d} p + \frac{Kb_0}{T_i \tau_d}}$$

En identifiant $H(p) = F(p)$, on obtient:

零极点

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i = a_1 - \frac{1}{2\xi\omega_0} \\ T_d = \frac{a_2}{T_i} - \frac{1}{2\xi\omega_0} \\ \tau_d = \frac{1}{2\xi\omega_0} \\ K = \frac{\omega_0 T_i}{2\xi b_0} \end{array} \right. \quad 102$$

Références :

- M. Rivoire, J.L Ferrier, J. Groleau, « Cours d'automatique : Signaux et systèmes (tome1) », Edition Eyrolles.
- Y. Granjon, « Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état », Edition Dunod.
- J.P Caron, J.P Hautier, P.J Barre, « Systèmes automatiques : problèmes corrigés , applications industrielles, tome 3 », ISBN 2-7298-6780-5 , Edition Ellipses.
- E. Godoy et coll., « Régulation industrielle », l'usine nouvelle, ISBN 978-2-10-049739-3, Edition Dunod.