TD N°4 et TD5

Exercice 1:

On désire asservir le système représenté par la fonction de transfert suivante:

$$G(p) = \frac{30}{(1+0.5p)^3}$$

1. La figure 2 représente le lieu de Black du système. Orienter le lieu en argumentant.

2. Donner les marges de gain et phase (à partir des figures 2 et 3). Conclure sur la stabilité du système.

3. On désire asservir le système par un régulateur *C(p)* Soit :

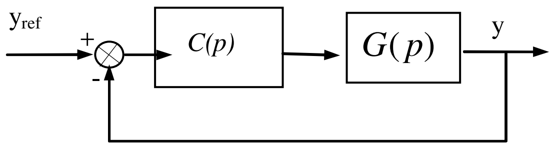


Figure 1. Système en boucle fermée avec correcteur C(p)

- ✓ Si C(p) est un simple Gain ($C(p)=K_p$), calculer le gain limite de stabilité et donner l'allure de la réponse indicielle.
- ✓ Retrouver la valeur gain limite par le critère de Routh
- ✓ Dans le cas où *C(p)* serait un régulateur PID, calculer les paramètres *C(p)* pour asservir le système en utilisant la méthode de Ziegler-Nichols.

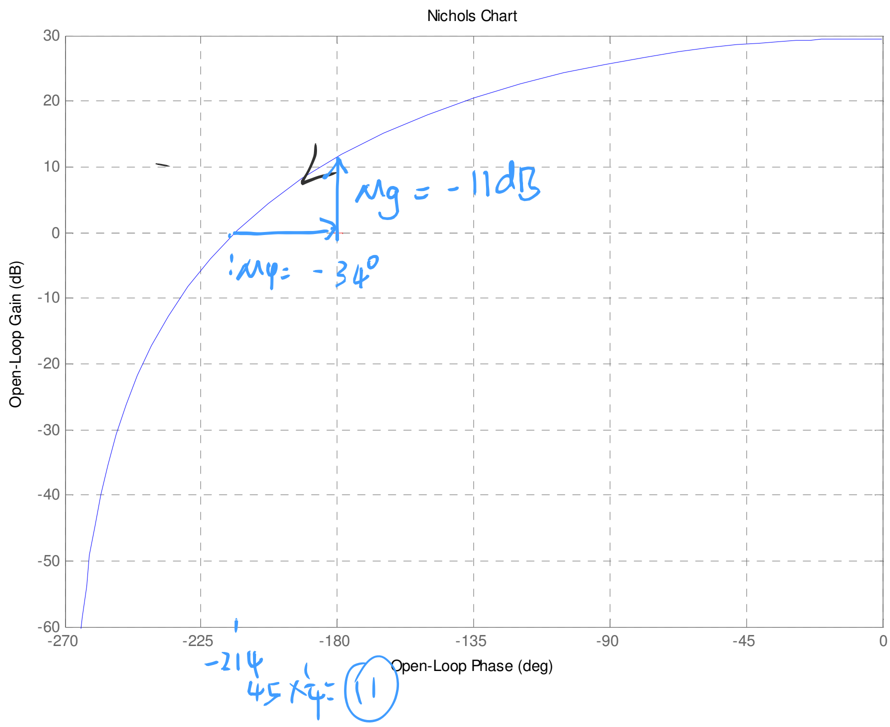


Figure 2. Diagramme de Black de G(p)

3. (1) 当 $\varphi(w_g) = -180°$ 时，$w_g = 3.5\,rad/s$.

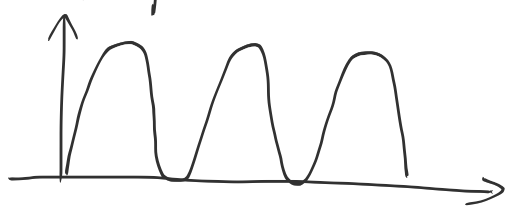
$$M_g = -|G(jw_g)|_{dB} = -11\ rad/s$$

加入增益 $C(p)$：$M_g = -|C(jw_g)G(jw_g)|_{dB}$

$$= -20\log K_p - |G(jw_g)|_{dB} = 0$$

$$20\log K_p = -11 \qquad K_{p\,lim} = 10^{\frac{-11}{20}} = 0.577$$

l'allure de la réponse indicielle :



等幅振荡

(2) $$G(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{\frac{30k}{(1+0.5p)^3}}{1+\frac{30k}{(1+0.5p)^3}} = \frac{30k}{(1+0.5p)^3+30k}$$

$$= \frac{30k}{\frac{1}{8}p^3+\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{2}p+1+30k} = \frac{240k}{p^3+6p^2+12p+8+240k}$$

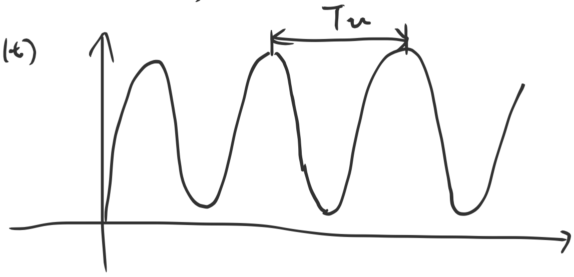
p^3	1	12	0
p^2	6	$8+240k$	0
p^1	$\frac{72-8-240k}{6}$	0	
p^0	$8+240k$	0	
p^{-1}	0	0	
p^{-2}			

$$\begin{cases} \frac{64-240k}{6} > 0 \\ 8+240k > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{30} < k < \frac{4}{15}}$$

$$\begin{cases} k = \frac{4}{15} \\ 6 \quad 8+240k \\ 12 \quad 0 \\ 8+240k \end{cases}$$

(3) PID : Ziegler-Nichols.

$K_u = \frac{4}{15} = 0.266$



$T_u = \frac{2\pi}{w_u} = \frac{2\pi}{3.5} = 1.795$

$$\begin{cases} k = 0.6K_u = 0.1596 \\ T_i = \frac{T_u}{2} = 0.8976 \\ T_d = \frac{T_u}{8} = 0.224 \end{cases}$$

$$C(p) = k\left(1+\frac{1}{T_ip}+T_dp\right) = 0.1596 + 1.114\cdot\frac{1}{p} + 0.0224p.$$

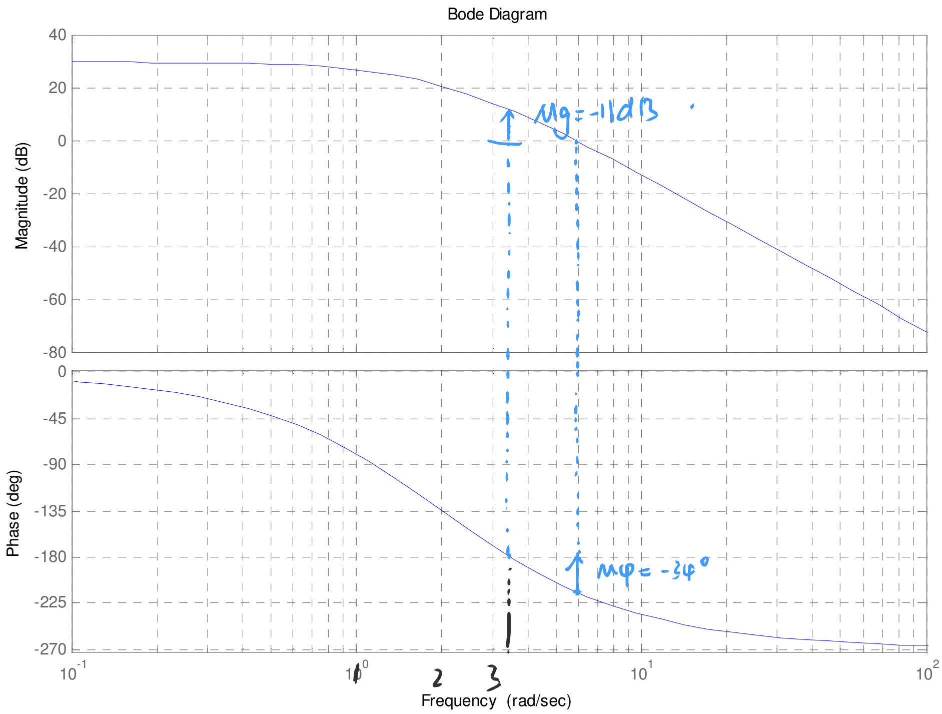


Figure 3. Diagramme de Bode de G(p)

Exercice 2 **:**

Soit le système dont la fonction de transfert est la suivante : $G(p) = \dfrac{2}{1+5p}$

1. Calculer le gain statique et l'erreur statique en boucle ouverte
2. Calculer l'erreur statique (avec et sans perturbation) et le temps de réponse en boucle fermée (sans correcteur) comme indiqué sur la figure suivante : *D(p)* représente la perturbation, *U(p)* la commande, $Y_c(p)$ la consigne de type échelon, *Y(p)* la sortie et $\varepsilon(p)$ l'erreur :

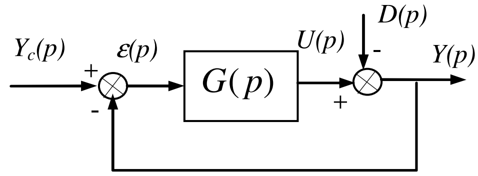


Figure 1. Système bouclé sans correcteur

3. Proposer et calculer la fonction de transfert du régulateur C(p) qui conduit à un système du premier ordre en boucle fermée, qui annule l'erreur statique et qui permet de rendre le système 5 fois plus rapide en boucle fermée qu'en boucle ouverte.

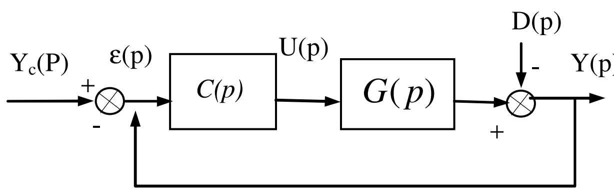


Figure 2. Schéma du système bouclé avec le correcteur

4. Donner l'allure de la réponse indicielle en boucle ouverte et en boucle fermée avec correcteur.

1) 标准一阶 : $\frac{k}{1+\tau p}$. $G(p)=\frac{2}{1+5p} \Rightarrow \begin{cases} \text{gain statique} : k=2 \\ \tau = 5s \end{cases}$

pôle du système : $-\frac{1}{5}$

temps du réponse $= 3\tau = 15\,s$

gain statique : $G(0) = 2 = k$.

erreur statique : entrée échelon → entrée - sortie

$$\varepsilon(t) = u(t) - Y(t)$$

$$\varepsilon(p) = U(p) - Y(p) = [1-G(p)]\,U(p)$$

$$U(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow \varepsilon(p) = \left(1-\frac{2}{1+5p}\right)\frac{1}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \text{erreur statique} = \lim_{p\to\infty}\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} 1-\frac{2}{1+5p} = -1$$

一阶系统阶跃响应 $y(t) = k*(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

$$= 2(1-e^{-\frac{t}{5}})$$

t_{rBO} : temps de réponse en Boucle ouverte $= 3\tau = 15s$.

2) 1° $D(p)=0$. 无干扰

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1(p) &= Y_c(p) - Y(p) \\ Y(p) &= \underbrace{\frac{G(p)}{1+G(p)}}_{FTBF} Y_c(p) \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon_1(p) = \left(1-\frac{G(p)}{1+G(p)}\right)Y_c(p)$$

$$= \left(1-\frac{2}{3+5p}\right)Y_c(p)$$

$$\varepsilon_1(p) = \left(1-\frac{2}{3+5p}\right)\frac{1}{p} = \frac{5p+1}{p(3+5p)} \Rightarrow y(t) = \frac{2}{3}\left(1-e^{-\frac{3}{5}p}\right)$$

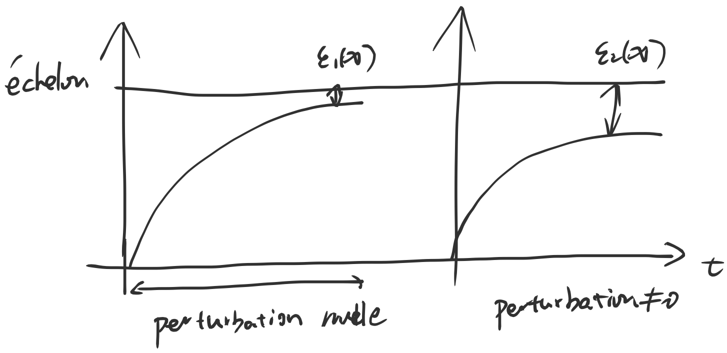
$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{p\to 0}\left(1-\frac{2}{3+5p}\right) = \frac{1}{3}$$

2° $D(p) \neq 0$, $Y_c(p) = \frac{1}{p}$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2(p) &= Y_c(p) - Y(p) \\ Y(p) &= U(p) - D(p) \\ U(p) &= G(p)\,\varepsilon_2(p) \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon_2(p) = \frac{Y_c(p)+D(p)}{1+G(p)}$$

Si $D(p)$ = échelon $= \frac{u_0}{p}$, $u_0 < 1$

$$\varepsilon_2(p) = \frac{1+u_0}{p[1+G(p)]}, \quad \varepsilon_2(\infty) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{(1+u_0)(1+5p)}{3+5p}\right) = \frac{1+u_0}{3}$$



FTBF : $\frac{2}{3+5p} = \frac{2/3}{\frac{5}{3}p+1}$ $\left\{ \begin{array}{l} 1^e \text{ ordre} \\ \tau = \frac{5}{3} s \\ \text{temps de réponse} = 3 \times \frac{5}{3} = 5s \\ \text{gain } k = 2/3 \\ \text{pôle} : -3/5 \end{array} \right.$

3) 之前 $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\infty) \neq 0 \text{ (在有干扰)} \\ \text{Gain} \neq 1, \ y(\infty) \neq y_c(\infty) \\ \text{temps à réponse} = 5s \end{array} \right.$

设计 correcter :

① 为了消除静态错误 ⇒ I

② 为了提速 ⇒ P

PI : $C(p) = K\left(1+\frac{1}{T_ip}\right) = k_p\left(\frac{1+T_ip}{T_ip}\right)$ $\left\{ \begin{array}{l} K = 0.45\,K_u \\ T_i = 0.83\,T_u \end{array} \right.$

极点补偿 : 先认为 $d(t)=0$ 一无干扰.

FTBO : $C(p)G(p) = k_p\left(\frac{1+T_ip}{T_ip}\right)\frac{2}{1+5p}$

FTBF : $\frac{k_p(1+T_ip)2}{T_ip(1+5p)+2k_p(1+T_ip)}$

si $T_i=5$ $= \frac{2k_p}{T_ip+2k_p} = \frac{1}{\frac{T_i}{2k_p}p+1}$ → 变为一阶

新系统 $t_{rBF} = \frac{3\times T_i}{2k_p} = \frac{15}{2k_p}$.

$t_{rBF} = \frac{t_{rBO}}{5}$ ⇒ $\frac{15}{2k_p} = \frac{15}{5} = k_p = \frac{3}{2} s$

$\tau_{BF} : \frac{T_i}{2k_p} = \frac{5 \times 6}{2 \times 15} = 1s$

4) $\left. \begin{array}{l} y_c(t) = \text{échelon unité} \\ d(t) = \text{échelon unité} \end{array} \right.$ ⇒ $\varepsilon(\infty) = 0 \Big\}$ en BF → 接近 1.

4. Donner l'allure de la réponse indicielle en boucle ouverte et en boucle fermée avec correcteur.

<u>Exercice 3</u> : Asservissement d'un système du second ordre avec une intégration

On s'intéresse à l'asservissement de position d'un moteur à courant continu. Le schéma du système en boucle fermée est le suivant :

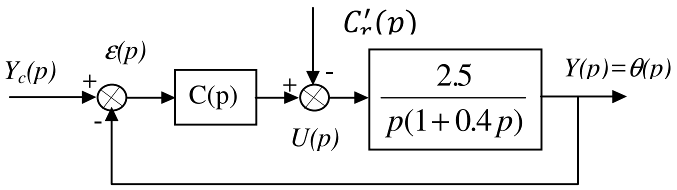


Figure Schéma de l'asservissement en position d'un moteur

A. <u>Cas où $C'_r(p)=0$</u>
Calculer les coefficients de C(p) pour imposer un comportement d'un système du premier ordre, un temps de réponse de 0.2s et une erreur statique nulle.

B. <u>Cas où $C'_r(p) \neq 0$</u>

Calculer l'erreur statique.

C. Quel type de correcteur permet d'améliorer les performances du système en poursuite et en régulation ? 跟踪和控制方面性能

D. Donner les coefficients du correcteur pour imposer un temps de réponse en asservissement de 0.3s.

A. $C_r'(p) = 0$

FTBF = $H(p) = \dfrac{C(p)F(p)}{1 + C(p)F(p)}$, $F(p) = \dfrac{2.5}{p(1+0.4p)}$

① temps de réponse : $t_r = 0.2$, $\tau = \dfrac{t_r}{3} = \dfrac{0.2}{3}$

② erreur statique nulle : le gain $k = 1$

③ 1er order

donc, $H(p) = \dfrac{1}{1 + \frac{0.2}{3}p}$

$$C(p) = \frac{H(p)}{F(p)\,(1 - H(p))} = \frac{1}{(1+\frac{0.2}{3}p)\left(\frac{2.5}{p(1+0.4p)}\right)\left[1 - \frac{1}{1+\frac{0.2}{3}p}\right]}$$

$= \underbrace{6\,(1 + 0.4p)}$ ⇒ correcteurs P.D.

B. $C'_r(p) \neq 0$. $C'_r(p)$ = échelon → $C'_r(p) = \frac{u_0}{p}$, $Y_c(p) = \frac{1}{p}$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon(p) &= Y_c(p) - Y(p) \\ Y(p) &= F(p)\,(U(p) - C'_r(p)) \\ U(p) &= C(p)\,\varepsilon(p) \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon(p) = \frac{Y_c(p) + C'_r(p)}{1 + C(p)F(p)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{1}{p}\left[\frac{1+F(p)u_0}{1+C(p)F(p)}\right] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{p}{p+2.5\times 6}\cdot\frac{p(1+0.4p)+u_0\times 2.5}{p(1+0.4p)}\right]$$
$$= \frac{u_0}{6}$$

C. P.I.D

D. $$C(p) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i p}+T_d p\right) = \frac{K_p}{T_i p}\left(1+T_i p+T_i T_d p^2\right)$$

$$C(p) = \frac{K_p}{T_i p}(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) \qquad \begin{cases} \tau_1+\tau_2 = T_i \\ \tau_1\tau_2 = T_i T_d \end{cases}$$

FTBF: $$H(p) = \frac{C(p)F(p)}{1+C(p)F(p)} = \frac{K_p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)2.5}{K_p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)2.5+T_i p(0.4p+1)p}$$

减少阶数，令 $\tau_1 = 0.4$

$$H(p) = \frac{2.5K_p(1+\tau_2 p)}{2.5K_p(1+\tau_2 p)+T_i p^2}$$
$$= \frac{2.5K_p}{p^2+\frac{2.5K_p\tau_2}{T_i}p+\frac{2.5K_p}{T_i}}(1+\tau_2 p)$$

$$\omega_n^2 = \frac{2.5K_p}{T_i} \qquad 2\xi\omega_n = \frac{2.5K_p}{T_i}\tau_2.$$

$H(p)$为二阶系统，闭环响应时间 $t_r = 0.3$，利用 $\omega_n t_r = f(\xi)$

$$\xi = 0.707 \rightarrow \omega_n t_r = 3, \quad \omega_n = \frac{3}{t_r} = \frac{3}{0.3} = 10\,\text{rad/s}$$

$$2\xi\omega_n = \underbrace{\frac{2.5K_p}{T_i}}_{\omega_n^2}\tau_2 \Rightarrow \tau_2 = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2\times 0.707}{10} = 0.1414$$

$$T_i = \tau_1+\tau_2 = 0.1414+0.4 = 0.5414$$

$$\tau_1\tau_2 = T_i T_d \Rightarrow T_d = \frac{\tau_1\tau_2}{T_i} = \frac{0.4\times 0.1414}{0.5414} = 0.1045.$$

$$\omega_n^2 = \frac{2.5}{T_i}K_p \Rightarrow K_p = \frac{T_i}{2.5}\omega_n^2 = 21.656.$$

Exercice 4 **:**

La fonction de transfert *F(p)* en boucle ouverte (correcteur proportionnel et système à asservir) d'un asservissement à retour unitaire est de la forme : $F(p) = \dfrac{K}{p^n(1+Tp)^2}$

1. Donner le schéma fonctionnel en boucle fermée en précisant : la consigne, l'écart, la commande, la sortie, le correcteur et le système.
2. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée.
3. Déterminer *K*, *T* et *n*, pour qu'en boucle fermée le système réponde aux deux spécifications suivantes :
   - Pour une rampe d'entrée $Y_c(t)$ de pente unitaire, l'erreur de traînage est de *1/50*.
   - La marge de gain est de *6dB*. ($Mg\big|_{dB} = 6dB$ ou $Mg = 2$).

Aide : $arg\left[\left(\dfrac{\alpha}{(i\beta)^n}\right)\left(\dfrac{c}{(a+ib)^m}\right)\right] = n * arg\left(\dfrac{\alpha}{(i\beta)}\right) + m * arg\left(\dfrac{c}{(a+ib)}\right)$

1.