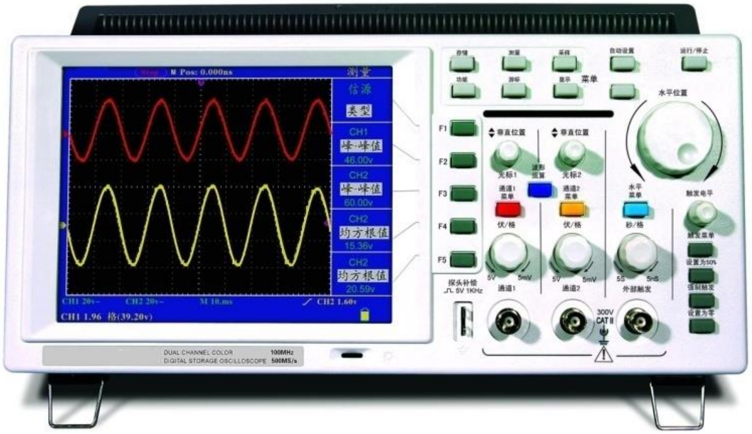
第三章　时域分析法

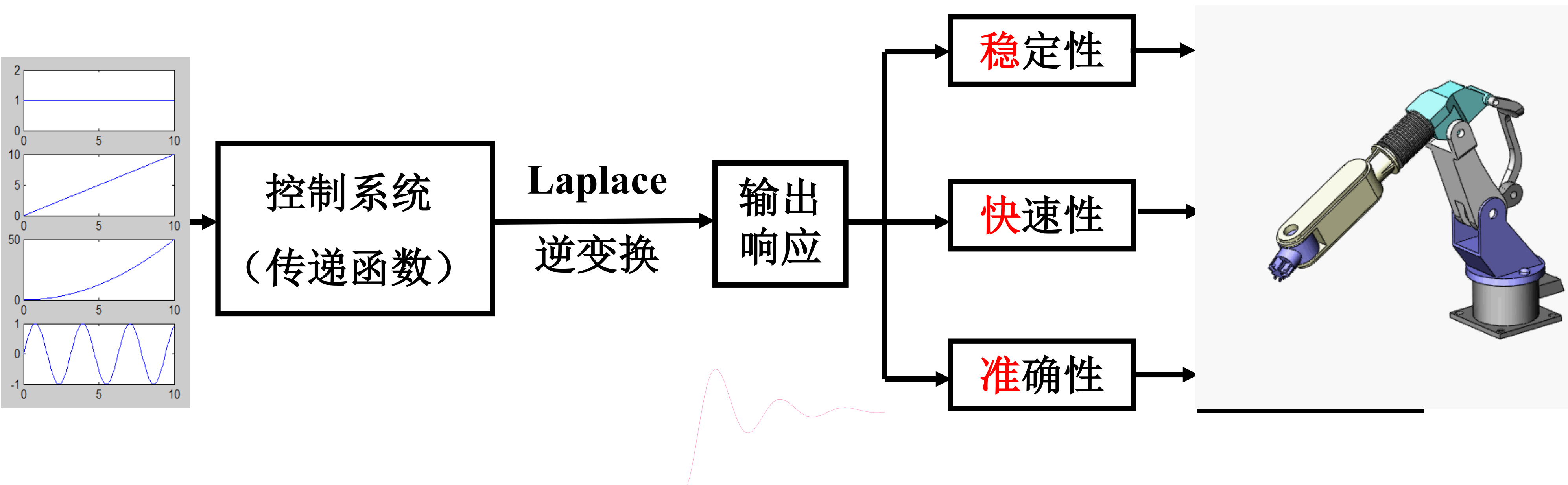
线性系统的三大分析方法：

- 时域(Time domain)分析法；
- 频域(Frequency domain)分析法【频率响应法】；
- 根轨迹(Root locus)法。

时域分析方法，是一种最基本、最直接的分析方法，具有直观、准确的优点；随着计算机技术的发展，时域分析法不再局限于低阶系统，几乎可以解决各种系统的分析和综合问题。



时域法流程： 根据系统的模型和典型输入信号，利用拉普拉斯逆变换求出系统的时域响应，进而按照响应曲线来分析系统的性能。



第三章　时域分析法

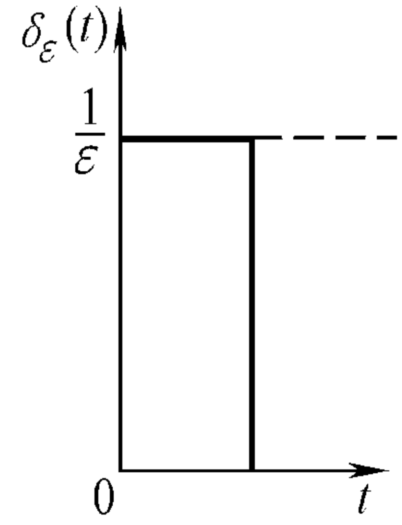
3.1 典型输入信号（P40）

（ Typical input/test signals）

特 点	类 型
❖ 意义鲜明	❖ 脉冲信号
❖ 表达简单	❖ 阶跃信号
❖ 便于分析和处理	❖ 速度信号
❖ 易于实验室获得	❖ 加速度信号
	❖ 正弦信号

1. 脉冲（冲激）信号(impulse signal)

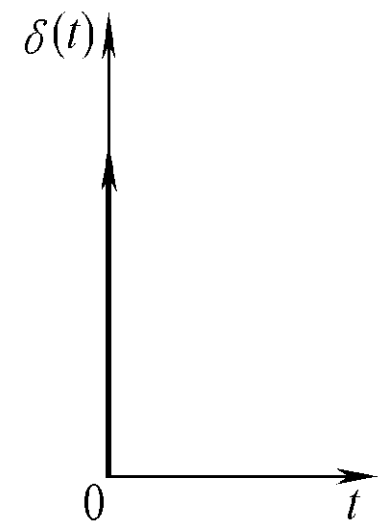
$$r(t)=\begin{cases}\dfrac{D}{\varepsilon}, & 0<t<\varepsilon\\ 0, & t<0\text{及}t>\varepsilon\end{cases}$$



D为常量， D=1的脉冲信号称为单位脉冲信号，记：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases},\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1$$

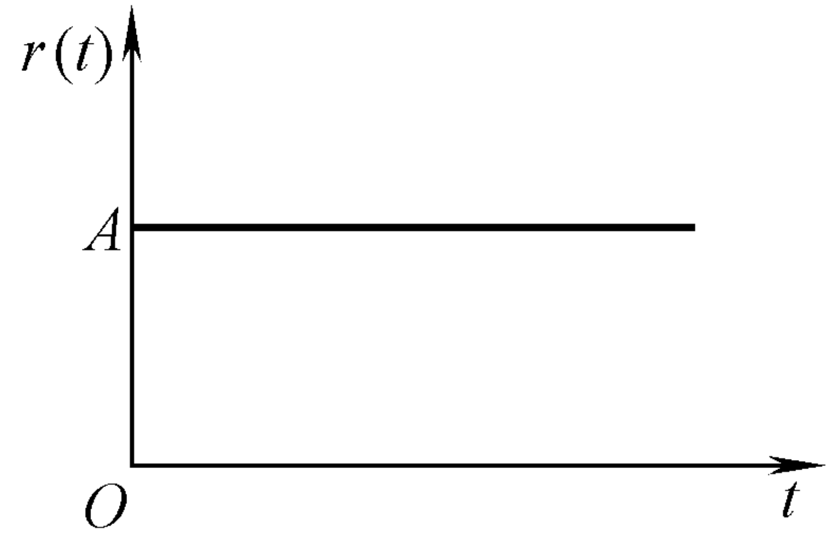
$$R(s)=L\left[\delta(t)\right]=1$$



b)

2. 位置（阶跃）信号(position/step signal)

$$r(t)=\begin{cases}A, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

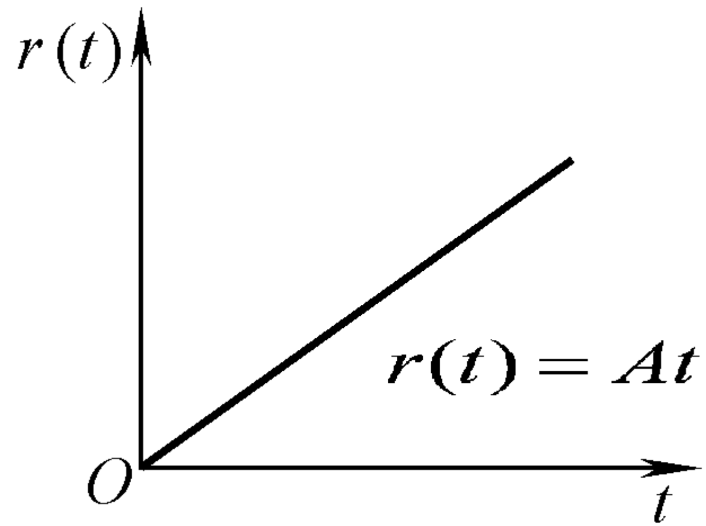


A为常量，A=1的阶跃信号称为单位阶跃信号。

$$R(s)=L[1(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}1dt=\frac{1}{s}$$

3. 速度（斜坡）信号(velocity/ramp signal)

$$r(t)=\begin{cases} At, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



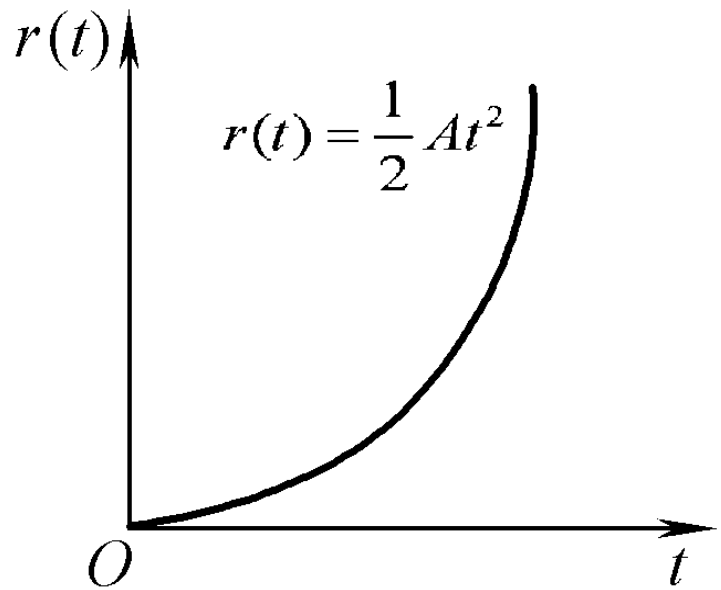
A为常量，A=1的速度信号称为单位速度信号。

$$R(s)=L[t]=\frac{1}{s^2}$$

判断题：速度信号曲线上的点表示当前的运动速度值。

4. 加速度（抛物线）信号 (Acceleration/parabolic signal)

$$r(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}At^2, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



A为常量，A=1的加速度信号称为单位加速度信号。

$$R(s)=L\left[\frac{1}{2}t^2\right]=\frac{1}{s^3}$$

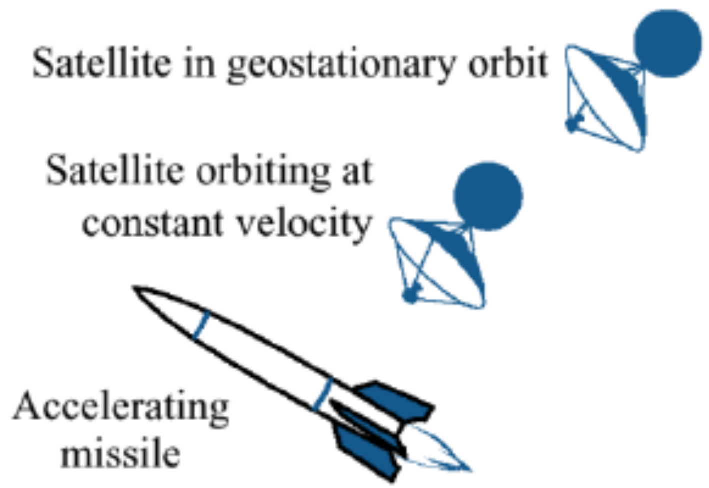
5. 正弦信号(sinusoidal signal)

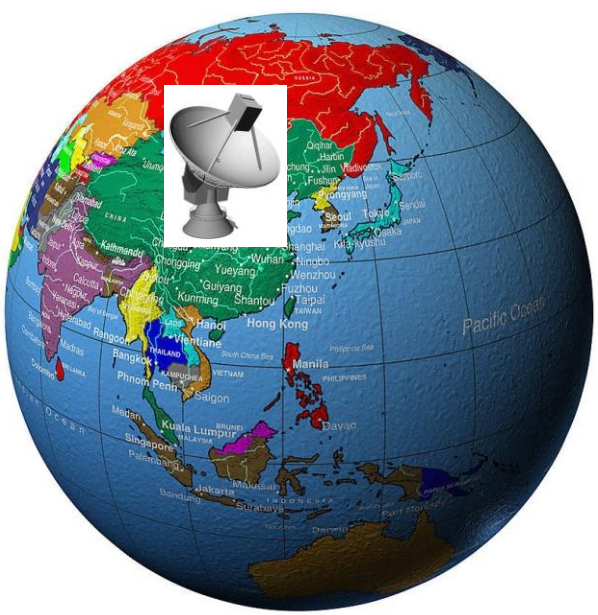
$$r(t) = A\sin\omega t$$

$$R(s) = L[r(t)] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

分析一个系统时需要采用哪种信号，要根据系统实际输入信号的性质而定。

思考题:





冲激信号

位置信号

速度信号

加速度信号

正弦信号

3.2　控制系统的时域性能指标(P42)

对于线性定常（LTI）系统：

$$r(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{system}} \longrightarrow y(t)$$

时域响应

- 暂态过程 — 从初始态到接近稳态的响应。
- 稳态过程 — t 趋于无穷大时的输出状态。

分析方法：建模得 $\Phi(s) \xrightarrow{Y(s)=R(s)\Phi(s)} Y(s) \xrightarrow{L^{-1}(.)} y(t)$

系统的输出：

$$Y(s)=R(s)\Phi(s)=\sum_{k=1}^{l}\frac{B_k}{s-s_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-s_i}$$

s_k 为 $R(s)$ 的极点。 s_i 为$\Phi(s)$的极点。

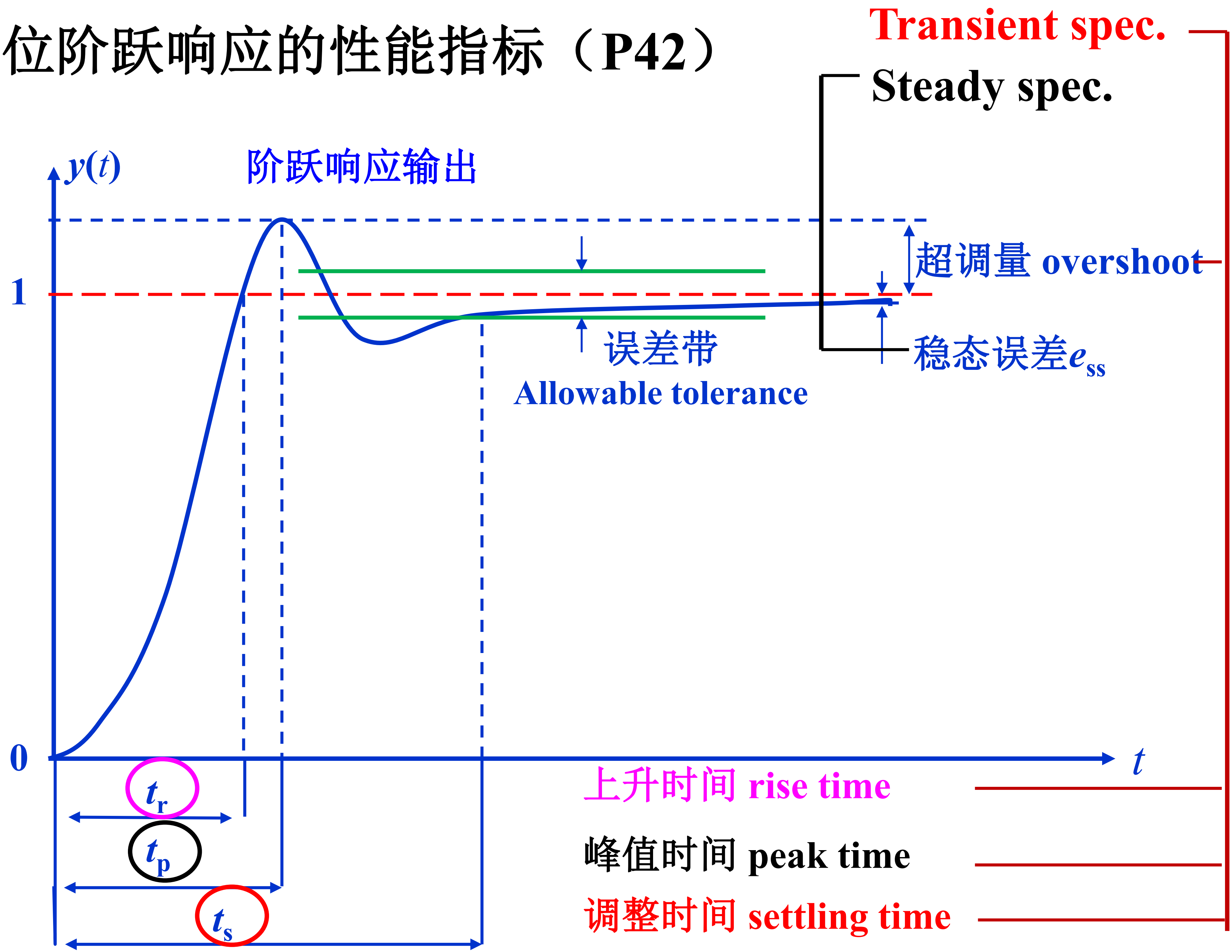
如果 s_i和s_k是互异的，那么系统的零状态响应为：

$$y(t)=\sum_{k=1}^{l}B_k e^{s_k t}+\sum_{i=1}^{n}A_i e^{s_i t}$$

稳态响应	暂态响应
强迫响应	自由响应

系统的时域性能指标可以从零状态响应中求取。

单位阶跃响应的性能指标（P42）



单位阶跃响应暂态性能指标（P42）：

1° 上升时间t_r：指$y(t)$第一次上升到稳态值（有振荡），或从稳态值的10%上升到90%所需的时间（无振荡）。

2° 峰值时间t_p：$y(t)$第一次达到峰值所需的时间。

3° 超调量σ%：$y(t)$的偏离稳态值的最大百分 比：

$$\sigma\% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

4° 调整时间t_s：$y(t)$和$y(\infty)$之间的偏差达到允许范围（2%或5%）时的暂态过程时间。

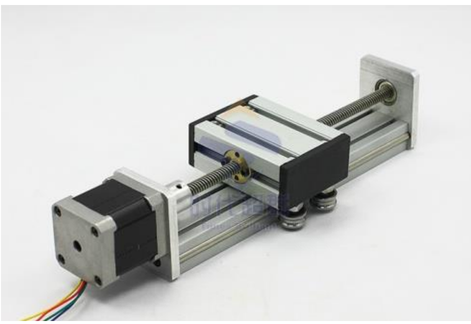
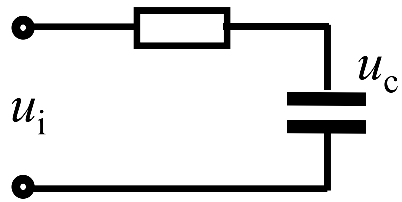
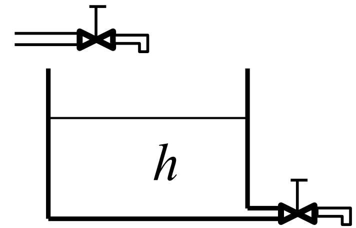
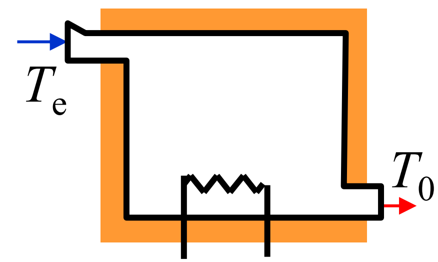
3.3 一阶系统的响应（P24）

系统描述

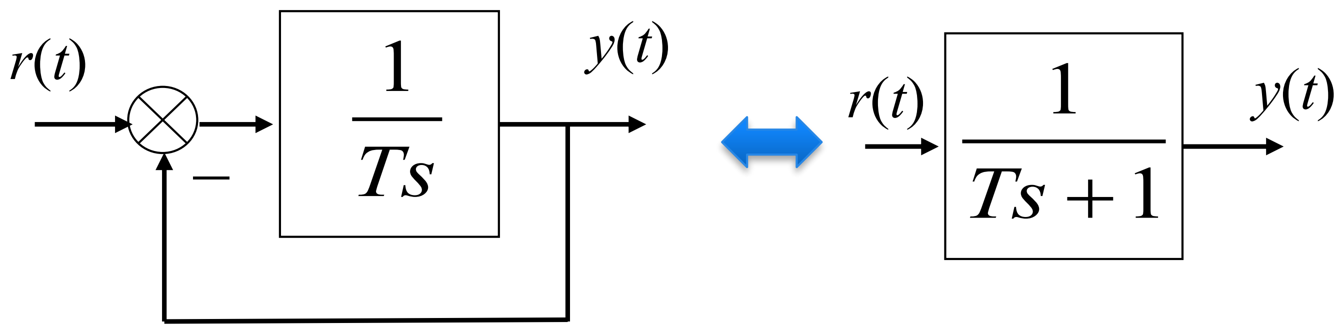
分析方法

典型响应

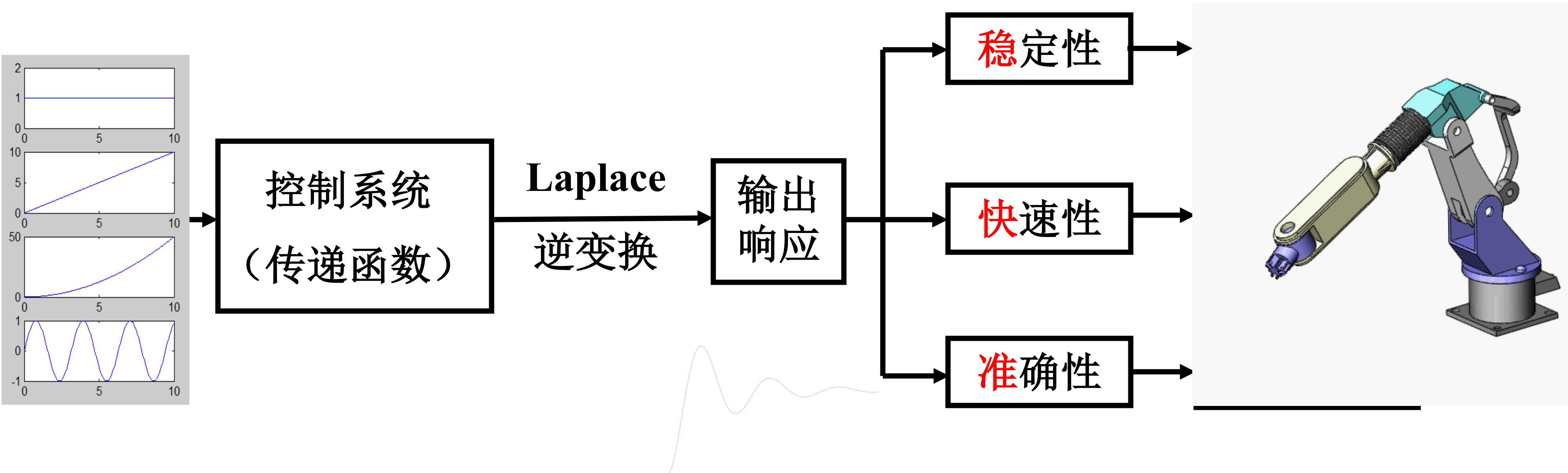
案例分析

系统描述 机	分析方法 电	典型响应 液	案例分析 热
			

典型一阶系统：



闭环传递函数：$\Phi(s)=\dfrac{\dfrac{1}{Ts}}{1+\dfrac{1}{Ts}}=\dfrac{1}{Ts+1}$



时域法的优点：1）直观、准确；2）通用性强；

随着计算机技术的发展，时域法不再局限于求解低阶系统，几乎可以解决各种系统的分析和综合问题。

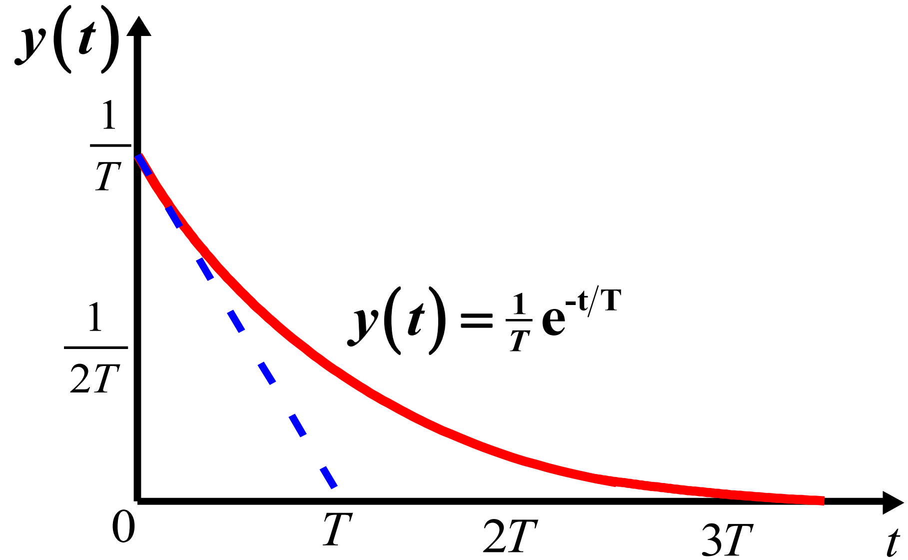
系统描述 | 分析方法 | 典型响应 | 案例分析

1) 单位脉冲响应(Unit-impulse response)

$$r(t)=\delta(t), R(s)=1$$

$$Y(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

$$y(t)=\frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}, t\geq 0$$



李雅普诺夫
（1857-1918）

$\lim_{t\to\infty} h(t)=0$，系统渐近稳定。

$\lim_{t\to\infty} h(t)=\mathrm{Con}$，系统临界稳定。

$\lim_{t\to\infty} h(t)=\infty$，系统不稳定。

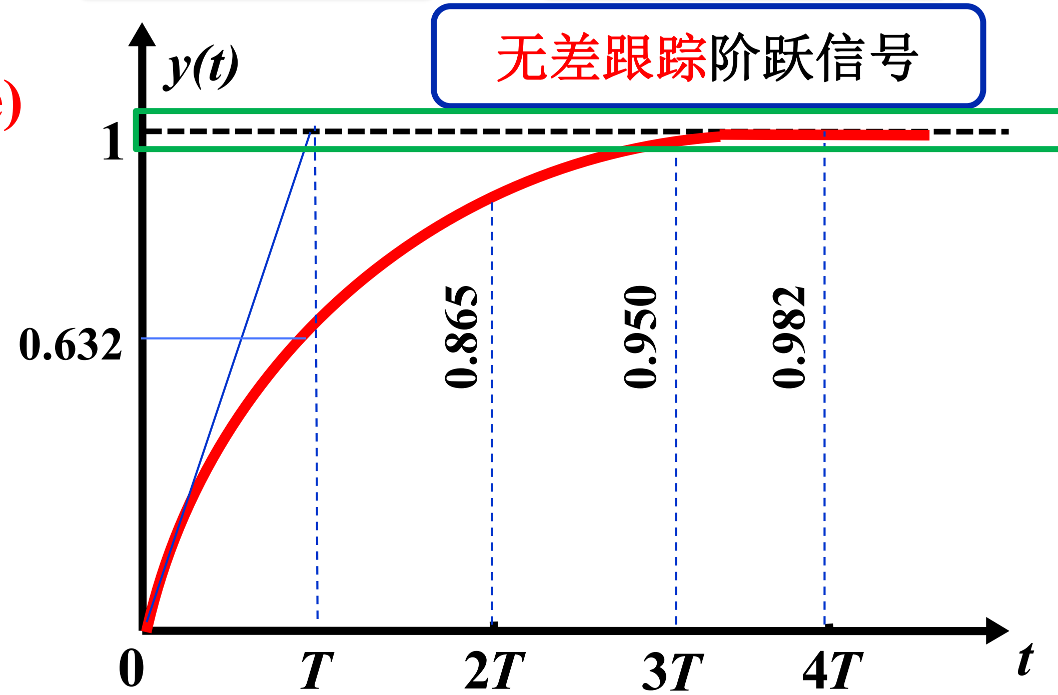
$$r(t)\longrightarrow\boxed{\frac{1}{Ts+1}}\longrightarrow y(t)$$

2)单位阶跃响应(Unit-step response)

$$r(t) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}$$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$



稳

1)绝对稳定：BIBO稳定

2)相对稳定性:非振荡特性

快

$t=T$, $y(t)=0.632$;

$t=2T$, $y(t)=0.865$;

$t=3T$, $y(t)=0.950$;

$t=4T$, $y(t)=0.982$;

准

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\left[r(t) - y(t)\right] = \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{T}} = 0$$

阶跃响应静差为零。

3)单位速度响应(Unit-ramp response)

$$r(t)=t$$

$$y(t)=t-T+Te^{-t/T}$$

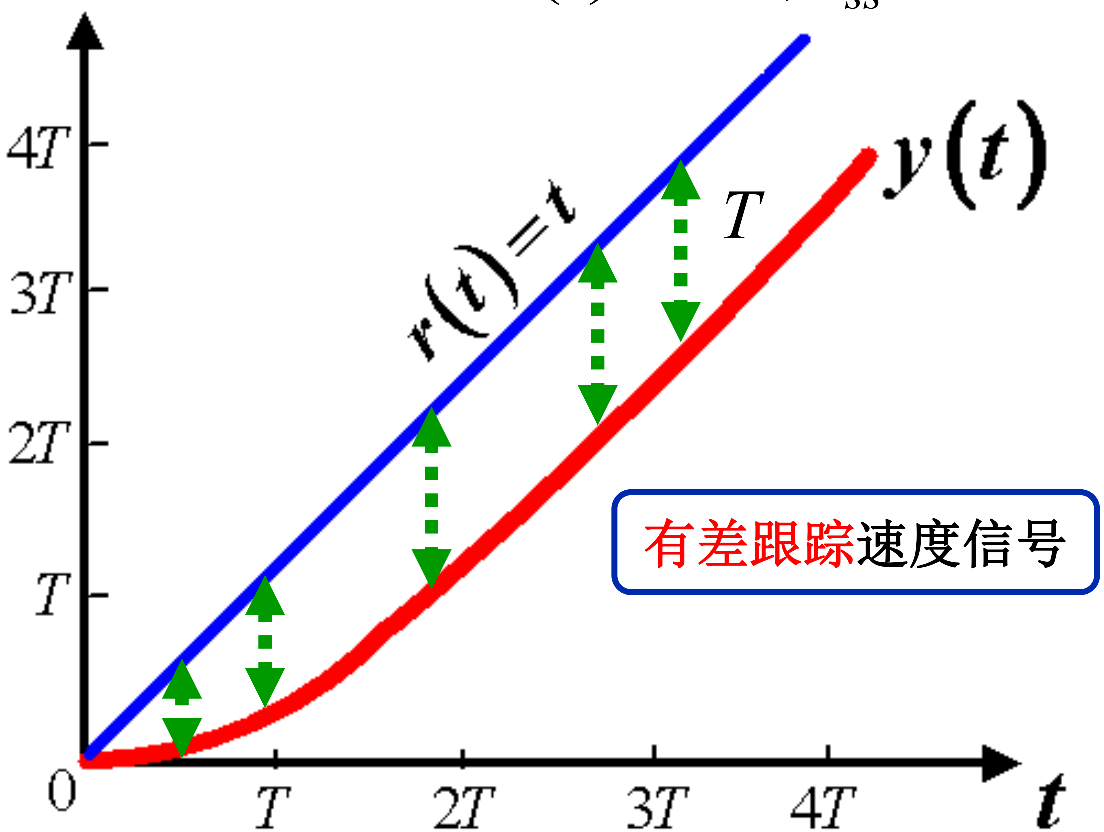
静（稳）态误差

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}\left[r(t)-y(t)\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(T-Te^{-t/T}\right)$$

$$=T$$

$r(t)=At, e_{ss}=?$



4)单位加速度响应(Unit-parabolic response)

$$r(t)=\frac{1}{2}t^2$$

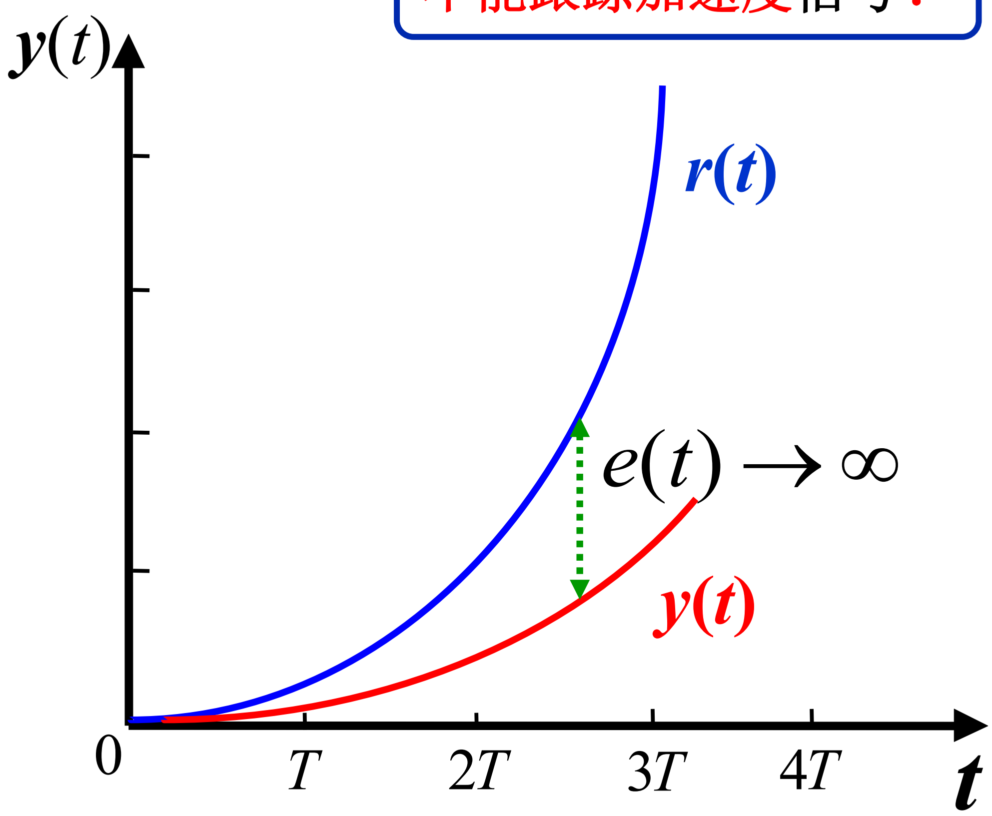
$$y(t)=\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2-T^2e^{-t/T}$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}\left[r(t)-y(t)\right]$$

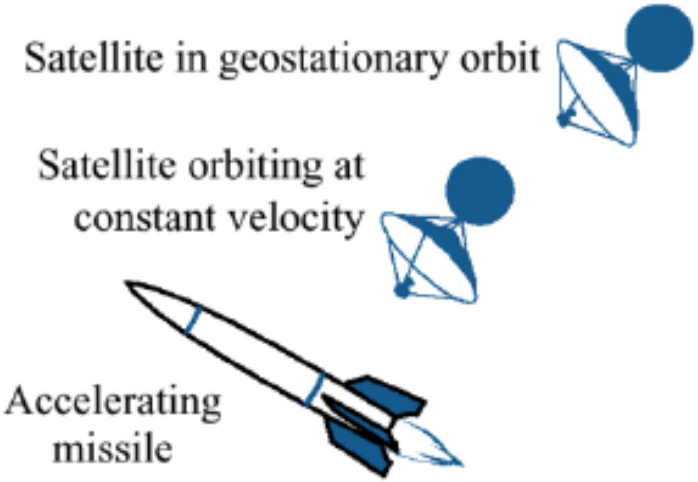
$$=\lim_{t\to\infty}\left(Tt-T^2+T^2e^{-t/T}\right)$$

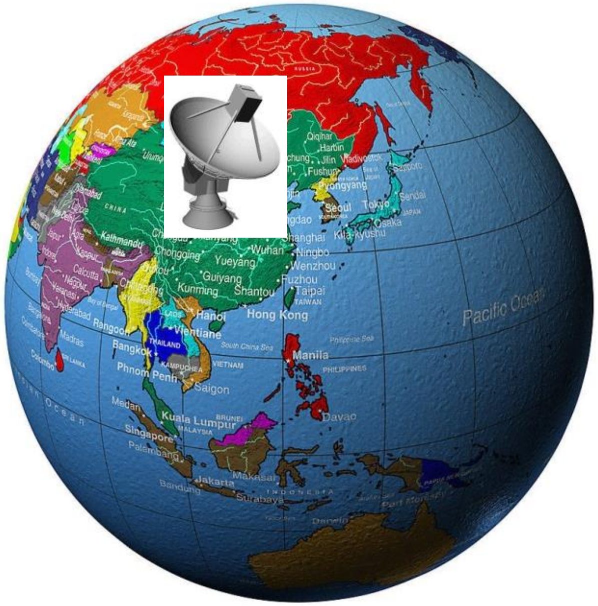
$$=\infty$$

不能跟踪加速度信号！



思考题：地面雷达天线若为一阶系统，它对空间目标的跟踪效果如何？





$$r(t) \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{Ts+1}} \rightarrow y(t)$$

例1：气象温度计的输入输出动态关系可以视为一阶系统，当它从20°C的环境突然移至10°C环境时，其温度示数随时间变化关系如表所示：

时间（s）	0	5	10	15	20	25
温度（°C）	20	17.8	16.1	14.7	13.7	12.9

试确定其传递函数。

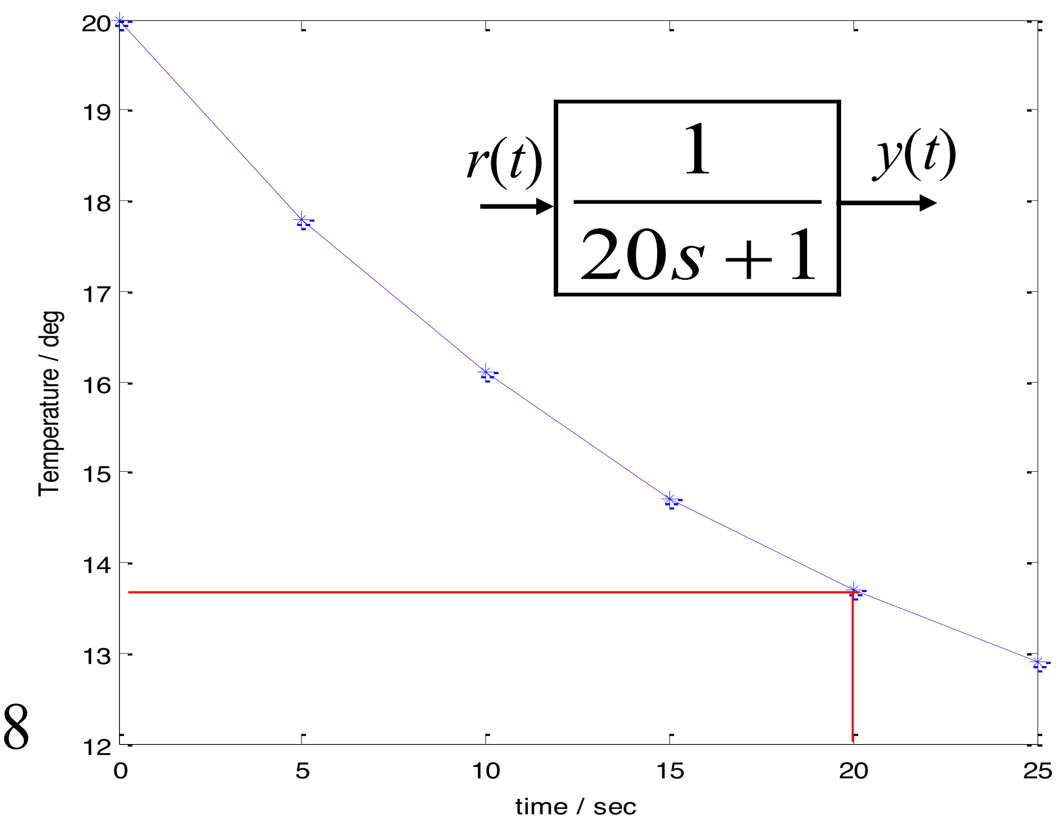
解：

$$r(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Ts+1}} \rightarrow y(t)$$

$$y(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}$$

$$y(T)=1-\mathrm{e}^{-1}=0.632$$

$$y_o(T)=20-0.632\times(20-10)=13.68$$



作业3.2：前述气象温度计装置在从地面出发、以250m/min匀速上升的气球上，记录前3分钟其温度示数如下表所示，假设大气温度随海拔高度线性变化。

时间（s）	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	150	160	170	180
温度（℃）	15.0	14.9	14.6	14.3	13.9	13.4	13.0	12.5	12.0	11.5	11.0	8.5	8.0	7.5	7

试确定距地面600米处的真实温度。

内容小结

1. 稳定性取决于系统的结构与参数（传递函数）；

2. 阶跃响应有滞后、快速性差，但无超调；

3. 静态误差与系统的结构、参数和外界输入；

4. 一阶系统跟踪能力有限（理论指导实践）。