第六章　有限长脉冲响应数字滤波器设计

郑春红
电子工程学院
Email: chzheng@xidian.edu.cn

2021/10/12

第六章　FIR数字滤波器的设计方法

IIR数字滤波器：

可以利用模拟滤波器设计

但相位非线性

FIR数字滤波器：

可以严格线性相位，又可任意幅度特性

因果稳定系统

可用FFT计算

但阶次比IIR滤波器要高得多

第六章　FIR数字滤波器的设计方法

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

6.2 窗函数设计法

6.3 频率采样设计法

6.4 优化设计

6.5 IIR与FIR数字滤波器的比较

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

FIR滤波器的单位脉冲响应：

$$h(n) \quad 0 \le n \le N-1$$

系统函数：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

在 z 平面有 $N-1$ 个零点

在 $z=0$ 处是 $N-1$ 阶极点

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

- **1、线性相位条件**

***h*(*n*)**为实序列时，其频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \pm\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$$

线性相位是指 $\theta(\omega)$ 是ω 的线性函数

即群延时 $-\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau$ 是常数

第一类线性相位： $\theta(\omega) = -\tau\omega$

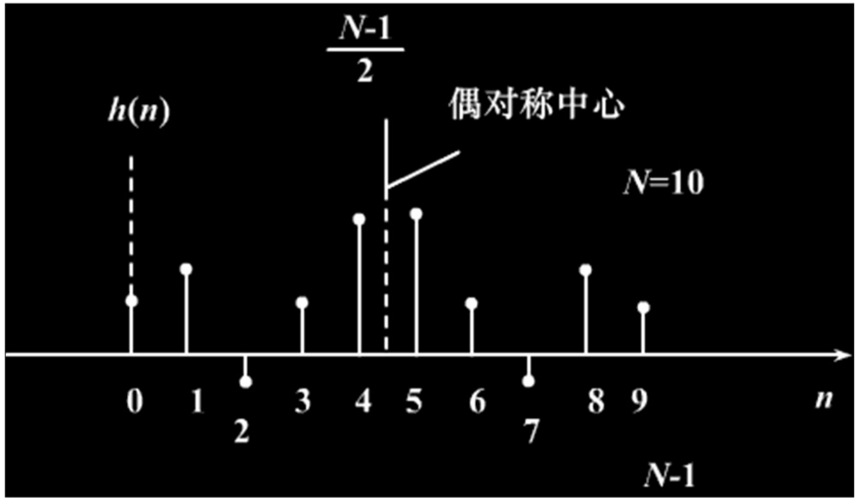
第二类线性相位： $\theta(\omega) = \beta_0 - \tau\omega$

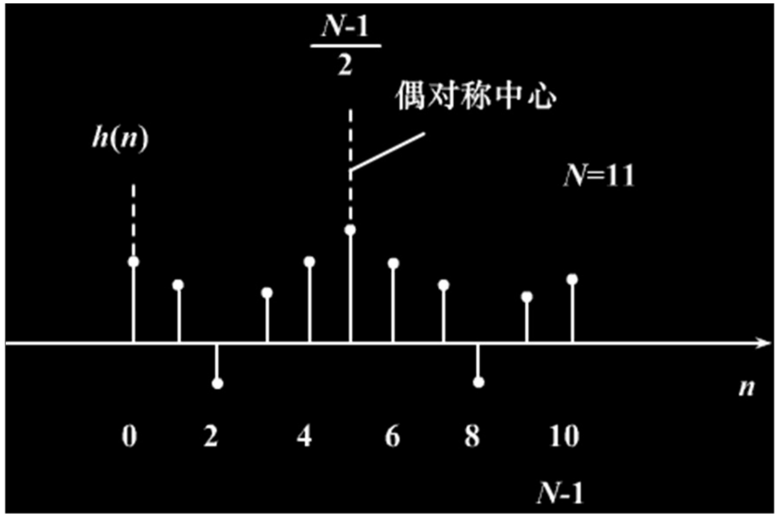
6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

- 第一类线性相位 $\theta(\omega)=-\tau\omega$ 的充要条件：

$$h(n)=h(N-1-n) \quad 0\le n\le N-1$$

n = (N - 1) /2 为**h(n)**的偶对称中心 $\tau=\dfrac{N-1}{2}$





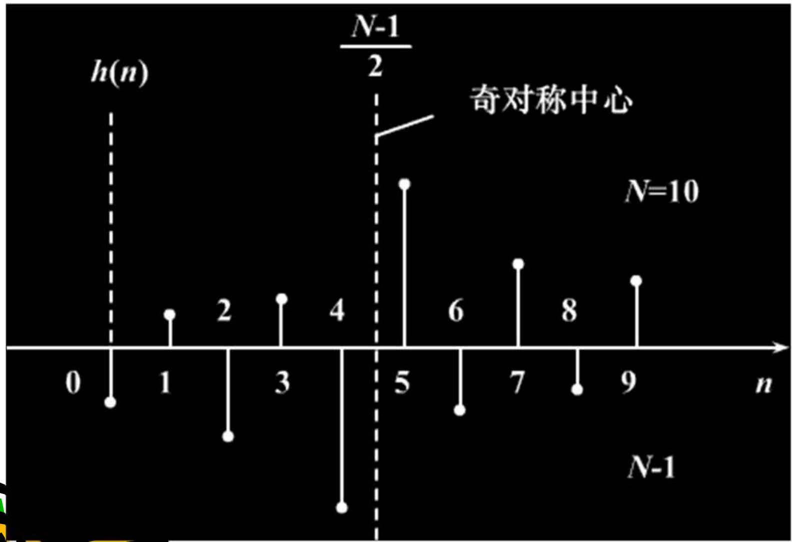
$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)\right]=0$$

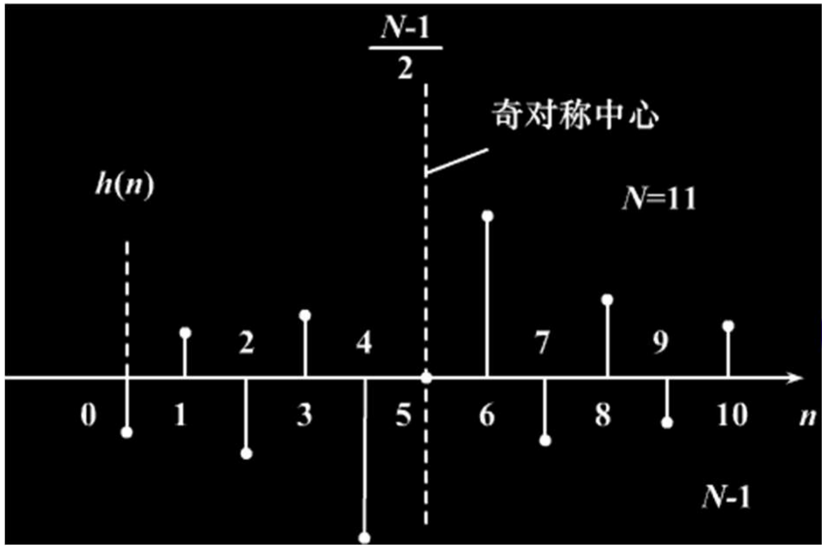
6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

- 第二类线性相位 $\theta(\omega)=\beta_0-\tau\omega$ 的充要条件：

$$h(n)=-h(N-1-n)\quad 0\le n\le N-1$$

n = (N - 1) /2 为**h(n)**的奇对称中心 $\tau=\dfrac{N-1}{2}\quad \beta_0=\pm\pi/2$





$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\omega(n-\tau)\right]=0$$

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

- **2、线性相位FIR滤波器频率响应的特点**

a）*h(n)*偶对称　　$h(n) = h(N-1-n)$

- 频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

相位函数：　$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

为第一类线性相位

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

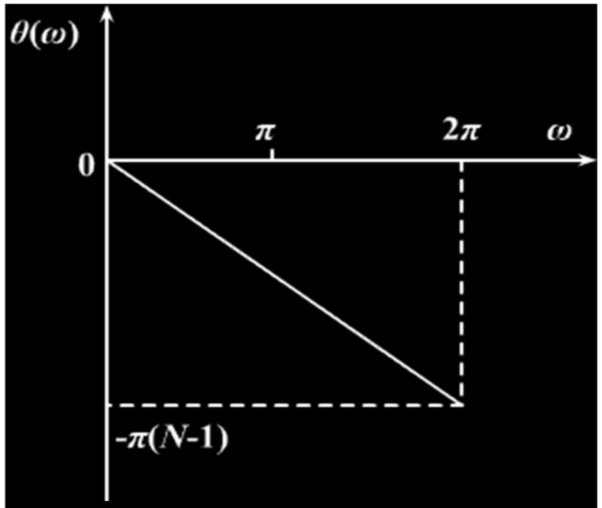


图6-1 h(n)偶对称时的线性相位特性

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

b）*h(n)*奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$

- 频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega + j\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

相位函数：

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

为第二类线性相位

$$\tau = \frac{N-1}{2} \qquad \beta_0 = \pi/2$$

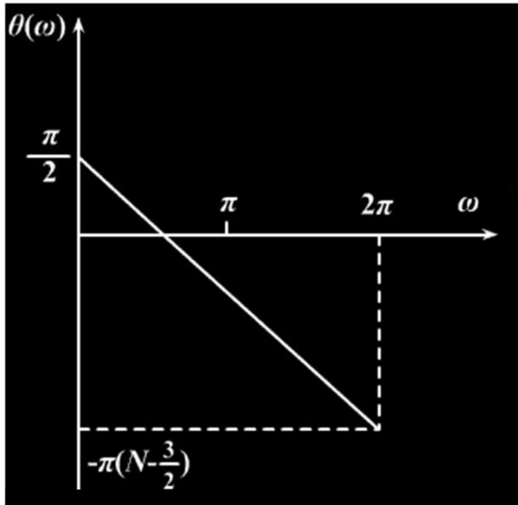
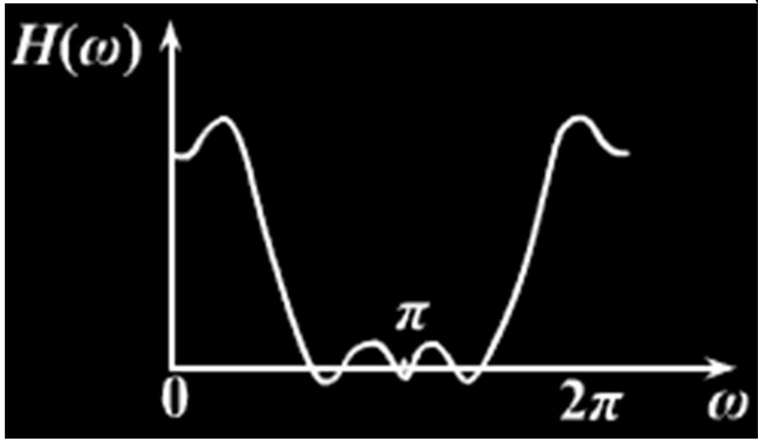


图6-2 h(n)奇对称时的90^0相移线性相位特性

- **3、幅度函数的特点**

  a）*h*(*n*)偶对称，*N*为奇数



幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n)$$

其中 $$a(n)=2h(\frac{N-1}{2}+n),\quad 1\le n\le\frac{N-1}{2}$$

$$a(0)=h(\frac{N-1}{2})$$

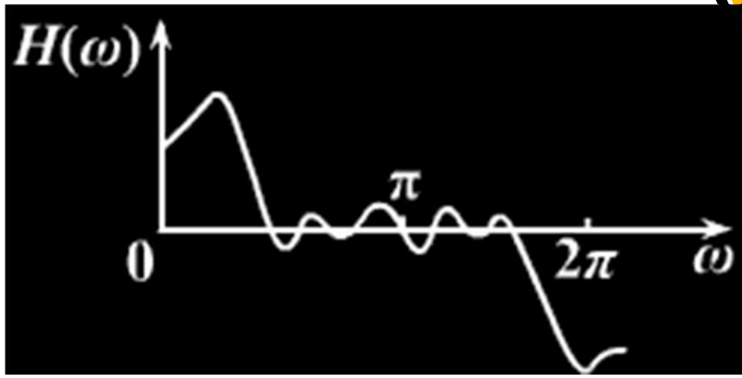
可以实现各种滤波器。

$\because \cos(\omega n)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈偶对称

$\therefore H(\omega)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈偶对称

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

b）***h*(*n*)**偶对称，***N***为偶数



幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\text{其中}: b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-1+n\right) \qquad 0\le n\le \frac{N}{2}-1$$

$\omega=\pi$ 时 $\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=0$ 不能设计成高通、带通滤波器

$H(\omega)$对$\omega=0,\ 2\pi$呈偶对称

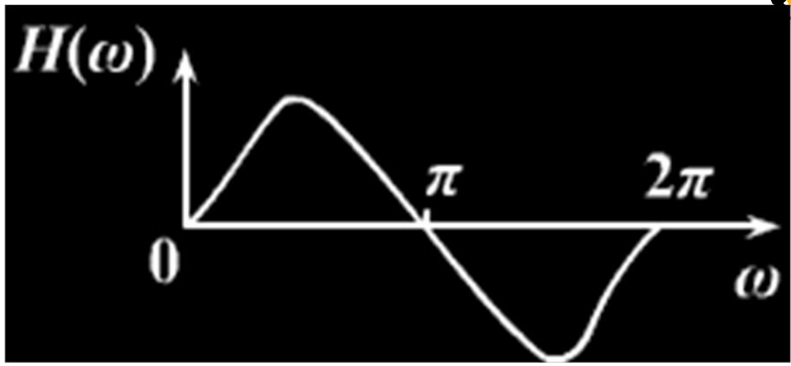
$H(\omega)$对$\omega=\pi$呈奇对称

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

c）*h*(*n*)奇对称，*N*为奇数

幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin(\omega n)$$



其中： $c(n)=2h\left(\dfrac{N-1}{2}+n\right)\qquad 0\le n\le\dfrac{N-1}{2}$

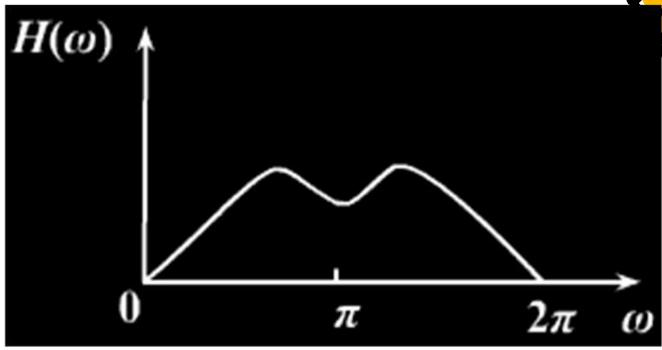
因$\sin(\omega n)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈奇对称

故$H(\omega)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$呈奇对称

只能实现带通滤波器。

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

d）*h*(*n*)奇对称，*N*为偶数



幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\text{其中：} d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-1+n\right) \qquad 0\le n\le \frac{N}{2}$$

$H(\omega)$对$\omega=0,\ 2\pi$呈奇对称

$H(\omega)$对$\omega=\pi$呈偶对称

不能实现低通和带阻滤波器

表 7.1.1 线性相位 FIR 滤波器的幅度特性与相位特性一览表

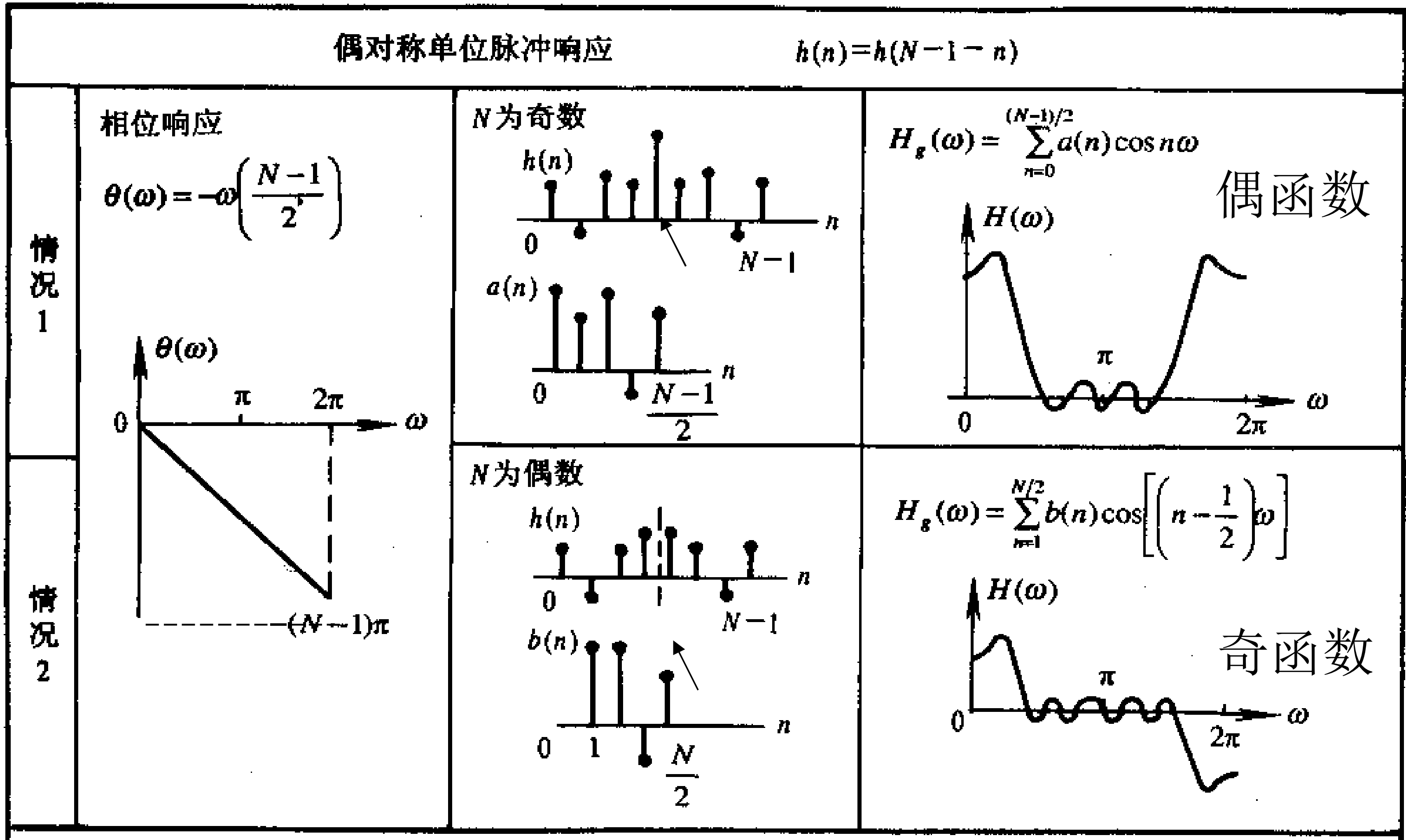
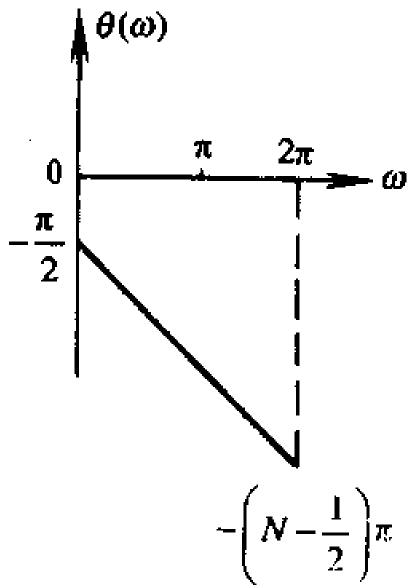
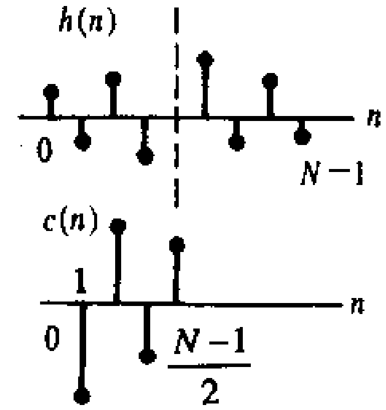
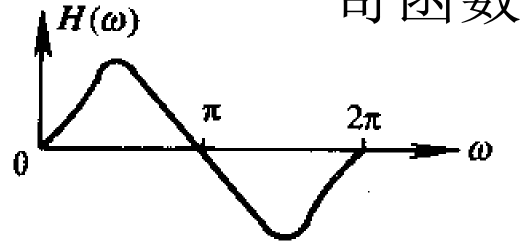
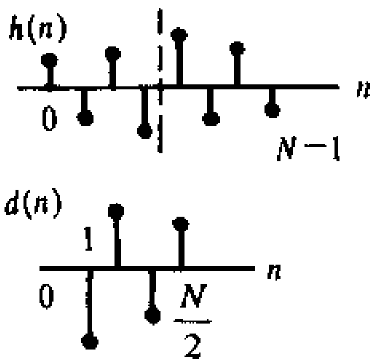
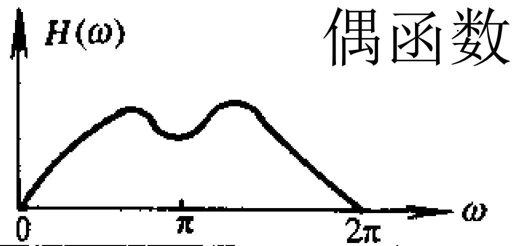


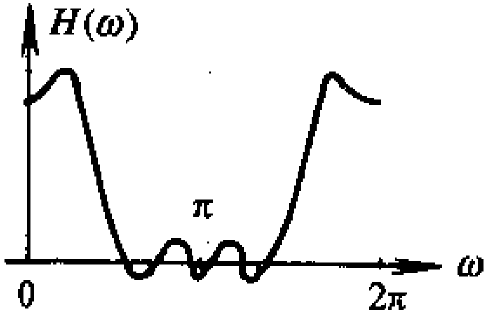
表 7.1.1　线性相位 FIR 滤波器的幅度特性与相位特性一览表

- 奇对称， h(n)=-h(N-n-1)

	相位响应		
情况3	$\theta(\omega)=-\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$ 	N为奇数 	$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n)\sin(n\omega)$ 奇函数 
情况4		N为偶数 	$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$ 偶函数 

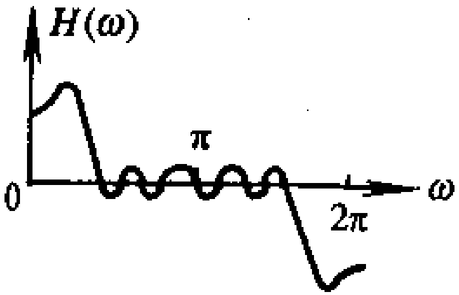
I）

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos n\omega$$



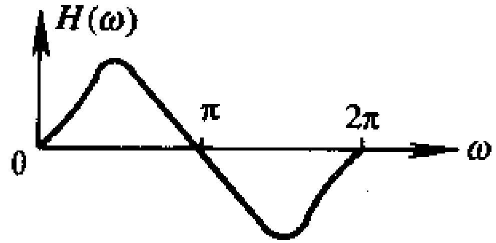
II）

$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$



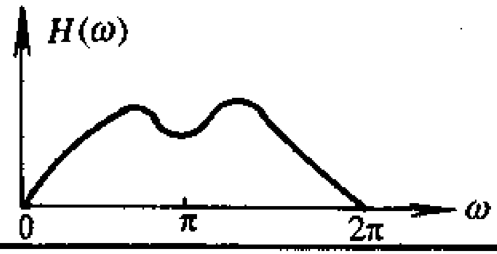
III）

$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n)\sin(n\omega)$$



IV）

$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$



第Ⅰ)种情况可以实现各种滤波器（低通，高通，带通，带阻）

第Ⅱ)种情况不能实现高通和带通滤波器

第Ⅲ)种情况只能实现带通滤波器

第Ⅳ)种情况不能实现低通和带阻滤波器

6.1 线性相位FIR数字滤波器的特点

- **4**、零点位置

由 $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$ 得：

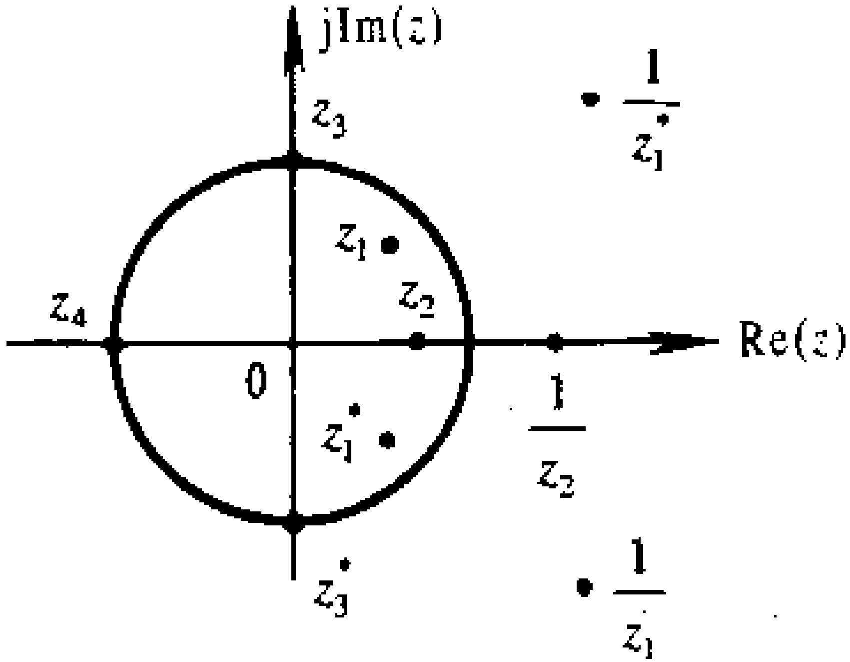
1）若 $z = z_i$ 是$H(z)$的零点，则 $z = z_i^{-1}$ 也是零点

$\because H(z_i) = 0$

$\therefore H(z_i^{-1}) = \pm z_i^{(N-1)} H(z_i) = 0$

2）$h(n)$为实数，则零点共轭成对

即 $z_i^*, 1/z_i^*$ 也是零点



线性相位滤波器的零点是互为倒数的共轭对

即共轭成对且镜像成对

6.2 窗函数设计法

1、设计方法

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \rightarrow H_d(e^{j\omega})$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

$$h(n) = w(n) h_d(n)$$

***w*(*n*)**：窗函数序列

要选择合适的形状和长度

6.2 窗函数设计法

- 以低通滤波器为例讨论：

线性相位理想低通滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & -\pi \le \omega \le -\omega_c, \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases}$$

其理想单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

中心点为 α 的偶对称无限长非因果序列

6.2 窗函数设计法

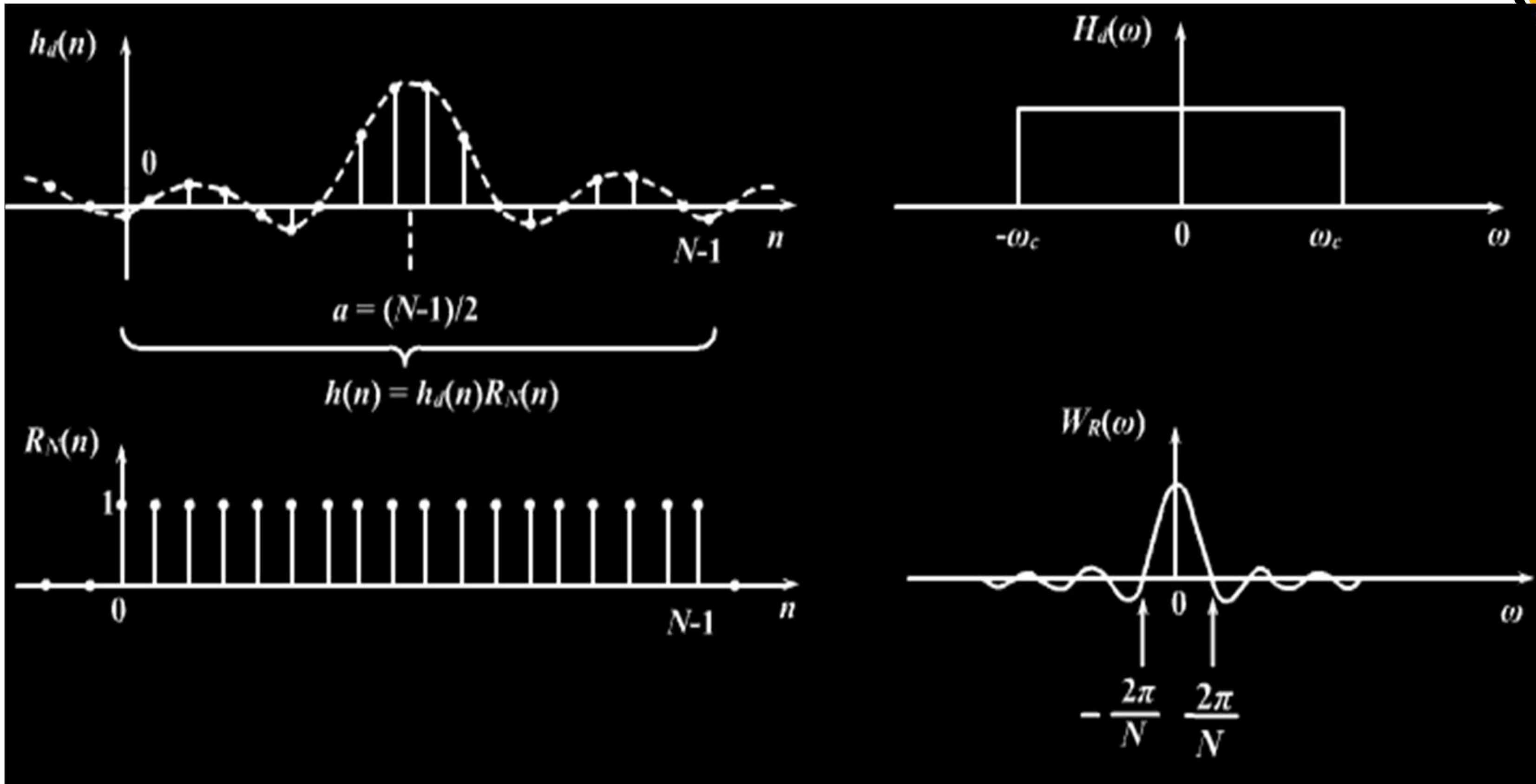


图**6-1** 理想矩形幅频特性$h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$以及矩形窗函数序列的$w(n)=R_N(n)$和$W_R(\omega)$

6.2 窗函数设计法

$$h_d(n)=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

取矩形窗： $w(n)=R_N(n)$

则FIR滤波器的单位抽样响应：

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases} h_d(n) & 0\le n\le N-1 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

按第一类线性相位条件，得 $\alpha=\dfrac{N-1}{2}$

$$\therefore\ h(n)=\begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\left[\omega_c\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)\right]}{\omega_c\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)} & 0\le n\le N-1 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

6.2 窗函数设计法

- 加窗处理后对频率响应的影响：

时域乘积相当于频域卷积 $h(n)=h_d(n)w(n)$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\theta}\right)W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

而矩形窗的频率响应：

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}w(n)e^{-j\omega n}=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

其幅度函数： $W_R(\omega)=\dfrac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$

6.2 窗函数设计法

理想滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

其幅度函数：$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$

则FIR滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j\frac{N-1}{2}\theta} W_R(\omega-\theta)e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega-\theta)}d\theta$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$$

其幅度函数：$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$

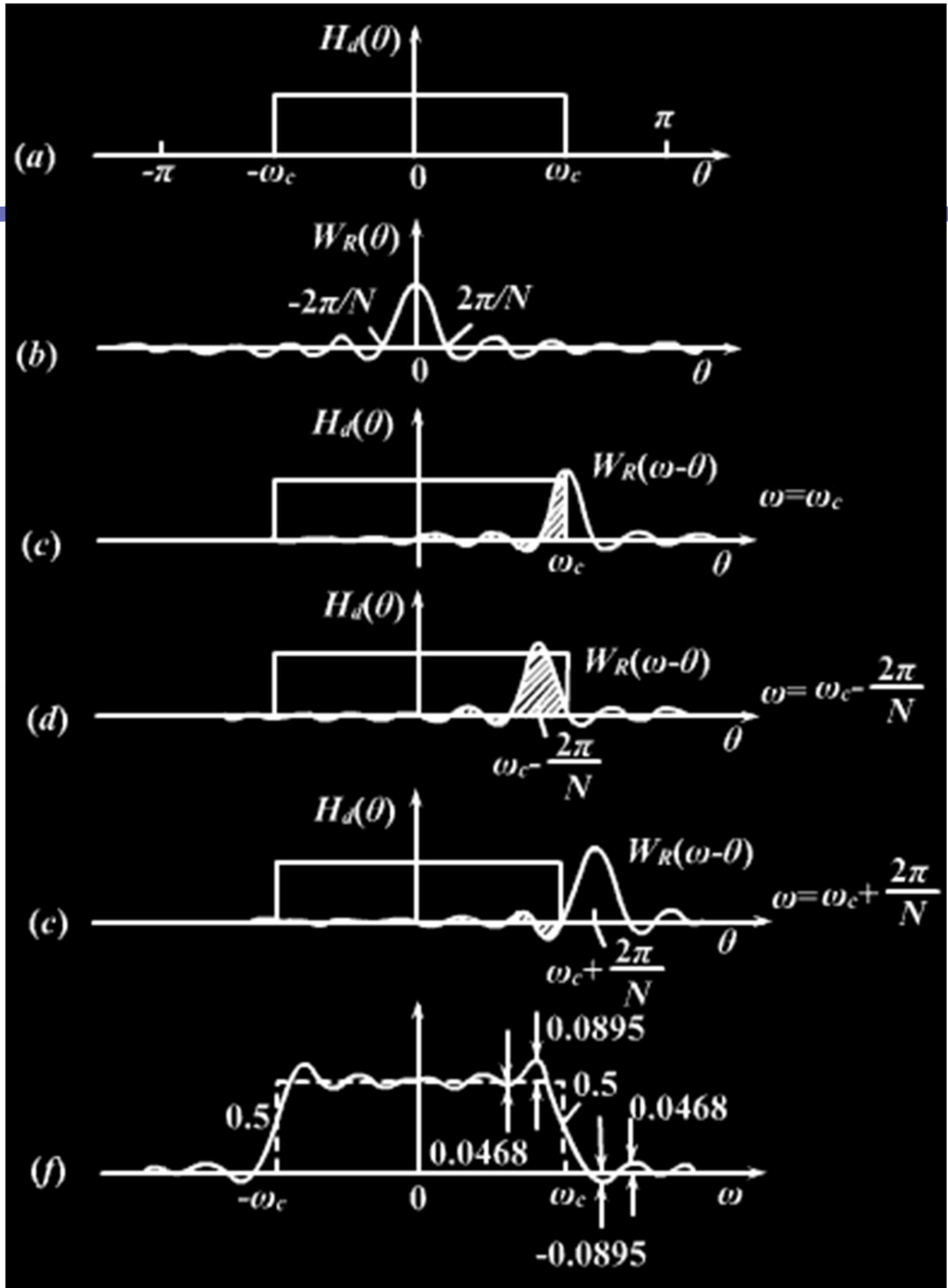


图6-2　矩形窗的卷积过程

6.2 窗函数设计法

幅度函数：$H(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$

- $\omega=0$　　$H(0)$近似于$W_R(\theta)$的全部积分面积
- $\omega=\omega_c$　　$H(\omega_c)=0.5H(0)$
- $\omega=\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}$　　$H\left(\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}\right)$为最大值，正肩峰
- $\omega=\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}$　　$H\left(\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}\right)$为最小值，负肩峰
  - $\omega>\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}$　　随$\omega\uparrow$，$H(\omega)$绕零值波动
  - $\omega<\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}$　　随$\omega\downarrow$，$H(\omega)$绕$H(0)$波动

6.2 窗函数设计法

幅度函数：$H(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$

- $\omega=0$　　$H(0)$近似于$W_R(\theta)$的全部积分面积
- $\omega=\omega_c$　　$H(\omega_c)=0.5H(0)$
- $\omega=\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}$　　$H\left(\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}\right)$为最大值，正肩峰
- $\omega=\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}$　　$H\left(\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}\right)$为最小值，负肩峰
    - $\omega>\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}$　　随$\omega\uparrow$，$H(\omega)$绕零值波动
    - $\omega<\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}$　　随$\omega\downarrow$，$H(\omega)$绕$H(0)$波动

6.2 窗函数设计法

- 加窗函数的影响：

- 不连续点处边沿加宽形成过渡带，其宽度（两肩峰之间的宽度）等于窗函数频率响应的主瓣宽度。
- 在 $\omega = \omega_c \pm \frac{2\pi}{N}$ 处出现肩峰值，两侧形成起伏振荡，振荡的幅度和多少取决于旁瓣的幅度和多少
- 改变**N**只能改变窗谱的主瓣宽度，但不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。其相对比例由窗函数形状决定，称为**Gibbs效应**

幅度函数：$W_R(\omega) = \dfrac{\sin\dfrac{\omega N}{2}}{\sin\dfrac{\omega}{2}} \approx N\dfrac{\sin\dfrac{\omega N}{2}}{N\dfrac{\omega}{2}} = N\dfrac{\sin x}{x}$

6.2 窗函数设计法

2、各种窗函数

- 窗函数的要求：
  - 窗谱主瓣尽可能窄以获得较陡的过渡带
  - 尽量减少窗谱最大旁瓣的相对幅度以减小肩峰和波纹

6.2 窗函数设计法

- 矩形窗 $w(n) = R_N(n)$

窗谱：

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n} = W_R(\omega) e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

幅度函数：

$$W_R(\omega) = \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

主瓣宽度最窄： $\frac{4\pi}{N}$ 旁瓣幅度大

$$\Delta B = 1.8\pi / N$$

$$\alpha_s = 21\text{dB}$$

6.2 窗函数设计法

- 三角形（**Bartlett**）窗

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1} & 0\le n\le \dfrac{N-1}{2}\\[2ex] 2-\dfrac{2n}{N-1} & \dfrac{N-1}{2}\le n\le N-1\end{cases}$$

窗谱： $W(e^{j\omega})=W(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$

幅度函数：

$$W(\omega)=\frac{2}{N}\left[\frac{\sin\frac{\omega N}{4}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]^2 \qquad N>>1$$

主瓣宽度宽： $\dfrac{8\pi}{N}$ 旁瓣幅度较小

$\Delta B=6.1\pi/N$

$\alpha_s=25\text{dB}$

6.2 窗函数设计法

- 汉宁（**Hanning**）窗
  （升余弦窗）

$$w(n)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right]R_N(n)$$

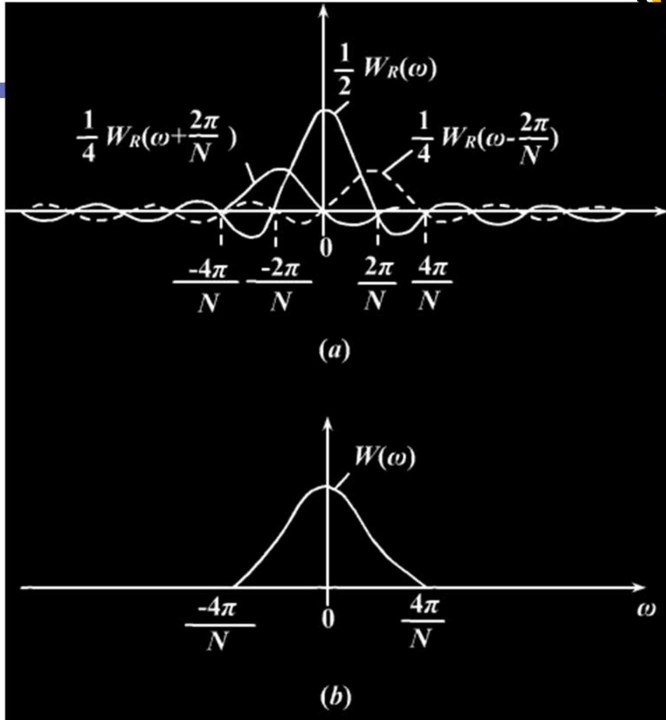


图6-3 汉宁（Hanning）窗谱

幅度函数： $(N>>1)$

$$W(\omega)=0.5W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

$$\Delta B=6.2\pi/N$$

主瓣宽度宽： $\frac{8\pi}{N}$ 旁瓣幅度小 $\alpha_s=44\text{dB}$

6.2 窗函数设计法

- 汉明（**Hamming**）窗

  （改进的升余弦窗）

$$w(n)=\left[0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right]R_N(n)$$

幅度函数：$(N>>1)$

$$W(\omega)=0.54W_R(\omega)+0.23\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

主瓣宽度宽：$\dfrac{8\pi}{N}$　旁瓣幅度更小

$$\Delta B=6.6\pi/N$$

$$\alpha_s=53\text{dB}$$

6.2 窗函数设计法

- 布莱克曼（**Blackman**）窗

  （二阶升余弦窗）

$$w(n)=\left[0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}\right]R_N(n)$$

幅度函数： $(N>>1)$

$$W(\omega)=0.42W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

$$+0.04\left[W_R\left(\omega-\frac{4\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{4\pi}{N}\right)\right]$$

$\Delta B=11\pi/N$

主瓣宽度最宽： $\dfrac{12\pi}{N}$ 　旁瓣幅度最小 　$\alpha_s=74\text{dB}$

6.2 窗函数设计法

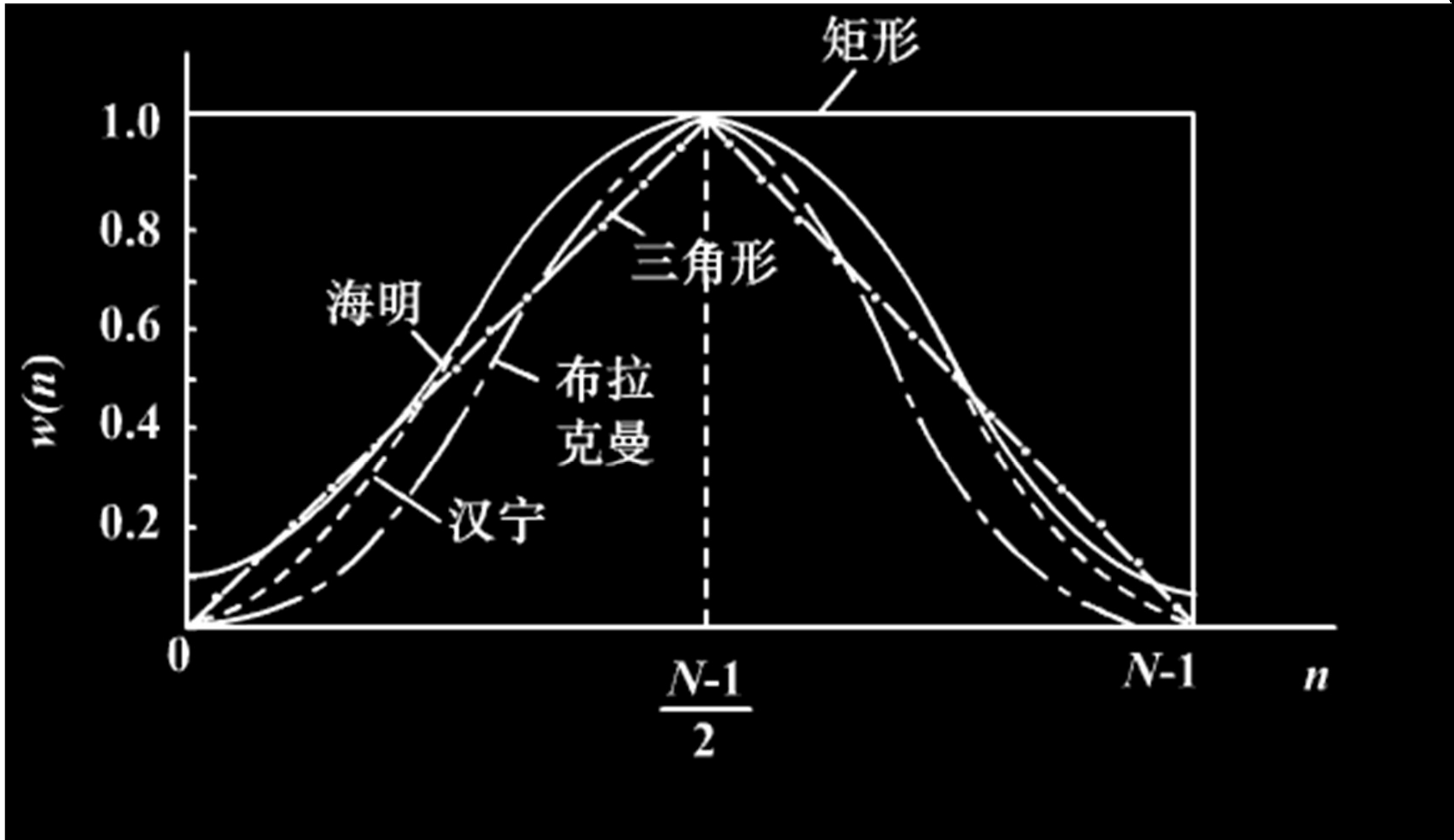


图6-4 设计有限长度单位脉冲响应滤波器常用的几种窗函数

6.2 窗函数设计法

- 凯泽（**Kaiser**）窗

$$w(n)=\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}\qquad 0\le n\le N-1$$

$I_0(\cdot)$ ：第一类变形零阶贝塞尔函数

改变β可同时调整主瓣宽度和旁瓣幅度

$\beta\uparrow$　旁瓣幅度$\downarrow$

但主瓣宽度$\uparrow$

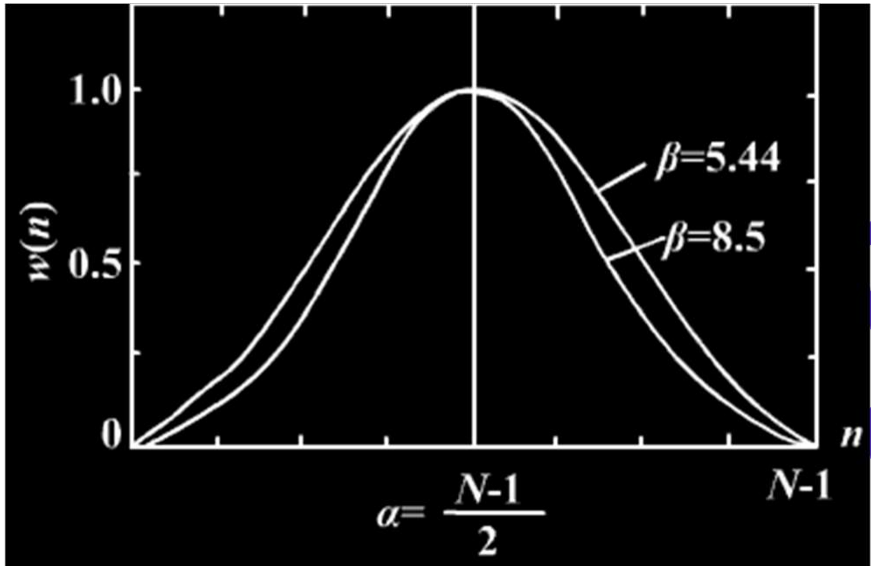


图7-5 凯泽窗函数

6.2 窗函数设计法

窗函数	窗谱性能指标		加窗后滤波器性能指标	
	旁瓣峰值 /dB	主瓣宽度 $/rad$	过渡带宽$\Delta\omega$ $/rad$	阻带最小衰减 /dB
矩形窗	-13	4π/N	1.8π/N	21
三角形窗	-25	8 π/N	6.1π/N	25
汉宁窗	-31	8 π/N	6.2π/N	44
汉明窗	-41	8 π/N	6.6π/N	53
布莱克曼窗	-57	12 π/N	11 π/N	74
凯泽窗 $(\beta=7.865)$	-57		10 π/N	80

阻带最小衰减只由窗形状决定

过渡带宽则与窗形状和窗宽N都有关

3、窗函数法的设计步骤

- 给定理想的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 及技术指标 $\alpha_s, \Delta\omega$
- 求出理想的单位抽样响应 $h_d(n)$
- 根据阻带衰减选择窗函数 $w(n)$
- 根据过渡带宽度确定**N**值 $N = A/\Delta\omega$
- 求所设计的**FIR**滤波器的单位抽样响应

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

- 计算频率响应 $H(e^{j\omega})$ ，验算指标是否满足要求

6.2 窗函数设计法

$$H_d(e^{j\omega}) \longrightarrow h_d(n)$$

公式法： $$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

IFFT法：

对 $H_d(e^{j\omega})$ M点等间隔抽样：$H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$

计算其IFFT，得： $$h_M(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}h_d(n+rM)$$

当$M \gg N$时, $h_d(n)\approx h_M(n)$

6.2 窗函数设计法

4、线性相位FIR低通滤波器的设计

例：设计一个线性相位FIR低通滤波器，

给定抽样频率为 $\Omega_s = 2\pi\times1.5\times10^4 (rad/\sec)$

通带截止频率为 $\Omega_p = 2\pi\times1.5\times10^3 (rad/\sec)$

阻带起始频率为 $\Omega_{st} = 2\pi\times3\times10^3 (rad/\sec)$

阻带衰减不小于**-50dB**，幅度特性如图所示

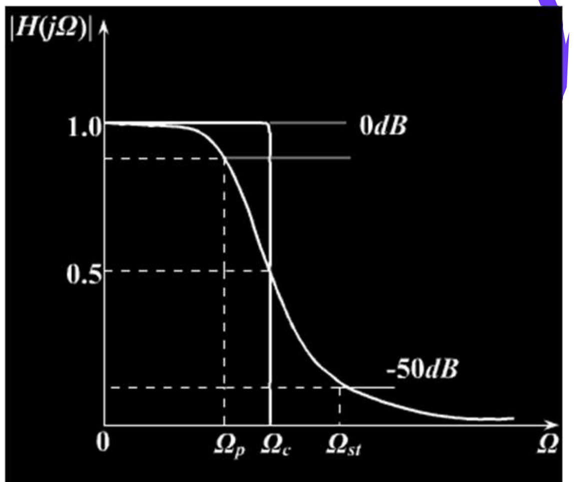


图6-6 要求的模拟低通滤波器特性

解： 1）求数字频率

$$\omega_p = \Omega_p / f_s = 2\pi\Omega_p / \Omega_s = 0.2\pi$$

$$\omega_{st} = \Omega_{st} / f_s = 2\pi\Omega_{st} / \Omega_s = 0.4\pi$$

$$\alpha_s = 50dB$$

6.2 窗函数设计法

2）求$h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\tau} & -\omega_c\le\omega\le\omega_c \\ 0 & -\pi\le\omega\le-\omega_c,\omega_c\le\omega\le\pi \end{cases}$$

$$\omega_c=\frac{\Omega_c}{f_s}=2\pi\frac{1/2\left(\Omega_p+\Omega_{st}\right)}{\Omega_s}=0.3\pi$$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega(n-\tau)}d\omega$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\sin[\omega_c(n-\tau)] & n\ne\tau \\ \dfrac{\omega_c}{\pi} & n=\tau \end{cases}\qquad \tau=\frac{N-1}{2}$$

6.2 窗函数设计法

3）选择窗函数：由 $\alpha_s = 50dB$ 确定汉明窗（53dB）

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

4）确定**N** 值

海明窗带宽：$\Delta\omega = \dfrac{6.6\pi}{N}$

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{\Omega_{st} - \Omega_p}{\Omega_s} = 0.2\pi$$

$$N = \frac{A}{\Delta\omega} = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33$$

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 16$$

6.2 窗函数设计法

5）确定FIR滤波器的*h*(*n*)

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \frac{\sin\left[0.3\pi\left(n-16\right)\right]}{\pi\left(n-16\right)} \cdot \left[0.54 - 0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right] R_{33}(n)$$

6）求 $H(e^{j\omega})$ ，验证

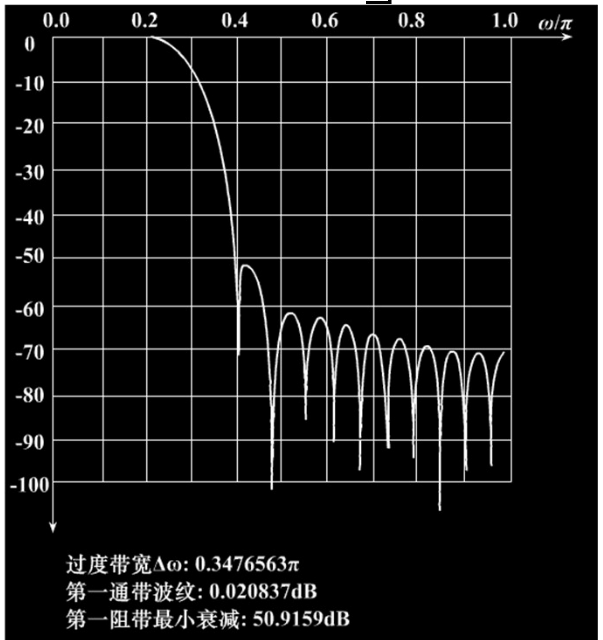


图6-7 设计的线性相位FIR低通滤波器幅频特性（汉明窗，N=33）

若不满足，则改变N
或窗形状重新设计

6.3 频率采样设计法

1、设计方法

对理想频率响应等间隔采样

作为实际**FIR**数字滤波器的频率特性的采样值

$$H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$h(n) \qquad H(z) \qquad H(e^{j\omega})$$

窗函数设计法：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \rightarrow H_d(e^{j\omega})$$

$$\downarrow$$

$$h(n) = w(n)h_d(n) \longrightarrow h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

6.3 频率采样设计法

内插公式：

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1}{N}e^{j\frac{\pi k}{N}(N-1)}\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)}$$

6.3 频率采样设计法

- 抽样点上，频率响应严格相等
- 抽样点之间，加权内插函数的延伸叠加
- 变化越平缓，内插越接近理想值，逼近误差较小

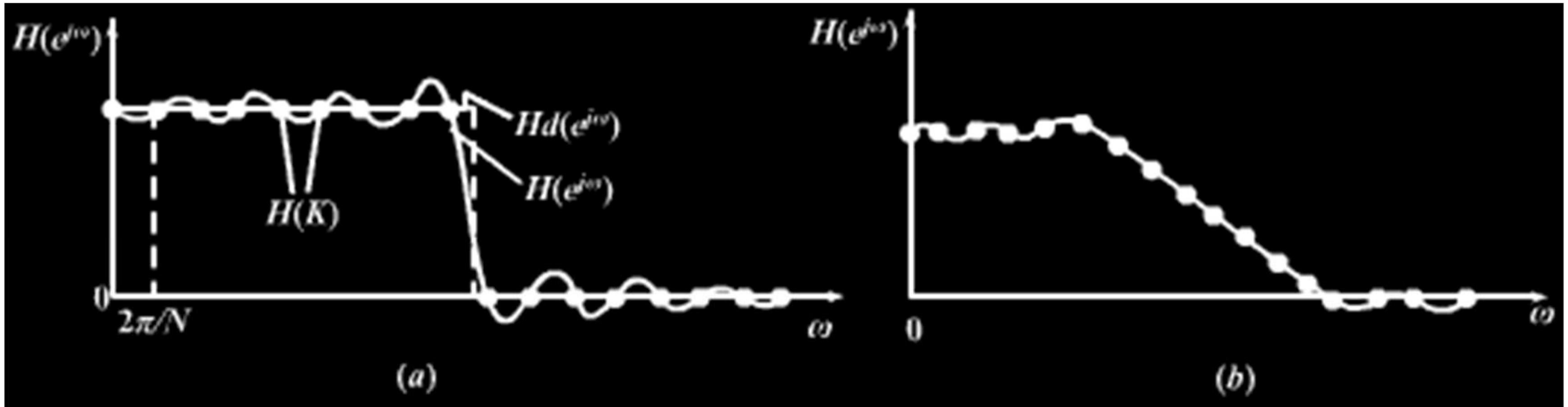


图6-8 频率采样的响应

6.3 频率采样设计法

- 频率采样设计法的改进措施

增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}H\left(k\right)\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

不加过渡抽样点：$\alpha_s=-20dB$

加一点：$\alpha_s=-40\sim-54dB$

加两点：$\alpha_s=-60\sim-75dB$

加三点：$\alpha_s=-80\sim-95dB$

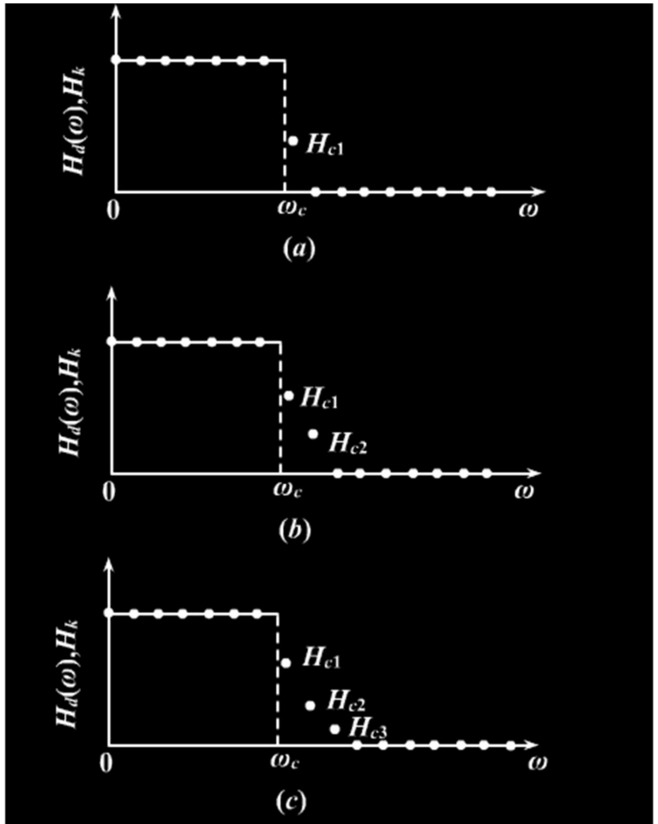


图6-9 加过度采样点

(a) 一点过渡带；(b) 二点过渡带；(c) 三点过渡带；

6.3 频率采样设计法

- 增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减，但导致过渡带变宽 （N确定）

- 增加*N*，使抽样点变密，减小过渡带宽度，但增加了计算量

- 优点：频域直接设计

- 缺点：抽样频率只能是 $2\pi / N$ 或 π / N 的整数倍，截止频率 ω_c 不能任意取值

6.3 频率采样设计法

2、频率采样法的设计步骤

（1）根据阻带最小衰减α_s，确定过渡带采样点的个数m

（2）根据过渡带宽度ΔB的要求，估算滤波器的长度N

（3）构造希望逼近滤波器的频率响应函数$H_d(e^{j\omega})$

（4）对$H_d(e^{j\omega})$进行频域等间隔N点采样，得H(K)

（5）对H(k)进行N点IDFT，得FIR滤波器的单位脉冲响应h(n)，经Z变换，得滤波器的系统函数H(z)。

（6）对设计结果进行检验。

6.4 优化设计

存在问题：

1、不能精确指定边界频率$\omega_p \omega_s$

2、窗函数设计，阻带和通带波纹幅度相等；频率采样设计只能控制阻带波纹幅度。不能分别控制。

3、期望滤波器和设计滤波器存在逼近误差。

6.4 优化设计

- **FIR**滤波器的最优化设计准则：

1、均方误差最小准则

频率响应误差：

$$E\left(e^{j\omega}\right)=H_d\left(e^{j\omega}\right)-H\left(e^{j\omega}\right)$$

理想频响　　　　实际频响

∴矩形窗设计结果必满足最小均方误差准则

2、最大误差最小化准则

（加权chebyshev等波纹逼近）

利用Matlab信号处理工具箱函数

6.4 优化设计

等波纹最佳逼近法设计**FIR**数字滤波器：

帕克斯—麦克莱伦采用基于交替定理的雷米兹交替算法，通过逐次迭代逼近的运算求得滤波器的系数向量**h**（**n**），实现了等波纹最佳逼近法的滤波器设计。

调用**remez**和**remezord**实现该方法。

p312

（**matlab2013b**中提示将更新为**firpm**、**firpmord**）

6.4 优化设计

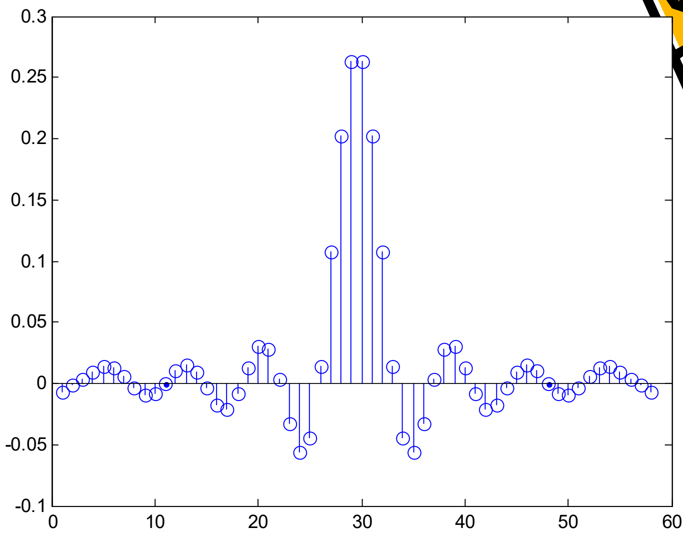
- 例设计数字低通滤波器，要求通带截止频率ω_p＝0.25πrad，阻带截止频率ω_s＝0.3 πrad，通带最大衰减α_p＝1db α_s＝40db
- Remezord调用参数：$f=[\omega_p/\pi,\omega_s/\pi]$

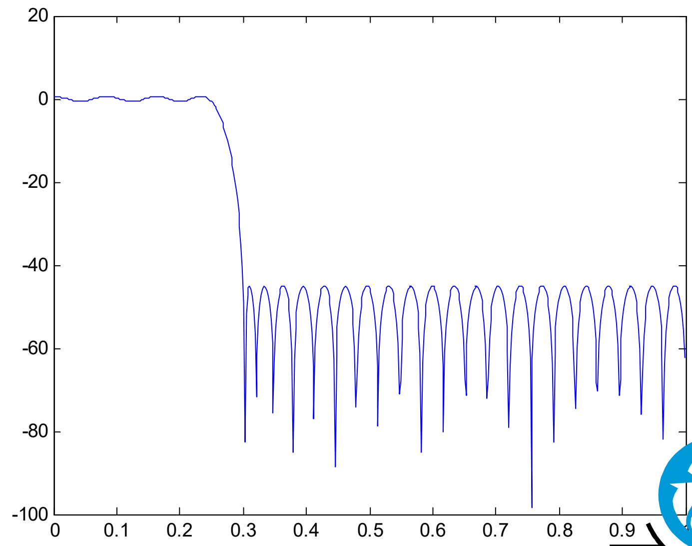
$$m=[1,0] \qquad rip=[\delta_1,\delta_2]$$

$$\delta_1=\frac{10^{\alpha_p/20}-1}{10^{\alpha_p/20}+1},\delta_2=10^{-\alpha_s/20}$$

6.4 优化设计

- f=[0.25,0.3];m=[1,0];
- Rp=1;Rs=40;
- dat1=(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1);
- dat2=10^(-Rs/20);
- rip=[dat1,dat2];
- [M,f0,m0,w]=remezord(f,m,rip);
- %M=M+1;   %如何检验？
- hn=remez(M,f0,m0,w);
- figure(1)
- stem([1:M+1],hn);
- figure(3)
- [H,W]=freqz(hn)
- mag=10*log(abs(H)); plot(W/pi,mag);





6.5、IIR和FIR数字滤波器的比较

IIR滤波器	FIR滤波器
$h(n)$无限长	$h(n)$有限长
极点位于z平面任意位置	极点固定在原点
滤波器阶次低	滤波器阶次高得多
非线性相位	可严格的线性相位
递归结构	一般采用非递归结构
不能用FFT计算	可用FFT计算
可用模拟滤波器设计	设计借助于计算机
用于设计规格化的选频滤波器	可设计各种幅频特性和相频特性的滤波器