ex4.

$$u(t) \longrightarrow \boxed{2^e \text{ ordre}} \longrightarrow y(t) = f(u(t))$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

$$\Big\downarrow \text{TL} \qquad \text{Propriété de Linéarité}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + 3\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + 2\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t)]$$

$$(p^2Y(p) \underbrace{- p y(0) - \dot{y}(0)}_{\text{时域}}) + 3(pY(p) \underbrace{- y(0)}_{\text{时域}}) + 2Y(p) = U(p)$$

$$\Rightarrow (p^2+3p+2)Y(p) = U(p) + \overbrace{(p y(0) + 3y(0) + \dot{y}(0))}^{CL}$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{1}{(p^2+3p+2)}U(p)}_{\substack{\text{Réponse forcé} \\ (CL=0)}} + \underbrace{\frac{(p y(0) + 3y(0) + \dot{y}(0))}{p^2+3p+2}}_{\substack{\text{Réponse Libre} \\ (u(t)=0)}}$$

* Cas entrée échelon : $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$ $\quad U(p) = 1/p$;

Si $CL = 0$:

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+3p+2} \cdot 1/p = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)p} = \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p-p_1} + \frac{\alpha_3}{p-p_2}$$

Si CL ne sont pas nulle. $(\dot{y}(0)=1,\ y(0)=1)$:

$$Y(p) = \frac{1}{\underbrace{p^2+3p+2}_{(p-p_1)(p-p_2)}} \cdot \frac{1}{p} + \frac{p+4}{\underbrace{p^2+3p+2}_{(p-p_1)(p-p_2)}} = \frac{1+(p+4)(p)}{(p-p_1)(p-p_2)p} = \frac{\alpha_1'}{p-p_1} + \frac{\alpha_2'}{p-p_2} + \frac{\alpha_3'}{p}$$

$$Y(p)=\frac{\alpha_1}{p}+\frac{\alpha_2}{p-p_1}+\frac{\alpha_3}{p-p_2}\ ,\ p_1=-1, p_2=-2\ , p_3=0$$

Pour calculer α, on a des racines simples :

$$\alpha_1=\lim_{p\to 0}(p)Y(p)=\lim_{p\to 0}\left[\cancel{p}\frac{1}{\cancel{p}(p-p_1)(p-p_2)}\right]=\frac{1}{p_1p_2}=\frac{1}{2}$$ 法①公式

$$\alpha_2=\lim_{p\to p_1=-1}[(p-p_1)Y(p)]=\lim_{p\to p_1}\left[\cancel{(p-p_1)}\frac{1}{p\cancel{(p-p_1)}(p-p_2)}\right]=\frac{1}{p(p-p_2)}=-1$$

$$\alpha_3=\lim_{p\to p_2=-2}[(p-p_2)Y(p)]=\lim_{p\to p_2}\left[(p-p_2)\frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}\right]=\frac{1}{p(p-p_1)}=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow Y(p)=\frac{\alpha_1}{p}+\frac{\alpha_2}{p-p_1}+\frac{\alpha_3}{p-p_2}$$

$$y(t)=\alpha_1 \mathcal{L}^{-1}[1/p]+\alpha_2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_1}\right]+\alpha_3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_2}\right]$$

$$y(t)=\alpha_1+\alpha_2e^{p_1t}+\alpha_3e^{p_2t}$$

* Cas entrée rampe unité : $u(t)=t$, $t\geq 0$; $U(p)\frac{1}{p^2}$

$$Y(p)=\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}\cdot\frac{1}{p^2}$$

$\downarrow$ décomposition en élément simple.

les racine : p_1, p_2, $p_3=p_4=0$. racine double

$$Y(p)=\frac{\alpha_1}{p-p_1}+\frac{\alpha_2}{p-p_2}+\frac{\alpha_{31}}{p}+\frac{\alpha_{32}}{p^2}$$

$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y(t)=\alpha_1\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_1}\right]+\alpha_2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-p_2}\right]+\alpha_{31}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]+\alpha_{32}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]$$

$$y(t)=\alpha_1 e^{p_1 t}+\alpha_2 e^{p_2 t}+\alpha_{31}+\alpha_{32} t$$

Calcul : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{31}, \alpha_{32}$.

$$Y(p)=\frac{\alpha_1}{p-p_1}+\frac{\alpha_2}{p-p_2}+\frac{\alpha_{31}}{p}+\frac{\alpha_{32}}{p^2}$$

法②

比较系数

$$=\frac{\alpha_1 p^2(p-p_2)+\alpha_2 p^2(p-p_1)+\alpha_{31} p(p-p_1)(p-p_2)+\alpha_{32}(p-p_1)(p-p_2)}{p^2(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$=\frac{1}{p^2(p-p_1)(p-p_2)}$$

比较系数 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{31}, \alpha_{32}$.

$$=\frac{(\overset{A}{\quad})p^3+(\overset{B}{\quad})p^2+(\overset{C}{\quad})p+(\overset{D}{\quad})}{p^2(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=-0.25 \\ \alpha_{31}=-0.75 \\ \alpha_{32}=0.5 \end{cases}$$

* Entrée harmonique : $u(t)=\sin \omega t \rightarrow U(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{\omega}{(p+2)(p+1)(p^2+\omega^2)}, \quad p_1=-1, p_2=-2, p_3=-j\omega, p_4=j\omega.$$

$$Y(p)=\frac{\alpha_1}{p-p_1}+\frac{\alpha_2}{p-p_2}+\frac{\alpha_3}{p-p_3}+\frac{\alpha_4}{p-p_4}$$

$$\Big\downarrow TL^{-1}$$

$$y(t)=\alpha_1 e^{p_1 t}+\alpha_2 e^{p_2 t}+\alpha_3 \underbrace{e^{p_3 t}}_{}+\alpha_4 \underbrace{e^{p_4 t}}_{}$$

$e^{-j\omega t}$ $\qquad$ $e^{j\omega t}$

p_3 et p_4 : Complexe Conjugué

α_{1234} 自己算去~

Solutions TD0

Exercice 1 :

A- Calcul des transformées de Laplace

On applique la définition de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tp}\, dt \qquad \text{avec } f(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

1- $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt$, $(n>0)$

On procède par une intégration par partie. On pose : $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-pt}$ donc $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt}$

On a alors : $F(p) = \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt}_{u*v'} = \underbrace{\left[t^n\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\right]_0^{+\infty}}_{u*v} - \int_0^{+\infty} \underbrace{nt^{n-1}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)}_{u'*v} dt$

$\lim_{t\to+\infty} t^n\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right) = 0$ et $\lim_{t\to 0} t^n\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right) = 0$, on obtient alors :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt = \frac{n}{p} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[t^{n-1}]}$$

Soit $\boxed{\mathcal{L}[\,t^n] = \frac{n}{p}\, \mathcal{L}[t^{n-1}]}$ (1)

Pour n=1, la relation (1) s'écrit alors comme suit : $\mathcal{L}[\,t] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[\,t^0] = \frac{1}{P}\frac{1}{P}$

Pour n=2, on a : $\mathcal{L}[\,t^2] = \frac{2}{p}\mathcal{L}[\,t] = \frac{2}{p}\frac{1}{p^2} = \frac{2x1}{p^3} = \frac{2!}{p^3}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}[\,t^2] = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ pour } n=2}$

Pour n=3, on a : $\mathcal{L}[\,t^3] = \frac{3}{p}\mathcal{L}[\,t^2] = \frac{3}{p}\frac{2}{p^3} = \frac{3x2}{p^3} = \frac{3!}{p^4}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}[\,t^3] = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ pour } n=3}$

On peut alors déduire que : $\boxed{\mathcal{L}[\,t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}}$

Remarque : on peut vérifier à partir de la table des transformée :

$\mathcal{L}\left[\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\right] = \frac{1}{p^n}$, donc pour n on peut écrire : $\mathcal{L}\left[\frac{1}{(n)!}t^n\right] = \frac{1}{p^{n+1}}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}[\,t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$

2- $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}t^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\, t^n dt$

Or à partir des propriétés de Laplace on sait que :

$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$, on peut alors déduire : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}t^n dt = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}}$

3- $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}\sin(\omega t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\sin(\omega t)\,dt$

On procède comme pour le cas précédent :

$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a) \Longrightarrow$ $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\ \sin(\omega t)\,dt = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}}$

4- $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}\cos(\omega t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\cos(\omega t)dt$

On procède comme pour le cas précédent :

$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a) \Longrightarrow$ $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\ \cos(\omega t)\,dt = \frac{\omega(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}}$

B- Calculer les transformées inverses de Laplace : on utilise **la méthode par décomposition en éléments simples** (voir la référence Y. Granjon, « Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état », Edition Dunod, 2001)

a- $F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)}$, le polynôme (1+p)(P+3) admet 2 racines :*p_1= -1 et p_2= -3*

On peut réécrire *F(p)* sous la forme suivante *:* $F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(p+3)} + \frac{1}{2(p+1)}$

On applique la propriété de linéarité on obtient :

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(1+p)(p+3)}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}^{-1}[F(p)]\left[\frac{1}{(p+1)}\right]$ et à partir de la table des transformée on $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] = e^{-at}$

On déduit : $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(1+p)(p+3)}\right] = \frac{1}{2}[e^{-3t} + e^{-t}]}$

b- $F(p) = \frac{3e^{-p}}{(1+p)p}$, pour calculer la transformée inverse on utilise :

La propriété du retard : $\mathcal{L}\big(f(t-\tau)\big) = e^{-\tau p}F(p)$.

Dans cet exemple $\frac{3e^{-p}}{(1+p)p}$ le retard $\tau = 1$, et $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(1+p)p}\right] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+p)p}\right] = 3\big(1-e^{-t)}\big)$

Alors $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(1+p)p}e^{-p}\right] = 3\big(1-e^{-(t-1))}\big)}$

c- $F(p)=\frac{e^{-p}}{p^2+1}$, on procède comme pour précédemment

Cette fois ci on pose : *ω=1 et τ= 1* , on trouve alors

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+p^2)}e^{-p}\right]=\sin(t-1)}$$

d- $F(p)=\frac{2pe^{-p}}{p^2+4}$, on procède comme pour précédemment

Cette fois ci on pose : *ω=2 et τ=1* , on trouve alors

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p}{(4+p^2)}e^{-p}\right]=\cos(2(t-1))}$$

Exercice 2

Calculer la transformée de Laplace d'une équation différentielle :

a- $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=1$ $\quad y(0)=0$, $y'(0)=0$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=1$$

On applique les propriétés de linéarité et de dérivation pour n=2 avec conditions initiales nulles, on obtient

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)\right]=\mathcal{L}[1]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+3\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]+2\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[1]$$

$$p^2Y(p)+3pY(p)+2Y(p)=\frac{1}{p} \Longrightarrow \boxed{Y(p)=\frac{1}{(p^2+3p+2)p}}$$

b- $a_0=2$, $a_1=5$, $a_2=4$,$a_3=1$ avec $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3y(t)}{dt^3}+4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)\right]=\mathcal{L}[1]$$

$$p^3+4p^2Y(p)+5pY(p)+2Y(p)=\frac{1}{p} \Longrightarrow \boxed{Y(p)=\frac{1}{(p^3+4p^2+5p+2)p}}$$

c- $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=1$ $\quad y(0)=0$, $y'(0)=1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)\right]=\mathcal{L}[1]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+3\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]+2\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[1]$$

$$p^2Y(p) - p\cancel{y(0)} - y'(0) + 3pY(p) - 3\cancel{y(0)} + 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$(p^2 + 3p + 2)\, Y(p) - y'(0) = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{Y(p) = \frac{1}{(p^2+3p+2)p} + \frac{1}{(p^2+3p+2)}}$$