第二章
离散时间信号与离散时间系统

郑春红
电子工程学院
Email: chzheng@xidian.edu.cn

2021-9-6

第2章 离散时间信号与离散时间系统

2.1 离散时间信号

离散时间信号(序列)

对模拟信号 $x_a(t)$ 进行等间隔采样，设采样时间间隔为T，则

$$x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty, \quad n\text{取整数}$$

简记为 $x(n)$ 信号，也即 $x(n)$ 序列。

2.1.1 几种常用序列

1．单位脉冲序列（单位抽样）

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

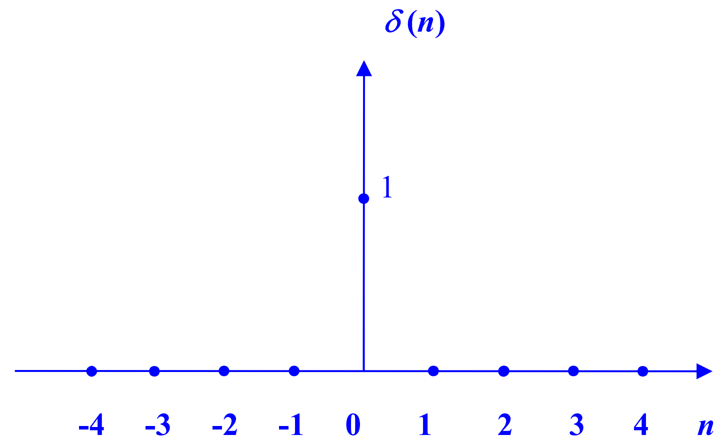


图2.1.2 单位脉冲序列

2.1.1 几种常用序列

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$\delta(n)$ 和 $u(n)$ 的关系为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$$

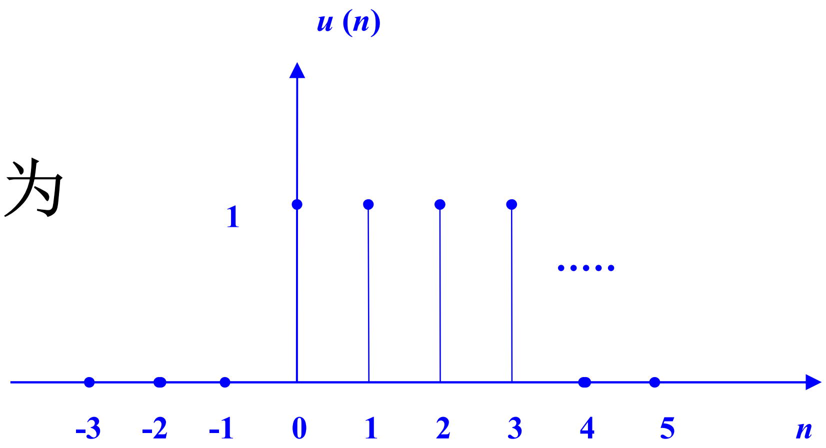


图2.1.3 单位阶跃序列

2.1.1 几种常用序列

3. 矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其他}n\end{cases}$$

$R_N(n)$ 和 $\delta(n)$ 、$u(n)$ 的关系为：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)$$

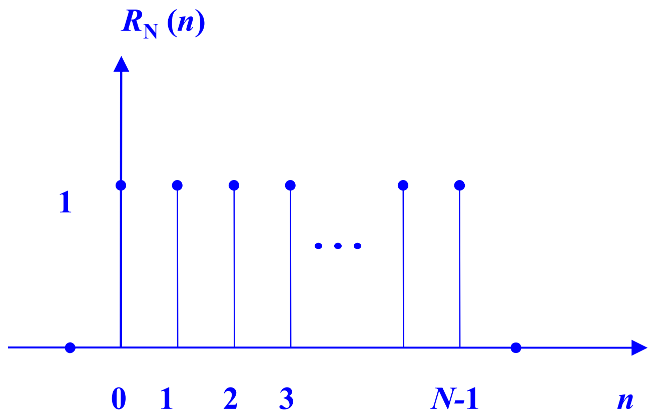


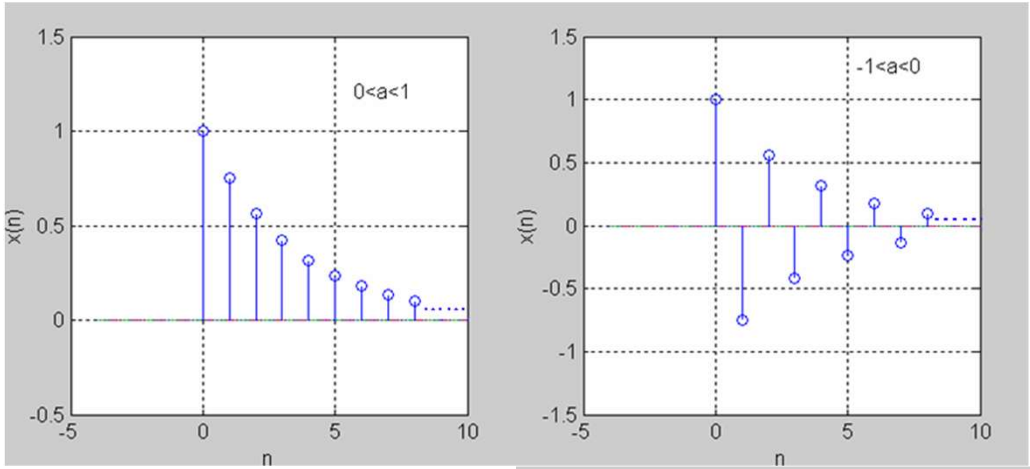
图2.1.4 矩形序列

2.1.1 几种常用序列

4. 实指数序列

注意a的取值范围

$$x(n)=a^n u(n)\qquad a\text{为实数}$$



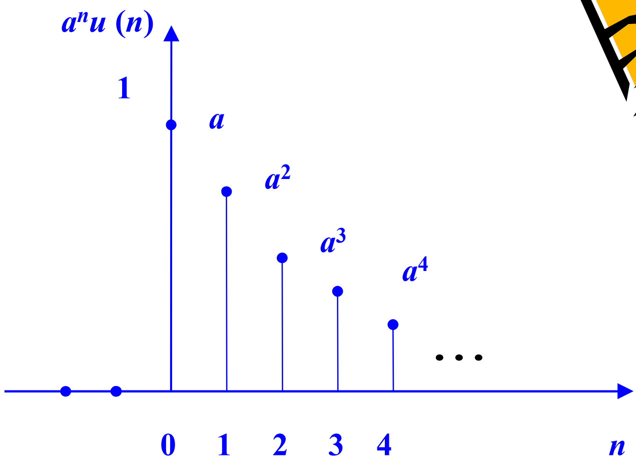
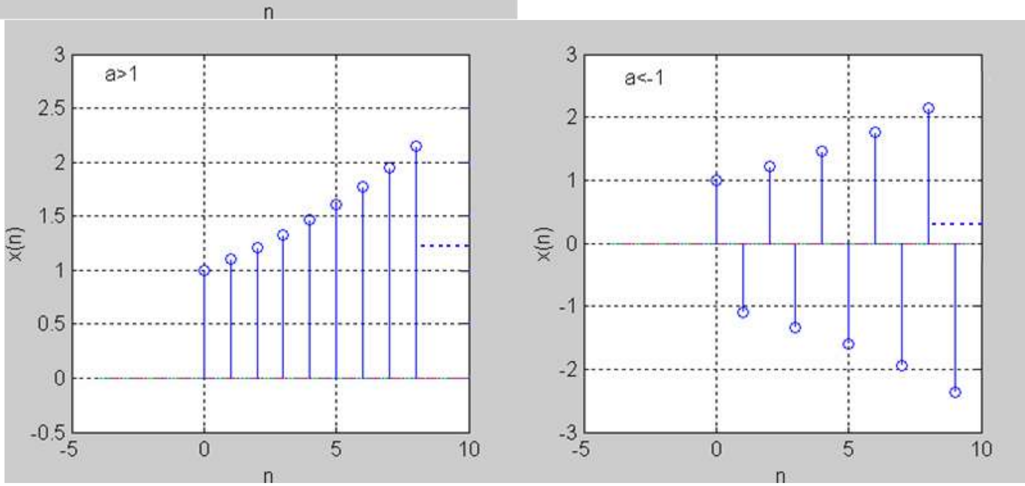


图2.1.5 实指数序列

问题：当a＝1，或a＝－1时，序列是什么序列？



2.1.1 几种常用序列

5. 复指数序列

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}$$

或 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$

它具有实部和虚部，ω_0是复正弦的数字域频率。

$$x(n)=e^{\sigma n}\cos\omega_0 n+je^{\sigma n}\sin\omega_0 n$$

如果用极坐标表示，则

$$x(n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]}=e^{\sigma n}\cdot e^{j\omega_0 n}$$

因此 $|x(n)|=e^{\sigma n}$, $\arg[x(n)]=\omega_0 n$

2.1.1 几种常用序列

6. 正弦型序列

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

式中：***A***为幅度，ω_0为数字域的频率，它反映了序列变化的速率，φ为起始相位。

2.1.1 几种常用序列

7. 周期序列

设序列 $x(n)$ ，如果所有**n**存在一个最小正整数**N**，使下式成立。

$$x(n) = x(n+N), \quad -\infty < n < \infty, \quad n\text{取整数}$$

则序列 $x(n)$ 为周期序列，周期为**N**。

2.1.2 序列的表示

任意序列

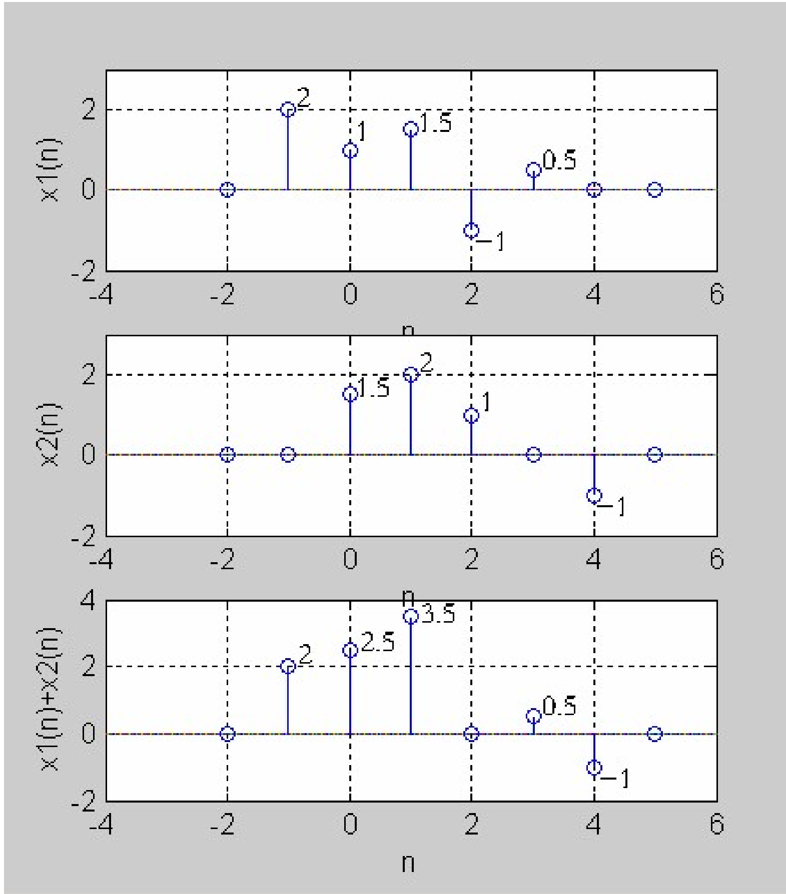
任意序列 $x(n)$ ，可以用单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的移位加权和表示，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

式中 $$\delta(n-m)=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

2.1.3 序列的基本运算

序列的基本运算包括序列加法、乘法、倍乘、移位、翻转和尺度变换及求序列的绝对值之和、序列的能量、周期序列的平均功率等。



1. 序列加法

两序列的加法是指同序号*n*的序列值逐项对应相加而构成的一个新序列。和序列*x*(*n*)可表示为

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

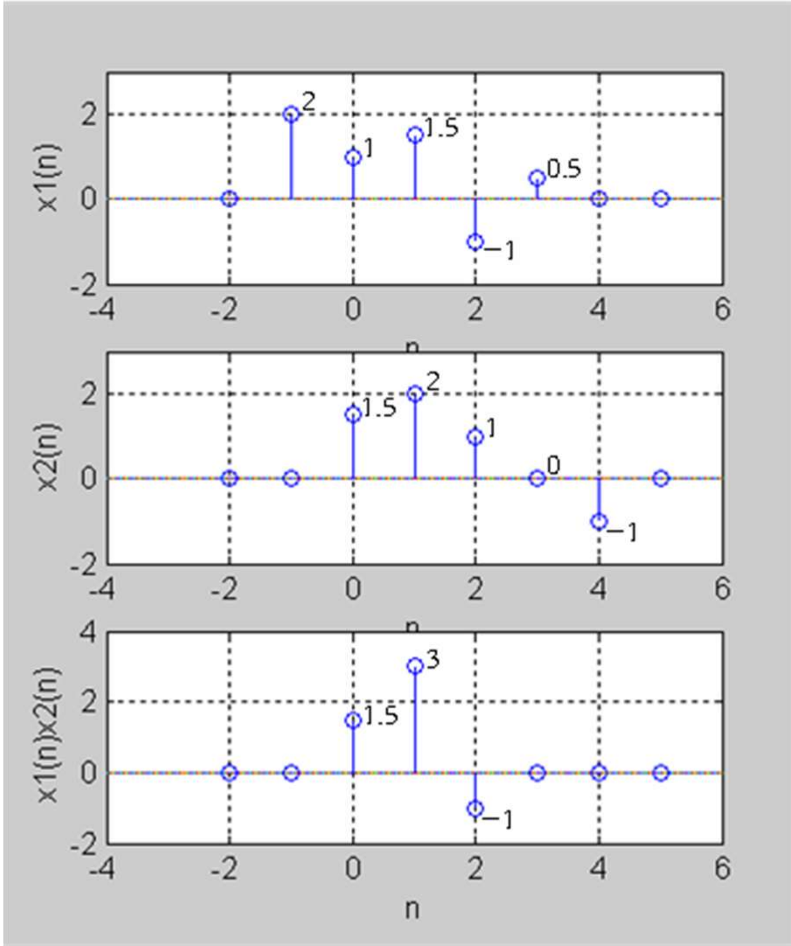
2.1.3 序列的基本运算

2. 序列乘法

序列相乘用于信号的调制。

它是指两序列中同序号*n*的序列值逐项对应相乘，乘积序列*x*(*n*)可表示为

$$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$



2.1.3 序列的基本运算

3. 倍乘

序列的倍乘用于序列值的比例变换。

倍乘是指$x(n)$的每个序列值乘以常数a。倍乘序列$y(n)$可表示为

$$y(n) = ax(n)$$

2.1.3 序列的基本运算

4. 序列移位

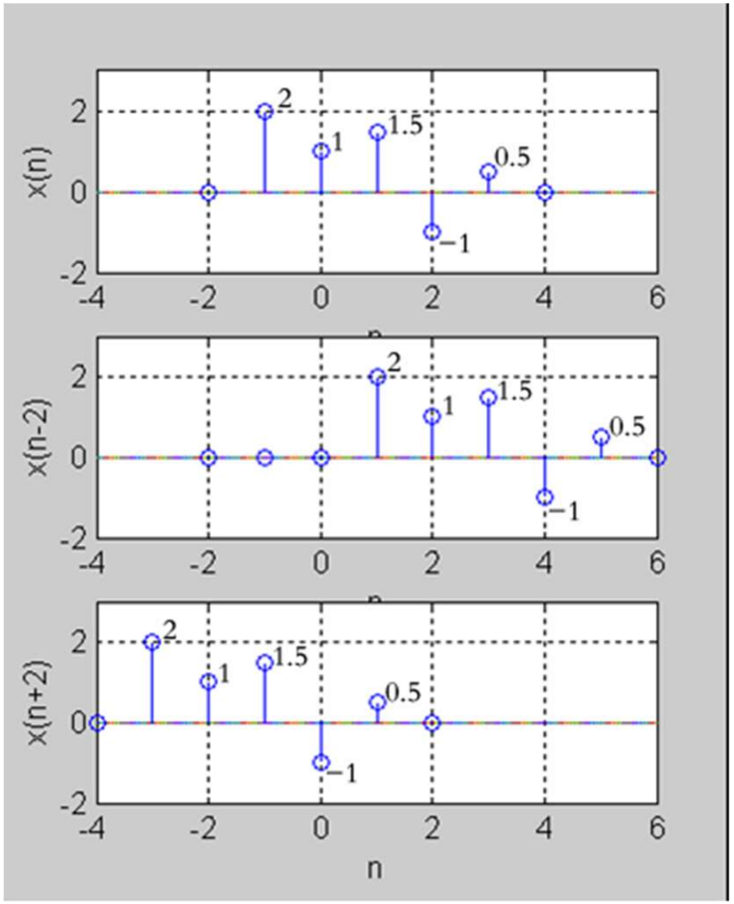
移位序列**y(n)**为

$$y(n) = x(n-m)$$

当**m>0**时

x(n-m)：延时/右移**m**位

x(n+m)：超前/左移**m**位

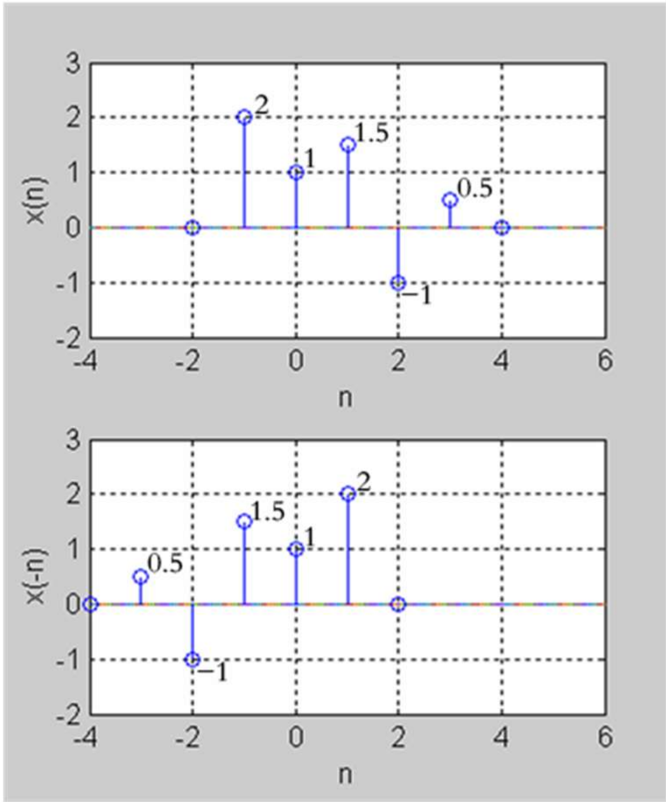


2.1.3 序列的基本运算

5. 序列翻转

序列的反褶是将序列以*n*=0的纵轴为对称轴进行对褶。

$$y(n)=x(-n)$$



2.1.3 序列的基本运算

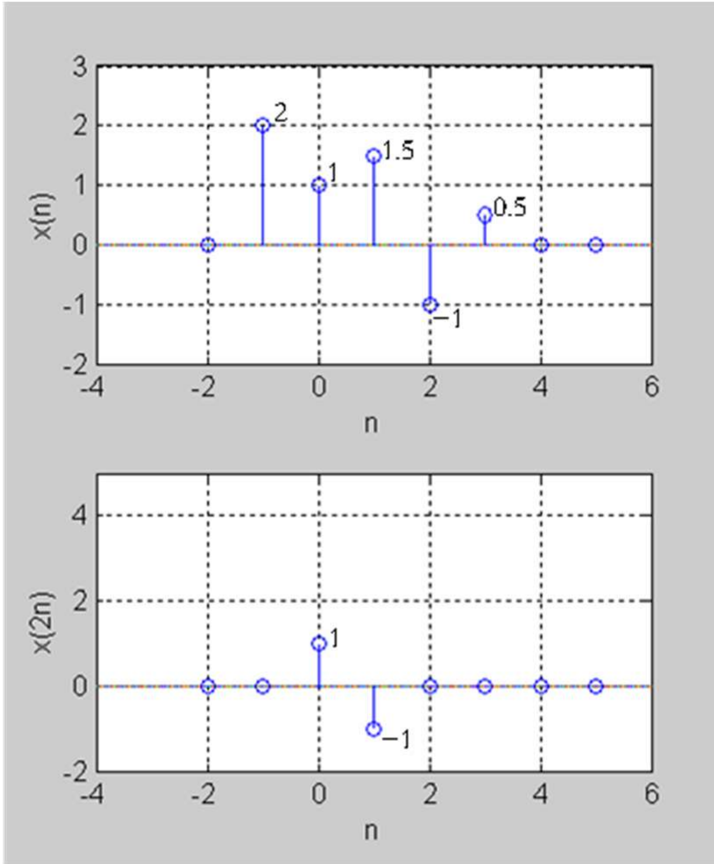
6. 序列尺度变换

新序列 $x(mn)$ 相当于时间轴**n**压缩了**m**倍。**(**抽取**)**

$$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}$$

$$x(mn)=x_a(t)\big|_{t=mnT}$$

新序列 $x(\frac{n}{m})$ 相当于时间轴**n**扩展了**m**倍。**(**插值**)**



2.1.3 序列的基本运算

7. 序列绝对值之和

设某序列为$x(n)$，则

$$s_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

称为序列绝对值之和。

若满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ ，则**x(n)**为绝对可和序列。

若满足 $|x(n)| \le M_x < \infty$ （M_X为有限的正整数），则称**x(n)**为有界序列。

2.1.3 序列的基本运算

8. 序列能量

复数序列**x(n)**的能量为

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

式中，上标*表示共轭运算。

9. 周期序列平均功率

设**x(n)**是周期为**N**的周期序列，则其平均功率为

$$\mathrm{P}_x = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N-1}} |x(n)|^2$$

2.2 离散时间系统

2.2.1 线性时不变系统

2.2.2 离散时间系统的时域分析

2.2.3 系统的因果性和稳定性

2.2.4 线性常系数差分方程

2.2 离散时间系统

一个离散时间系统是将输入序列变换成输出序列的一种运算。

其框图如下：

$$\longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow$$

输出与输入之间关系用下式表示

$$y(n) = T[x(n)]$$

离散时间系统中最重要、最常用的是线性时不变系统（**LTIS**或**SLIT**）。

Linear Time-Invariant Systems

2.2.1 线性时不变系统

1. 线性系统

若系统

$$y_1(n)=\mathrm{T}[x_1(n)],\quad y_2(n)=\mathrm{T}[x_2(n)]$$

满足叠加原理：

$$y(n)=\mathrm{T}[ax_1(n)+bx_2(n)]=a\mathrm{T}[x_1(n)]+b\mathrm{T}[x_2(n)]$$

或同时满足：

可加性： $\mathrm{T}[x_1(n)+x_2(n)]=\mathrm{T}[x_1(n)]+\mathrm{T}[x_2(n)]$

比例性/齐次性： $\mathrm{T}[ax_1(n)]=a\mathrm{T}[x_1(n)]$

其中：a 、b 是常数。

则此系统为线性系统。

2.2.1 线性时不变系统

例**2.1**　讨论 $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]=3x(n)+4$

所表示的系统是不是线性系统。

证明　因为

$$y_1(n)=\mathrm{T}[x_1(n)]=3x_1(n)+4$$

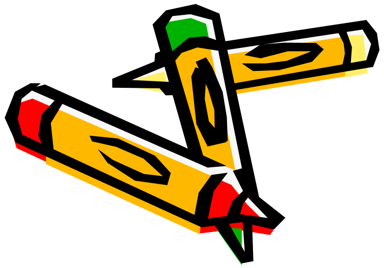
$$y_2(n)=\mathrm{T}[x_2(n)]=3x_2(n)+4$$

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=3[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]+4(a_1+a_2)$$

$$\mathrm{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=3[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]+4$$

显然

$$\mathrm{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\neq a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$$



故此系统不是线性系统。

2.2.1 线性时不变系统

2. 时不变系统

若系统的运算关系不随时间变化，则称该系统为时不变系统（或称为移不变系统）。

对时不变系统，若 $y(n) = \mathrm{T}[x(n)]$

则 $y(n-n_0) = \mathrm{T}[x(n-n_0)]$

2.2.1 线性时不变系统

例**2.2** 分析 $y(n)=T[x(n)]=nx(n)$ 所表示的系统是否是时不变系统，并证明你的结论。

证明 因为 $$T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)$$

而 $$y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$$

所以 $$y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$$

故此系统不是时不变系统。

同时具有线性和时不变性的离散时间系统称为线性时不变（**Linear Time Invariant LTI**）离散时间系统，简称**LTI**系统。

同时具有线性和移不变性的离散时间系统称为线性移不变系统
LSI：Linear Shift Invariant

2.2.2 离散时间系统的时域分析

1.单位脉冲响应

单位脉冲响应$h(n)$是系统对单位脉冲序列$\delta(n)$的零状态响应，它表征了系统的时域特征。

$$h(n)=T[\delta(n)]$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow h(n)$$

2.2.2 离散时间系统的时域分析

2.LTI系统输入输出关系

任意输入序列： $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$

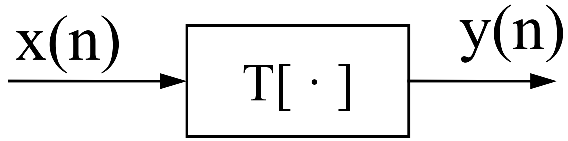
系统输出：

$$y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]，\text{线性性}$$

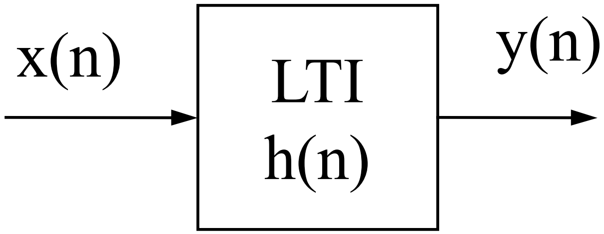
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m),\quad \text{移不变性}$$

$$=x(n)*h(n)$$



$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

2.2.2 离散时间系统的时域分析



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

一个**LTI**系统可以用单位抽样响应**h(n)**来表征，任意输入的系统输出等于输入序列和该单位抽样响应**h(n)**的卷积。

2.2.2 离散时间系统的时域分析

3. 卷积的求解

设两序列**x(n)**、 **h(n)**，则其卷积定义为：

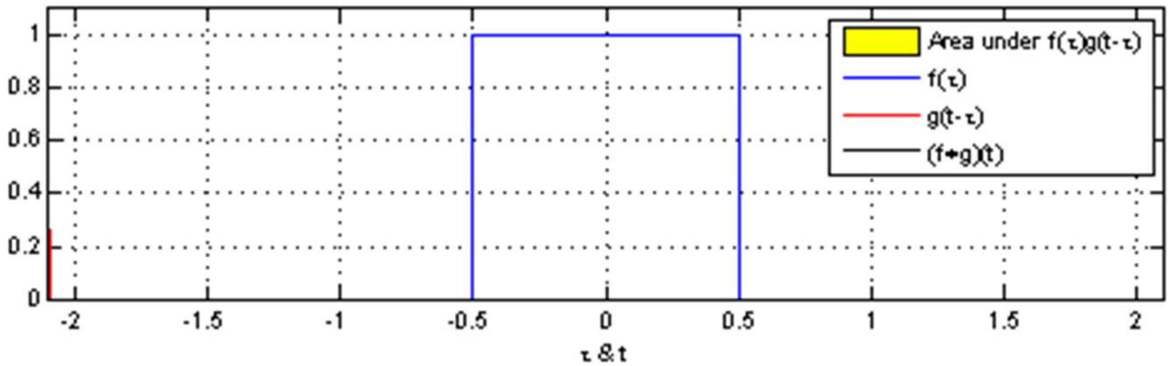
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(x)*h(n)$$

1）翻褶： $x(n)\rightarrow x(m) \quad h(n)\rightarrow h(m)\rightarrow h(-m)$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{2）移位：} & h(-m)\rightarrow h(n-m) \\
\text{3）相乘：} & x(m)\cdot h(n-m) \quad -\infty<m<\infty \\
\text{4）相加：} & \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)
\end{array}\right\} -\infty<n<\infty$$

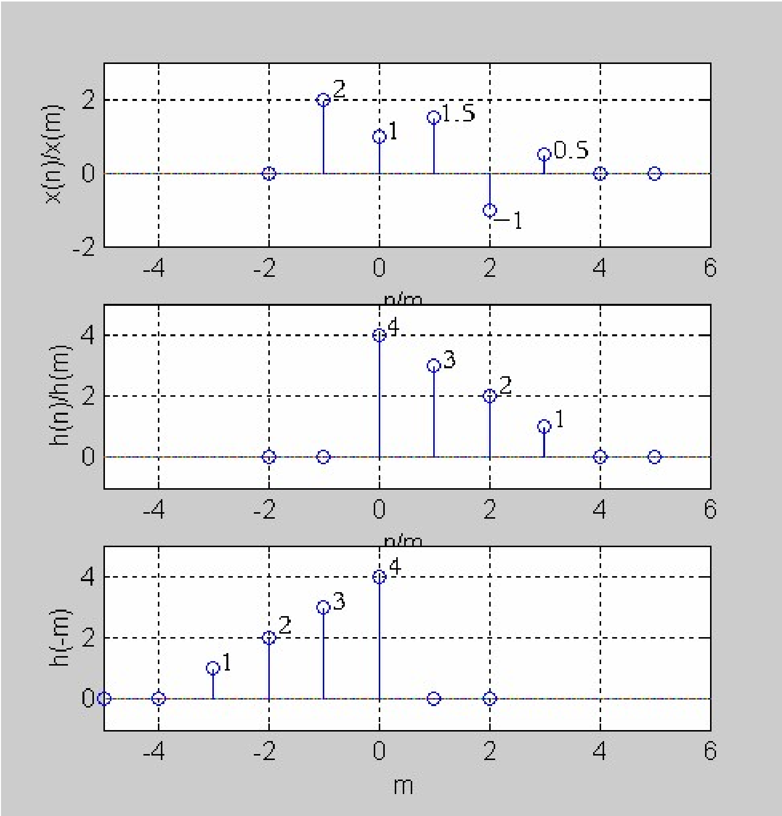
2.2.2 离散时间系统的时域分析

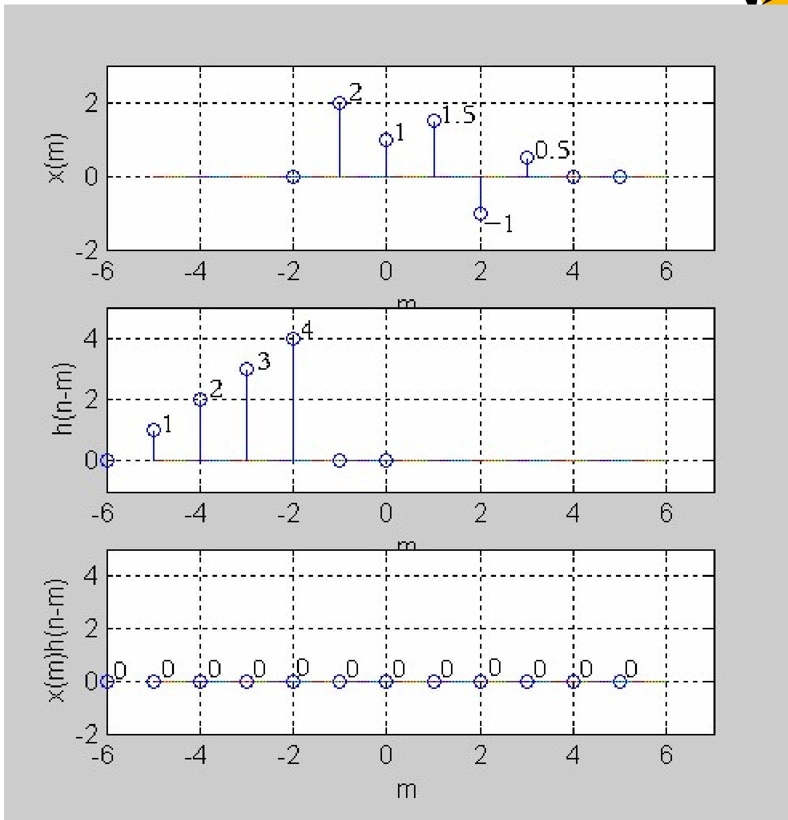
卷积过程的动态演示



2.2.2 离散时间系统的时域分析

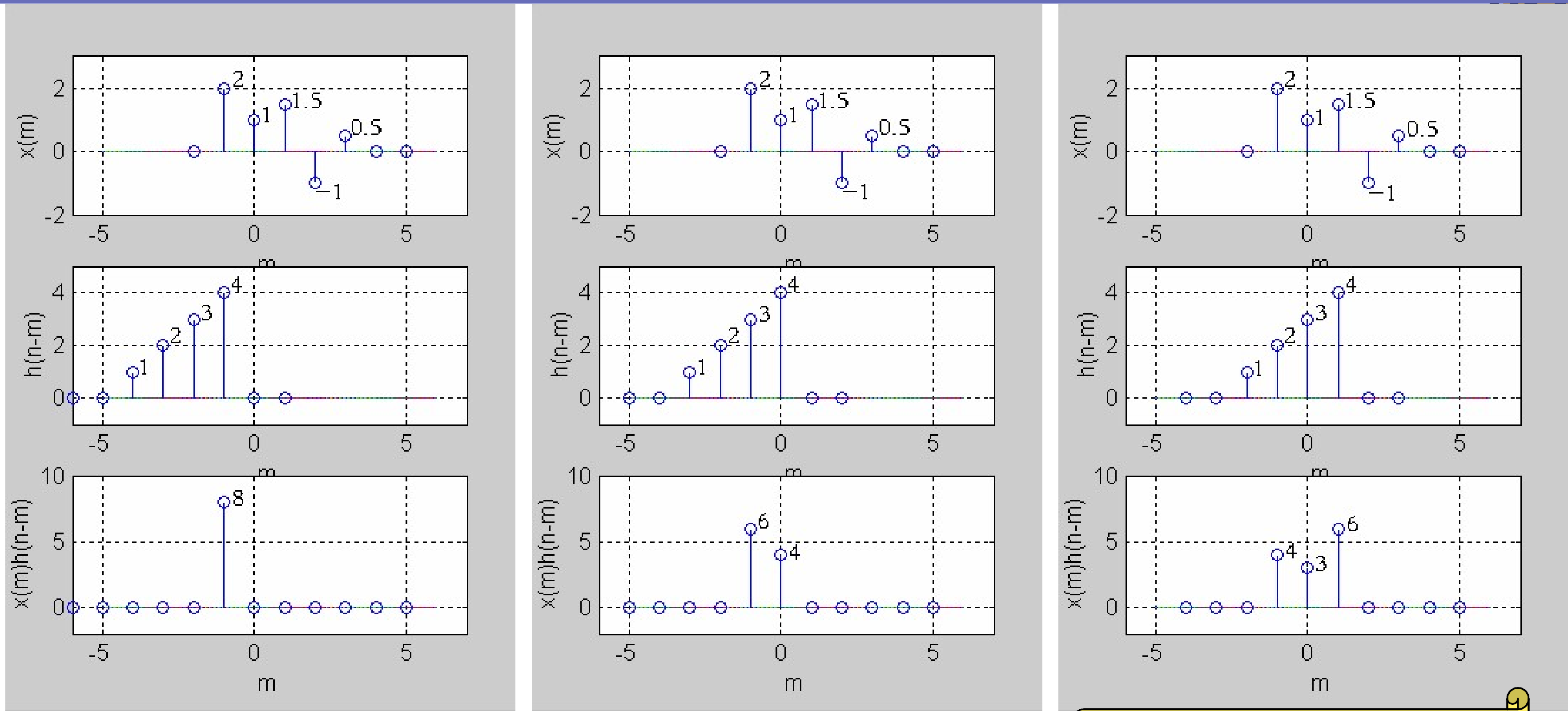
- 举例说明卷积过程





$n \le -2,\ y(n)=0$

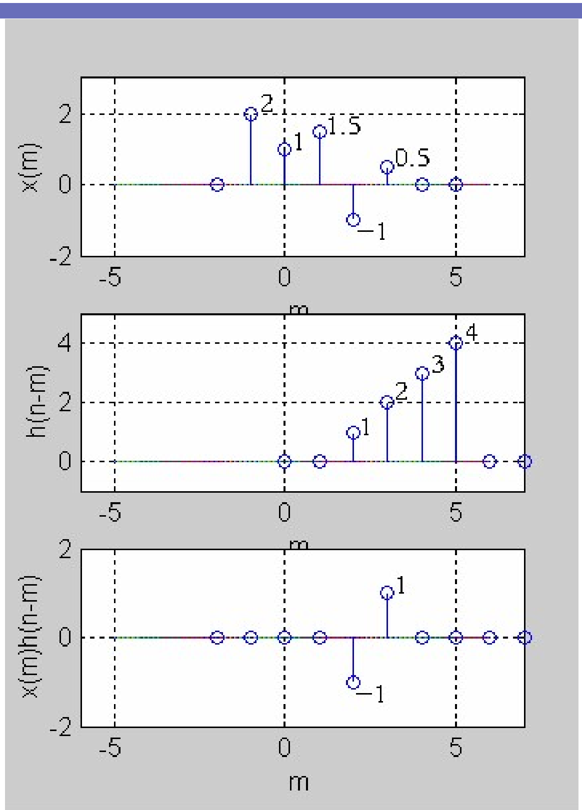
2.2.2 离散时间系统的时域分析



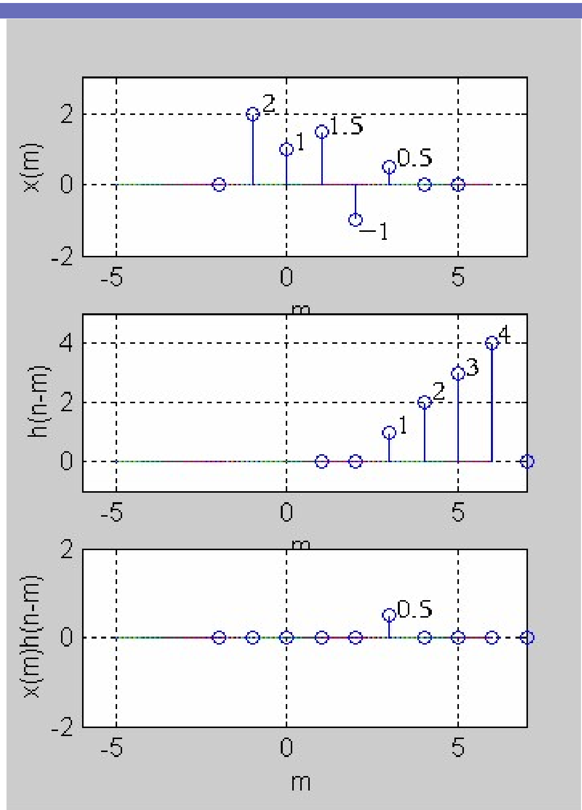
y(-1)=8

y(0)=6+4=10

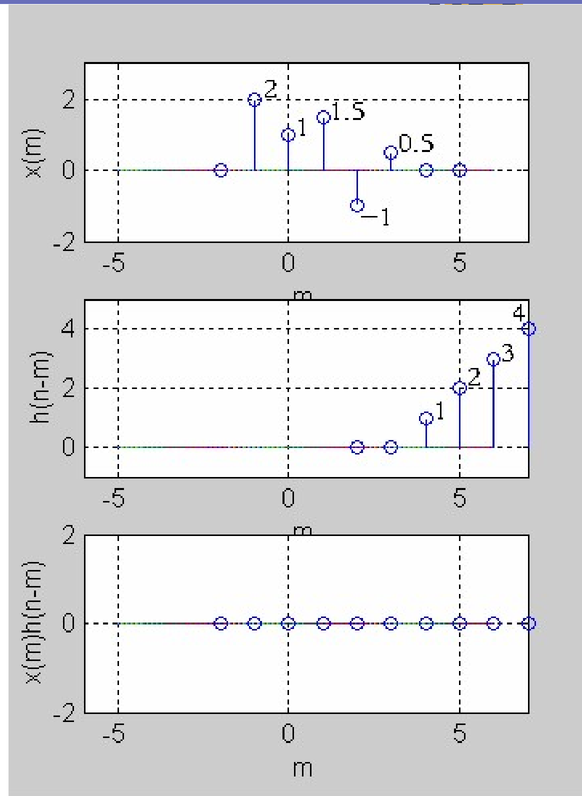
2.2.2 离散时间系统的时域分析



$y(5)=-1+1=0$

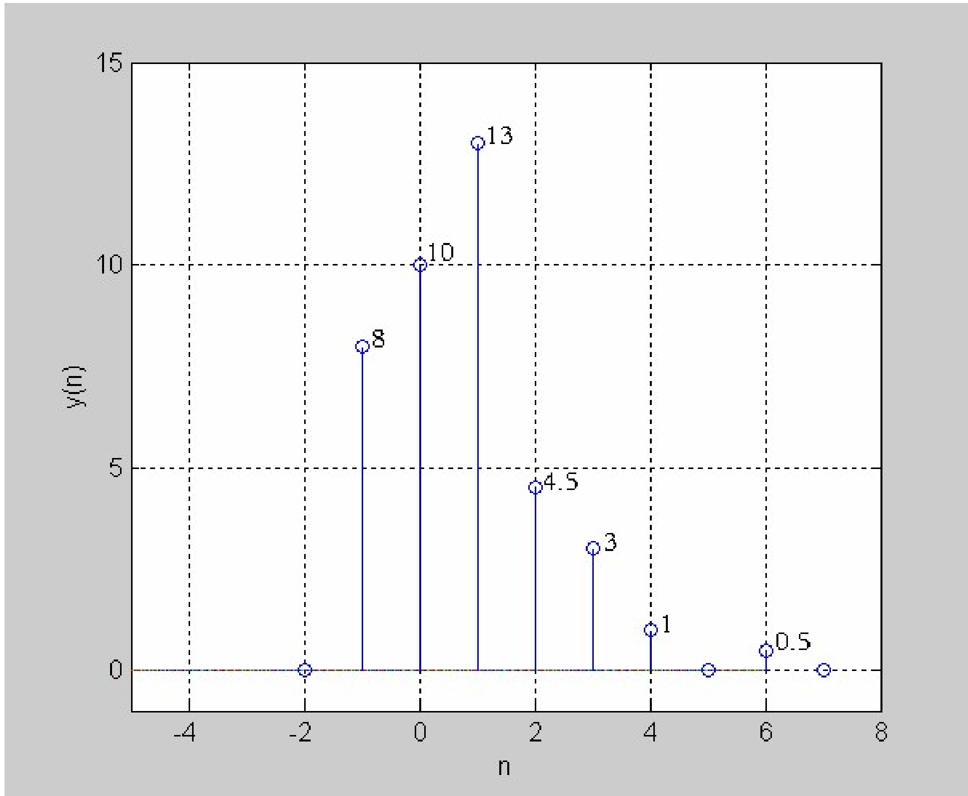


$y(6)=0.5$



$y(n)=0, n \geq 7$

2.2.2 离散时间系统的时域分析



2.2.2 离散时间系统的时域分析

卷积与两序列的前后次序无关

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

令 $n-m=k$

则 $m=n-k$

$$=\sum_{n-k=-\infty}^{\infty}x(n-k)h(k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=h(n)*x(n)$$

2.2.2 离散时间系统的时域分析

思考:

当x(n)的非零区间为[N1,N2]，h(n)的非零区间为[M1,M2]时，求解系统的输出y(n)又如何分段？

结论：

若有限长序列x(n)的长度为N，h(n)的长度为M，则其卷积和的长度L为：

$$L=N+M-1$$

2.2.2 离散时间系统的时域分析

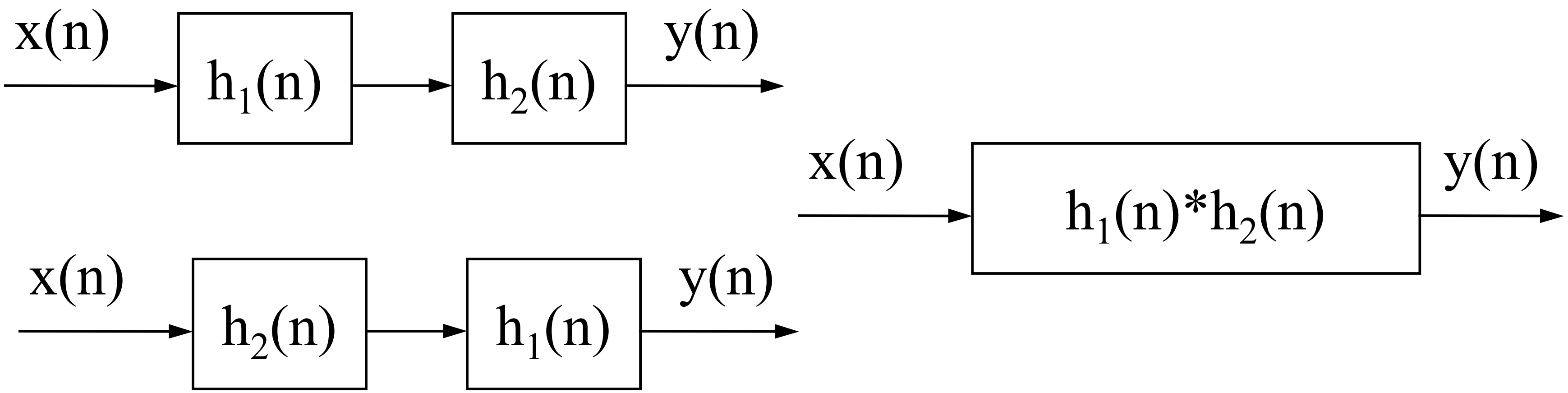
4. LTI系统的性质

交换律

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

2.2.2 离散时间系统的时域分析

结合律

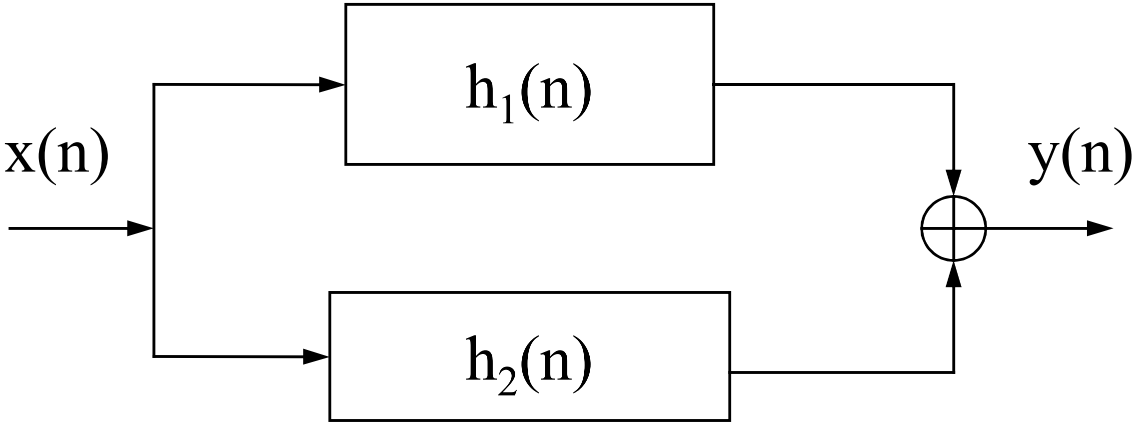


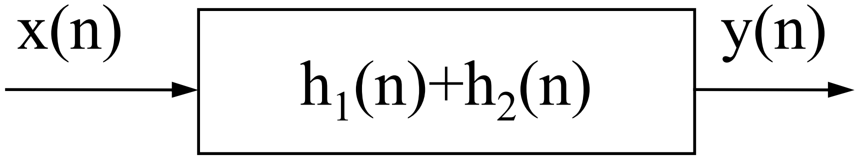
$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*h_2(n)*h_1(n)$$

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n) \qquad y(n)=x(n)*h(n)$$

2.2.2 离散时间系统的时域分析

分配律





2.2.3 系统的因果性和稳定性

1．因果性：系统的物理可实现性

若系统 **n**时刻的输出，只取决于**n**时刻以及**n**时刻以前的输入序列，而与**n**时刻以后的输入无关，则称该系统为因果系统。

LTI系统是因果系统的充要条件：

$$h(n) = 0 \quad n < 0$$

2.2.3 系统的因果性和稳定性

2. 稳定性

稳定系统是有界输入产生有界输出的系统。

若 $$|x(n)| \le M < \infty$$

则 $$|y(n)| \le P < \infty$$

LTI系统是稳定系统的充要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$$

2.2.3 系统的因果性和稳定性

例2.3　若一个线性时不变系统的单位脉冲响应为

$$h(n) = a^n u(-n),$$ 式中 a 是常实数

讨论系统的因果性和稳定性。

解 (1)因果性

因为在$n<0$时，$h(n) \neq 0$，故此系统为非因果系统。

(2)稳定性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{0} |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{-n} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|a|^{-1}}, & |a|>1 \\ \infty, & |a| \le 1 \end{cases}$$

所以 $|a|>1$ 时此系统稳定，$|a|\le 1$ 时此系统不稳定。

2.2.4 线性常系数差分方程

用差分方程来描述时域离散系统的输入输出关系。

一个N阶常系数线性差分方程表示为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

其中：$a_0 = 1$　a_k，b_i 是代表系统参数的常数。

当　$a_k\,(k = 1,2,\cdots,N) = 0$　时，差分方程变为：$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$

此时方程描述一个M阶的FIR数字滤波器。

2.2.4 线性常系数差分方程

线性常系数差分方程的求解：

1.经典解法；

2.递推方法*

3.*Z*变换方法。

差分方程在给定输入和给定初始条件下，可用递推迭代的办法求系统的响应。如果输入是单位脉冲序列$\delta(n)$，输出响应就是单位脉冲响应$h(n)$。

2.2.4 线性常系数差分方程

例2.4　已知系统的差分方程

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

试求其单位脉冲响应，初始条件分别为（1）y(-1)=0

(2) $y(n)=0(n>0)$

解　设$x(n)=\delta(n)$，输出$y(n)$就是$h(n)$

上式可变为　$y(n)=ay(n-1)+\delta(n)$

由初始条件（1），递推得

n=0时，$y(0)=ay(-1)+\delta(0)=a\times 0+1=1$

n=1时，$y(1)=ay(0)+\delta(1)=a\times 1+0=a$

…

n=n时　$y(n)=ay(n-1)+\delta(n)=a\times a^{n-1}+0=a^n$

通式为：$y(n)=a^n u(n)$

系统相当于因果系统，如果|a|<1，则系统是稳定的。

2.2.4 线性常系数差分方程

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

由初始条件（2）$y(n) = 0(n > 0)$，向**n<0**的方向递推，其递推关系变为

$$y(n-1) = a^{-1}[y(n) - x(n)]$$

递推得

n=1时， $y(0) = a^{-1}[y(1) - \delta(1)] = a^{-1}[0-0] = 0$

n=0时， $y(-1) = a^{-1}[y(0) - \delta(0)] = a^{-1}[0-1] = -a^{-1}$

n=-1时，$y(-2) = a^{-1}[y(-1) - \delta(-1)] = a^{-1}[-a^{-1} - 0] = -a^{-2}$

…

n=-|n|时 $y(n-1) = a^{-1}[y(n) - \delta(n)] = a^{-1}[-a^{n} - 0] = -a^{n-1}$

用**n**代替**n-1**，得到通式：$y(n) = -a^{n}u(-n-1)$

这样的系统是非因果系统，如果**|a|>1**，则系统是稳定的。

2.2.4 线性常系数差分方程

一些关于差分方程的结论：

- 一个差分方程不能唯一确定一个系统
- 常系数线性差分方程描述的系统不一定是线性时不变的
- 不一定是因果的
- 不一定是稳定的

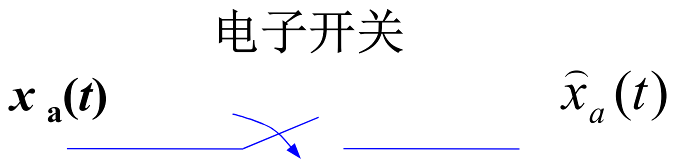
别担心，除非另做说明，本书中的差分方程描述的系统是指线性时不变系统，并且多数是指因果系统。

2.2.4 线性常系数差分方程

- **MATLAB**信号处理工具箱中提供的**filter**函数，可以实现线性常系数差分方程的递推解法，调用格式如下：
- **y=filter(b,a,x,xi);**
- 用函数**filter(b,a,x,xi)**计算输出y，如果和输入信号和系统的初始状态有关，称为系统的全响应。如果系统的输入条件为零，就默认xi=0，调用格式为**y=filter(b,a,x)**。

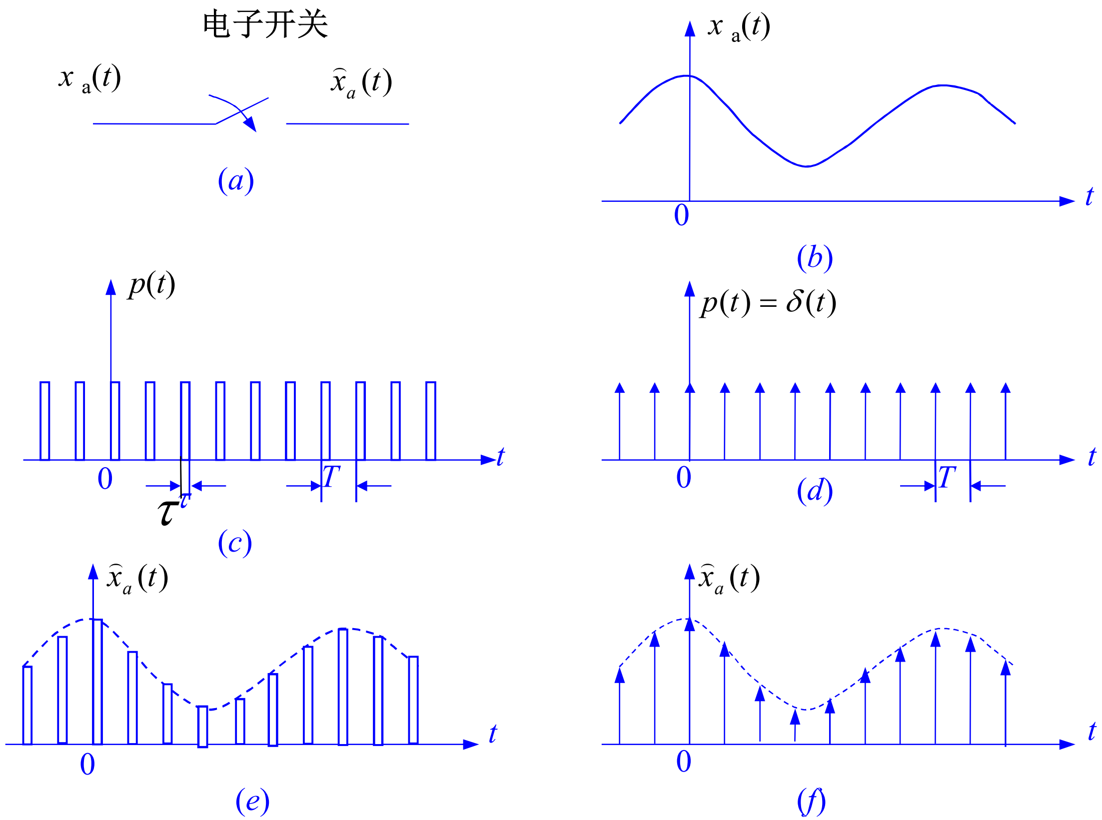
2.3 连续信号的抽样

- 离散时间信号通常是由连续时间信号经**周期抽样**得到的。
- 完成抽样功能的器件称为**抽样器**，抽样器可以看成是一个电子开关。开关每隔T秒闭合一次，便得到一个输出抽样值。
- 在理想情况下，开关闭合时间无穷短。对实际抽样，闭合时间是τ秒，但$\tau \ll T$。



抽样器的原理

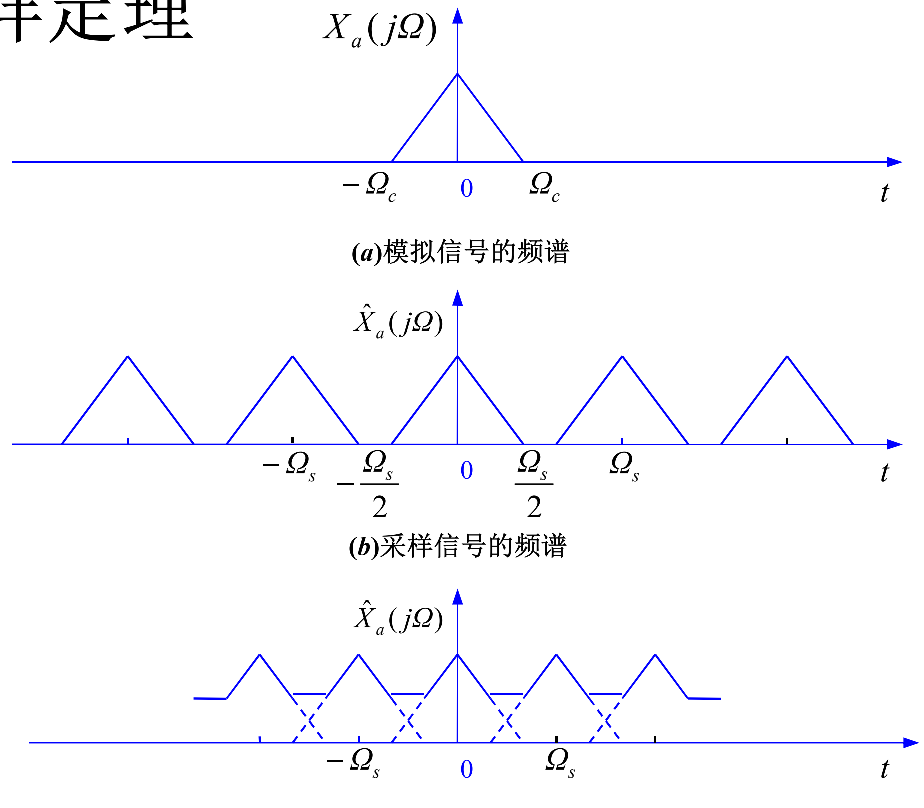
2.3 连续信号的抽样



抽样过程可以看作脉冲调幅， **$x_a(t)$**为调制信号，被调脉冲载波是周期为**T**的周期脉冲串。

2.3 连续信号的抽样

1、采样定理



(c)采样信号的频谱

$$\Omega_s \geq 2\Omega_c$$

$$\Omega < 2\Omega_c$$

2.3 连续信号的抽样

2、奈奎斯特频率

当对带限信号的抽样满足 $\Omega_g < \Omega_s/2$ 时，采用一个截止频率为$\Omega_s/2$的理想低通滤波器，就可得到不失真的原信号频谱，即可以不失真地还原出原来的连续信号。

能够无失真地恢复出原来模拟信号的最低采样频率称为奈奎斯特（**Nyquist**）采样频率，即奈奎斯特采样频率为信号的最高截止频率的两倍。

实际工程中，信号的频谱不是锐截止，采样频率通常高于奈奎斯特采样频率。

2.3 连续信号的抽样

如果满足奈奎斯特抽样定理，则抽样后不会产生频谱混叠，可知

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}X_a(j\Omega),\quad |\Omega|<\frac{\Omega_s}{2}$$

故将其通过理想低通滤波器

$$G(j\Omega)=\begin{cases} T, & |\Omega|\le\dfrac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega|>\dfrac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

可得到原信号频谱，即在输出端就恢复出了原连续信号。