

## TD n° 2

### Diagramme de Bode et de Black

#### Exercice 1 :

1) Calculer et tracer la réponse indicielle du système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$$

Considérer les cas où  $0 < T_1 < T_2$  et  $0 < T_2 < T_1$

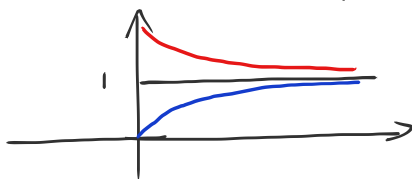
(2) Tracer le diagramme de Bode (les asymptotes et le tracé exact) de ce système avec  $T_2 = T_1/2 = 1$ .

(3) Dédurre le diagramme de Balck

1) réponse indicielle :  $X(p) = \frac{1}{p}$

$$Y(p) = F(p)X(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{A_1}{1 + T_2 p} + \frac{A_2}{p} = \frac{T_1 - T_2}{1 + T_2 p} + \frac{1}{p} = \frac{\frac{T_1 - T_2}{T_2}}{1 + p} + \frac{1}{p}$$

$$y(t) = \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$



$0 < T_2 < T_1$   
 $0 < T_1 < T_2$

$T_1$  与  $T_2$  关系决定在 1 上面还是 1 下面

(2)  $T_2 = T_1/2 = 1$ ,  $F(p) = \frac{1 + 2p}{1 + p}$   $p = j\omega \rightarrow F(j\omega) = \frac{1 + 2j\omega}{1 + j\omega}$

$$|F(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + 4\omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} \quad \varphi(j\omega) = \text{Arg}[F(j\omega)] = \text{Arg}(1 + 2j\omega) - \text{Arg}(1 + j\omega)$$

低频渐近线:

$$\omega \rightarrow 0 \quad \begin{cases} |F(j\omega)| = 1 \rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \varphi(j\omega) = \text{arg}(1) = 0^\circ \end{cases}$$

高频渐近线:

$$\omega \rightarrow \infty \quad \begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{2\omega}{\omega} = 2 \rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log 2 \approx 6 \text{ dB} \\ \varphi(j\omega) = \text{arg}(2) = 0^\circ \end{cases}$$

拐点:  $\frac{1 + j2\omega}{1 + j\omega}$   $\omega_1 = \frac{1}{2}$  和  $\omega_2 = 1$

$F(p) = \frac{1 + 2p}{1 + p} = \frac{1 + p}{1 + p} \cdot \frac{1 + p}{1 + p} = \frac{1 + p}{1 + p} \cdot \frac{1 + p}{1 + p}$   
= 结论两函数相乘, 波特图相加

$F_1$  CP 边界条件

$$F_1(j\omega) = 1 + 2j\omega$$

$$\omega \rightarrow 0 \begin{cases} |F_1(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \text{Arg}(F_1(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

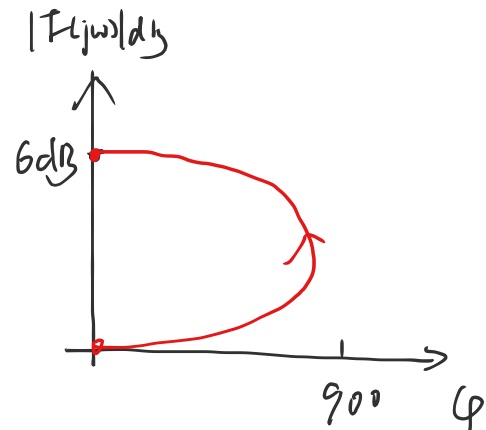
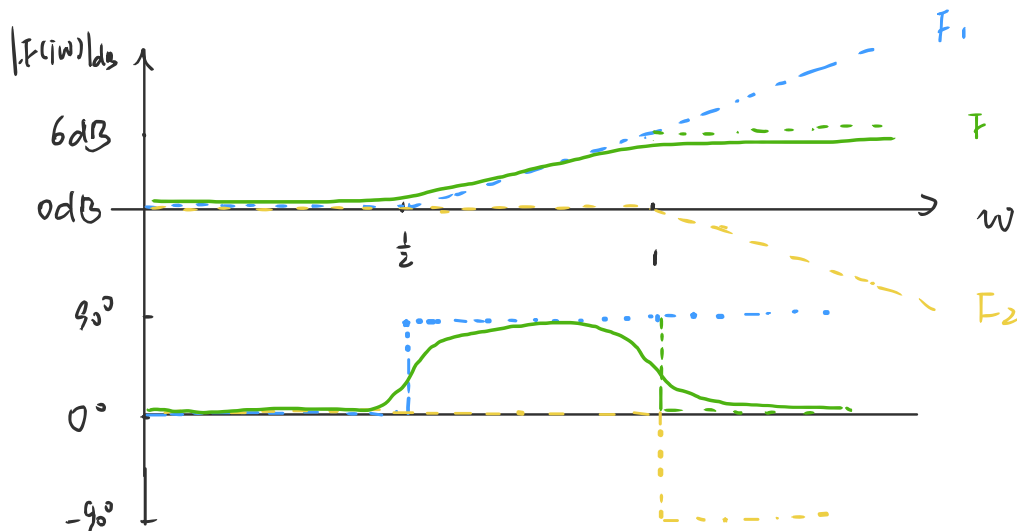
$$\omega \rightarrow \infty \begin{cases} |F_1(j\omega)|_{dB} \rightarrow \infty \\ \text{Arg}(F_1(j\omega)) = 90^\circ \end{cases}$$

$F_2$  CP 边界条件

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$\omega \rightarrow 0 \begin{cases} |F_2(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \text{Arg}(F_2(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

$$\omega \rightarrow \infty \begin{cases} |F_2(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty \\ \text{Arg}(F_2(j\omega)) = 0^\circ - 90^\circ = -90^\circ \end{cases}$$



### Exercice 2 :

La fonction de transfert entre l'angle de braquage du gouvernail de profondeur  $b(t)$  qui commande la manœuvre (gouverne) et l'assiette d'un avion  $a(t)$  (angle que fait l'axe longitudinal de l'avion avec l'axe horizontal) a été modélisé par :

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{2(0.2p + 1)}{p(4p^2 + 2.4p + 1)}$$

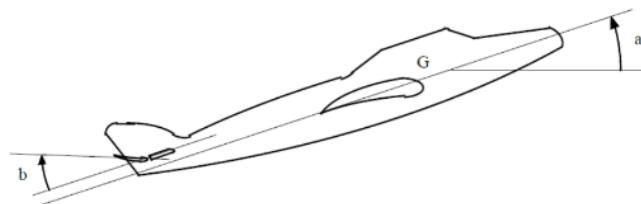


Figure 1 Schéma de l'avion

Le système de gouverne comporte les dispositifs suivants :

- Un système de commande électrique du gouvernail dont la fonction de transfert est :

$$F_a(p) = \frac{B(p)}{U(p)} = \frac{K_a}{2p+1} \quad \text{avec } K_a = 0.05 \text{ rad/V}$$

- Un détecteur d'assiette (gyroscope) qui fournit un signal électrique proportionnel à l'assiette réelle représenté par  $\frac{A_m(p)}{A(p)} = F_g(p) = K_g$  avec  $K_g = 8 \text{ V/rad}$

Le schéma fonctionnel représentant le système de gouverne de l'assiette d'un avion est le suivant :

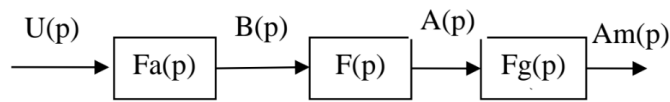


Figure 2 Schéma fonctionnel

Tracer le diagramme de Bode (asymptotes et tracé à main levé) de la fonction de transfert du système de gouverne ainsi que le diagramme de Black

$$G(p) = F_a(p) \cdot F(p) \cdot F_g(p) = \frac{0.05}{2p+1} \cdot \frac{2(0.2p+1)}{p(4p^2+2.4p+1)} \cdot 8$$

$$= \underbrace{\frac{0.8}{p}}_{F_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+2p}}_{F_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{4p^2+2.4p+1}}_{F_3} \cdot \underbrace{(0.2p+1)}_{F_4}$$

$$F_1(j\omega) = \frac{0.8}{j\omega}, |F_1(j\omega)| = \frac{0.8}{\omega}, |F_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log\left(\frac{0.8}{\omega}\right) = 20 \log 0.8 - 20 \log \omega$$

$$\arg(F_1(\omega)) = \arg(0.8) - \arg(j\omega) = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{1+2j\omega}, |F_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\omega \ll \frac{1}{2}, \omega \ll \frac{1}{2}, |F_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log(1) = 0$$

$$\omega \gg \frac{1}{2}, |F_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{2\omega}\right) = -20 \log 2\omega = -20 \log 2 - 20 \log \omega$$

$$\arg(F_2(\omega)) = \arg(1) - \arg(1+2j\omega)$$

$$\omega \ll \frac{1}{2}, \varphi = 0$$

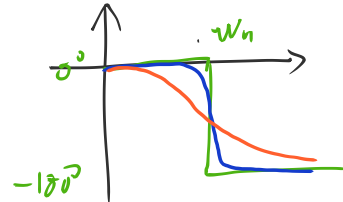
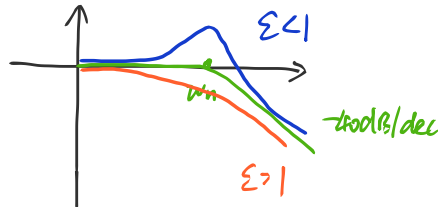
$$\omega \gg \frac{1}{2}, \varphi = -90^\circ$$

$$F_3(j\omega) = \frac{1}{-4\omega^2 + 2.4j\omega + 1} = \frac{\frac{1}{4}}{(j\omega)^2 + 0.6(j\omega) + 1} \quad \left( \text{标准} \frac{k\omega^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{1}{2} \\ \xi = 0.6 < 1 \end{cases}$$

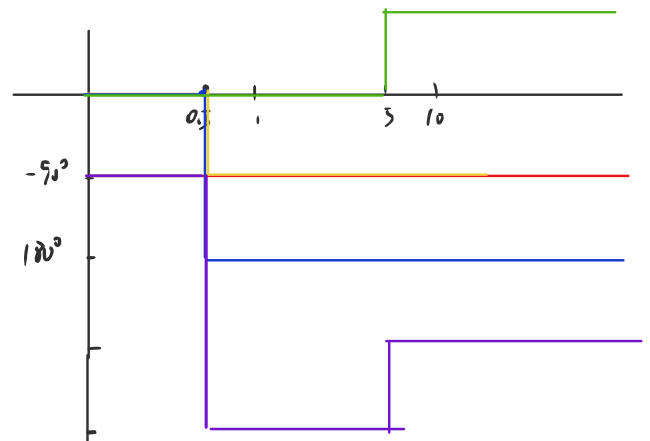
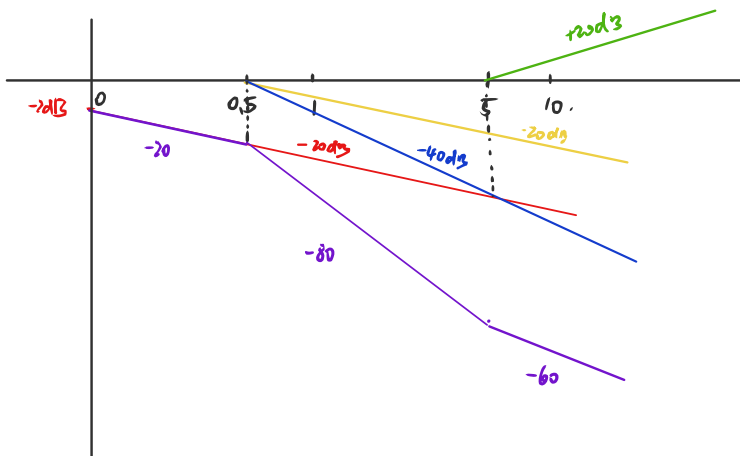
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{低频渐近线} : 0 \text{ dB} \\ \text{高频} : -40 \text{ dB/dec} \end{cases} \quad \text{相位} \begin{cases} 0^\circ \\ -180^\circ \end{cases}$$

= 所系统:



$$F_4(j\omega) = 0.2j\omega + 1, |F_4(j\omega)| = \sqrt{1+0.4\omega^2}$$

$$\begin{cases} 0 = |F_4(j\omega)|_{dB} = 0 & \varphi = 0^\circ \\ \infty = +20 \text{ dB} & \omega = \frac{1}{\sqrt{0.4}} = 5 \\ & \varphi = 90^\circ \end{cases}$$



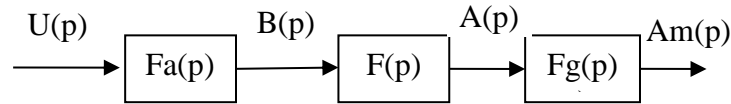


Figure 2 Schéma fonctionnel

Tracer le diagramme de Bode (asymptotes et tracé à main levé) de la fonction de transfert du système de gouverne ainsi que le diagramme de Black

### Exercice 3

Le principe de la montgolfière représenté par la figure 3 est le suivant : un ballon contient de l'air qui est chauffé par un brûleur (par exemple alimenté en gaz). L'air chaud étant plus léger, le ballon et la nacelle s'élèvent.

On notera les grandeurs suivantes (toutes positives dans le sens de la montée) :

- $h(t)$  : l'altitude de la nacelle par rapport à la hauteur de référence.
- $u(t)$  : signal de commande du brûleur en volt.
- $\theta(t)$  : différence de température ballon (air chaud)/ température extérieure (air froid).
- $v(t)$  : vitesse de la montgolfière.
- $w(t)$  : vitesse du vent dans le sens vertical (qui peut être vu comme une perturbation).

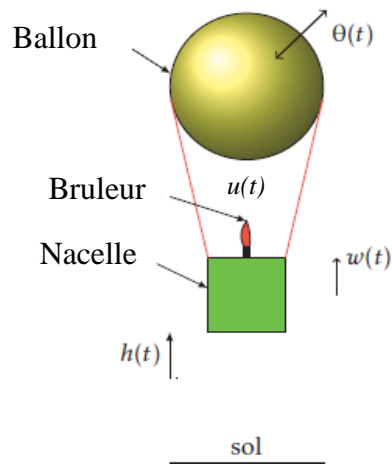


Figure 3. Montgolfière

En considérant que l'énergie thermique du brûleur est proportionnelle à la commande  $u(t)$  et que la température extérieure constante, les équations qui régissent la dynamique de la montgolfière sont les suivantes :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -5 \cdot \theta(t) + u(t) \quad (1)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + 5 \cdot \theta(t) + w(t) \quad (2)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = v(t) \quad (3)$$

$H(p)$ ,  $U(p)$ ,  $\Theta(p)$ ,  $V(p)$ , et  $W(p)$  représentent les transformées de Laplace de  $h(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $v(t)$  et  $w(t)$ .

1. Traduire ces trois équations dans le domaine de Laplace.

2. Etablir le schéma bloc représentant le déplacement de la montgolfière en fonction de l'action sur le brûleur en précisant les différents signaux d'entrée/sortie blocs.

3. Exprimez  $H(p)$  en fonction de  $U(p)$  et  $W(p)$ .

4. On suppose que le vent est nul:

a)- Donner la fonction de transfert (on notera cette fonction de transfert  $G(p)$ ) ainsi que les pôles du système.

b)- Tracer les diagrammes de Bode et Black

c)- On souhaite s'élever à une altitude de 2 km pour une entrée  $u(t)$  de type échelon d'amplitude 2. Quelle est la valeur atteinte par le ballon (régime permanent) si l'on est en boucle ouverte ? Que peut-on conclure ?

$$1) \quad s\theta(s) = -5\theta(s) + u(s)$$

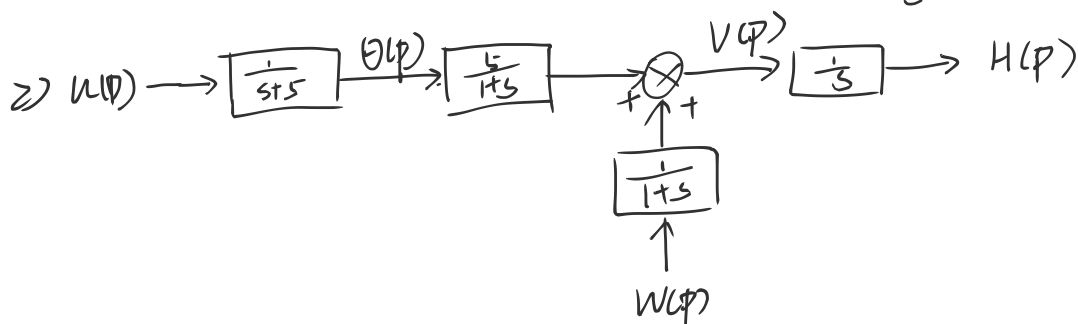
$$sV(s) = -V(s) + 5\theta(s) + W(s)$$

$$sH(s) = V(s)$$

$$\theta(s) = \frac{1}{s+5} u(s)$$

$$V(s) = \frac{5}{1+s} \theta(s) + \frac{1}{1+s} W(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{5} V(s)$$



$$3) \quad H(p) = \left[ u(p) \left( \frac{1}{s+5} \right) \left( \frac{5}{1+s} \right) + w(p) \left( \frac{1}{1+s} \right) \right] \frac{1}{5} = \frac{5}{(s+5)(1+s)s} u(p) + \frac{1}{s(1+s)} w(p)$$

$$4) \quad G(p) = \frac{5}{s(1+s)(5+s)}$$

$$s(1+s)(5+s) = 0 : \text{pôles : } s_1 = 0 \quad s_2 = -1 \quad s_3 = -5$$

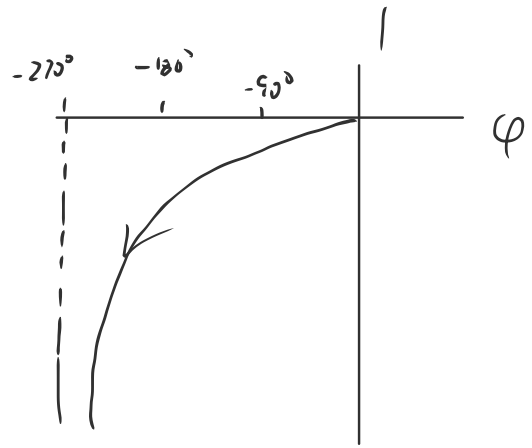
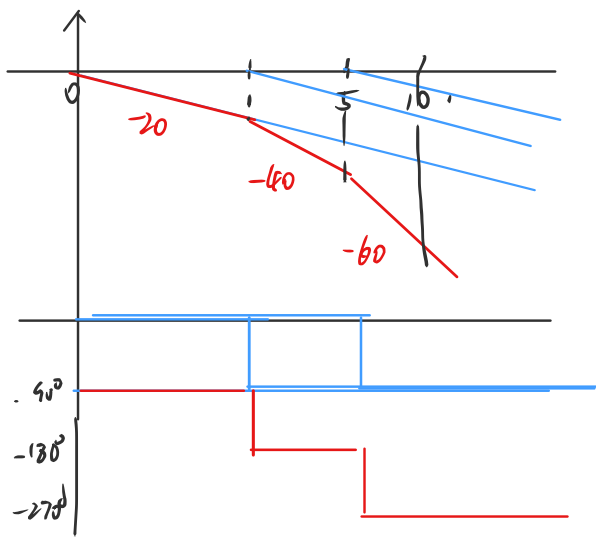
$$5) \quad G(p) = \underbrace{\frac{5}{s}}_{G_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+s}}_{G_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{5+s}}_{G_3}$$

$$\left( \frac{5}{j\omega} \right) \cdot \frac{5}{\omega}$$

$$G_1 : \omega_1 = |s_1| = 0 \rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \rightarrow \infty \end{cases} \begin{cases} -\infty \text{ dB} & -20 \text{ dB/déc} \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$$

$$G_2 : \omega_2 = |s_2| = 1 \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \infty \begin{cases} -\infty \text{ dB} & -20 \text{ dB/déc} \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$$

$$G_3 : \omega_3 = |s_3| = 5 \rightarrow \begin{cases} 20 \log 5 \text{ dB} \\ \varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \infty \begin{cases} -\infty \text{ dB} & -20 \text{ dB/déc} \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$$



C.  $u(t) = 2u(t)$ ,  $u(s) = 2\frac{1}{s}$

HPD:  $\frac{10}{s^2(s+1)(s+5)} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s+1} + \frac{A_4}{s+5}$