数字电路与逻辑设计

宗　汝

西安电子科技大学电子工程学院

Email: zongru@xidian.edu.cn

第二章 逻辑代数基础

一、逻辑代数的三个基本运算

二、逻辑代数的基本公式与规则

三、复合逻辑运算

四、逻辑函数表达式的常用形式

五、逻辑函数的化简

六、逻辑函数的K诺图化简

七、非完全描述逻辑函数的化简

注：课程中带*号标题的课件仅供参考，中法班不需掌握。

一. 逻辑和逻辑变量

1.逻辑：反映事物因果之间所遵循的规律。

2.逻辑变量：决定事物原因和结果的变量。

一般用大写字母A、B、 C、…表示，逻辑变量的取值只有两种，即逻辑0和逻辑1。

0和1称为逻辑常量。

二．逻辑函数

逻辑函数反映数字输出与输入之间的因果关系。

如： $F=f(A、B、C\ldots)$

三．逻辑电路

数字电路的输入、输出量一般用高、低电平来表示，高、低电平也可以用二值逻辑1和0来表示。

同时数字电路的输出与输入之间的关系是一种因果关系， 因此它可以用逻辑函数来描述，并称为逻辑电路。

逻辑代数的三个基本运算

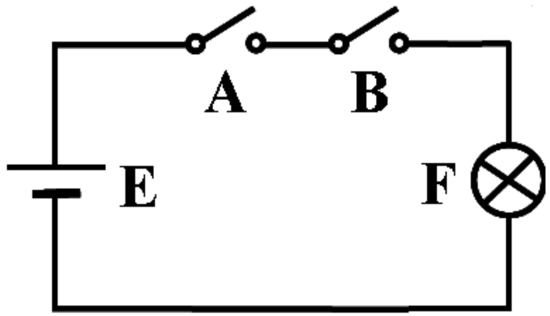
逻辑代数：数字电路分析和设计使用的数学工具

在逻辑代数中　与（AND ）
或（OR）
非（NOT）　3种基本逻辑运算

逻辑关系　语句描述：　硬件描述语言（VHDL）
逻辑表达式：$F=f(A、B、C\ldots)$
真值表
逻辑图

逻辑代数的三个基本运算

1. 与运算（逻辑乘） A、B都具备时，事件F才发生。

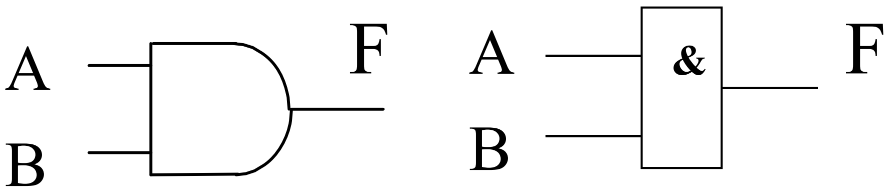


真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

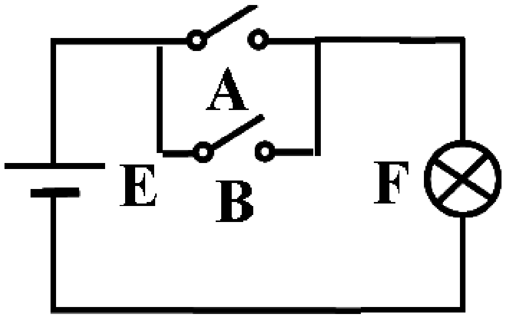
逻辑式: F=A •B=AB(∩∧ &)

与门:



逻辑代数的三个基本运算

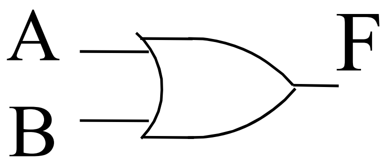
2. 或运算（逻辑加） A、B有一个具备，事件F就发生。

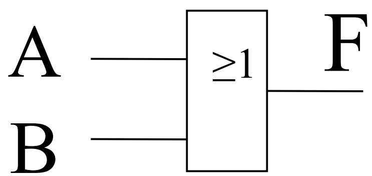


A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

逻辑式： **F=A +B (∪∨)**

或门：



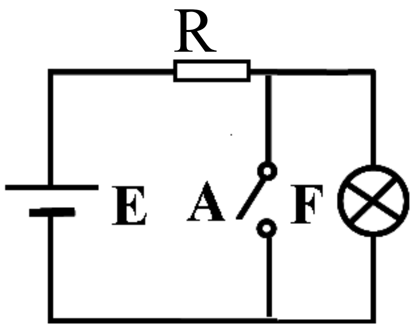


逻辑代数的三个基本运算

3.　非运算（逻辑反）

A具备时，事件F不发生；

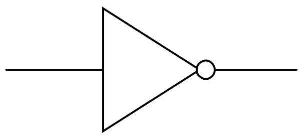
A不具备时，事件F发生。

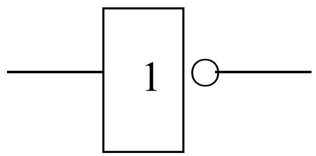


A	F
0	1
1	0

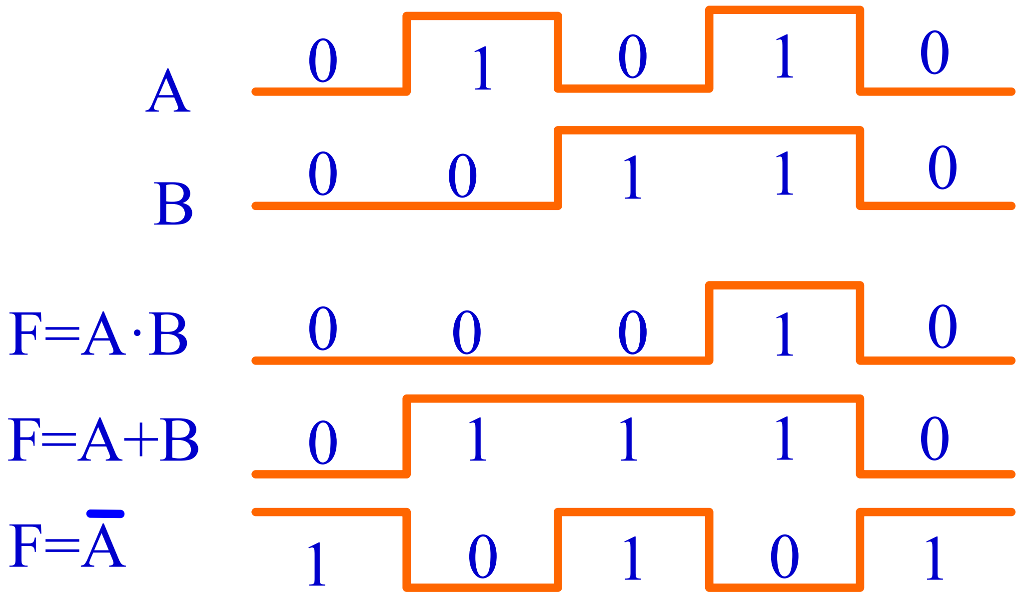
逻辑式：$F=\overline{A}$

非门：





基本逻辑关系波形



波形图表示逻辑关系注意事项：

1、输入波形要穷举所有可能的输入组合（n个输入变量由2^n种可能）

2、输出波形与输入变化对应

逻辑代数的基本定律

1. 常量与变量的公式　　　（运用对偶规则）

0-1律	$A+1=1$	$A\cdot 0=0$
自等律	$A+0=A$	$A\cdot 1=A$
重叠律	$A+A=A$	$A\cdot A=A$
互补律	$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$

逻辑代数的基本定律

2. 逻辑代数的基本运算法则

交换律 $A+B=B+A \qquad A\cdot B=B\cdot A$

结合律
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

分配律
$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$
$$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$$

3. 逻辑代数中的特殊定律

还原律: $\overline{\overline{A}} = A$

反演律（德·摩根定律; De Morgan定律）:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

推广到多变量?

列真值表表证明:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

*化简公式

1.合并公式

$$AB + A\overline{B} = A$$

$$(A+B)(A+\overline{B}) = A$$

在逻辑代数中，如果两个乘积项分别包含了互补的两个因子(如B和$\overline{B}$)， 而其它因子都相同，那么这两个乘积项称为相邻项。

合并律说明，两个相邻项可以合并为一项， 消去互补量。

*化简公式

2.吸收公式 ①

$$A+AB=A$$

证: $A+AB=A(1+B)=A\cdot 1=A$

该公式说明，在一个“与或表达式”中，如果某一乘积项的部分因子（如AB项中的A）恰好等于另一乘积项（如A）的全部，则该乘积项（AB）是多余的，可以消去。

② $$A+\overline{A}B=A+B$$

（分配公式）

证: $$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=1\times(A+B)$$
$$=A+B$$

*化简公式

吸收公式 ③ $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

证：$$\begin{aligned}AB+\overline{A}C+BC&=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC\\&=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC\\&=AB+\overline{A}C\end{aligned}$$

在一个与或表达式中，如果两个乘积项中的部分因子互补（如AB项和$\overline{A}$C项中的A和$\overline{A}$），而这两个乘积项中的其余因子（如B和C）都是第三个乘积项中的因子， 则这个第三项是多余的，可以消去。

推论： $AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$

*逻辑代数的基本公式

吸收律

$$A+AB=A$$

$$A(A+B)=A$$

对偶式

$$A+(\overline{A}\cdot B)=A+B$$

$$A(\overline{A}+B)=AB$$

对偶式

多余项定律

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

对偶式

逻辑代数的基本定律和规则

1. 变量和常量的关系式

0-1律	$1+A=1$	$0\cdot A=0$
自等律	$0+A=A$	$1\cdot A=A$
重叠律	$A+A=A$	$A\cdot A=A$
互补律	$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$
还原律	$\overline{\overline{A}}=A$	

2. 与普通代数相似的定律

交换律	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
结合律	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
分配律	$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

*逻辑代数的基本定律和规则

反演律

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

合并律

$$A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A$$

$$(A+B)(A+\overline{B})=A$$

吸收律

① $A+A\cdot B=A$

$$A\cdot(A+B)=A$$

② $A+\overline{A}\cdot B=A+B$

$$A(\overline{A}+B)=AB$$

③ $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

在两个乘积项中，若有一个变量是互反的，那么由这两个乘积项中的其它变量组成的乘积项就是多余的，可以消去。

公式可推广：$AB+\overline{A}C+BCDE=AB+\overline{A}C$

逻辑代数中的三个重要规则

1. 代入规则

2. 反演规则

3. 对偶规则

代入规则

任何一个含有变量X的等式，如果将所有出现X的位置都代之以一个函数F，则等式仍然成立。

举例

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

如用F = B + C代替式中的B

$$\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}}=\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{B}}\ \overline{\mathbf{C}}$$

1、不能破坏原式的运算顺序－先括号后与、或
2、不属于单变量上的非号应保留
用于快速的求一个函数的反函数

反演规则

当已知某一逻辑函数F，将F中的所有“· ”号变为 “+”号，将 “+”号变为 “·”号，常量 “0”变为 “1”，“1”变为 “0” ，原变量变为反变量，反变量变为原变量，便可求得F的反演式

举例

$$F=A+\overline{B}+C+\overline{\overline{D}+E}$$

$\cdot \longrightarrow +$　　$0 \longrightarrow 1$

$+ \longrightarrow \cdot$　　$1 \longrightarrow 0$

原变量 ⟶ 反变量

反变量 ⟶ 原变量

$$\overline{F}=\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D\,\overline{E}}$$

两个或者两个以上长非号不变

1、不能破坏原式的运算顺序——先括号后与、或
2、不属于单变量上的非号保持不变在对偶函数
用于逻辑关系的证明 若F=G成立，则F*=G*成立

对偶规则

设F是一个逻辑函数式，将F中所有“·”号变为“+”号，将“+”号变为“·”号，“1”变为“0”，“0”变为“1”，而变量保持不变，那么就得到一个新的逻辑函数F*，通常将它称为F的对偶式。

举例

$$\cdot \longrightarrow + \qquad 0 \longrightarrow 1$$

$$+ \longrightarrow \cdot \qquad 1 \longrightarrow 0$$

$$F = A\overline{B} + A \bullet (C+0)$$

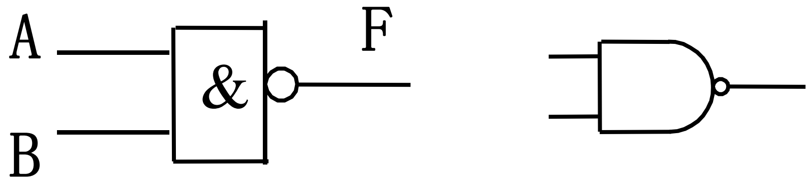
两个或者两个以上长非号不变

$$F = (A + \overline{B}) \bullet (A + C \bullet 1)$$

复合逻辑运算

1. 与非逻辑

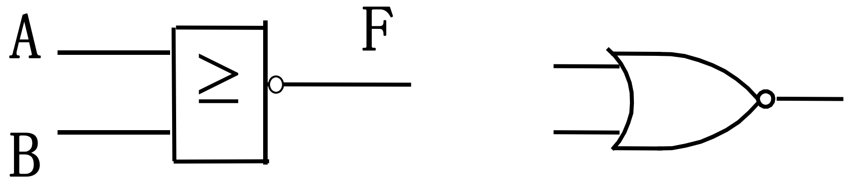
$$F = \overline{AB}$$



与非门

2. 或非逻辑

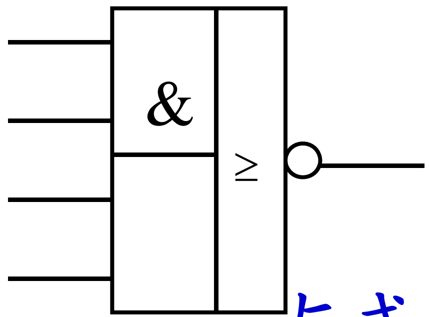
$$F = \overline{A+B}$$



或非门

3. 与或非逻辑

$$F = \overline{AB+CD}$$

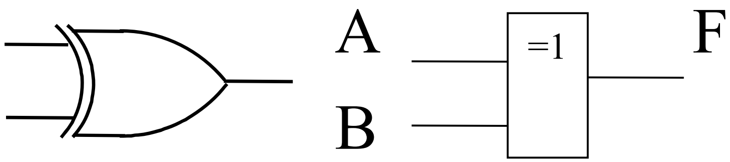


与或非门

异或逻辑与同或逻辑

4. 异或逻辑

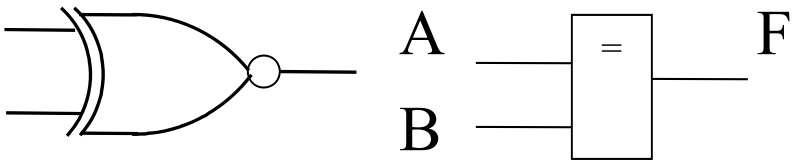
$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$



A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5. 同或逻辑

$$F = A \odot B = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$



A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

异或逻辑与同或逻辑

"异或"逻辑与"同或"逻辑互为反函数，即

$$\overline{A \oplus B} = \boldsymbol{A \odot B}$$

$$\overline{\boldsymbol{A \odot B}} = A \oplus B$$

同理可证明，"异或"逻辑与"同或"逻辑互为对偶函数。

因此，两变量的"异或"函数和"同或"函数既互补又对偶，这是一对特殊函数。

*异或逻辑与同或逻辑基本公式

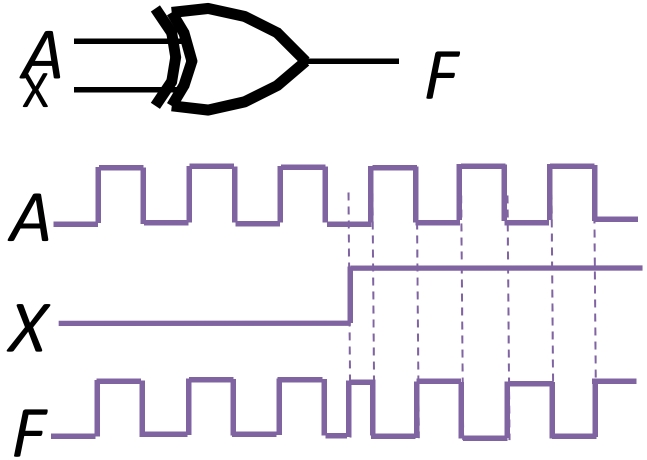
$F=A\oplus B$	$F=A\odot B$
$A\oplus 0=A$	$A\odot 1=A$
$A\oplus 1=\overline{A}$	$A\odot 0=\overline{A}$
$A\oplus A=0$	$A\odot A=1$
$A\oplus\overline{A}=1$	$A\odot\overline{A}=0$
$A\oplus\overline{B}=\overline{A\oplus B}=A\oplus B\oplus 1$	$A\odot\overline{B}=\overline{A\odot B}=A\odot B\odot 0$
$A\oplus B=B\oplus A$	$A\odot B=B\odot A$
$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$	$A\odot(B\odot C)=(A\odot B)\odot C$
$A(B\oplus C)=AB\oplus AC$	$A+(B\odot C)=(A+B)\odot(A+C)$

此外， $A\oplus A\oplus A\oplus\cdots\oplus A=\begin{cases}0 & \text{(A的个数为偶数)}\\ A & \text{(A的个数为奇数)}\end{cases}$

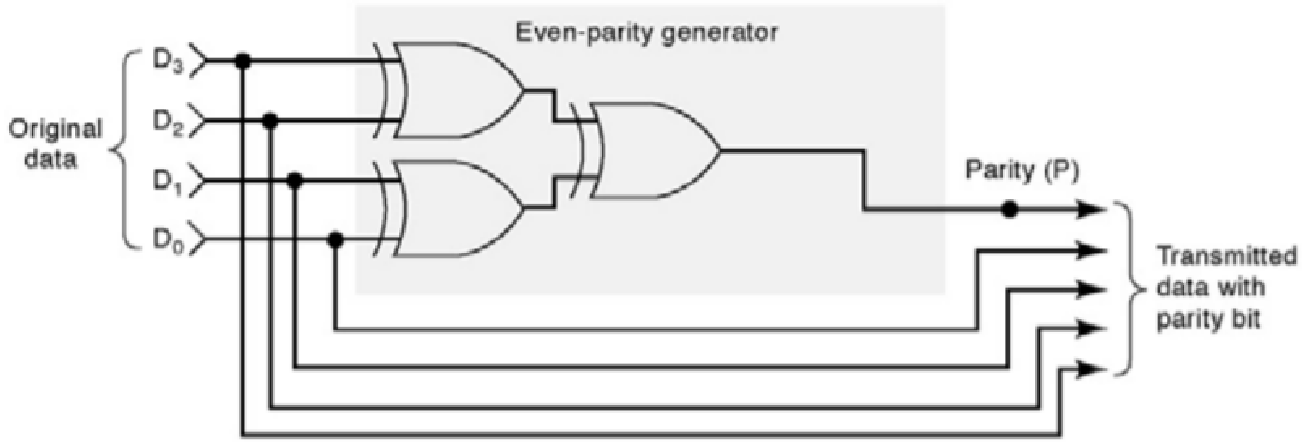
异或同或门的应用

1.统计输入A中1的个数是奇数还是偶数。

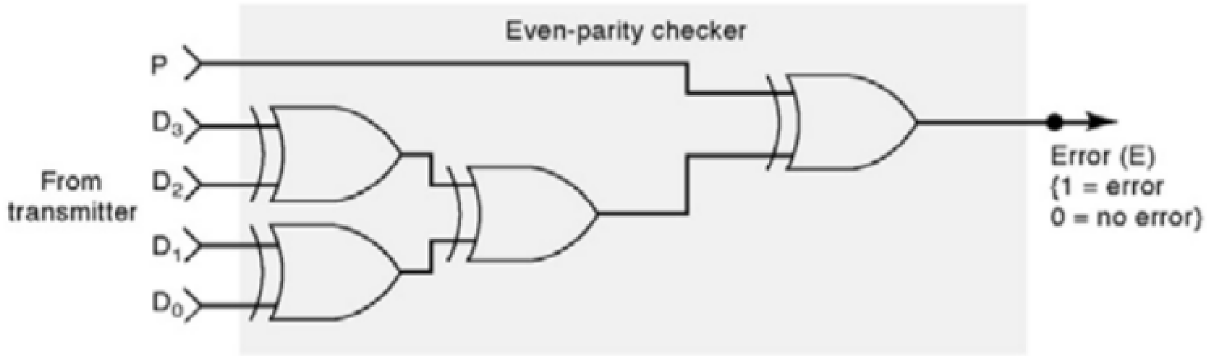
2.控制信号的同向或者反向输出。



Parity Generator and Checker



(a)



(b)

$$A \oplus A \oplus A \oplus \cdots \oplus A = \begin{cases} 0 & \textbf{(A的个数为偶数)} \\ A & \textbf{(A的个数为奇数)} \end{cases}$$

*逻辑运算符的完备性

对于一个代数系统，若仅用它所定义的一组运算符号就能解决所有的运算问题，则称这一组符号是一个完备的集合，简称完备集。

在逻辑代数中，与、或、非是三种最基本的运算，n变量的所有逻辑函数都可以用n个变量及一组逻辑运算符“·（与）、+（或）、－（非）”来构成，因此称“·、+、－”运算符是一组完备集。

*逻辑运算符的完备性

但“与、或、非”并不是最好的完备集，因为它实现一个函数要使用三种不同规格的逻辑门。

从反演律可以看出，有了“与”和“非”可得出“或”，有了“或”和“非”可得出“与”，因此“与非”、“或非”、“与或非”运算中的任何一种都能单独实现“与、或、非”运算，这三种复合运算都是完备集，而且实现函数只需要一种规格的逻辑门，这就给设计工作带来许多方便。

如何从“与非”运算分别得到“与”、“或”、“非”三种基本运算?

复合逻辑运算

常用形式

（1）与或式 $F=AB+CD$

（2）或与式 $F=(A+B)(C+D)$

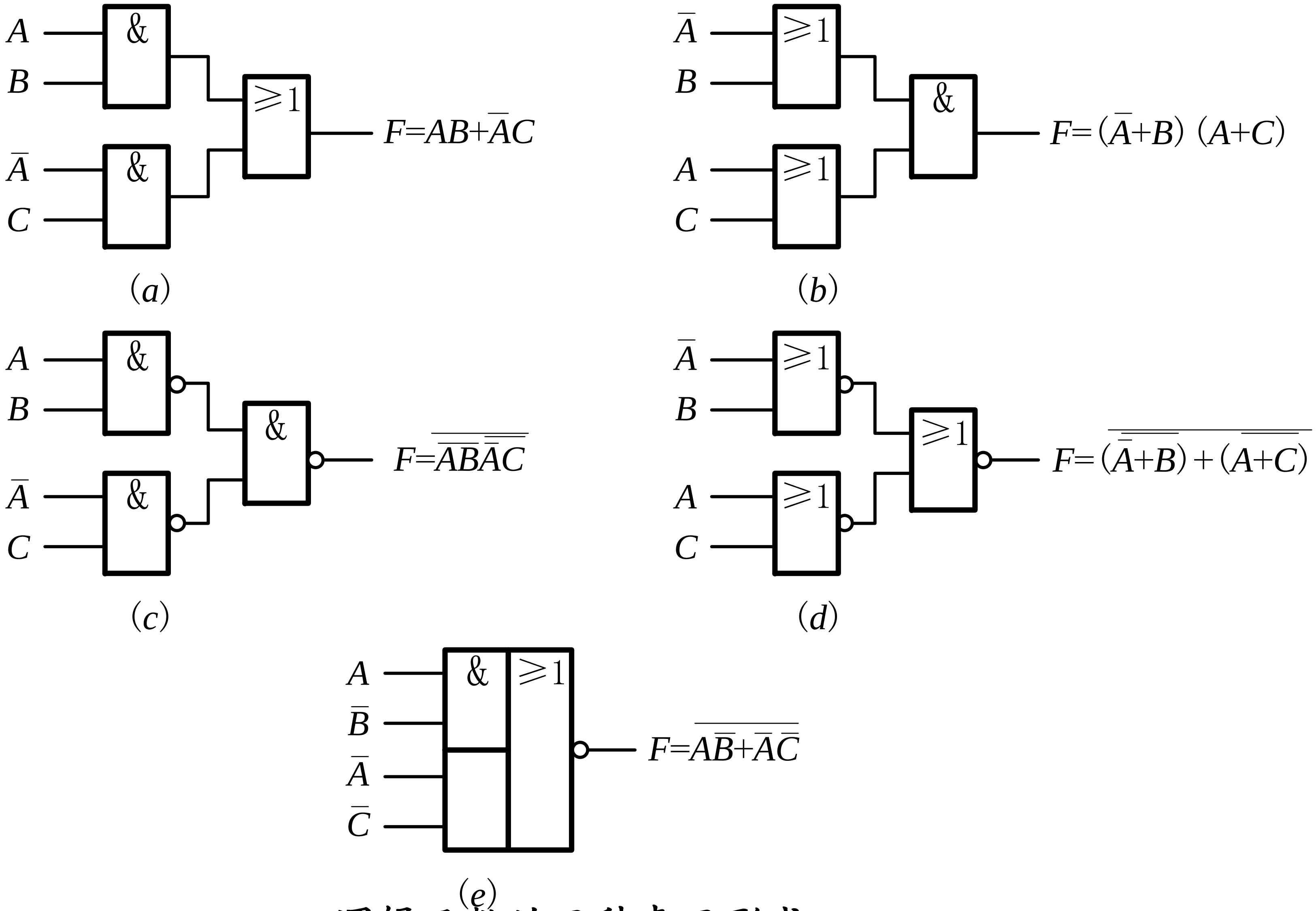
（3）与非与非式 $F=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}$

（4）或非或非式 $F=\overline{\overline{(A+B)}+\overline{C+D}}$

（5）与或非式 $F=\overline{AB+CD}$

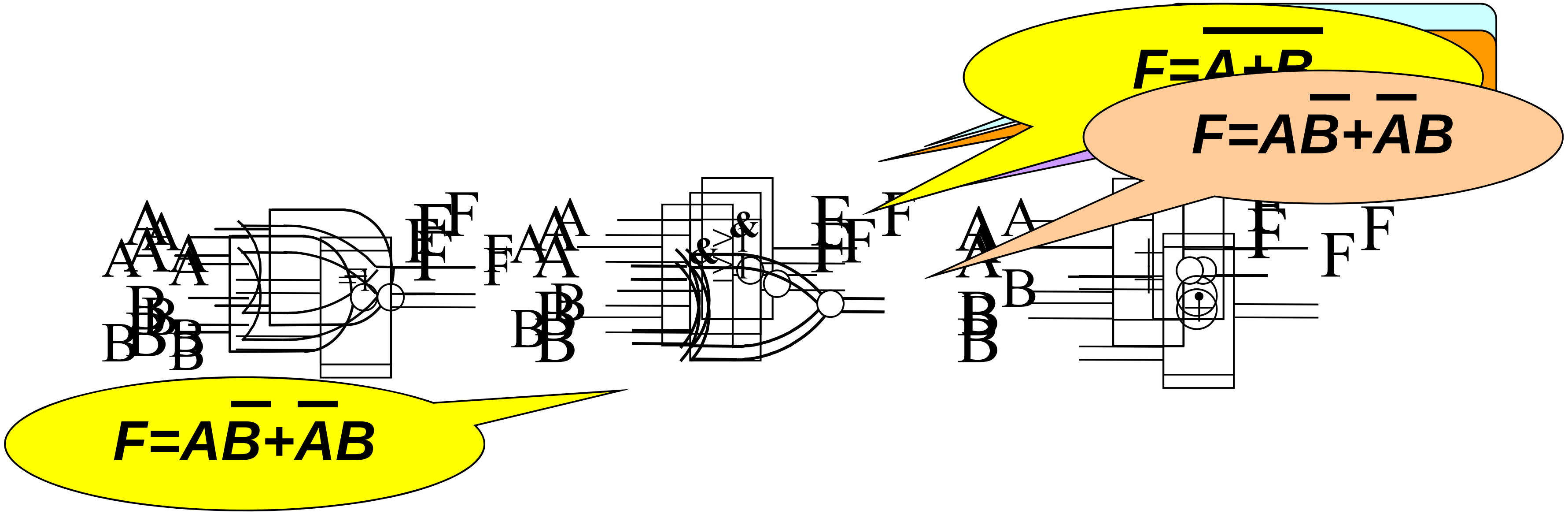
任何一个逻辑函数式都可以通过逻辑变换写成以上五种形式。

上面五种表达式之间如何相互转换？



逻辑函数的五种表示形式

逻辑门（复习）



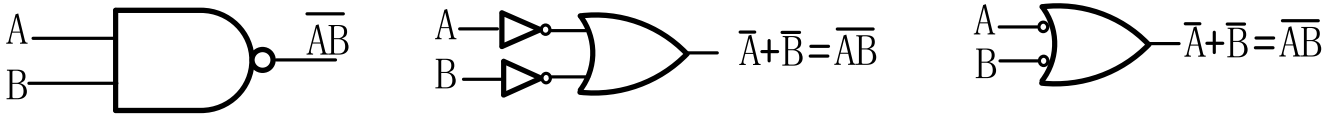
$F=\overline{A+B}$
$F=A\overline{B}+\overline{A}B$
$F=A\overline{B}+\overline{A}B$
A
B
F

逻辑门的等效符号

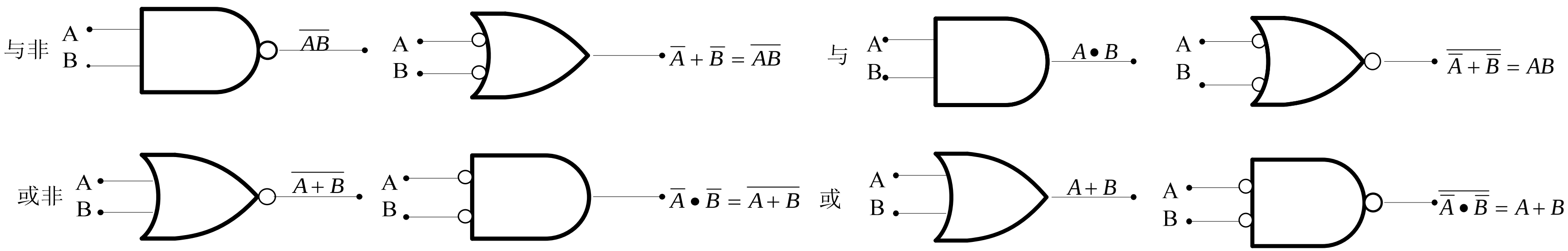
基本逻辑门电路（与、或、非、与非、或非）除了使用标准符号之外，还经常使用与其逻辑功能相同的等效逻辑符号。

根据反演定理，可将任何与(AND)形式的逻辑门和或（OR）形式的逻辑门互换。

摩根定理 $F = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$



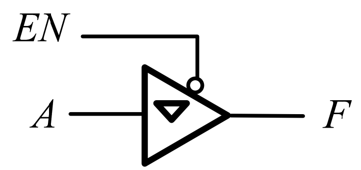
(a) 标准与非门　(b) 与非门等效电路　(c) 标准与非门等效符号



三态门

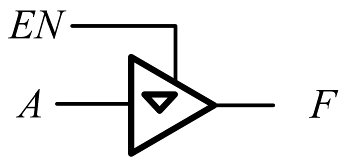
普通逻辑门：逻辑 0 和逻辑 1

三态门还有第三种状态—高阻态，相当于悬空。



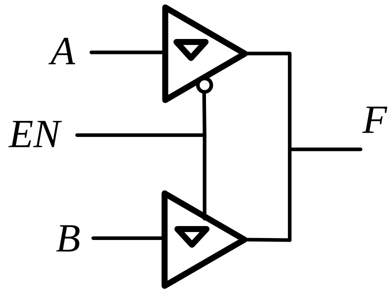
$EN = 0 \quad F = A$

$EN = 1$ F为高阻态



$EN = 1 \quad F = A$

$EN = 0$ F为高阻态



$EN = 1 \quad F = B$

$EN = 0 \quad F = A$

$F = \overline{EN}A + ENB$

逻辑函数的两种标准式

（1）最小项和最小项表达式

最小项定义：

n个变量的最小项是含n个变量的“与项”，其中每个变量都以原变量或反变量的形式出现一次。

1个变量　最小项　$\bar{A}$　A

2个变量　最小项　$\bar{A}\bar{B}$　$\bar{A}B$　$A\bar{B}$　AB

3个变量　最小项

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$　$\bar{A}\bar{B}C$　$\bar{A}B\bar{C}$　$\bar{A}BC$　$A\bar{B}\bar{C}$　$A\bar{B}C$　$AB\bar{C}$　ABC

最小项

与项： ABC $B\bar{C}$ $\bar{A}C$

三变量最小项（标准与项）： $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ $A\bar{B}C$ $\bar{A}BC$

最小项通常用符号m_i来表示。

三变量逻辑函数的最小项

*叫最小项，是对应这个输入，只有一个与项为1

序号	C	m_0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_1 $\bar{A}\bar{B}C$	m_2 $\bar{A}B\bar{C}$	m_3 $\bar{A}BC$	m_4 $A\bar{B}\bar{C}$	m_5 $A\bar{B}C$	m_6 $AB\bar{C}$	m_7 ABC
0	0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

最小项表达式

如果在一个与或表达式中，所有“与项”均为最小项，则称这种表达式为**最小项表达式**，或称为**标准与或式**、**标准积之和式**、**最小项标准式**。

与或表达式： $F = AB + AC + ABC$

最小项表达式： $F = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$

例：与或表达式 $F = AB + AC$，求其最小项表达式。

$$F = AB(C + \overline{C}) + AC(B + \overline{B})$$
$$= ABC + AB\overline{C} + ACB + AC\overline{B}$$
$$= AB\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

任何一个逻辑函数都可以表示为最小项之和的形式：

只要将真值表中使函数值为1的各个最小项相或，便可得出该函数的最小项表达式。

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

如何用语言描述该真值表？

当 A=0 并且 B=1 或
A=1 并且 B=0 或
A=1 并且 B=1 时　F=1;

也可以描述为：

当 $\overline{A}$=1 并且 B=1 或
A=1 并且 $\overline{B}$=1 或
A=1 并且 B=1 时　F=1;

$$F = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

由于任何一个函数的真值表是唯一的，因此其最小项表达式也是惟一的。

最小项表达式描述逻辑命题

例：三变量表决器真值表　　最小项表达式?

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$F(A,B,C) = m_6 + m_5 + m_3 + m_7$$

$$= \sum m\ (3,5,6,7)$$

最小项得简写形式

最大项和最大项表达式

最大项定义：

n个变量的最大项是含n个变量的“或项”，其中每个变量都以原变量或反变量的形式出现一次。

或项： $A+B+C \quad B+\overline{C} \quad \overline{A}+C$

三变量最大项（标准或项）：

$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} \qquad A+\overline{B}+C \qquad \overline{A}+B+C$$

最大项表达式：

$$F=(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(A+B+\overline{C})$$

最小项与最大项的关系

输入取值使该最小项为1

输入取值使该最大项为0

A B C	最小项 m_i		最大项 M_i	
0 0 0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0
0 0 1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	m_1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0 1 0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	m_2	$A+\overline{B}+C$	M_2
0 1 1	$\overline{A}BC$	m_3	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1 0 0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_4	$\overline{A}+B+C$	M_4
1 0 1	$A\,\overline{B}\,C$	m_5	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1 1 0	$AB\,\overline{C}$	m_6	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1 1 1	ABC	m_7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

$$m_i = \overline{M_i}$$

最小项与最大项的性质

① n变量的全部最小项之和恒为1， 全部最大项之积恒为0。

$$\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B}+AB=1$$

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \qquad \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

② 任意两个最小项之积恒

$$ABC \cdot \bar{A}BC=0$$

项之和恒等于1 。

$$m_i \cdot m_j = 0 (i \neq j) \qquad M_i + M_j = 1 (i \neq j)$$

③ n变量的每一个最小（大）项有n个相邻项（相邻项是指两个最小项只有一个因子互为反变量，其余因子均相同，又称为逻辑相邻项）。

最大项表达式

在一个或与式中，如果所有的“或项”均为最大项，则称这种表达式为最大项表达式，或称为标准或与式、标准和之积表达式、最大项标准式。

如何写出给定真值表的最大项表达式？

如果一个逻辑函数的真值表已给出，要写出该函数的最大项表达式，可以先求出该函数的反函数$\overline{F}$，并写出$\overline{F}$的最小项表达式，然后将$\overline{F}$再求反，利用m_i和M_i的互补关系便得到最大项表达式。

最大项表达式

$$F = (A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)(A + B + \overline{C})$$

$$F = M2 \cdot M4 \cdot M1$$

$$= \prod M(1, 2, 4)$$

$A\cdot\overline{A}=0$

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$

例：或与表达式 $F = (A + B)(A + C)$

$A+B+(\overline{C}\cdot C)=(A+B+\overline{C})(A+B+C)$

最大项表达式

$$F = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(A + B + C)$$

最大项表达式

真值表

A	B	C	$F\,F\,\overline{F}$
0	0	0	1 1 0
0	0	1	1 1 0
0	1	0	0 0 1
0	1	1	0 0 1
1	0	0	1 1 0
1	0	1	1 1 0
1	1	0	0 0 1
1	1	1	0 0 1

$$F = \sum m(0,1,4,5)$$

$$\overline{F} = m_2 + m_3 + m_6 + m_7$$

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{m_2 + m_3 + m_6 + m_7}$$

$$= \overline{m_2} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_6} \cdot \overline{m_7}$$

$$= M_2 \cdot M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$= \prod M(2,3,6,7)$$

最大项表达式

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$F = \sum m(0,1,4,5)$$

$$= \prod M(2,3,6,7)$$

可见，最大项表达式是真值表中使函数值为0的各个最大项相与。

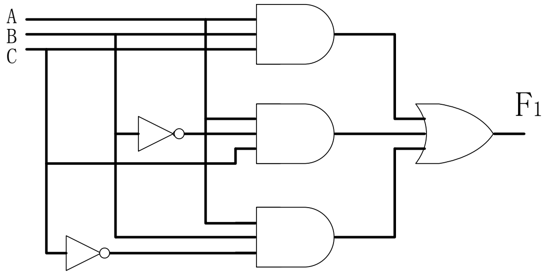
结论： 任何一个逻辑函数既可以用最小项表达式表示，也可以用最大项表达式表示。如果将一个n变量函数的最小项表达式改为最大项表达式时，其最大项的编号必定都不是最小项的编号，而且这些最小项的个数和最大项的个数之和为2^n。

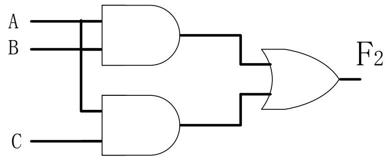
例：对以下真值表，要求：
（1）完成从真值表得到逻辑函数的标准与或式；
（2）写出最小项和最大项两种标准式的简写形式。

ABC	F_1	F_2
000	0	1
001	0	1
010	1	1
011	0	1
100	1	1
101	0	0
110	1	0
111	0	0

逻辑代数的化简

$$F_1(A,B,C) = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C \qquad F_2(A,B,C) = AB + AC$$





$$\begin{aligned} F_1 &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C \\ &= ABC + AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C \\ &= AB(C+\overline{C}) + AC(B+\overline{B}) \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

逻辑函数表达式越简单，所用的逻辑门和连接线越少，实现的电路就越简单。

逻辑函数化简通常是指将逻辑函数化简为最简与或式或者最简或与式。

利用基本公式，消去逻辑函数表达式中多余的乘积项和多余因子。

*2.5 逻辑代数的代数法化简

化简的原则： （1）与项最少；

（2）与项中的变量数最少

利用公式化简

1. $F = AB + \underline{\bar{A}C} + \underline{\bar{B}C}$

$= AB + (\underline{\bar{A} + \bar{B}})C$

$= AB + \overline{AB} \cdot C = AB + C$

$A+\bar{A}B=A+B$

逻辑代数的卡诺图化简

1. 卡诺图的构成

将n变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，所得到的图形叫做n变量的卡诺图（Karnaugh Map），简称K图。

二变量K图

A	B	m_i
0	0	m_0
0	1	m_1
1	0	m_2
1	1	m_3

⇨

B \ A	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
1	$\bar{A}B$	AB

B \ A	0	1
0	m_0	m_2
1	m_1	m_3

B \ A	0	1
0	0	2
1	1	3

三变量卡诺图

变量取值分别按格雷码排列。

表 三变量最小项

A B C	最小项
0 0 0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0 0 1	$\bar{A}\bar{B}C$
0 1 0	$\bar{A}B\bar{C}$
0 1 1	$\bar{A}BC$
1 0 0	$A\bar{B}\bar{C}$
1 0 1	$A\bar{B}C$
1 1 0	$AB\bar{C}$
1 1 1	ABC

C \ AB	00	01	11	10
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

图 三变量K图 (ABC顺序)

四、五变量卡诺图

同理，四、五输入变量取值也按格雷码排列。

四变量K图

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

(ABCD顺序)

五变量K图

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

(ABCDE顺序)

卡诺图特点

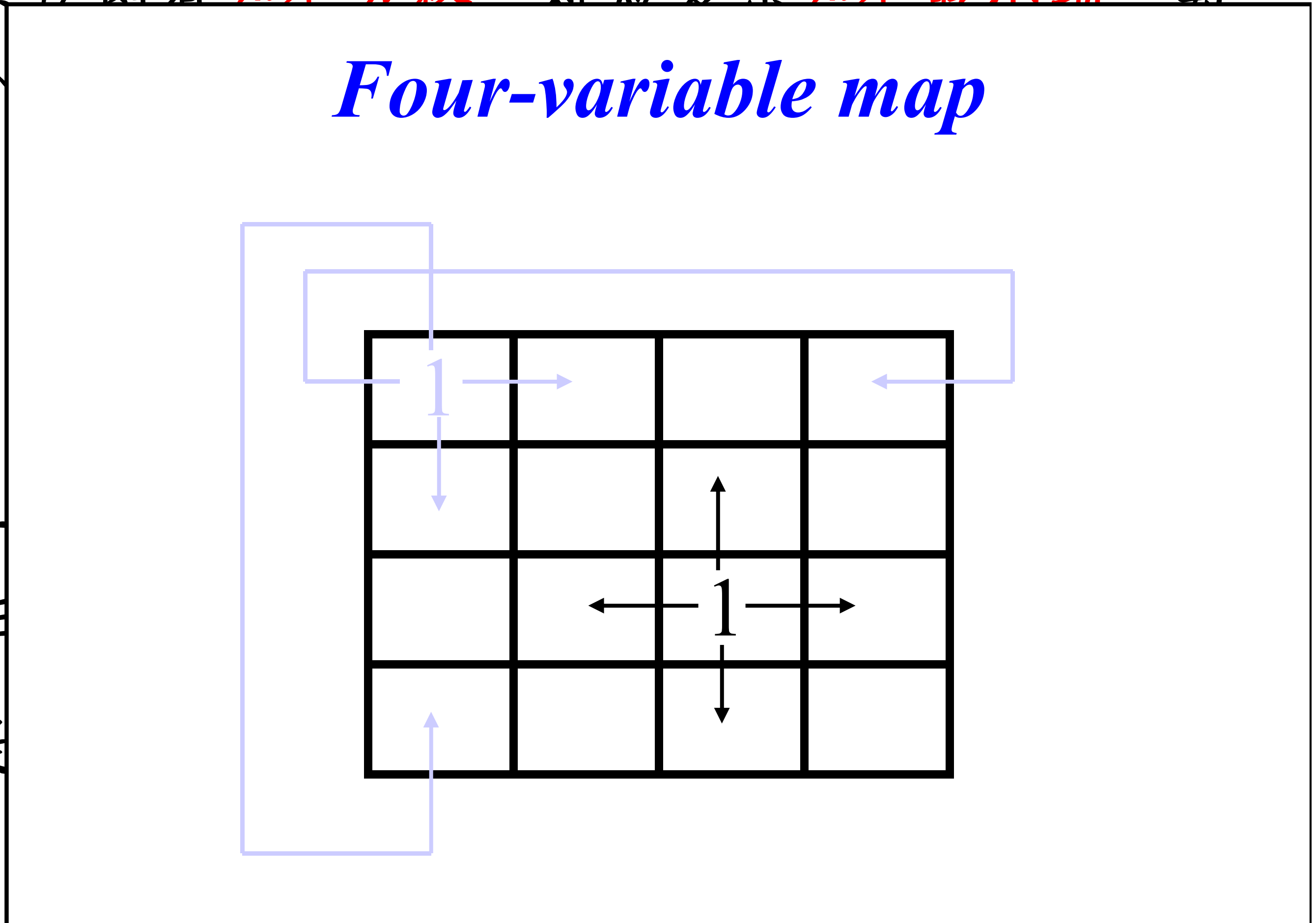
K图具有如下特点：

① *n*变量的卡诺图有2^n个方格，对应表示2^n个最小项，每

当变量数增加一个

② 卡诺图中

都是相邻的。



几何相邻：一

或一列的两头；三

逻辑相邻：是

个“与项”。

卡诺图也反映了*n*变量的任何一个最小项有*n*个相邻项。

	DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
	00	0	4	12	8	24	28	20	16
相对	01	1	5	13	9	25	29	21	17
相邻	11	3	7	15	11	27	31	23	19
相重	10	2	6	14	10	26	30	22	18

逻辑函数的卡诺图表示法

① 给出真值表

将真值表的每一行的取值填入卡诺图的每个小方格中。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	

2、逻辑函数的卡诺图表示法

② 给出逻辑函数的最小项标准式

将逻辑函数的最小项在卡诺图上相应的方格中填1;

其余的方格填0(或不填)。

任何一个逻辑函数都等于其卡诺图上填1的那些最小项之和。

例1: 用卡诺图分别描述下列逻辑函数

$$F=\sum m(1,2,6,7)$$

$$F=\sum m(0,2,6,8,10,13,15)$$

解:

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	
1	1		1	

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01			1	
11			1	
10	1	1		1

2、逻辑函数的卡诺图表示法

③ 给出逻辑函数一般与或式

可化为标准与或式，再填入。

确定使每个与项为1的所有输入变量取值，并在卡诺图上对应方格填1；其余的方格填0(或不填)。

例2：用卡诺图描述下列逻辑函数 $F(A,B,C)=C+A\overline{B}$

$$F(A,B,C)=C+A\overline{B}=C(A+\overline{A})(B+\overline{B})+A\overline{B}(C+\overline{C})$$

$$=(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B+A\overline{B}+AB)C+A\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$=\sum m(1,3,4,5,7)$$

C \ AB	00	01	11	10
0				1
1	1	1	1	1

$\overline{C}$：令ABC=××1(×表示可以为0，也可以为1)时该与项为1，在卡诺图上对应四个方格(m_1，m_3，m_5，m_7)处填1。

$A\overline{B}$：当ABC=10×时该与项为1，在卡诺图上对应两个方格(m_4，m_5)处填1。

$$F=AC\overline{D}+A\overline{C}\,\overline{D}+B+BC$$

解：$AC\overline{D}$ 当$ABCD=1\times10$时该与项为1，在卡诺图上对应两个方格(m_{10}、m_{14})处填1。

$A\overline{C}\,\overline{D}$ 当$ABCD=1\times00$时该与项为1，对应两个方格(m_8、m_{12})处填1。

B ： 当$ABCD=\times1\times\times$时该与项为1，对应八个方格(m_4、m_5、m_6、m_7、m_{12}、m_{13}、m_{14}、m_{15})处填1。

BC ： 当$ABCD=\times11\times$时该与项为1，对应四个方格(m6、 m7、m14、m15)处填1。

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	
11		1	1	
10		1	1	1

某些最小项重复，只需填一次即可(1+1=1)。

2、逻辑函数的卡诺图表示法

④ 给出逻辑函数的最大项标准式

将逻辑函数的最大项在卡诺图上相应的方格中填0（或不填）；

其余的方格填1。

任何一个逻辑函数都等于其卡诺图上填0的那些最大项之积。

例3：用卡诺图描述逻辑函数$Y(A,B,C)=\prod M(0,2,5)$

解：

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	1	0

2、逻辑函数的卡诺图表示法

⑤ 给出逻辑函数一般或与式

确定使每个或项为0的所有输入变量取值，并在卡诺图上对应方格填0；其余的方格填1。

也可化为标准或与式，再填入。

例4：用卡诺图分别描述逻辑函数 $F=C(A+\overline{B})$

解：C：当 $ABC=\times\times0$ (×表示可以为0，也可以为1)时该或项为0，在卡诺图上对应四个方格(m_0，m_2，m_4，m_6)处填0。

$A+\overline{B}$ ：当 $ABC=01\times$ 时该与项为0，在卡诺图上对应两个方格(m_2，m_3)处填0。

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$$F=C\,(A+B)=\sum m(1,5,7)=\prod M(0,2,3,4,6)$$

用卡诺图化简逻辑函数

一、卡诺图中最小项合并规律

在卡诺图中，凡是几何位置相邻的最小项均可以合并。

在卡诺图上该合并圈称为卡诺圈，简称**K-**圈。

两个相邻最小项合并为一项，可以消去一个互补变量。$(AB + A\bar{B} = A)$

四个相邻最小项合并为一项，消去两个变量。

八个相邻最小项合并为一项，消去三变量。

C \ AB	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1	1	1	

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}=\bar{B}\bar{C}$

$\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC=\bar{A}C$

$AB\bar{C}+ABC=AB$

adjacent squares can always be combined

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01			**1**	**1**
11				
10				

In adjacent

ABC'D+AB'C'D=A(B+B')C'D=AC'D

2^1

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11	**1**			**1**
10				

In opposite

A'B'CD+AB'CD=(A'+A)B'CD=B'CD

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

$\sum m(0,2,8,10)=B'D'$

2^2

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	
10				

$\sum m(5,7,13,15)=BD$

$ab+ab'=a$

$a'b'+a'b+ab'+ab=1$

adjacent squares can always be combined

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11			1	
10			1	

2^2

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1			1
11	1			1
10				

$\sum m(12,13,14,15)=AB$

$\sum m(1,3,9,11)=B'D$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1			1
10	1			1

2^3

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

$\sum m(0,1,2,3,8,9,10,11)=B'$

$\sum m(1,3,5,7,9,11,13,15)=D$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1			1
10	1			1

$\sum m(0,1,2,3,8,9,10,11)=B'$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

$\sum m(1,3,5,7,9,11,13,15)=D$

最小项合并有以下特点:

① 任何一个合并圈(即卡诺圈)所含的方格数为2^i个。

② 必须按照相邻规则画卡诺圈。

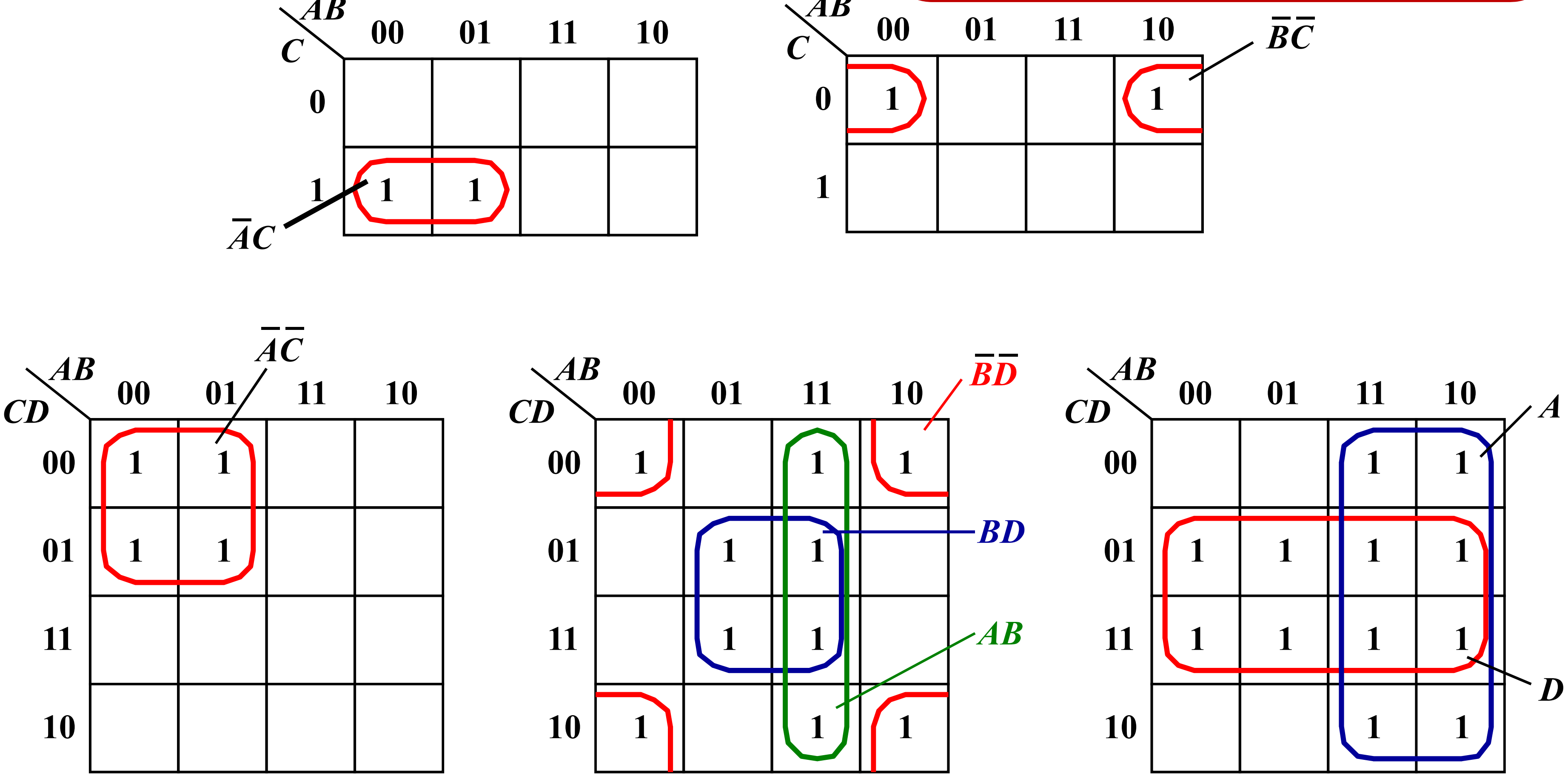
几何位置相邻包括：相邻；相对；相重。

③ 2^m个方格合并，消去m个变量。

合并圈越大，消去的变量数越多。

如何读K-图？

与项由K圈对应的没有变化的那些变量组成。
取值为“1”时写原变量，
取值为“0”时写反变量。



用卡诺图化简逻辑函数

二、卡诺图化简为最简与或式

利用卡诺图合并相邻项，
消去变量。

$F=\bar{B}+C$

$C(\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B}+AB)=C$

C \ AB	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1	1	1

$\bar{B}$

C

$A\bar{C}$

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10		1		

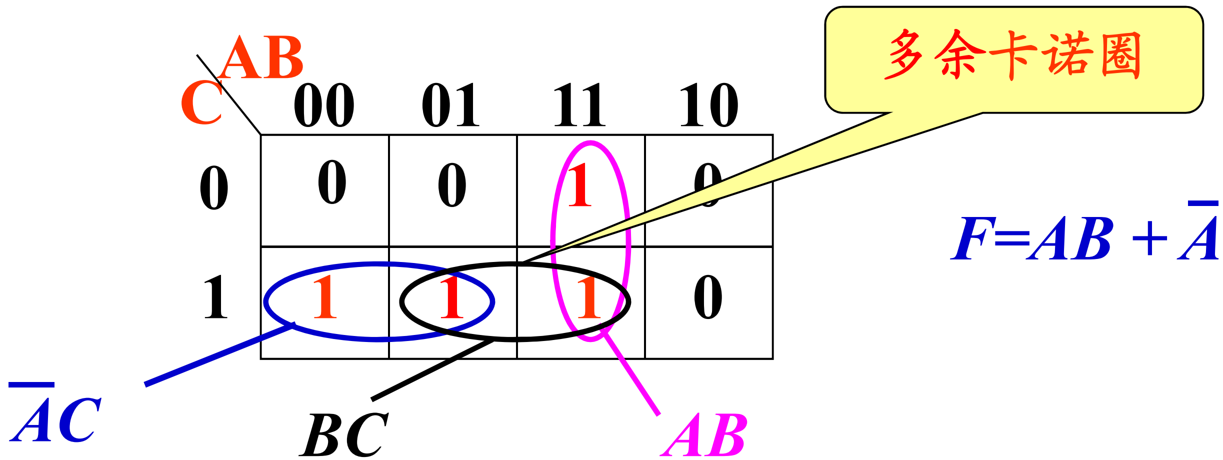
CD

$\bar{A}B$

$F=\bar{A}B+CD+A\bar{C}$

注意：画卡诺圈原则

（1）每一个卡诺圈必须圈2^i个“1”；
（2）每一个卡诺圈应尽量大（与项变量数最少）；
（3）用最少的卡诺圈圈完所有的“1”（与项最少）。



C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

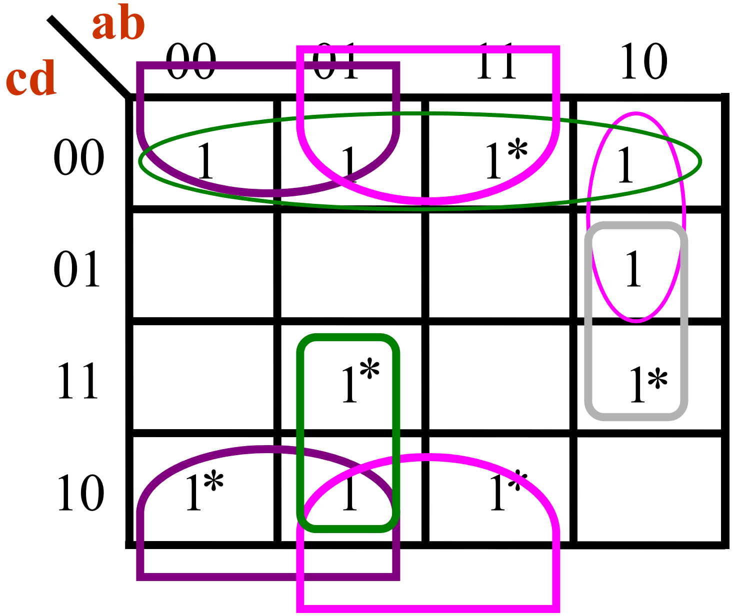
$$F=AB+\bar{A}C$$

保证每个圈中至少有一个“1格”只被圈过一次，否则该圈是多余的。

用卡诺图化简逻辑函数

例3：化简函数为最简与或式。

$$f(a,b,c,d)=\sum m(0,2,4,6,7,8,9,11,12,14)$$



步骤：
①画出逻辑函数的卡诺图。
②圈“1”合并相邻最小项。
③将每一个圈对应的与项相或，得到最简与或式。

$$f=\bar{a}\,\bar{d}+b\bar{d}+\bar{a}bc+a\bar{b}d+\bar{c}\,\bar{d}$$

用卡诺图化简逻辑函数

$$\bar A\bar B\bar C\bar D + \bar A\bar B C\bar D +$$

$$A\bar B\bar C\bar D + A\bar B C\bar D$$

$$= \bar A\bar B\bar D + A\bar B\bar D = \bar B\bar D$$

$$F = BD + \bar B C + \bar B\bar D$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11	1	1	1	1
10	1			1

BD

$\bar B\bar D$

$\bar B C$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

$\bar D$

B

$$F = B + \bar D$$

用卡诺图化简逻辑函数

三、最简或与式的求法

①画出逻辑函数的卡诺图。

②圈“0”合并相邻的最大项。

③将每一个圈对应的或项相与，得到最简或与式。

注意：

①圈“0”合并与圈“1”合并类同；

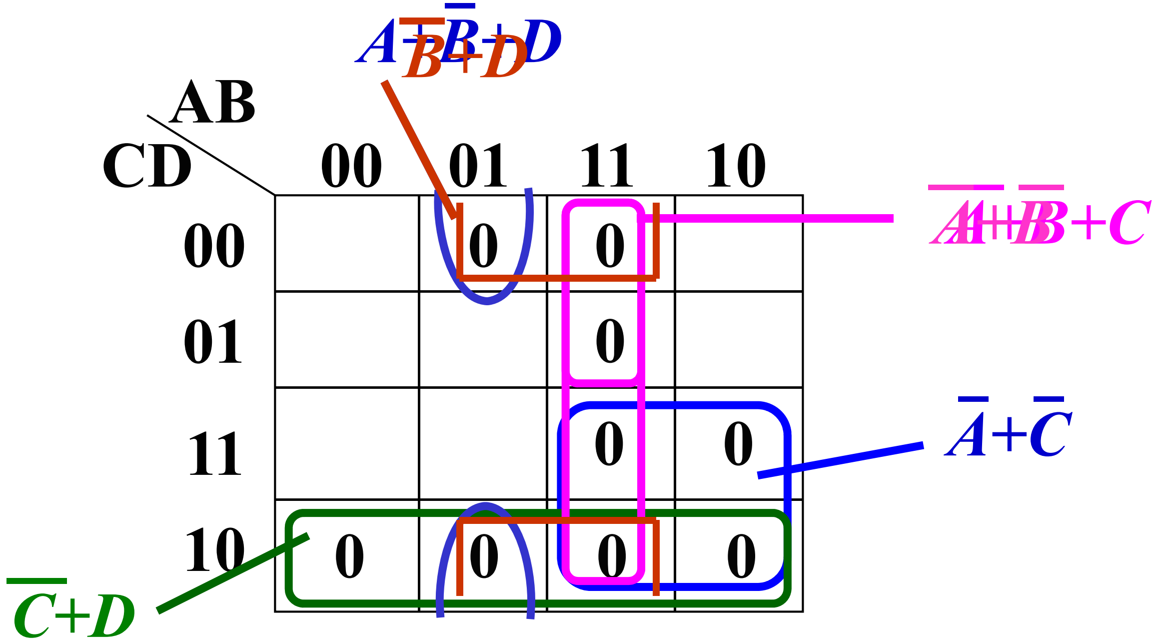
②或项由K圈对应的没有变化的变量组成；

③或项中，变量取值为“0”时写原变量，取值为“1”时写反变量。

用卡诺图化简逻辑函数

例： 用卡诺图将下面函数化为最简或与 $F=\sum m(0,1,3,5,7,8,9)$

解：



$$F=(\overline{C}+D)(\overline{B}+D)(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})$$

非完全描述逻辑函数

对于输入变量的每一组取值组合，逻辑函数都有确定的值，则这类逻辑函数称为完全描述的逻辑函数。

对于输入变量的某些取值组合，逻辑函数值不确定（可以为1，也可以为0），或者不存在，这类逻辑函数称为非完全描述的逻辑函数。

对应输出函数值没有确定值的最小项（或最大项）称为无关项、任意项或约束项。函数值可以为1，也可以为0，记为Φ或×。

非完全描述逻辑函数

无关项发生在以下两种情况：

① 由于某种条件的限制(或约束)使得输入变量的某些组合不可能出现，因而在这些取值下对应的函数值是“无关”紧要的，它可以为1，也可以为0。

② 某些输入变量取值所产生的输出并不影响整个系统的功能，因此可以不必考虑其输出是0还是1。

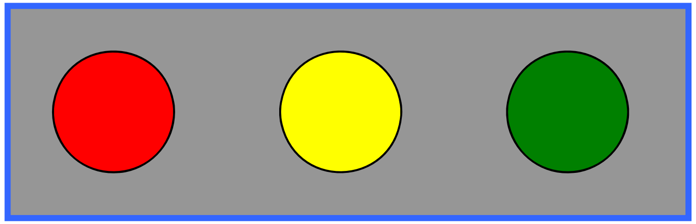
非完全描述逻辑函数一般用以下方法表示：

① 在真值表或K图中填Ø或×，表示函数值为0或1均可。

② 在逻辑表达式中用约束条件来表示。

非完全描述逻辑函数

交通信号灯：典型的非完全描述逻辑数字系统



A　　　B　　　C

A,B,C表示红、黄、绿灯的状态，且以灯亮为1，灯灭为0，用F 表示行车与否，且以行车为1，停车为0。

非完全描述逻辑函数真值表

$A\ B\ C$	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	×
1 0 0	0
1 0 1	×
1 1 0	×
1 1 1	×

非完全描述逻辑函数的表示：

$$F = m_1 + \sum d(3,5,6,7)$$

$$F = \prod M(0,2,4) \bullet \prod d(3,5,6,7)$$

非完全描述逻辑函数化简

对于最小项之和表示式为：

$$Y=\sum m(\cdots)+\sum \phi(\cdots)$$

$$\begin{cases} Y=\sum m(\cdots) \\ \text{约束条件：} \sum \phi(\cdots)=0 \end{cases}$$

对于最大项之积表示式为：

$$Y=\prod M(\cdots)\cdot\prod \phi(\cdots)$$

$$\begin{cases} Y=\prod M(\cdots) \\ \text{约束条件：} \prod \phi(\cdots)=1 \end{cases}$$

含有无关项的卡诺图化简：

含有无关项的逻辑函数，由于在无关项的相应取值下，函数值随意取成0或1都不影响函数原有的功能，因此可以充分利用这些无关项来化简逻辑函数，即采用卡诺图化简函数时， 可以利用Ø （或×）来扩大卡诺圈。

原则：需要时才用，不需要时不用。

非完全描述逻辑函数化简

例：用卡诺图将函数化为最简与或式和最简或与式。

$$F=\sum m(2,4)+\sum \Phi(3,6,7)$$

解：

C \ AB	00	01	11	10
0		1	×	1
1		×	×	

$F=\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}$

$AB+BC=0$ 约束条件

$\bar{A}BC+AB\bar{C}+ABC=0$

$$F=B+A\bar{C}$$

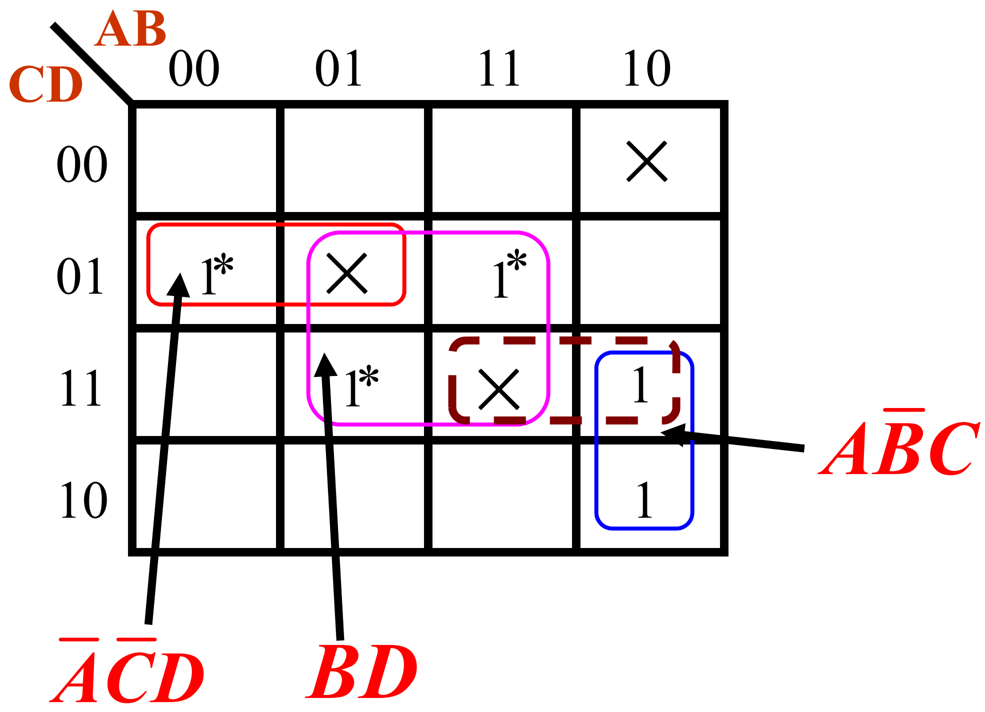
$$F=\bar{C}(A+B)$$

非完全描述逻辑函数化简

例1：输入为一位8421BCD码，当输入的数值大 于5时输出为1。列出真值表，写出函数式。

例：化简函数为:(1)最简与或式，并用两级与非门实现逻辑电路;（2）最简或与式，并用两级或非门实现逻辑电路。

$$F(A,B,C,D)=\sum m(1,7,10,11,13)+\sum d(5,8,15)$$



练习

例：试化简逻辑函数

$$\begin{cases} Y = \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \\ A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD = 0 \end{cases}$$

练习

例1：输入为一位8421BCD码，当输入的数值大于5时输出为1。列出真值表，写出函数式。

小结

- 门电路的逻辑符号及逻辑表达式
- 逻辑表达式化简
- 逻辑表达式的标准形式
- 卡诺图的填写及化简方法

作业

- 2-4
- 2-5
- 2-8：（4）、（5）
- 2-9：（2）、（4）
- 2-12：（4）、（5）

逻辑代数的化减

Ex4. $F = ABC + \overline{A}D + \overline{C}D + BD$

$AB+\bar{A}C= AB+ \bar{A}C+BC$

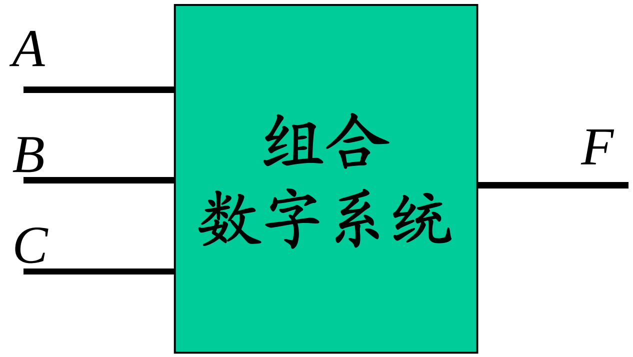
Ex5. $F = A\overline{B} + AC + ADE + \overline{C}D$

$A+AB=A$

Ex6 $F = ac + \overline{a}d + \overline{b}d + b\overline{c}$

非完全描述逻辑函数真值表

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	×
1 0 0	0
1 0 1	×
1 1 0	×
1 1 1	×



逻辑代数的化简

例 2. $F = A\bar{B}C + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

$= A\bar{B}\cancel{(C + \bar{C})} + AB\cancel{(C + \bar{C})}$

$A+\bar{A}=1$

$= A\bar{B} + AB = A$

3. $F = A + \overline{\bar{A}\cdot\overline{BC}}(B + \overline{\bar{C}D + E}) + BC$

$= A + (A + BC)(B + \overline{\bar{C}D + E}) + BC$

$= (A + BC) + (A + BC)(\cancel{B + \overline{\bar{C}D + E}})$

$= A + BC$