

# Devoir 3 - IFT2105 - Hiver 2022

Alain Tapp et Mathieu Duchesneau

## Consignes

- Remise avant le 28 mars 2022 à 16h55.
- Équipe de deux.
- Format PDF.

## 1) Machine de Turing

Considérez la machine de Turing présente dans la vidéo 4.4.4 du cours.

```
# Devoir 1
# La machine accepte t'elle le mot vide?
#! fill _
#! start 1
#! end ACCEPTE
1 _ 1 L 2
1 1 1 R 3
2 _ 1 L 3
2 1 1 L 2
3 _ 1 L 4
3 1 _ R 5
4 _ 1 R 1
4 1 1 R 4
5 _ 1 L ACCEPTE
5 1 _ R 1
```

Déterminer si cette machine s'arrête (sur le mot vide) ou si elle boucle à l'infini (ne s'arrête pas sur le mot vide).

Si la machine s'arrête, dites en combien d'étapes et indiquez la technique de simulation.

Sinon, si la machine boucle à l'infini sur le mot vide, donnez une preuve suffisamment détaillée pour appuyer cette thèse.

## 2) P ou NP

Parmi les trois langages suivants, un est dans P et deux sont NP-complet. Pour le langage dans P, donnez un algorithme (pseudo-code) qui fonctionne en temps polynomial et accepte le langage. Donnez explicitement l'ordre de votre algorithme (par exemple  $O(n^5)$ ). Pour les deux langages NP-Complet, faite en la preuve. Vous pouvez utiliser les langages NP-complet vus en classe ou en démonstration pour faire vos réductions. (Évidement cette question n'a de sens que si  $P = NP$  mais ne vous en faite pas... vous ne trouverez pas d'algorithme polynomial pour les deux langages NP-complet. 😊😞😄)

1. 3-CLIQUE, le langage des graphes contenant (au moins) une 3-clique.
2. 3-DOUBLE-SAT, le langage des expressions en 3-FNC ayant au moins deux affectations (distinctes) rendant l'expression vraie.
3. 4-COL, le langage des graphes 4-coloriable.

### 3) Calculer vs décider

Étant donné un oracle qui généreusement décide 3-SAT sur demande. Comment pouvez-vous le mettre à profit pour obtenir l'affectation des variables satisfaisant une expression spécifique  $E$  appartenant à 3-SAT. Autrement dit, vous devez obtenir le certificat et non pas seulement connaître l'appartenance ou non au langage. Il n'était évidemment pas possible d'obtenir l'entièreté du certificat (l'affectation des variables) en faisant seulement deux ou trois requêtes à votre généreuse oracle, mais il est possible de réaliser cette tâche avec un nombre d'appels à l'oracle qui est linéaire.

Formellement, étant donné une fonction

Oracle:  $\text{FNC} \rightarrow \{\text{“Accepter”}, \text{“Rejeter”}\},$

tel que  $\text{Oracle}(E) = \text{“Accepter”}$  si et seulement si  $E$  est dans 3-SAT, construisez un algorithme polynomial qui prend en entrée une expression  $E$  dans 3-SAT et calcule (ou trouve) une affectation des variables rendant l'expression  $E$  vraie. Notez que l'appelle à l'oracle fonctionne en temps constant.

Attention, si vous donnez une expression satisfaisable  $E$  n'étant pas dans 3-SAT à l'oracle, celui-ci va rejeter l'expression. Par exemple,  $\text{Oracle}((x \vee y)) = \text{“Rejete”}$  malgré le fait que l'expression est satisfaisable parce que l'expression  $(x \vee y)$  n'est pas dans 3-SAT (elle est dans 2-SAT).