IFT2105 Devoir4

Samy Rasmy 20214818 Yuchen Hui 20150470

March 26, 2022

Question1

On va montrer dans deux sens.

f est calculabe $\implies$ L_f est décidable

Proof. On va prover par construire une machine de Turing M qui décide L_f tout en tirant avantage du fait qu'il existe une machine de Turing M' qui, exécuté sur tout entrée $x \in \Sigma^*$, s'arrête avec $f(x)$ sur le ruban:
M = " Sur l'entrée <x,y>:

1. Simuler M' sur x. (NB M' s'arrêtera sur tout entrée x dans Sigma étoile.)
2. Comparer $f(x)$ calculée par M' avec y. S'il sont égales, *accepter*; Sinon *rejeter*."

Ça se voit que M décide le langage $L_f = \{<x, y> \mid y = f(x)\}$. □

L_f est décidable $\implies$ f est calculable

Proof. Soit M' la machine de Turing qui décide L_f, soit $s_1, s_2, s_3 \ldots$ une liste de tous les mots possibles dans Σ^* (dans un ordre quelconque). Construisons une machine de Turing M ci-dessous:
M = " Sur l'entrée x:

1. Répéter les étapes ci-dessous pour $i = 1, 2, 3, \ldots$
2. Simuler M' sur l'entrée $<x, s_i>$.
3. Si M' accepte, mettre $f(x)$ à la fin du ruban et mettre la tête sur le premier symbole du $f(x)$, puis *accepter*, si M' rejette, continuer avec la prochaine i."

On voit bien que M, exécuté sur tout entrée $x \in \Sigma^*$, s'arrête avec $f(x)$ sur le ruban. □

Question2

On va montrer dans deux sens.

Proof. D'abord, on montre que s'il existe un énumérateur E qui énumère langage L, il exsite une machine de Turing M qui reconnait L. La définition de M est donnée ci-dessous:
M = " Sur l'entrée w:

1. Simuler E. Chaque fois que E imprime un mot, le comparer avec w.
2. Si $w =$ cet mot imprimé, *accepter*."

On voit bien que M accepte tous les mots du language L.

Considérons maintenant l'autre direction. Supposons qu'il existe une machine de Turing M qui reconnait le language L. Soit $s_1, s_2, s_3, \ldots$ une liste de tous les mots dans Σ^* (d'un ordre quelconque), on va construire un énumérateur E qui imprimera éventuellement chaque mot de L et seulement les mots de L.
E = "Sur toute entrée :

$i = 0$
tant que *true* :
  $i \leftarrow i + 1$
  pour tout k allant de $1 \ldots i$:
    $w \leftarrow$ le k^{me} mot dans Σ^* en ordre lexicographique
    Simuler M sur w pour i étapes
    si M accepte w, imprimer le mot w."

Cet énumérateur imprimera éventuellement tous les mots dans le language L, car il ne va pas boucler infiniment sur des mots qui n'appartiennent pas au L. □

Question3

Considérons le langage $\overline{FINI_{TM}}$, soit

$$\{<M> \mid M \text{ une machine de Turing et L(M) infini}\}.$$

Si on arrive à prouver qu'il est indécidable, $FINI_{TM}$ est automitiquement indécidable. Soit la fonction de réduction du language A_{MT} au langage $\overline{FINI_{MT}}$:

$$f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$$
$$<M, w> \longmapsto f\,(<M, w>) = <M'>,$$

telle que $M' =$ "Sur entrée x:

1. Simuler M sur w. S'il rejette, *rejeter*. S'il accepte, aller à l'étape 2.
2. Accepter n'importe quel entrée x.

On voit bien que

$$\begin{aligned}
< M, w > \notin A_{TM} &\implies \text{M va rejeter w ou boucler infiniment sur w} \\
&\implies M'\text{rejettera x ou boucler infiniment sur x} \\
&\implies L(M') = \phi, \text{qui n'est pas infini} \\
&\implies <M'> \notin \overline{FINI_{MT}}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
< M, w > \in A_{TM} &\implies \text{M acceptera w} \\
&\implies M' \text{ acceptera n'importe quel x} \\
&\implies L(M') = \Sigma^*, \text{qui est infini} \\
&\implies <M'> \in \overline{FINI_{MT}}.
\end{aligned}$$

Puisque A_{TM} est indécidable, on peut conclure que $\overline{FINI_{MT}}$ est indécidable. En conséquence, le language $FINI_{MT}$ est indécidable.