2. **Really independent sets.** Given a graph $G = (V, E)$, say that a subset $S \subseteq V$ is *really independent* if there are no $u, v \in S$ that are two or fewer steps apart in the graph, that is, for all $u, v \in S$, the length of the shortest path between u and v is at least 3. The problem REALLY INDEPENDENT SET takes a graph G and an integer k as input, and asks if G has a really independent set of size k or more. Prove that this problem is NP-complete.

Per demostrar que el problema es NP-Complete lo que farem sera demostrar que es NP i NP-dificil.

Per demostrar que es NP només tenim que comprovar que donat un testimoni ens pugui afirmar que el problema es really independent set o no (en temps P). Donat un graf $G=(V,E)$: un really independent set $S \subseteq V$, lo que farem sera comprobar $\forall u,v \in S$, el camí més curt entre u v sigui com a mínim 3.

```
bool es_3-IS(G,S){
    if (S ⊄ V) return false
    for v ∈ S
        fer BFS amb distancia 2 de v. { Això ens dona un llista de vertex anomenem B }.
        ∀ u ∈ B {
            if u ∈ S return false.
        }
}
```

El cost de l'algoritme anterior te cost polinomial ya que per cada v vertex de S, troba el conjunt de vertex adiacents de v i comprova que no pertany al conjunt REALLY INDEPENDENT S.

Per demostrar que es NP-difícil será una reducció, lo que farem es reduir el problema de 3-SAT que es NP-Complete al nostre problema que li direm 3-IS.

Dado φ una expresión booleana de 3-SAT, queremos mostrar φ en grafos y si el grafo tiene un 3-IS entonces φ es satisfactible.

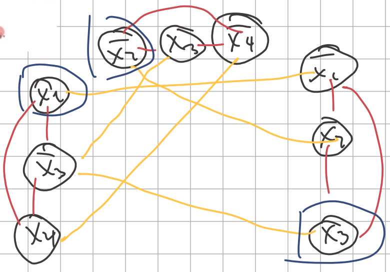
El algoritmo que seguiremos es el siguiente.

1. Para cada literal crear 3 vertices correspondientes [o-o-o]
2. Conectar el vertice de un extremo a los otros dos literales.
3. Conectar cada literal con su negado

$$\varphi = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

---

1. Create a vertex for each literal.
2. Connect each literal to the other two literals in the same clause.
3. Connect each literal x_i to $\overline{x_i}$.

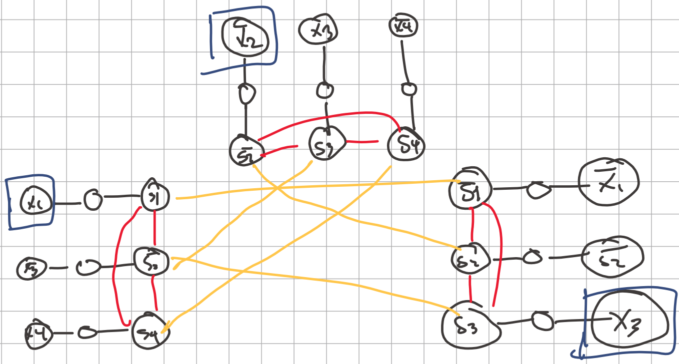


$S = \{x_1, \overline{x_2}, x_3\}$ independent set.

Este grafo es el resultado de reducir 3-SAT a IS.

Lo siguiente que vamos hacer es seguir casi los mismos pasos de pero para reducir de 3-SAT a 3-IS.

$\varphi = (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

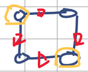


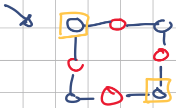
El independente Set seria $S = \{x_1, \bar{x}_2, x_3\}$ i se puede comprobar facilmente que todas tiene una distancia es $>= 3$.

Amb això hem demostrat que 3-IS es NP-difícil. En conclusió com que 3-IS és NP i alhora NP-difícil per tant també és NP-complete.

Solución De la Profe

Poner vertices entre las aristas.





Reducir el problema $IS \leq_p 3\text{-}IS$