

26. (Edge clique cover)

In the **EDGE CLIQUE COVER** problem, we are given a graph G and a nonnegative integer k , and the goal is to decide whether the edges of G can be covered by at most k cliques.

Consider the following reduction rules:

- R1. Remove isolated vertices.
- R2. If there is an isolated edge (u, v) (i.e., a connected component that is just an edge), delete it and decrease k by 1. The new instance is $(G - \{u, v\}, k - 1)$.
- R3. If there is an edge (u, v) whose endpoints have exactly the same closed neighborhood including at least another point, that is, $N[u] = N[v] \neq \{u, v\}$, then delete v . The new instance is $(G - v, k)$.

- (a) Show that by applying any of the above rules the obtained new instance is equivalent to the initial one.
- (b) Show that if (G, k) is a reduced yes-instance, on which none of the three reduction rules can be applied, then $|V(G)| \leq 2^k$.
- (c) Can we conclude that **P-EDGE CLIQUE COVER** belongs to FPT?

a) Para demostrar que la nueva instancia obtenida es equivalente a la inicial tras aplicar cualquiera de las reglas de reducción, necesitamos demostrar dos cosas:

La nueva instancia es una instancia válida del problema.

Si la instancia inicial tiene solución, la nueva instancia también la tiene, y viceversa.

R1: La eliminación de vértices aislados (vértices sin aristas incidentes sobre ellos) no afecta a la cobertura de las aristas por las camarillas. Cualquier camarilla que cubría las aristas incidentes en el vértice aislado puede seguir cubriendo las aristas restantes sin el vértice aislado. Por lo tanto, la nueva instancia sigue siendo una instancia válida, y si la instancia inicial tenía solución, la nueva instancia también la tiene.

R2: La eliminación de una arista aislada (u, v) reduce el número de aristas en 1 y el valor de k en 1. La arista aislada eliminada puede considerarse como una camarilla que se cubre a sí misma. Si la instancia inicial tenía una solución, significa que las aristas restantes estaban cubiertas por k camarillas. Dado que la arista aislada ya estaba cubierta, su eliminación no afecta a la cobertura de las aristas restantes. Por lo tanto, la nueva instancia sigue siendo una instancia válida, y si la instancia inicial tenía solución, la nueva instancia también la tiene.

R3: Eliminar el vértice v cuando $N[u] = N[v] \neq \{u, v\}$ reduce el número de vértices en 1 manteniendo k igual. Dado que los vecindarios de u y v son idénticos, cualquier camarilla que cubría las aristas incidentes en v todavía puede cubrir esas aristas sin v . Por lo tanto, la nueva instancia sigue siendo una instancia válida, y si la instancia inicial tenía una solución, la nueva instancia también tiene una solución.

(b) Si (G, k) es una instancia sí reducida sobre la que no se puede aplicar ninguna de las tres reglas de reducción, significa que el grafo G no tiene vértices aislados, aristas aisladas o vértices v que satisfagan $N[u] = N[v] \neq \{u, v\}$. Esto implica que G es un grafo conexo en el

que cada arista tiene puntos finales distintos y no se puede eliminar ningún vértice sin violar las condiciones de R1 o R3.

En una cubierta de camarilla, cada camarilla puede cubrir como máximo $|V(G)|$ vértices. Por lo tanto, si G tiene k camarillas que cubren todas sus aristas, el número total de vértices cubiertos por las camarillas es como máximo $k * |V(G)|$. Como no se puede eliminar ningún vértice, $|V(G)|$ es un límite inferior del número de vértices cubiertos por las camarillas.

A partir de la instancia reducida, sabemos que $|V(G)|$ es mayor que 2^k porque si $|V(G)| \leq 2^k$, una de las reglas de reducción habría sido aplicable. Por lo tanto, $|V(G)| > 2^k$ es una condición necesaria para una instancia sí reducida.

(c) No, no podemos concluir que p-Edge Clique Cover pertenece a FPT (Fixed Parameter Tractable) basándonos únicamente en la información dada. FPT es una clase de complejidad que contiene problemas que pueden resolverse eficientemente cuando se parametrizan con uno o más parámetros de tamaño fijo. Para determinar si p-Edge Clique Cover pertenece a FPT, necesitamos analizar la complejidad temporal del problema y la posibilidad de diseñar un algoritmo con un tiempo de ejecución de la forma $f(k) * \text{poly}(|V(G)|)$.

Las reglas de reducción ayudan a reducir el tamaño de la instancia, pero no garantizan un algoritmo con un tiempo de ejecución de parámetro fijo. Sin más análisis o información sobre la complejidad del problema, no podemos concluir que p-Edge Clique Cover pertenezca a FPT.