

# データセンタにおける光回線交換ネットワークの設計問題

緒方雄大

2025 年 5 月 17 日

## 1 知識

- Folded Clos network では Tx と Rx のペアが input-output レイヤの共通のスイッチに繋がる.
- データセンターは Unfolded Clos より Folded Clos を採用. →全てのスイッチがコンパクトにまとまり、ケーブル長が短くなる. 収容ラックの効率的な使用. Folded Clos のほうがスケーラブル
- Strict-sense non blocking:
- TF Clos は input-output スイッチでのポート数の制限を緩和.

## 2 3 構成 (2TF, 2F, 3UF) での Switching capacity の最大化

スイッチのポート数  $N = 64$

スイッチ数  $a = 100$

Input-Output スイッチでのポート数  $n$

Input-Output スイッチ数  $k$

Intermediate スイッチ数  $m$

Input-Output スイッチと Intermediate スイッチ間のリンク数  $v$

## 2.1 Two-stage twisted and folded Clos network (2TF)

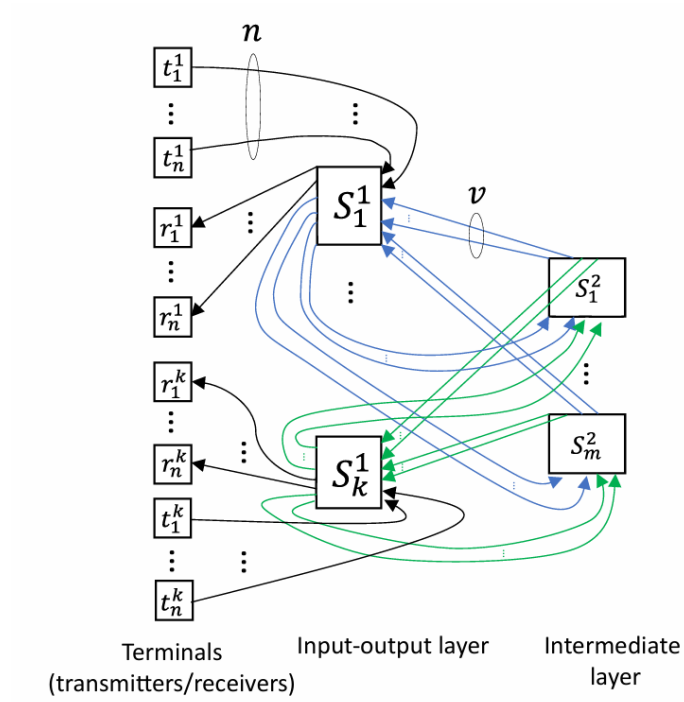


図 7: 2TF の構成.

$$\max \quad n \cdot k \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad n + vm \leq N \quad (2)$$

$$vk \leq N \quad (3)$$

$$2 \left\lfloor \frac{n-1}{v} \right\rfloor + 1 \leq m \quad (4)$$

$$k + m \leq a \quad (5)$$

$$(6)$$

---

**Algorithm 1:** 2TF での  $n \cdot k$  の最大化アルゴリズム

---

**Input:**  $N = 64, a = 100$

**Output:**  $\max n \cdot k$  と対応する  $(n, k, m, v)$

```
1  $max\_nk \leftarrow 0, best\_params \leftarrow \text{None};$ 
2 for  $n \leftarrow 1$  to  $N$  do
3   for  $k \leftarrow 1$  to  $a$  do
4      $nk \leftarrow n \cdot k;$ 
5     if  $nk \leq max\_nk$  then
6       continue;
7     for  $v \leftarrow 1$  to  $a$  do
8       if  $v \cdot k > N$  then
9         break;
10      for  $m \leftarrow 1$  to  $a$  do
11        if  $k + m > a$  then
12          break;
13        if  $n + v \cdot m > N$  then
14          break;
15        if  $2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{v} \right\rfloor + 1 \leq m$  then
16          if  $nk > max\_nk$  then
17             $max\_nk \leftarrow nk;$ 
18             $best\_params \leftarrow (n, k, m, v);$ 
19 return  $max\_nk, best\_params;$ 
```

---

•  $(n, k, m, v) = (21, 59, 41, 1)$  のとき,

$$nk = 1239$$

## 2.2 Two-stage folded Clos network (2F)

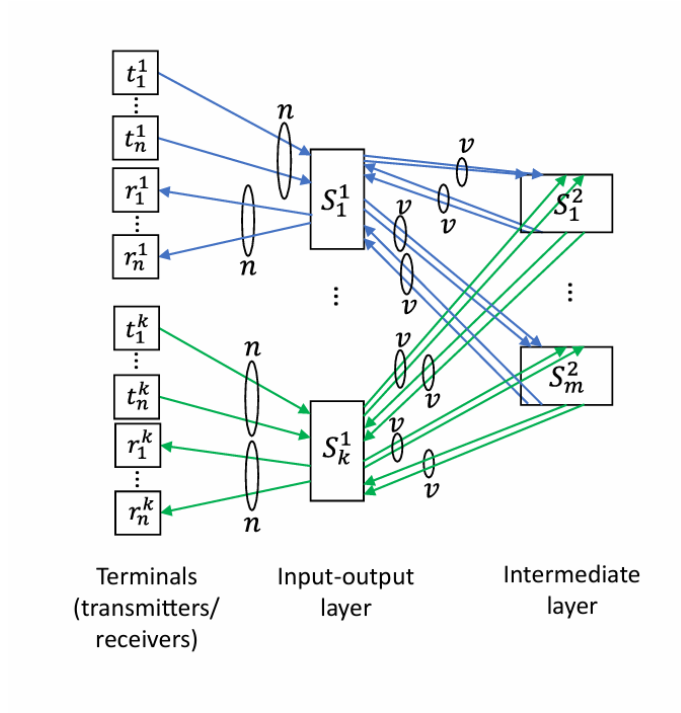


図 8: 2F の構成.

$$\max \quad n \cdot k \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad 2n \leq N \quad (8)$$

$$2vm \leq N \quad (9)$$

$$vk \leq N \quad (10)$$

$$2 \left\lfloor \frac{n-1}{v} \right\rfloor + 1 \leq m \quad (11)$$

$$k + m \leq a \quad (12)$$

$$(13)$$

---

**Algorithm 2:** 2F での  $n \cdot k$  の最大化アルゴリズム

---

**Input:**  $N = 64, a = 100$ **Output:**  $\max n \cdot k$  と対応する  $(n, k, m, v)$ 

```
1  $max\_nk \leftarrow 0, best\_params \leftarrow \text{None};$ 
2 for  $n \leftarrow 1$  to  $N/2$  do
3   for  $k \leftarrow 1$  to  $a$  do
4      $nk \leftarrow n \cdot k;$ 
5     if  $nk \leq max\_nk$  then
6       continue;
7     for  $v \leftarrow 1$  to  $a$  do
8       if  $v \cdot k > N$  then
9         break;
10      for  $m \leftarrow 1$  to  $a$  do
11        if  $k + m > a$  then
12          break;
13        if  $2 \cdot v \cdot m > N$  then
14          break;
15        if  $2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{v} \right\rfloor + 1 \leq m$  then
16          if  $nk > max\_nk$  then
17             $max\_nk \leftarrow nk;$ 
18             $best\_params \leftarrow (n, k, m, v);$ 
19 return  $max\_nk, best\_params;$ 
```

---

•  $(n, k, m, v) = (16, 64, 31, 1)$  のとき,

$$nk = 1024$$

### 2.3 Three-stage unfolded Clos network (3UF)

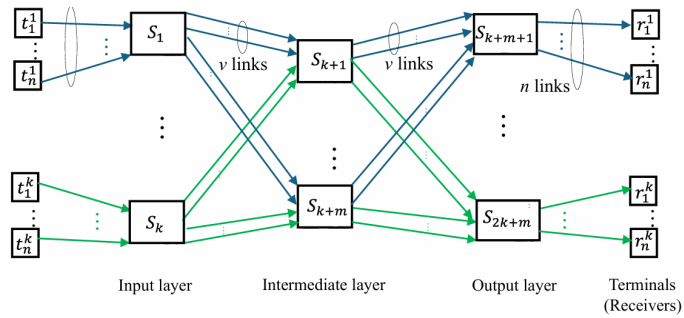


図 9: 3UF の構成.

$$\max \quad n \cdot k \quad (14)$$

$$\text{s.t.} \quad n \leq N \quad (15)$$

$$vm \leq N \quad (16)$$

$$vk \leq N \quad (17)$$

$$2 \left\lfloor \frac{n-1}{v} \right\rfloor + 1 \leq m \quad (18)$$

$$2k + m \leq a \quad (19)$$

$$(20)$$

---

**Algorithm 3:** 3UF での  $n \cdot k$  の最大化アルゴリズム

---

**Input:**  $N = 64, a = 100$

**Output:**  $\max n \cdot k$  と対応する  $(n, k, m, v)$

```

1  $max\_nk \leftarrow 0, best\_params \leftarrow \text{None};$ 
2 for  $n \leftarrow 1$  to  $N$  do
3   for  $k \leftarrow 1$  to  $a$  do
4      $nk \leftarrow n \cdot k;$ 
5     if  $nk \leq max\_nk$  then
6       continue;
7     for  $v \leftarrow 1$  to  $a$  do
8       if  $v \cdot k > N$  then
9         break;
10      for  $m \leftarrow 1$  to  $a$  do
11        if  $v \cdot m > N$  or  $k + m > a$  then
12          break;
13        if  $2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{v} \right\rfloor + 1 \leq m$  then
14          if  $nk > max\_nk$  then
15             $max\_nk \leftarrow nk;$ 
16             $best\_params \leftarrow (n, k, m, v);$ 
17 return  $max\_nk, best\_params;$ 

```

---

•  $(n, k, m, v) = (32, 32, 31, 2)$  のとき,

$$nk = 1024$$

## 2.4 結果

2TF, 2F, 3UF の構成のスイッチングネットワーク  $nk$  の大小関係は,  $(N = 64, a = 100)$

$$2TF(1239) > 2F(1024) = 3UF(1024)$$

## 3 Theorems(Mano 論文 [1])

Theorem 1: 2F のスイッチング容量  $f_{2F}(a; N)$  と 2TF のスイッチング容量  $f_{3UF}(a; N)$  について,

$$f_{2F}(a; N) \leq f_{2TF}(a; N)$$

Theorem 2: 次の条件が成り立つならば,

$$f_{3UF}(a; N) \leq f_{2TF}(a; N)$$

条件:

$$N \not\equiv 3 \pmod{6} \text{ and } N > 10 \quad (21)$$

$$a \leq \frac{4}{\sqrt{3}}(N-1) - 1 \quad (22)$$

$$f_{3UF}(a; N) > 10N \quad (23)$$

Theorem 4: if  $N > 120$  and  $\frac{5N-1}{3} \leq a$ ,

$$f_{2TF}(a; N) > 1.3f_{2F}(a; N)$$

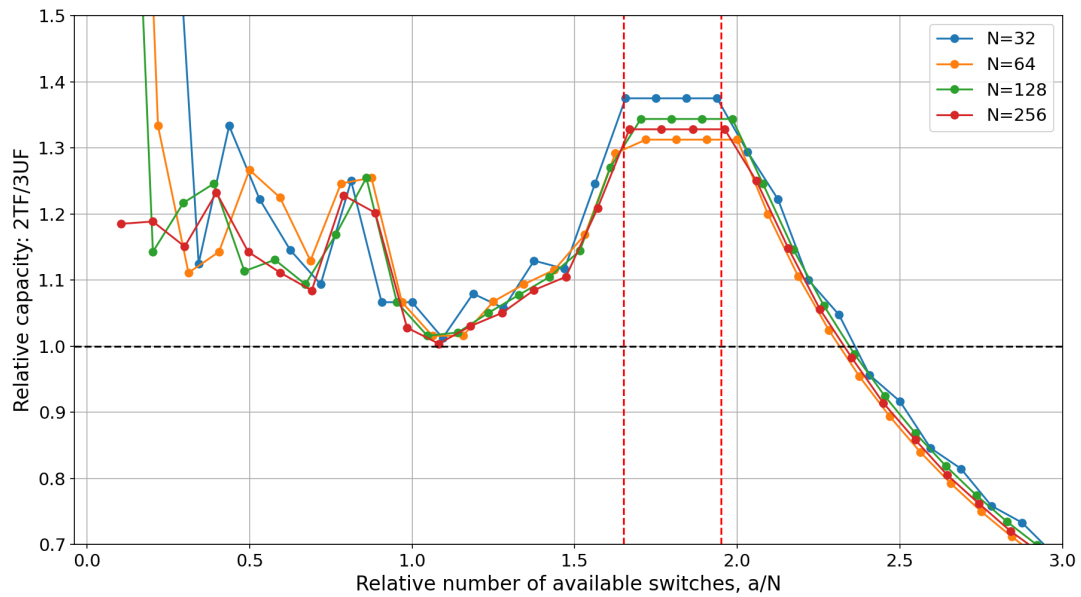
Theorem 5: if  $N > 40$  and  $\frac{5N-1}{3} \leq a \leq 2N-3$ ,

$$f_{2TF}(a; N) > 1.3f_{3UF}(a; N)$$

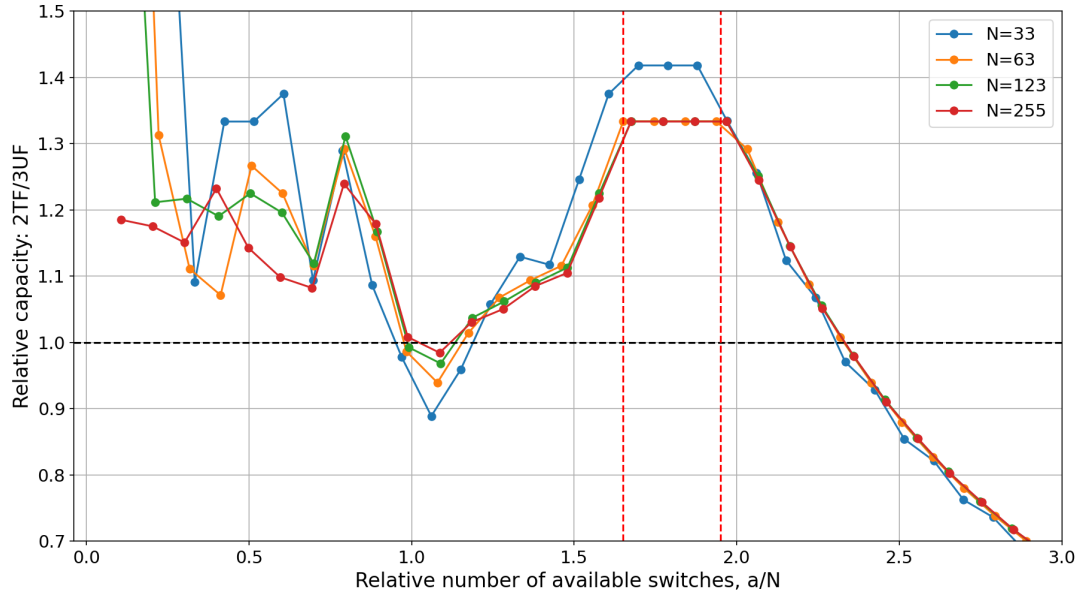
## 4 スイッチング数の変更

### 4.1 2TF と 3UF

・  $N = 32, 64, 128, 256$  で  $a$  を変化させてスイッチングサイズを比較した (全て  $N \not\equiv 3 \pmod{6}$  and  $N > 10$ ).



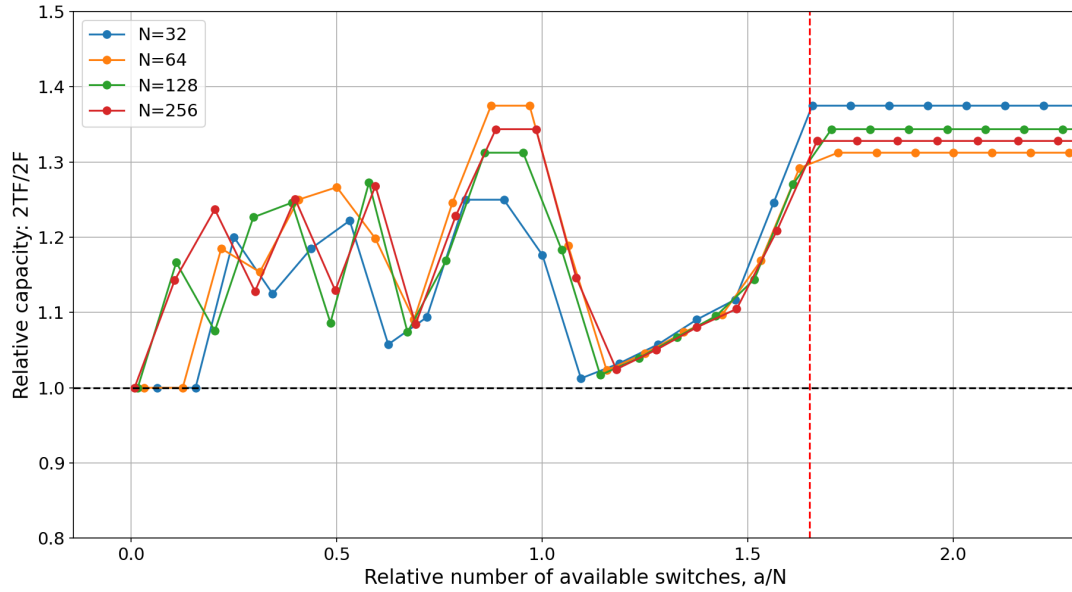
・  $N = 33, 63, 129, 255$  で  $a$  を変化させてスイッチングサイズを比較した (全て  $N \equiv 3 \pmod{6}$  and  $N > 10$ ).



- Theorem 5 について,  $N = 64, 128, 256 (N > 40)$  のとき,  $1.66 \leq \frac{a}{N} \leq 1.95$  であれば,  $f_{2TF}(a; N) > 1.3f_{3UF}(a; N)$  を満たすはず. 実際にグラフより, この区間で 30% 以上の増加が見られた (赤のライン).
- $N \equiv 3 \pmod{6}$  のとき, 下のグラフより,  $f_{3UF}(a; N) > f_{2TF}(a; N)$  のときがあった ( $y=1$  のラインを下回る). これは Theorem 2 の条件を満たしていないからである. → Capacity Reversing

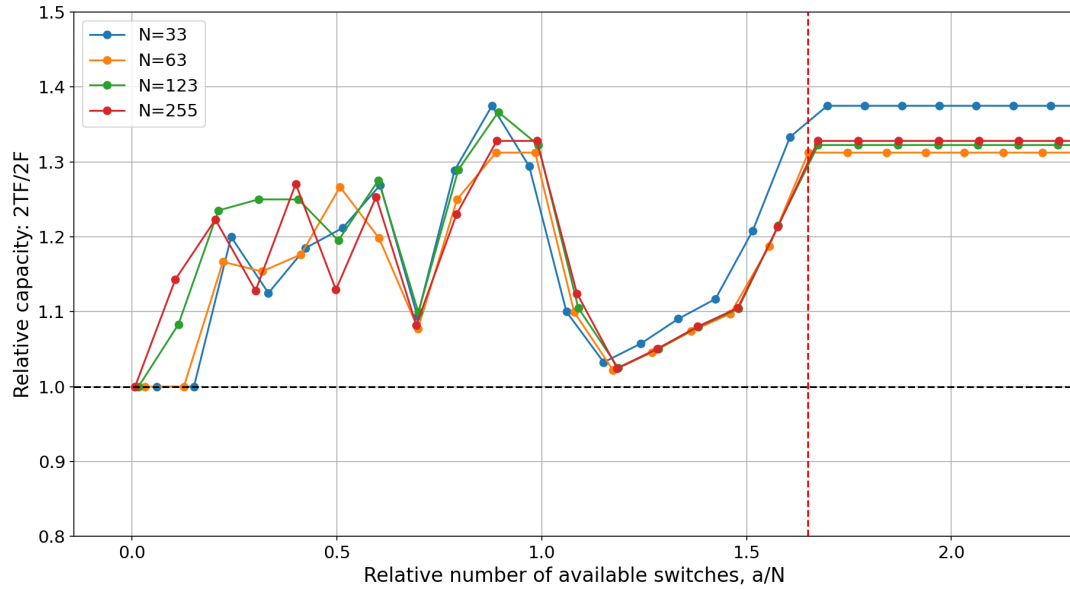
## 4.2 2TF と 2F

- $N = 32, 64, 128, 256$  で  $a$  を変化させてスイッチングサイズを比較した.



- $N = 33, 63, 129, 255$  で  $a$  を変化させてスイッチングサイズを比較した.

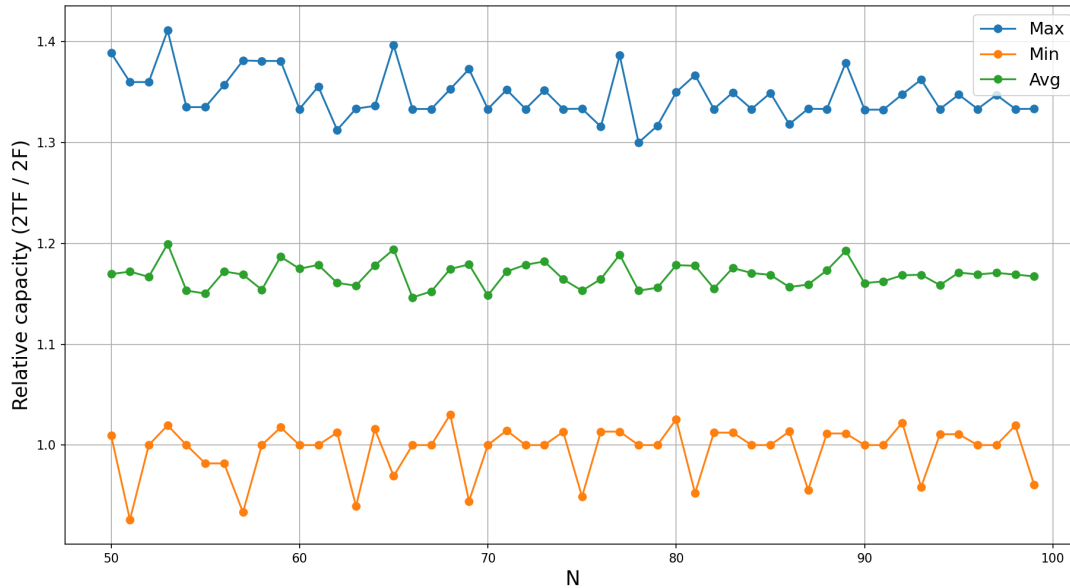




- Theorem 4 について,  $N = 128, 256 (N > 120)$  のとき,  $1.66 \leq \frac{a}{N}$  であれば,  $f_{2TF}(a; N) > 1.3f_{2F}(a; N)$  を満たすはず. 実際にグラフより, この区間で 30% 以上の増加が見られた (赤のライン以降).
- Theorem 1 について,  $N \pmod{6}$  の値に関係なく,  $f_{2F}(a; N) \leq f_{2TF}(a; N)$  が成り立つ ( $y = 1$  より大きい) ことがグラフより確認できた.

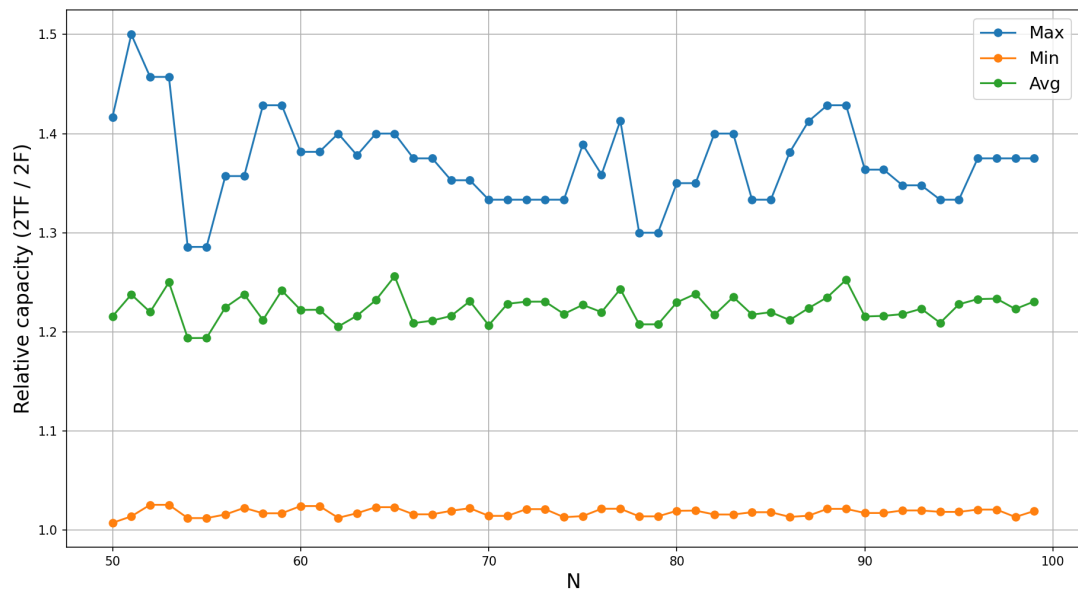
#### 4.3 最大・最小・平均スイッチング容量

- 2TF/3UF の Relative switching capacity



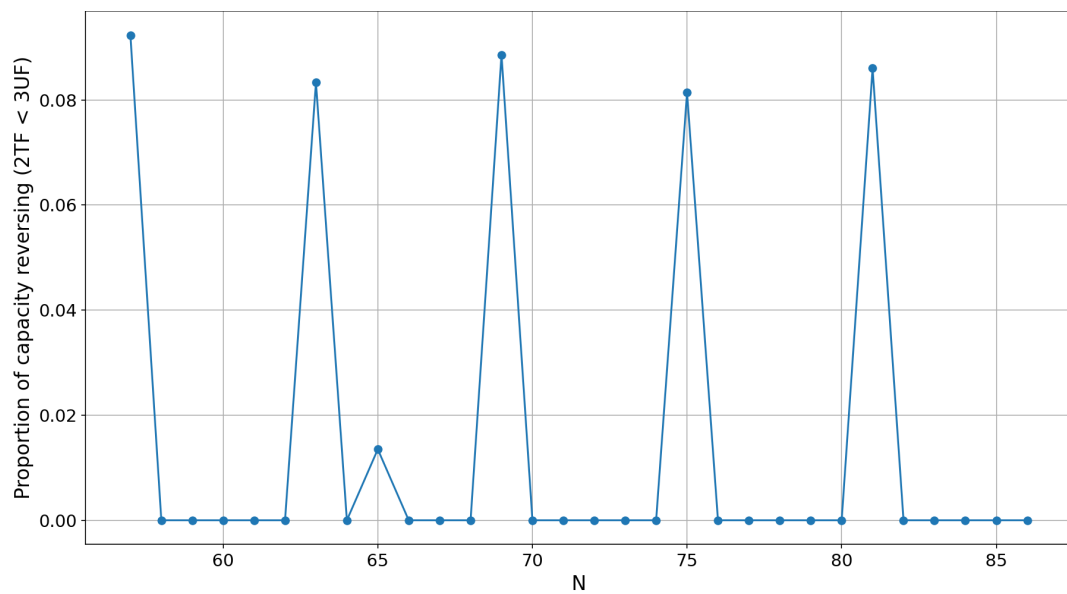
- 2TF は 3UF に比べて, 平均約 17%, 最大約 35% のスイッチング容量の増加が確認できた.
- Capacity Reversing も確認できる.

- 2TF/2F の Relative switching capacity



→ 2TF は 2F に比べて, 平均約 21%, 最大約 40% のスイッチング容量の増加が確認できた.

#### 4.4 Capacity Reversing の分析 (3UF-2TF)



・ 山 (0 → 0.08) の間隔は  $6 \rightarrow N \equiv 3 \pmod{6}$  に対応.