

# 特殊関数

介川侑大<sup>1</sup>

November 16, 2020

<sup>1</sup>東京工業大学物理学系 3 年

|              |                        |          |
|--------------|------------------------|----------|
| <b>第 1 章</b> | <b>ガンマ関数</b>           | <b>1</b> |
| 1.1          | 定義 .....               | 1        |
| 1.2          | 漸化式 .....              | 1        |
| 1.3          | Gauss の公式 .....        | 1        |
| 1.4          | Weiersstrass の公式 ..... | 1        |
| 1.5          | ディガンマ関数 .....          | 2        |
| 1.6          | Euler の反転公式 .....      | 2        |
| 1.7          | Hankel の積分表示 .....     | 2        |
| 1.8          | Stirling の公式 .....     | 2        |
| <b>第 2 章</b> | <b>ベータ関数</b>           | <b>3</b> |
| 2.1          | 定義 .....               | 3        |
| 2.2          | 積分表示 .....             | 3        |
| 2.3          | ガンマ関数表示 .....          | 3        |
| <b>第 3 章</b> | <b>超幾何関数</b>           | <b>4</b> |
| 3.1          | 定義 .....               | 4        |
| 3.2          | 超幾何方程式 .....           | 4        |
| 3.3          | 積分表示 .....             | 4        |
| 3.4          | 合流型超幾何方程式 .....        | 4        |
| 3.5          | 積分表示 .....             | 5        |
| <b>第 4 章</b> | <b>Legendre 関数</b>     | <b>6</b> |
| 4.1          | Legendre の微分方程式 .....  | 6        |
| 4.2          | 定義 .....               | 6        |
| 4.3          | 超幾何関数表示 .....          | 6        |
| 4.4          | Rodrigues の公式 .....    | 6        |
| 4.5          | 直行性 .....              | 6        |
| 4.6          | シュレーフリの積分表示 .....      | 7        |
| 4.7          | 母関数 .....              | 7        |
| 4.8          | 隣接 3 項間漸化式 .....       | 7        |
| 4.9          | Legendre 陪多項式 .....    | 7        |
| 4.9.1        | 微分方程式 .....            | 7        |
| 4.9.2        | 定義 .....               | 7        |
| 4.9.3        | 直行性 .....              | 7        |
| <b>第 5 章</b> | <b>Tchebysheff 多項式</b> | <b>8</b> |
| 5.1          | 微分方程式 .....            | 8        |
| 5.2          | 超幾何関数表示 .....          | 8        |
| 5.3          | Rodrigues の公式 .....    | 8        |
| 5.4          | 直行性 .....              | 8        |
| 5.5          | 母関数 .....              | 8        |
| 5.6          | 隣接 3 項間漸化式 .....       | 8        |
| 5.7          | 三角関数関係 .....           | 9        |

|              |                    |           |
|--------------|--------------------|-----------|
| <b>第 6 章</b> | <b>Hermite 関数</b>  | <b>10</b> |
| 6.1          | Hermite の微分方程式     | 10        |
| 6.2          | 定義                 | 10        |
| 6.3          | 合流型超幾何関数表示         | 10        |
| 6.4          | Rodrigues の公式      | 10        |
| 6.5          | 直行性                | 10        |
| 6.6          | 積分表示               | 11        |
| 6.7          | 母関数                | 11        |
| 6.8          | 隣接 3 項間漸化式         | 11        |
| <b>第 7 章</b> | <b>Laguerre 関数</b> | <b>12</b> |
| 7.1          | Laguerre の微分方程式    | 12        |
| 7.2          | 定義                 | 12        |
| 7.3          | 合流型超幾何関数表示         | 12        |
| 7.4          | Rodrigues の公式      | 12        |
| 7.5          | 直行性                | 12        |
| 7.6          | 積分表示               | 12        |
| 7.7          | 母関数                | 13        |
| 7.8          | 隣接 3 項間漸化式         | 13        |
| 7.9          | Laguerre 陪多項式      | 13        |
| 7.9.1        | 微分方程式              | 13        |
| 7.9.2        | 定義                 | 13        |
| 7.9.3        | 合流型超幾何関数表示         | 13        |
| 7.9.4        | Rodrigues の公式      | 13        |
| 7.9.5        | 直行性                | 13        |
| 7.9.6        | 母関数                | 14        |
| 7.9.7        | 隣接 3 項間漸化式         | 14        |
| <b>第 8 章</b> | <b>Bessel 関数</b>   | <b>15</b> |
| 8.1          | Bessel の微分方程式      | 15        |
| 8.2          | 定義                 | 15        |
| 8.3          | 合流型超幾何関数表示         | 15        |
| 8.4          | 直行性                | 15        |
| 8.5          | 性質                 | 15        |
| 8.6          | 積分表示               | 16        |
| 8.6.1        | シュレーフリの積分表示        | 16        |
| 8.6.2        | ポアソンの積分表示          | 16        |
| 8.7          | 母関数                | 16        |
| 8.8          | 漸化式                | 16        |
| 8.9          | ノイマン関数             | 16        |
| 8.9.1        | 定義                 | 16        |
| 8.10         | ハンケル関数             | 17        |
| 8.10.1       | 定義                 | 17        |

|        |                 |    |
|--------|-----------------|----|
| 8.11   | 変形ベッセル関数        | 17 |
| 8.11.1 | 定義              | 17 |
| 8.11.2 | 微分方程式           | 17 |
| 8.11.3 | 合流型超幾何関数表示      | 17 |
| 8.11.4 | 母関数             | 17 |
| 8.11.5 | 漸化式             | 17 |
| 8.12   | 球ベッセル関数と球ノイマン関数 | 18 |
| 8.12.1 | 微分方程式           | 18 |
| 8.12.2 | 定義              | 18 |
| 8.12.3 | Rodrigues の公式   | 18 |
| 8.12.4 | 性質              | 18 |
| 8.12.5 | 母関数             | 18 |
| 8.12.6 | 隣接 3 項間漸化式      | 19 |
| 8.13   | 球ハンケル関数         | 19 |
| 8.13.1 | 定義              | 19 |
| 8.13.2 | Rodrigues の公式   | 19 |
| 8.13.3 | 展開公式            | 19 |
| 8.13.4 | 性質              | 19 |
| 8.13.5 | 母関数             | 19 |
| 8.13.6 | 隣接 3 項間漸化式      | 20 |

# 第1章 ガンマ関数

## 1.1

### 定義

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0) \quad (1.1)$$

## 1.2

### 漸化式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0) \quad (1.2)$$

特に、

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.3)$$

から、

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (1.4)$$

## 1.3

### Gauss の公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} \quad (1.5)$$

## 1.4

### Weiersstrass の公式

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \quad (1.6)$$

$\gamma$  はオイラー定数である。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \quad (1.7)$$

1.5

## ディガンマ関数

$$\psi(x) := \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad (1.8)$$

1.6

## Euler の反転公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (1.9)$$

1.7

## Hankel の積分表示

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2i \sin \pi x} \int_c (-t)^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.10)$$

1.8

## Stirling の公式

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \quad (1.11)$$

## 第2章 ベータ関数

2.1

定義

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2.1)$$

2.2

積分表示

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds \quad (2.2)$$

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \quad (2.3)$$

2.3

ガンマ関数表示

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.4)$$

## 第3章 超幾何関数

### 3.1

#### 定義

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ b_1 & \cdots & b_q \end{matrix}; x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (3.1)$$

### 3.2

#### 超幾何方程式

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}u + (c - (a+b+1)x)\frac{d}{dx}u - abu = 0 \quad (3.2)$$

解は、

$$u = {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (3.3)$$

### 3.3

#### 積分表示

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt \quad (3.4)$$

### 3.4

#### 合流型超幾何方程式

$$x\frac{d^2}{dx^2}u + (c-x)\frac{d}{dx}u - au = 0 \quad (3.5)$$

解は、

$$u = {}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (3.6)$$



## 3.5

## 積分表示

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{xt} dt \quad (3.7)$$

## 第4章 Legendre 関数

4.1

Legendre の微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}u\} + \nu(\nu+1)u = 0 \quad (4.1)$$

4.2

定義

$\nu = n (\in \mathbb{N})$  の時、

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k} \quad (4.2)$$

4.3

超幾何関数表示

$$P_n(x) = {}_2F_1(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2}) \quad (4.3)$$

4.4

Rodrigues の公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (4.4)$$

4.5

直行性

$$(P_n(x), P_m(x)) := \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} \quad (4.5)$$

## 4.6

## シュレーフリの積分表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz \quad (4.6)$$

## 4.7

## 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \zeta^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}} \quad (4.7)$$

## 4.8

## 隣接3項間漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (4.8)$$

## 4.9

## Legendre 陪多項式

## 4.9.1 微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} u \right\} - \frac{k^2}{1-x^2} u + n(n+1)u = 0 \quad (4.9)$$

## 4.9.2 定義

$$P_n^k(x) := (-1)^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \quad (4.10)$$

## 4.9.3 直行性

$$\int_{-1}^1 P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \frac{2(n+k)!}{(2n+1)!(n-k)!} \delta_{n,m} \quad (4.11)$$

## 第5章 Tchebysheff多項式

5.1

微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}u\} + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}u = 0 \quad (5.1)$$

5.2

超幾何関数表示

$$T_n(x) = \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} {}_2F_1(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \quad (5.2)$$

5.3

Rodrigues の公式

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

5.4

直行性

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} & otherwise \end{cases} \quad (5.4)$$

5.5

母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \zeta^n = \frac{1-x\zeta}{1-2x\zeta+\zeta^2} \quad (5.5)$$

5.6

隣接3項間漸化式

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (5.6)$$

## 5.7

## 三角関数関係

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (5.7)$$

## 第6章 Hermite関数

### 6.1

#### Hermite の微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x^2}\frac{d}{dx}u\} + 2ne^{-x^2}u = 0 \quad (6.1)$$

### 6.2

#### 定義

$$H_n(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (6.2)$$

### 6.3

#### 合流型超幾何関数表示

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} {}_1F_1(-n, \frac{1}{2}; x^2) \quad (6.3)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x {}_1F_1(-n, \frac{3}{2}; x^2) \quad (6.4)$$

### 6.4

#### Rodrigues の公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (6.5)$$

### 6.5

#### 直行性

$$(H_n(x), H_m(x)) := \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \delta_{n,m} \quad (6.6)$$

## 6.6

## 積分表示

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{2xz-z^2}}{z^{n+1}} dz \quad (6.7)$$

## 6.7

## 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \zeta^n = e^{-\zeta^2+2x\zeta} \quad (6.8)$$

## 6.8

## 隣接 3 項間漸化式

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (6.9)$$

## 第7章 Laguerre関数

### 7.1 Laguerre の微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{xe^{-x}\frac{d}{dx}u\right\}+ne^{-x}u=0 \quad (7.1)$$

### 7.2 定義

$$L_n(x):=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!}x^k \quad (7.2)$$

### 7.3 合流型超幾何関数表示

$$L_n(x)=n!{}_1F_1(-n,1;x) \quad (7.3)$$

### 7.4 Rodrigues の公式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \quad (7.4)$$

### 7.5 直行性

$$(L_n(x), L_m(x)):=\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx=(n!)^2\delta_{n,m} \quad (7.5)$$

### 7.6 積分表示

$$L_n(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}dz \quad (7.6)$$



## 7.7

## 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} \zeta^n = \frac{e^{-\frac{x\zeta}{1-\zeta}}}{1-\zeta} \quad (7.7)$$

## 7.8

## 隣接 3 項間漸化式

$$L_{n+1}(x) + (x - (2n + 1))L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \quad (7.8)$$

## 7.9

## Laguerre 陪多項式

## 7.9.1 微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^{k+1} e^{-x} \frac{d}{dx} u \right\} + n x^k e^{-x} \frac{d}{dx} u = 0 \quad (7.9)$$

## 7.9.2 定義

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{((n+k)!)^2}{(n-l)!(l+k)!(l)!} x^l \quad (7.10)$$

## 7.9.3 合流型超幾何関数表示

$$L_n^k(x) = \frac{((n+k)!)^2}{n!k!} {}_1F_1(-n, k+1; x) \quad (7.11)$$

## 7.9.4 Rodrigues の公式

$$L_n^k(x) = e^x x^{-k} \frac{(n+k)!}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{(-x)} x^{n+k}) \quad (7.12)$$

## 7.9.5 直行性

$$(L_n^k(x), L_m^k(x)) := \int_0^\infty L_n^k(x) L_m^k(x) e^{-x} x^k dx = \frac{((n+k)!)^3}{n!} \delta_{n,m} \quad (7.13)$$

## 7.9.6 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) \frac{\zeta^n}{(n+k)!} = \frac{e^{\frac{-x\zeta}{1-\zeta}}}{(1-\zeta)^{k+1}} \quad (7.14)$$

## 7.9.7 隣接 3 項間漸化式

$$\frac{n+1}{n+1+k} L_{n+1}^k(x) + (x - (2n+k+1)) L_n^k(x) + (n+k)^2 L_{n-1}^k(x) \quad (7.15)$$

## 第8章 Bessel関数

### 8.1

#### Bessel の微分方程式

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} \right) - \frac{\nu^2}{x} \right\} u + xu = 0 \quad (8.1)$$

または、

$$\frac{d^2}{dx^2} u + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} u + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) u = 0 \quad (8.2)$$

### 8.2

#### 定義

$$J_\nu(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (8.3)$$

### 8.3

#### 合流型超幾何関数表示

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu)} \left( \frac{x}{2} \right)^\nu {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix\right) \quad (8.4)$$

### 8.4

#### 直行性

$$\int_0^1 J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_l x) x dx = \frac{1}{2} \{J_{\nu+1}(\lambda_k)\}^2 \delta_{k,l} \quad (8.5)$$

### 8.5

#### 性質

$$\frac{d}{dx} \{x^\nu J_\nu(x)\} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad \frac{d}{dx} \{x^{-\nu} J_\nu(x)\} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \quad (8.6)$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (8.7)$$

## 8.6

## 積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \phi - n\phi)} d\phi \quad (8.8)$$

## 8.6.1 シュレーフリの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})} z^{-\nu-1} dz \quad (8.9)$$

## 8.6.2 ポアソンの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{1} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm ixt} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \quad (8.10)$$

## 8.7

## 母関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \zeta^n = e^{\frac{1}{2}x(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \quad (8.11)$$

## 8.8

## 漸化式

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \quad (8.12)$$

## 8.9

## ノイマン関数

## 8.9.1 定義

$$Y_\nu(x) := \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (8.13)$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \quad (8.14)$$

## 8.10

## ハンケル関数

## 8.10.1 定義

$$H_{\nu}^{(\pm)} := J_{\nu}(x) \pm iY_{\nu}(x) \quad (8.15)$$

## 8.11

## 変形ベッセル関数

## 8.11.1 定義

第一種変形ベッセル関数は次のように定義される。

$$I_{\nu}(x) = i^{-\nu} J_{\nu}(ix) \quad (8.16)$$

$$I_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (8.17)$$

## 8.11.2 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} u + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} u - (x^2 + \nu^2) = 0 \quad (8.18)$$

## 8.11.3 合流型超幾何関数表示

$$I_{\nu}(x) = \frac{e^{-x}}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2x\right) \quad (8.19)$$

## 8.11.4 母関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) \zeta^n = e^{\frac{x}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})} \quad (8.20)$$

## 8.11.5 漸化式

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x), \quad I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_{\nu}(x) \quad (8.21)$$

## 8.12

## 球ベッセル関数と球ノイマン関数

## 8.12.1 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}u + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)u = 0 \quad (8.22)$$

## 8.12.2 定義

$$\begin{cases} j_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ y_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \end{cases} \quad (8.23)$$

## 8.12.3 Rodrigues の公式

$$\begin{cases} j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x} \\ n_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\cos x}{x} \end{cases} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.24)$$

## 8.12.4 性質

$$\begin{cases} f_{l+1}(x) = \left(\frac{l}{x} - \frac{d}{dx}\right)f_l(x) \\ f_{l-1}(x) = \left(\frac{l+1}{x} - \frac{d}{dx}\right)f_l(x) \end{cases} \quad f_l(x) = j_l(x), y_l(x) \quad (8.25)$$

## 8.12.5 母関数

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{j_{l-1}(x)}{l!} \zeta^l = \frac{\cos \sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n_{l-1}(x)}{l!} \zeta^l = -\frac{\sin \sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \end{cases} \quad (8.26)$$

## 8.12.6 隣接 3 項間漸化式

$$f_{l+2}(x) - \frac{2l+3}{x}f_{l+1}(x) + f_l(x) = 0 \quad (f_l(x) = j_l(x), y_l(x)) \quad (8.27)$$

## 8.13

## 球ハンケル関数

## 8.13.1 定義

$$h_l^{(\pm)}(x) = n_l(x) \pm i j_l(x) \quad (8.28)$$

## 8.13.2 Rodrigues の公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (-1)^l x^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{e^{\pm ix}}{x} \quad (8.29)$$

## 8.13.3 展開公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (R_l(x) \pm i S_l(x)) \frac{e^{\pm ix}}{x} \quad (8.30)$$

ただし、

$$R_l(x) \pm i S_l(x) = \sum_{k=0}^l \frac{(\mp i)^{l-k}}{2^k k!} \frac{(l+k)!}{(l-k)!} x^{-k} \quad (8.31)$$

## 8.13.4 性質

$$\begin{cases} h_{l+1}^{(\pm)}(x) = \left( \frac{l}{x} - \frac{d}{dx} \right) h_l^{(\pm)}(x) \\ h_{l-1}^{(\pm)}(x) = \left( \frac{l+1}{x} + \frac{d}{dx} \right) h_l^{(\pm)}(x) \end{cases} \quad (8.32)$$

## 8.13.5 母関数

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{h_{l-1}^{(\pm)}(x)}{l!} \zeta^l = \frac{\pm i e^{\pm i \sqrt{x^2 - 2x\zeta}}}{x} \quad (8.33)$$

## 8.13.6 隣接 3 項間漸化式

$$h_{l+2}^{(\pm)}(x) - \frac{2l+3}{x}h_{l+1}^{(\pm)}(x) + h_l^{(\pm)}(x) = 0 \quad (8.34)$$