解析力学

介川 侑大

2020 年 12 月 27 日

目次

List of example

1　最小作用の原理

力学系は次のラグランジアン

$$L = L(q, \dot{q}, t) \tag{1.1}$$

によって与えられる作用、

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

を最小にするように運動する[*1]。S を最小にする関数 $q = q(t)$ の代わりに $q = q(t) + \delta q(t)$ を持ってくる。ただし、

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{1.3}$$

作用の変分は 0 になることから、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \tag{1.4}$$

(1.3) から定積分の項は 0 になり、次を得る。

オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{1.5}$$

以上の議論は一般座標 q を用いた一次元系を考えたが、一般に座標系が $\{q_k\}_{k=1}^{N}$ である N 次元系でも、q_k がそれぞれ独立であれば同じような計算により、N 個のオイラー・ラグランジュ方程式が得られる。(q_k がそれぞれ独立でない場合は、第 3 節で議論する。) オイラー・ラグランジュ方程式はニュートン力学における運動方程式である。そして、変分が 0 になるという基本原理からオイラー・ラグランジュ方程式を導く方法を変分法という。

[*1] 正確には作用 S は極値をとるだけでよい。[1]

例 1.1：等速直線運動でのラグラジアン

1.1　共変性

オイラー・ラグランジュ方程式は一般座標を用いた表式になっているが、どの座標系を選択しても方程式の形が不変である性質を持っている。このような性質を共変性という。この性質は作用がスカラー量であることから、座標変換しても作用の変分が 0 になることに変わりはないため、自然に導かれる。[*2]

2　ラグラジアンの任意性

ラグラジアンには次のような任意性がある。

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

実際、(1.3) から、

$$\begin{aligned}\delta S' &= \delta\int_{t_1}^{t_2} L'dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt + \delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}dt \\ &= \delta S + \delta\left[f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1)\right] = 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つので、オイラー・ラグランジュ方程式は不変である。

3　拘束条件とラグランジュの未定乗数法

ホロノーム系：拘束条件が一般座標 $\{q_k\}_{k=1}^{3N}$ による方程式で表される。

$$f_l(q_1,\ldots,q_{3N},t) = 0 \quad (l = 1,\ldots,L) \tag{3.1}$$

[*2] 相対性理論では光速度不変の原理から許される座標変換（時間軸を含める）はローレンツ群に限られる。この場合、変分法によって導かれる方程式はローレンツ不変性が要求される。解析力学と同様に相対性理論では、ローレンツ不変量である世界間隔を作用とすることでローレンツ不変な方程式を得ている。

この場合の自由度は 3N-L となる。ダランベールの原理は次のように書ける。

$$\sum_{k=1}^{3N}\left(F^k - m_k\frac{d^2q^k}{dt^2}\right)\delta q^k = 0 \tag{3.2}$$

拘束条件がある場合、δq^k は独立でなく、力 F の中には、拘束力 $F^{(c)k}$ が現れる。滑らかな拘束であれば拘束力は仕事をしないので、

$$\sum_{k=1}^{3N} F^{(c)k}\delta q^k = 0。 \tag{3.3}$$

拘束条件 (3.1) が解けたとして、新しい独立な座標系 $\{x^i\}_{i=1}^{3N-L}$ を用いる。

$$q^k = q^k(\{x_i\}) \qquad \delta q^k(\{x^i\}) = \sum_{i=1}^{3N-L}\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\delta x^i \tag{3.4}$$

すると、ダランベールの原理は、

$$\sum_{i=1}^{3N-L}\left\{\sum_{k=1}^{3N}\left(F^{(a)k} - m_k\frac{d^2q_k}{dt^2}\right)\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\delta x_i\right\} = 0 \tag{3.5}$$

となる。$F^{(a)k}$ が保存力であるとすると、

$$\sum_k F^{(a)k}\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \tag{3.6}$$

また、

$$\ddot{q}^k\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\right) - \dot{q}^k\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}(\dot{q}^{k2})\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\dot{q}^{k2}) \tag{3.7}$$

よって、

$$\sum_{i=1}^{3N-L}\left[-\frac{\partial U}{\partial x^i} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\sum_{k=1}^{3N}\frac{1}{2}m_k\dot{q}^{k2}\right]\delta x^i = 0 \tag{3.8}$$

ラグラジアンを、

$$L = \sum_{k=1}^{3N}\frac{1}{2}m_k\left(\frac{dq^k}{dt}\right)^2 - U \tag{3.9}$$

とすれば、

$$\sum_{i=1}^{3N-L}\left[-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}\right)L\right]\delta x^i = 0 \tag{3.10}$$

δx^i は独立なので、オイラー・ラグランジュ方程式を得る。

一方、拘束条件 (3.1) 式が解けない場合、ラグランジュの未定乗数法を用いる。拘束条件は微小変位後も成り立つので、

$$f_l(\{q^k + \delta q^k\}, t) - f_l(\{q^k\}, t) = \sum_{k=1}^{3N}\delta q_k\frac{\partial f_l}{\partial q^k} = 0 \tag{3.11}$$

(3.3) 式から、

$$\sum_{k=1}^{3N}\delta q_k F^{(c)k}-\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\Big(\sum_{k=1}^{3N}\delta q_k\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\Big)=\sum_{k=1}^{3N}\Big(F^{(c)k}-\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\Big)\delta q_k=0 \tag{3.12}$$

自由度は 3N-L であるので、$\delta q_k\,(k=L,\dots,3N)$ が独立であるとする。$k=1,\dots,L$ において、

$$F^{(c)k}=\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\quad(k=1,\dots,L) \tag{3.13}$$

となる適当な λ_l を選べば、

$$F^{(c)k}=\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\quad(k=1,\dots,3N) \tag{3.14}$$

よってラグラジアンを、

$$\tilde{L}(\{q^k\},\{\dot{q}^k\},\{\lambda_l\},t)=L(\{q^k\},\{\dot{q}^k\},t)+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l f^l(\{q^k\},t) \tag{3.15}$$

とすれば、

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}^k}-\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial q^k}=0 & \Longleftrightarrow\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^k}-\dfrac{\partial L}{\partial q^k}=\displaystyle\sum_{l=1}^{L}\lambda^l\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\lambda}^l}-\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial\lambda^l}=0 & \Longleftrightarrow\quad f_l(\{q^k\},t)=0\end{cases} \tag{3.16}$$

となり、3N+L 個の一般座標に対する $\tilde{L}$ のオイラー・ラグランジュ方程式が得られる。

例 3.1：動く斜面を転がる球体

4 ネーターの定理

次のような微小変換を考える。

$$\begin{cases}q^k(t) & \to q'^k(t')=q^k(t)+\delta q^k(\boldsymbol{q},t,\epsilon)\\ t & \to t'=t+\delta t(t,\epsilon)\end{cases} \tag{4.1}$$

この変換の前後での作用の変化を計算する。

$$\delta S \equiv S' - S = \int_{t_1'}^{t_2'} L\left(\boldsymbol{q}'(t'), \dot{\boldsymbol{q}}'(t'), t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t\right) dt \tag{4.2}$$

ここで、積分範囲の変化は小さいとして、$L' = L\left(\boldsymbol{q}'(t'), \dot{\boldsymbol{q}}'(t'), t'\right)$ を一次までテーラー展開し計算すると、

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(L' - L + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t\right) dt \\ &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\bar{\delta} q^k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\bar{\delta}\dot{q}^k(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\delta t)\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\bar{\delta} q^k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\bar{\delta} q^k + L\delta t\right)\right] dt\end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。ただし、

$$\bar{\delta} q^k(t) \equiv q'^k(t) - q^k(t), \quad \bar{\delta}\dot{q}^k(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{\delta} q^k(t) \tag{4.4}$$

$$\delta q^k = q'^k(t') - q^k(t) \simeq \bar{\delta} q^k(t) + \dot{q}^k(t)\delta t \tag{4.5}$$

$$\delta(\dot{q}^k(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}q'^k(t') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^k(t) \simeq \bar{\delta}\dot{q}^k(t) + \ddot{q}^k(t)\delta t \tag{4.6}$$

を用いた。積分の中の第一項はオイラー・ラグランジュ方程式の下では 0 になる。ここで、微小変換を独立な微小パラメータ ϵ^α で表す。

$$\begin{cases}\delta q^k & = \epsilon^\alpha \chi_\alpha^k(\boldsymbol{q}, t) \\ \delta t & = \epsilon^\alpha \tau_\alpha(t)\end{cases} \tag{4.7}$$

この変換で作用が不変になるのは、

$$S' - S = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon^\alpha W_\alpha(\boldsymbol{q}, t) dt = -\epsilon^\alpha \left[W_\alpha(\boldsymbol{q}(t_2), t_2) - W_\alpha(\boldsymbol{q}(t_1), t_1)\right] \tag{4.8}$$

となる時である。よって、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\bar{\delta} q^k + L\delta t\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon^\alpha W_\alpha(\boldsymbol{q}, t) \tag{4.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(\delta q^k - \dot{q}^k(t)\delta t) + L\delta t + \epsilon^\alpha W_\alpha(\boldsymbol{q}, t)\right) = 0 \tag{4.10}$$

$$\therefore Q_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\chi_\alpha^k - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - L\right)\tau_\alpha + W_\alpha = (\mathrm{const}) \tag{4.11}$$

4.1　エネルギー保存則

4.2　運動量保存則

4.3　角運動量保存則

例 4.1：ガリレイ変換

5　微小振動

5.1　一次元系

5.2　多次元系

例 5.1：二重振り子

6　ハミルトン形式

一般運動量を次のように定義する。

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \tag{6.1}$$

これを用いてハミルトニアンは

$$H(\{q^k\},\{p_k\},t) \equiv \sum_k \dot{q}^k p_k - L \tag{6.2}$$

と定義する。これはルジャンドル変換と呼ばれるもので、変数 $q\dot{q}$ を p に変える変換である。q,p を独立変数として変分をとると、

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{p}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\delta\boldsymbol{q} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\delta\boldsymbol{p}\right)dt \\ &= \Big[\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{q}\Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{p} - \left(\dot{\boldsymbol{p}} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{q}\right\}dt = 0\end{aligned} \tag{6.3}$$

となるので、次の正準方程式、

$$\frac{\partial}{\partial q^k}H = -\dot{p}_k、\quad \frac{\partial}{\partial p_k}H = \dot{q}^k \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^k}H = -\dot{p}_k、\quad \frac{\partial}{\partial p_k}H = \dot{q}^k \tag{6.5}$$

が得られる。

7 正準変換

次のような変換を正準変換という：

$$\begin{cases} q^k \\ p_k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q^k = & Q^k(q,p,t) \\ P_k = & P_k(q,p,t) \end{cases}。 \tag{7.1}$$

ただし、新しいハミルトニアン $\tilde{H} = \tilde{H}(P,Q)$ に対して、正準方程式：

$$\frac{\partial}{\partial Q^k}\tilde{H} = -\dot{P}_k、\quad \frac{\partial}{\partial P_k}\tilde{H} = \dot{Q}^k \tag{7.2}$$

が成り立つ。(7.2) が成り立つには、新しいハミルトニアンに対して、最小作用の原理が成り立つ必要がある。つまり、

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_k\dot{q}^k - H(p_k,q^k,t)\right)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(P_k\dot{Q}^k - \tilde{H}(P_k,Q^k,t)\right)dt = 0 \tag{7.3}$$

が成り立つ。よって、ラグラジアンの任意性から、

$$p_k \dot{q}^k - H = P_k \dot{Q}^k - \tilde{H} + \frac{\mathrm{d}W(q,Q,t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.4}$$

$$\therefore dW(q,Q,t) = p_k dq^k - P_k dQ^k + \left(\tilde{H} - H\right) dt \tag{7.5}$$

関数 W を母関数という。(7.5) から、

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q^k}, \quad P_k = -\frac{\partial W}{\partial Q^k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{7.6}$$

例 7.1：調和振動子

8 ポアソン括弧

力学変数 $F = F(q^k, p_k, t)$ の時間 t に対する全微分を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} \right) \end{aligned} \tag{8.1}$$

ここで、力学変数 $f(q^k, p_k, t), g(q^k, p_k, t)$ に対して、

$$\{f, g\}_{q,p} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k} \right) \tag{8.2}$$

とする。これをポアソン括弧という。

9 ハミルトン・ヤコビ方程式

正準変換によって、$\tilde{H} = 0$ となるような母関数を考える。すなわち、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H \tag{9.1}$$

この時、正準方程式より、

$$\frac{\mathrm{d}Q^k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}P_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^k} = 0 \tag{9.2}$$

$$\therefore Q^k = \beta^k, \quad P_k = \alpha_k \quad (const) \tag{9.3}$$

ここで、$W = S(q, P, t)$ であるとすると、

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k}, \quad Q^k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \left(\beta^k = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) \tag{9.4}$$

よって、ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} S(q, \alpha, t) + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \tag{9.5}$$

を得る。また、

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^k}\dot{q}^k = -H + p_k \dot{q}^k = L \tag{9.6}$$

であるので、S は作用そのものである。[*3]

9.1 変数分離法

ハミルトニアンが時間に陽に依存しない場合を考える。この時、ハミルトン・ヤコビ方程式は、

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial W_2}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = 0 \tag{9.7}$$

と書くことができる。ここで W_2 を、$W_2 = S(\boldsymbol{q}) + T(t)$ と変数分離すると、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \tag{9.8}$$

$$\therefore T(t) = -Et + C \quad (H = E) \tag{9.9}$$

例 9.1：二次元系 + 中心力

参考文献

[1] ランダウ. 力学. Number 1 in 理論物理学教程. 東京出版社, 2000.

[*3] S をハミルトンの主関数ともいう。