解析力学

介川 侑大

2020 年 12 月 12 日

目次

1 最小作用の原理

力学系は次のラグラジアン

$$L = L(q, \dot{q}, t) \tag{1.1}$$

によって与えられる作用、

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, \mathrm{d}t \tag{1.2}$$

を最小にするように運動する[*1]。S を最小にする関数 $q = q(t)$ の代わりに $q = q(t) + \delta q(t)$ を持ってくる。ただし、

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{1.3}$$

[*1] 正確には作用 S は極値をとるだけでよい。[1]

作用の変分は 0 になることから、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \tag{1.4}$$

(1.3) から~~定積分の項は 0 になり、~~~~δq は独立であるから、~~次を得る。

オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{1.5}$$

2　ラグラジアンの任意性

ラグラジアンには次のような任意性がある。

$$L' = L + \frac{df(q,t)}{dt} \tag{2.1}$$

実際、(1.3) から、

$$\begin{aligned} \delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q,t)}{dt} dt \\ &= \delta S + \delta \left[f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1) \right] = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つので、オイラー・ラグランジュ方程式は不変である。

3　共変性

4　拘束条件とラグランジュの未定乗数法

ホロノーム系：拘束条件が一般座標 $\{q_k\}_{k=1}^{3N}$ による方程式で表される。

$$f_l(q_1, \ldots, q_{3N}, t) = 0 \quad (l = 1, \ldots, L) \tag{4.1}$$

自由度は 3N-L。ダランベールの原理は次のように書ける。

$$\sum_{k=1}^{3N}\left(F^k - m_k\frac{d^2q^k}{dt^2}\right)\delta q^k = 0 \tag{4.2}$$

拘束条件がある場合、δq^k は独立でなく、力 F は、拘束力 $F^{(c)k}$ が現れる。滑らかな拘束であれば拘束力は仕事をしないので、

$$\sum_{k=1}^{3N} F^{(c)k}\delta q^k = 0。 \tag{4.3}$$

拘束条件 (4.1) 式が解けたとして、新しい独立な座標系 $\{x^i\}_{i=1}^{3N-L}$ を用いる。

$$q^k = q^k(\{x_i\}) \qquad \delta q^k(\{x^i\}) = \sum_{i=1}^{3N-L}\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\delta x^i \tag{4.4}$$

すると、ダランベールの原理は、

$$\sum_{i=1}^{3N-L}\left\{\sum_{k=1}^{3N}\left(F^{(a)k} - m_k\frac{d^2q_k}{dt^2}\right)\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\delta x_i\right\} = 0 \tag{4.5}$$

となる。$F^{(a)k}$ が保存力であるとすると、

$$\sum_k F^{(a)k}\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = -\sum_k\frac{\partial U}{\partial q_k}\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \tag{4.6}$$

また、

$$\ddot{q}^k\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\Big(\dot{q}\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\Big) - \dot{q}^k\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}(\dot{q}^{k2})\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\dot{q}^{k2}) \tag{4.7}$$

よって、

$$\sum_{i=1}^{3N-L}\left[-\frac{\partial U}{\partial x^i} - \Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}\Big)\sum_{k=1}^{3N}\frac{1}{2}m_k\dot{q}^{k2}\right]\delta x^i = 0 \tag{4.8}$$

ラグラジアンを、

$$L = \sum_{k=1}^{3N}\frac{1}{2}m_k\Big(\frac{dq^k}{dt}\Big)^2 - U \tag{4.9}$$

とすれば、

$$\sum_{i=1}^{3N-L}\left[-\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}\Big)L\right]\delta x^i = 0 \tag{4.10}$$

δx^i は独立なので、オイラー・ラグランジュ方程式を得る。

　一方、拘束条件 (4.1) 式が解けない場合、ラグランジュの未定乗数法を用いる。拘束条件は微小変位後も成り立つので、

$$f_l(\{q^k + \delta q^k\}, t) - f_l(\{q^k\}, t) = \sum_{k=1}^{3N}\delta q_k\frac{\partial f_l}{\partial q^k} = 0 \tag{4.11}$$

(4.3) 式から、

$$\sum_{k=1}^{3N}\delta q_k F^{(c)k} - \sum_{l=1}^{L}\lambda_l\Big(\sum_{k=1}^{3N}\delta q_k\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\Big) = \sum_{k=1}^{3N}\Big(F^{(c)k} - \sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\Big)\delta q_k = 0 \tag{4.12}$$

自由度は 3N-L であるので、$\delta q_k\,(k = L,\ldots,3N)$ が独立であるとする。$k = 1,\ldots,L$ において、

$$F^{(c)k} = \sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\quad(k=1,\ldots,L) \tag{4.13}$$

となる適当な λ_l を選べば、

$$F^{(c)k} = \sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial q^k}\quad(k=1,\ldots,3N) \tag{4.14}$$

よってラグラジアンを、

$$\tilde{L}(\{q^k\},\{\dot{q}^k\},\{\lambda_l\},t) = L(\{q^k\},\{\dot{q}^k\},t) + \sum_{l=1}^{L}\lambda_l f^l(\{q^k\},t) \tag{4.15}$$

とすれば、

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}^k} - \dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial q^k} = 0 \iff \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^k} - \dfrac{\partial L}{\partial q^k} = \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\lambda^l\dfrac{\partial f_l}{\partial q^k}\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\lambda}^l} - \dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial\lambda^l} = 0 \iff f_l(\{q^k\},t) = 0\end{cases} \tag{4.16}$$

となり、3N+L 個の一般座標に対する $\tilde{L}$ のオイラー・ラグランジュ方程式が得られる。

5 ネーターの定理

6 微小振動

7 ハミルトン形式

一般運動量を次のように定義する。

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \tag{7.1}$$

これを用いてハミルトニアンは

$$H(\{q^k\},\{p_k\},t) \equiv \sum_k \dot{q}^k p_k - L \tag{7.2}$$

と定義する。変分原理から、

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\delta \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{p}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\delta\boldsymbol{q} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\delta\boldsymbol{p}\Big)dt \\ &= \Big[\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{q}\Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\Big(\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\Big)\cdot\delta\boldsymbol{p} - \Big(\dot{\boldsymbol{p}} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\Big)\cdot\delta\boldsymbol{q}\right\}dt = 0\end{aligned} \tag{7.3}$$

となるので、正準方程式、

$$\frac{\partial}{\partial q^k}H = -\dot{p}_k、\quad \frac{\partial}{\partial p_k}H = \dot{q}^k \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^k}H = -\dot{p}_k、\quad \frac{\partial}{\partial p_k}H = \dot{q}^k \tag{7.5}$$

が得られる。

8　正準変換

次のような変換を正準変換という：

$$\begin{cases} q^k \\ p_k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q^k = & Q^k(q,p,t) \\ P_k = & P_k(q,p,t) \end{cases}。 \tag{8.1}$$

ただし、新しいハミルトニアン $\tilde{H} = \tilde{H}(P,Q)$ に対して、正準方程式：

$$\frac{\partial}{\partial Q^k}\tilde{H} = -\dot{P}_k、\quad \frac{\partial}{\partial P_k}\tilde{H} = \dot{Q}^k \tag{8.2}$$

が成り立つ。(8.2) が成り立つには、新しいハミルトニアンに対して、最小作用の原理が成り立つ必要がある。つまり、

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_k\dot{q}^k - H(p_k,q^k,t)\right)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(P_k\dot{Q}^k - \tilde{H}(P_k,Q^k,t)\Big)dt = 0 \tag{8.3}$$

が成り立つ。よって、ラグラジアンの任意性から、

$$p_k\dot{q}^k - H = P_k\dot{Q}^k - \tilde{H} + \frac{dW(q,Q,t)}{dt} \tag{8.4}$$

$$\therefore dW(q,Q,t) = p_k dq^k - P_k dQ^k + \Big(\tilde{H} - H\Big)dt \tag{8.5}$$

関数 W を母関数という。(8.5) から、

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q^k}, \quad P_k = -\frac{\partial W}{\partial Q^k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{8.6}$$

9　ポアソン括弧

力学変数 $F = F(q^k, p_k, t)$ の時間 t に対する全微分を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} \right) \end{aligned} \tag{9.1}$$

ここで、力学変数 $f(q^k, p_k, t), g(q^k, p_k, t)$ に対して、

$$\{f, g\}_{q,p} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k} \right) \tag{9.2}$$

とする。これをポアソン括弧という。

$$\langle a, b \rangle \tag{9.3}$$

$$\langle \phi | \frac{\hat{L}}{\hat{r}} | \phi \rangle \tag{9.4}$$

10　ハミルトン・ヤコビ方程式

正準変換によって、$\tilde{H} = 0$ となるような母関数を考える。すなわち、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H \tag{10.1}$$

この時、正準方程式より、

$$\frac{dQ^k}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^k} = 0 \tag{10.2}$$

$$\therefore Q^k = \beta^k, \quad P_k = \alpha_k \quad (const) \tag{10.3}$$

ここで、$W = S(q, P, t)$ であるとすると、

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k}, \quad Q^k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \left(\beta^k = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) \tag{10.4}$$

よって、ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} S(q, \alpha, t) + H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) = 0 \tag{10.5}$$

を得る。また、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^k} \dot{q}^k = -H + p_k \dot{q}^k = L \tag{10.6}$$

であるので、S は作用そのものである。

参考文献

[1] ランダウ. 力学. 理論物理学教程, No. 1. 東京出版社, 2000.