特殊関数

介川侑大*1

2020 年 12 月 22 日

*1 東京工業大学物理学系 3 年

目次

第 1 章

ガンマ関数

目次へ戻る

目次

1.1 定義

章の最初に戻る

$$\Gamma(x) \coloneqq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{t}^{x-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{1.1}$$

1.2 漸化式

章の最初に戻る

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (x > 0) \tag{1.2}$$

特に、

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{1.3}$$

から、

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{1.4}$$

1.3 Gauss の公式

章の最初に戻る

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x-1}}{(x)_n} \tag{1.5}$$

1.4 Weiersrtrass の公式

章の最初に戻る

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}} \tag{1.6}$$

オイラー定数 γ は次のように定義される。

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right) \tag{1.7}$$

1.5 ディガンマ関数

章の最初に戻る

$$\psi(x):=\frac{d}{dx}\mathrm{In}\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k-1}-\frac{1}{k}\right) \tag{1.8}$$

1.6 Euler の反転公式

章の最初に戻る

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x} \tag{1.9}$$

1.7 Hankel の積分表示

章の最初に戻る

$$\Gamma(x)=-\frac{1}{2i\sin\pi x}\int_c(-t)^{x-1}e^{-t}dt \tag{1.10}$$

1.8 Stirling の公式

章の最初に戻る

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\, e^{-x} x^{x} \tag{1.11}$$

第 2 章

ベータ関数

目次へ戻る

目次

2.1 定義

章の最初に戻る

$$B(x,y) \coloneqq \int_0^1 \mathrm{t}^{x-1}(1-\mathrm{t})^{y-1}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

2.2 積分表示

章の最初に戻る

$$B(x,y) = \int_0 \infty \frac{s^{x-1}}{(1+x)^{x+y}} ds \tag{2.2}$$

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \mathrm{d}\theta \tag{2.3}$$

2.3 ガンマ関数表示

章の最初に戻る

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.4}$$

第 3 章

超幾何関数

目次へ戻る

目次

3.1 定義

章の最初に戻る

$$
{}_p\mathrm{F}_q\left(\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ b_1 & \cdots & b_q \end{matrix}; x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{3.1}
$$

3.2 超幾何方程式

章の最初に戻る

$$
x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}u + (c-(a+b+1)x)\frac{d}{dx}u - abu = 0 \tag{3.2}
$$

解は、

$$
u = {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{3.3}
$$

3.3 積分表示

章の最初に戻る

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt \tag{3.4} $$

3.4 合流型超幾何方程式

章の最初に戻る

$$ x\frac{d^2}{dx^2}u + (c-x)\frac{d}{dx}u - au = 0 \tag{3.5} $$

解は、

$$ u = {}_1F_1(a,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{3.6} $$

3.5 積分表示

章の最初に戻る

$$ {}_1F_1(a;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}dt \tag{3.7} $$

第 4 章

Legendre 関数

目次へ戻る

目次

4.1 Legendre の微分方程式

章の最初に戻る

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}u\} + \nu(\nu+1)u = 0 \tag{4.1}$$

4.2 定義

章の最初に戻る

$\nu = n (\in \mathbb{N})$ の時、

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k} \tag{4.2}$$

4.3 超幾何関数表示

章の最初に戻る

$$P_n(x) = {}_2F_1(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2}) \tag{4.3}$$

4.4 Rodrigues の公式

章の最初に戻る

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{4.4}$$

4.5 直行性

章の最初に戻る

$$(P_n(x), P_m(x)) := \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} \tag{4.5}$$

4.6 シュレーフリの積分表示

章の最初に戻る

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \tag{4.6}$$

4.7 母関数

章の最初に戻る

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \zeta^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}} \tag{4.7}$$

4.8　隣接３項間漸化式

章の最初に戻る

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \tag{4.8}$$

4.9　Legendre 陪多項式

章の最初に戻る

4.9.1　微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}u\}-\frac{k^2}{1-x^2}u+n(n+1)u=0 \tag{4.9}$$

4.9.2　定義

$$P_n^k(x) \coloneqq (-1)^k(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k}{dx^k}P_n(x) \tag{4.10}$$

4.9.3　直行性

$$\int_{-1}^{1}P_n^k(x)P_m^k(x)dx=\frac{2(n+k)!}{(2n+1)!(n-k)!}\delta_{n,m} \tag{4.11}$$

第 5 章

Tchebysheff 多項式

目次へ戻る

目次

5.1 微分方程式

章の最初に戻る

$$\frac{d}{dx}\{\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}u\} + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}u = 0 \tag{5.1}$$

5.2 超幾何関数表示

章の最初に戻る

$$T_n(x) = \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}{}_2F_1(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \tag{5.2}$$

5.3 Rodrigues の公式

章の最初に戻る

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

5.4 直行性

章の最初に戻る

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{n=m=0} \\ \frac{\pi}{2}\delta_{n,m} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.4}$$

5.5 母関数

章の最初に戻る

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\zeta^n = \frac{1-x\zeta}{1-2x\zeta+\zeta^2} \tag{5.5}$$

5.6 隣接３項間漸化式

章の最初に戻る

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \tag{5.6}$$

5.7 三角関数関係

章の最初に戻る

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \tag{5.7}$$

第 6 章

Hermite 関数

目次へ戻る

目次

6.1 Hermite の微分方程式

章の最初に戻る

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x^2}\frac{d}{dx}u\} + 2ne^{-x^2}u = 0 \tag{6.1}$$

6.2 定義

章の最初に戻る

$$H_n(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{6.2}$$

6.3　合流型超幾何関数表示

章の最初に戻る

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} {}_1F_1(-n, \frac{1}{2}; x^2) \tag{6.3}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x \, {}_1F_1(-n, \frac{3}{2}; x^2) \tag{6.4}$$

6.4　Rodrigues の公式

章の最初に戻る

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{6.5}$$

6.5　直行性

章の最初に戻る

$$(H_n(x), H_m(x)) := \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \delta_{n,m} \tag{6.6}$$

6.6　積分表示

章の最初に戻る

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{2xz-z^2}}{z^{n+1}} dz \tag{6.7}$$

6.7　母関数

章の最初に戻る

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \zeta^n = e^{-\zeta^2 + 2x\zeta} \tag{6.8}$$

6.8　隣接３項間漸化式

章の最初に戻る

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \tag{6.9}$$

第 7 章

Laguerre 関数

目次へ戻る

目次

7.1 Laguerre の微分方程式

章の最初に戻る

$$\frac{d}{dx}\{xe^{-x}\frac{d}{dx}u\} + ne^{-x}u = 0 \tag{7.1}$$

7.2 定義

章の最初に戻る

$$L_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} x^k \tag{7.2}$$

7.3 合流型超幾何関数表示

章の最初に戻る

$$L_n(x) = n!{}_1F_1(-n, 1; x) \tag{7.3}$$

7.4 Rodrigues の公式

章の最初に戻る

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \tag{7.4}$$

7.5 直行性

章の最初に戻る

$$(L_n(x), L_m(x)) \coloneqq \int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = (n!)^2\delta_{n,m} \tag{7.5}$$

7.6 積分表示

章の最初に戻る

$$L_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}dz \tag{7.6}$$

7.7 母関数

章の最初に戻る

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}\zeta^n = \frac{e^{\frac{-x\zeta}{1-\zeta}}}{1-\zeta} \tag{7.7}$$

7.8　隣接３項間漸化式

章の最初に戻る

$$L_{n+1}(x) + (x - (2n+1))L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \tag{7.8}$$

7.9　Laguerre 陪多項式

章の最初に戻る

7.9.1　微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{x^{k+1}e^{-x}\frac{d}{dx}u\} + nx^k e^{-x}\frac{d}{dx}u = 0 \tag{7.9}$$

7.9.2　定義

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{((n+k)!)^2}{(n-l)!(l+k)!(l)!} x^l \tag{7.10}$$

7.9.3　合流型超幾何関数表示

$$L_n^k(x) = \frac{((n+k)!)^2}{n!k!} {}_1F_1(-n, k+1; x) \tag{7.11}$$

7.9.4　Rodriguess の公式

$$L_n^k(x) = e^x x^{-k} \frac{(n+k)!}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{(-x)} x^{n+k}) \tag{7.12}$$

7.9.5　直行性

$$(L_n^k(x), L_m^k(x)) := \int_0^\infty L_n^k(x) L_m^k(x) e^{-x} x^k dx = \frac{((n+k)!)^3}{n!} \delta_{n,m} \tag{7.13}$$

7.9.6　母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) \frac{\zeta^n}{(n+k)!} = \frac{e^{\frac{-x\zeta}{(1-\zeta)}}}{(1-\zeta)^{k+1}} \tag{7.14}$$

7.9.7　隣接３項間漸化式

$$\frac{n+1}{n+1+k}L_{n+1}^{k}(x)+(x-(2n+k+1))L_{n}^{k}(x)+(n+k)^{2}L_{n-1}^{k}(x) \tag{7.15}$$

第 8 章

Bessel 関数

目次へ戻る

目次

Contents

8.1 Bessel の微分方程式

章の最初に戻る

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)-\frac{\nu^2}{x}\right\}u+xu=0 \tag{8.1}$$

または、

$$\frac{d^2}{dx^2}u+\frac{1}{x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u=0 \tag{8.2}$$

8.2 定義

章の最初に戻る

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{8.3}$$

8.3 合流型超幾何関数表示

章の最初に戻る

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_1F_1(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix) \tag{8.4}$$

8.4 直行性

章の最初に戻る

$$\int_0^1 J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_l x) x dx = \frac{1}{2}\{J_{\nu+1}(\lambda_k)\}^2 \delta_{k,l} \tag{8.5}$$

8.5 性質

章の最初に戻る

$$\frac{d}{dx}\{x^\nu J_\nu(x)\} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}\{x^{-\nu} J_\nu(x)\} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{8.6}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{8.7}$$

8.6 積分表示

章の最初に戻る

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin\phi - n\phi)} d\phi \tag{8.8}$$

8.6.1 シュレーフリの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})} z^{-\nu-1} \tag{8.9}$$

8.6.2 ポアソンの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{1} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{\pm ixt}(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt \tag{8.10}$$

8.7　母関数

章の最初に戻る

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\zeta^n = e^{\frac{1}{2}x(\zeta-\frac{1}{\zeta})} \tag{8.11}$$

8.8　漸化式

章の最初に戻る

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \qquad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \tag{8.12}$$

8.9　ノイマン関数

章の最初に戻る

8.9.1　定義

$$Y_\nu(x) := \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu x)} \tag{8.13}$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} \tag{8.14}$$

8.10　ハンケル関数

章の最初に戻る

8.10.1　定義

$$H_\nu^{(\pm)} := J_\nu(x) \pm iY_\nu(x) \tag{8.15}$$

8.11　変形ベッセル関数

章の最初に戻る

8.11.1　定義

第一種変形ベッセル関数は次のように定義される。

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) \tag{8.16}$$

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{8.17}$$

8.11.2 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}u - (x^2 + \nu^2) = 0 \tag{8.18}$$

8.11.3 合流型超幾何関数表示

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_1F_1(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2x) \tag{8.19}$$

8.11.4 母関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\zeta^n = e^{\frac{x}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})} \tag{8.20}$$

8.11.5 漸化式

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}I_\nu(x), \quad I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x) \tag{8.21}$$

8.12 球ベッセル関数と球ノイマン関数

章の最初に戻る

8.12.1 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}u + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)u = 0 \tag{8.22}$$

8.12.2 定義

$$\begin{cases} j_l(x) := & \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ y_l(x) := & \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \end{cases} \tag{8.23}$$

8.12.3 Rodrigues の公式

$$\begin{cases} j_l(x) = & (-1)^l x^l \left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^l \dfrac{\sin x}{x} \\ n_l(x) = & (-1)^l x^l \left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^l \dfrac{\cos x}{x} \end{cases} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8.24}$$

8.12.4　直行性

8.12.5　性質

$$\begin{cases} f_{l+1}(x) = & \left(\dfrac{l}{x} - \dfrac{d}{dx}\right) f_l(x) \\ f_{l-1}(x) = & \left(\dfrac{l+1}{x} - \dfrac{d}{dx}\right) f_l(x) \end{cases} \quad f_l(x) = j_l(x), y_l(x) \tag{8.25}$$

8.12.6　母関数

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{j_{l-1}(x)}{l!} \zeta^l = & \dfrac{\cos\sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{n_{l-1}(x)}{l!} \zeta^l = & -\dfrac{\sin\sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \end{cases} \tag{8.26}$$

8.12.7　隣接３項間漸化式

$$f_{l+2}(x) - \frac{2l+3}{x} f_{l+1}(x) + f_l(x) = 0 \quad (f_l(x) = j_l(x), y_l(x)) \tag{8.27}$$

8.13　球ハンケル関数

章の最初に戻る

8.13.1　定義

$$h_l^{(\pm)}(x) = n_l(x) \pm i j_l(x) \tag{8.28}$$

8.13.2　Rodrigues の公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \frac{e^{\pm ix}}{x} \tag{8.29}$$

8.13.3　展開公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (R_l(x) \pm i S_l(x)) \frac{e^{\pm ix}}{x} \tag{8.30}$$

ただし、

$$R_l(x) \pm i S_l(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(\mp i)^{l-k}}{2^k k!} \frac{(l+k)!}{(l-k)!} x^{-k} \tag{8.31}$$

8.13.4　性質

$$
\begin{cases}
h_{l+1}^{(\pm)}(x) = & \left(\dfrac{l}{x} - \dfrac{d}{dx}\right) h_l^{(\pm)}(x) \\
h_{l-1}^{(\pm)}(x) = & \left(\dfrac{l+1}{x} + \dfrac{d}{dx}\right) h_l^{(\pm)}(x)
\end{cases}
\tag{8.32}
$$

8.13.5　母関数

$$
\sum_{l=0}^{\infty} \frac{h_{l-1}^{(\pm)}(x)}{l!} \zeta^l = \frac{\pm i e^{\pm i \sqrt{x^2 - 2x\zeta}}}{x}
\tag{8.33}
$$

8.13.6　隣接３項間漸化式

$$
h_{l+2}^{(\pm)}(x) - \frac{2l+3}{x} h_{l+1}^{(\pm)}(x) + h_l^{(\pm)}(x) = 0
\tag{8.34}
$$