

特殊関数

介川侑大^{*1}

2020 年 12 月 22 日

^{*1} 東京工業大学物理学系 3 年

目次

第 1 章	ガンマ関数	1
第 2 章	ベータ関数	4
第 3 章	超幾何関数	6
第 4 章	Legendre 関数	8
第 5 章	Tchebysheff 多項式	11
第 6 章	Hermite 関数	13
第 7 章	Laguerre 関数	16
第 8 章	Bessel 関数	20



第 1 章

ガンマ関数

[目次へ戻る](#)

目次

1.1	定義	1
1.2	漸化式	1
1.3	Gauss の公式	2
1.4	Weiersrtrass の公式	2
1.5	ディガンマ関数	2
1.6	Euler の反転公式	2
1.7	Hankel の積分表示	3
1.8	Stirling の公式	3



1.1 定義

[章の最初に戻る](#)

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0) \quad (1.1)$$



1.2 漸化式

[章の最初に戻る](#)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0) \quad (1.2)$$

特に、

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.3)$$

から、

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (1.4)$$



1.3 Gauss の公式

[章の最初に戻る](#)

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} \quad (1.5)$$



1.4 Weiersrtrass の公式

[章の最初に戻る](#)

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \quad (1.6)$$

オイラー定数 γ は次のように定義される。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \quad (1.7)$$



1.5 ディガンマ関数

[章の最初に戻る](#)

$$\psi(x) := \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad (1.8)$$



1.6 Euler の反転公式

[章の最初に戻る](#)

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (1.9)$$



1.7 Hankel の積分表示

[章の最初に戻る](#)

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2i \sin \pi x} \int_c (-t)^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.10)$$





1.8 Stirling の公式

[章の最初に戻る](#)

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \quad (1.11)$$



第 2 章

ベータ関数

[目次へ戻る](#)

目次

2.1	定義	4
2.2	積分表示	4
2.3	ガンマ関数表示	5



2.1 定義

[章の最初に戻る](#)

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2.1)$$



2.2 積分表示

[章の最初に戻る](#)

$$B(x, y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds \quad (2.2)$$

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \quad (2.3)$$



2.3 ガンマ関数表示

[章の最初に戻る](#)

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.4)$$

第 3 章

超幾何関数

[目次へ戻る](#)

目次

3.1	定義	6
3.2	超幾何方程式	6
3.3	積分表示	7
3.4	合流型超幾何方程式	7
3.5	積分表示	7



3.1 定義

[章の最初に戻る](#)

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ b_1 & \cdots & b_q \end{matrix}; x \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (3.1)$$



3.2 超幾何方程式

[章の最初に戻る](#)

$$x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} u + (c - (a+b+1)x) \frac{d}{dx} u - abu = 0 \quad (3.2)$$

解は、

$$u = {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (3.3)$$



3.3 積分表示

[章の最初に戻る](#)

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt \quad (3.4)$$



3.4 合流型超幾何方程式

[章の最初に戻る](#)

$$x \frac{d^2}{dx^2} u + (c-x) \frac{d}{dx} u - au = 0 \quad (3.5)$$

解は、

$$u = {}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (3.6)$$



3.5 積分表示

[章の最初に戻る](#)

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{xt} dt \quad (3.7)$$



第 4 章

Legendre 関数

[目次へ戻る](#)

目次

4.1	Legendre の微分方程式	8
4.2	定義	9
4.3	超幾何関数表示	9
4.4	Rodrigues の公式	9
4.5	直行性	9
4.6	シュレーフリの積分表示	9
4.7	母関数	9
4.8	隣接 3 項間漸化式	10
4.9	Legendre 陪多項式	10
4.9.1	微分方程式	10
4.9.2	定義	10
4.9.3	直行性	10



4.1 Legendre の微分方程式

[章の最初に戻る](#)

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}u\} + \nu(\nu+1)u = 0 \quad (4.1)$$



4.2 定義

[章の最初に戻る](#)

$\nu = n (\in \mathbb{N})$ の時、

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k} \quad (4.2)$$



4.3 超幾何関数表示

[章の最初に戻る](#)

$$P_n(x) = {}_2F_1(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2}) \quad (4.3)$$



4.4 Rodrigues の公式

[章の最初に戻る](#)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (4.4)$$



4.5 直行性

[章の最初に戻る](#)

$$(P_n(x), P_m(x)) := \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} \quad (4.5)$$



4.6 シュレーフリの積分表示

[章の最初に戻る](#)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz \quad (4.6)$$



4.7 母関数

[章の最初に戻る](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \zeta^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}} \quad (4.7)$$





4.8 隣接3項間漸化式

[章の最初に戻る](#)

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (4.8)$$



4.9 Legendre 陪多項式

[章の最初に戻る](#)

4.9.1 微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} u \right\} - \frac{k^2}{1-x^2} u + n(n+1)u = 0 \quad (4.9)$$

4.9.2 定義

$$P_n^k(x) := (-1)^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \quad (4.10)$$

4.9.3 直行性

$$\int_{-1}^1 P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \frac{2(n+k)!}{(2n+1)!(n-k)!} \delta_{n,m} \quad (4.11)$$



第 5 章

Tchebysheff 多項式

[目次へ戻る](#)

目次

5.1	微分方程式	11
5.2	超幾何関数表示	11
5.3	Rodrigues の公式	12
5.4	直行性	12
5.5	母関数	12
5.6	隣接 3 項間漸化式	12
5.7	三角関数関係	12



5.1 微分方程式

[章の最初に戻る](#)

$$\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}u\right\} + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}u = 0 \quad (5.1)$$



5.2 超幾何関数表示

[章の最初に戻る](#)

$$T_n(x) = \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} {}_2F_1(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}) \quad (5.2)$$



5.3 Rodrigues の公式

[章の最初に戻る](#)

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$



5.4 直行性

[章の最初に戻る](#)

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & n=m=0 \\ \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.4)$$



5.5 母関数

[章の最初に戻る](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \zeta^n = \frac{1-x\zeta}{1-2x\zeta+\zeta^2} \quad (5.5)$$



5.6 隣接 3 項間漸化式

[章の最初に戻る](#)

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (5.6)$$



5.7 三角関数関係

[章の最初に戻る](#)

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (5.7)$$



第 6 章

Hermite 関数

[目次へ戻る](#)

目次

6.1	Hermite の微分方程式	13
6.2	定義	14
6.3	合流型超幾何関数表示	14
6.4	Rodrigues の公式	14
6.5	直行性	14
6.6	積分表示	14
6.7	母関数	14
6.8	隣接 3 項間漸化式	15



6.1 Hermite の微分方程式

[章の最初に戻る](#)

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x^2} \frac{d}{dx}u\} + 2ne^{-x^2}u = 0 \quad (6.1)$$



6.2 定義

[章の最初に戻る](#)

$$H_n(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (6.2)$$



6.3 合流型超幾何関数表示

[章の最初に戻る](#)

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}; x^2\right) \quad (6.3)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}; x^2\right) \quad (6.4)$$



6.4 Rodrigues の公式

[章の最初に戻る](#)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (6.5)$$



6.5 直行性

[章の最初に戻る](#)

$$(H_n(x), H_m(x)) := \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \delta_{n,m} \quad (6.6)$$



6.6 積分表示

[章の最初に戻る](#)

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{2xz-z^2}}{z^{n+1}} dz \quad (6.7)$$



6.7 母関数

[章の最初に戻る](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \zeta^n = e^{-\zeta^2 + 2x\zeta} \quad (6.8)$$



6.8 隣接 3 項間漸化式

[章の最初に戻る](#)

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (6.9)$$



第 7 章

Laguerre 関数

[目次へ戻る](#)

目次

7.1	Laguerre の微分方程式	17
7.2	定義	17
7.3	合流型超幾何関数表示	17
7.4	Rodrigues の公式	17
7.5	直行性	17
7.6	積分表示	17
7.7	母関数	18
7.8	隣接 3 項間漸化式	18
7.9	Laguerre 陪多項式	18
7.9.1	微分方程式	18
7.9.2	定義	18
7.9.3	合流型超幾何関数表示	18
7.9.4	Rodriguess の公式	18
7.9.5	直行性	18
7.9.6	母関数	19
7.9.7	隣接 3 項間漸化式	19



7.1 Laguerre の微分方程式

[章の最初に戻る](#)

$$\frac{d}{dx}\{xe^{-x}\frac{d}{dx}u\} + ne^{-x}u = 0 \quad (7.1)$$



7.2 定義

[章の最初に戻る](#)

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} x^k \quad (7.2)$$



7.3 合流型超幾何関数表示

[章の最初に戻る](#)

$$L_n(x) = n! {}_1F_1(-n, 1; x) \quad (7.3)$$



7.4 Rodrigues の公式

[章の最初に戻る](#)

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (7.4)$$



7.5 直行性

[章の最初に戻る](#)

$$(L_n(x), L_m(x)) := \int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = (n!)^2 \delta_{n,m} \quad (7.5)$$



7.6 積分表示

[章の最初に戻る](#)

$$L_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz \quad (7.6)$$



7.7 母関数

[章の最初に戻る](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} \zeta^n = \frac{e^{\frac{-x\zeta}{1-\zeta}}}{1-\zeta} \quad (7.7)$$





7.8 隣接3項間漸化式

[章の最初に戻る](#)

$$L_{n+1}(x) + (x - (2n + 1))L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \quad (7.8)$$



7.9 Laguerre 陪多項式

[章の最初に戻る](#)

7.9.1 微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^{k+1} e^{-x} \frac{d}{dx} u \right\} + n x^k e^{-x} \frac{d}{dx} u = 0 \quad (7.9)$$

7.9.2 定義

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{((n+k)!)^2}{(n-l)!(l+k)!(l)!} x^l \quad (7.10)$$

7.9.3 合流型超幾何関数表示

$$L_n^k(x) = \frac{((n+k)!)^2}{n!k!} {}_1F_1(-n, k+1; x) \quad (7.11)$$

7.9.4 Rodriguess の公式

$$L_n^k(x) = e^x x^{-k} \frac{(n+k)!}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{(-x)} x^{n+k}) \quad (7.12)$$

7.9.5 直行性

$$(L_n^k(x), L_m^k(x)) := \int_0^\infty L_n^k(x) L_m^k(x) e^{-x} x^k dx = \frac{((n+k)!)^3}{n!} \delta_{n,m} \quad (7.13)$$

7.9.6 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) \frac{\zeta^n}{(n+k)!} = \frac{e^{\frac{-x\zeta}{(1-\zeta)}}}{(1-\zeta)^{k+1}} \quad (7.14)$$



7.9.7 隣接 3 項間漸化式

$$\frac{n+1}{n+1+k}L_{n+1}^k(x) + (x - (2n+k+1))L_n^k(x) + (n+k)^2L_{n-1}^k(x) \quad (7.15)$$

第 8 章

Bessel 関数

[目次へ戻る](#)

目次

8.1	Bessel の微分方程式	21
8.2	定義	21
8.3	合流型超幾何関数表示	22
8.4	直行性	22
8.5	性質	22
8.6	積分表示	22
8.6.1	シュレーフリの積分表示	22
8.6.2	ポアソンの積分表示	22
8.7	母関数	23
8.8	漸化式	23
8.9	ノイマン関数	23
8.9.1	定義	23
8.10	ハンケル関数	23
8.10.1	定義	23
8.11	変形ベッセル関数	23
8.11.1	定義	23
8.11.2	微分方程式	24
8.11.3	合流型超幾何関数表示	24
8.11.4	母関数	24
8.11.5	漸化式	24

8.12	球ベッセル関数と球ノイマン関数	24
8.12.1	微分方程式	24
8.12.2	定義	24
8.12.3	Rodrigues の公式	24
8.12.4	直行性	25
8.12.5	性質	25
8.12.6	母関数	25
8.12.7	隣接 3 項間漸化式	25
8.13	球ハンケル関数	25
8.13.1	定義	25
8.13.2	Rodrigues の公式	25
8.13.3	展開公式	25
8.13.4	性質	26
8.13.5	母関数	26
8.13.6	隣接 3 項間漸化式	26



8.1 Bessel の微分方程式

[章の最初に戻る](#)

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - \frac{\nu^2}{x} \right\} u + xu = 0 \quad (8.1)$$

または、

$$\frac{d^2}{dx^2} u + \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) u = 0 \quad (8.2)$$



8.2 定義

[章の最初に戻る](#)

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (8.3)$$





8.3 合流型超幾何関数表示

[章の最初に戻る](#)

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix\right) \quad (8.4)$$



8.4 直行性

[章の最初に戻る](#)

$$\int_0^1 J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_l x) x dx = \frac{1}{2} \{J_{\nu+1}(\lambda_k)\}^2 \delta_{k,l} \quad (8.5)$$



8.5 性質

[章の最初に戻る](#)

$$\frac{d}{dx} \{x^\nu J_\nu(x)\} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad \frac{d}{dx} \{x^{-\nu} J_\nu(x)\} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \quad (8.6)$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (8.7)$$



8.6 積分表示

[章の最初に戻る](#)

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \phi - n\phi)} d\phi \quad (8.8)$$

8.6.1 シュレーフリの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})} z^{-\nu-1} \quad (8.9)$$

8.6.2 ポアソンの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{1} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm ixt} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \quad (8.10)$$



8.7 母関数

[章の最初に戻る](#)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \zeta^n = e^{\frac{1}{2}x(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \quad (8.11)$$



8.8 漸化式

[章の最初に戻る](#)

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x) \quad (8.12)$$



8.9 ノイマン関数

[章の最初に戻る](#)

8.9.1 定義

$$Y_{\nu}(x) := \frac{\cos(\nu\pi)J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (8.13)$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \quad (8.14)$$



8.10 ハンケル関数

[章の最初に戻る](#)

8.10.1 定義

$$H_{\nu}^{(\pm)} := J_{\nu}(x) \pm iY_{\nu}(x) \quad (8.15)$$



8.11 変形ベッセル関数

[章の最初に戻る](#)

8.11.1 定義

第一種変形ベッセル関数は次のように定義される。

$$I_{\nu}(x) = i^{-\nu} J_{\nu}(ix) \quad (8.16)$$

$$I_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (8.17)$$



8.11.2 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}u - (x^2 + \nu^2)u = 0 \quad (8.18)$$

8.11.3 合流型超幾何関数表示

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2x\right) \quad (8.19)$$

8.11.4 母関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) \zeta^n = e^{\frac{x}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})} \quad (8.20)$$

8.11.5 漸化式

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \quad I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x) \quad (8.21)$$



8.12 球ベッセル関数と球ノイマン関数 [章の最初に戻る](#)

8.12.1 微分方程式

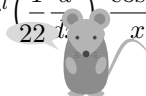
$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}u + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)u = 0 \quad (8.22)$$

8.12.2 定義

$$\begin{cases} j_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ y_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \end{cases} \quad (8.23)$$

8.12.3 Rodrigues の公式

$$\begin{cases} j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x} \\ n_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\cos x}{x} \end{cases} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.24)$$



8.12.4 直行性

8.12.5 性質

$$\begin{cases} f_{l+1}(x) = \left(\frac{l}{x} - \frac{d}{dx}\right)f_l(x) \\ f_{l-1}(x) = \left(\frac{l+1}{x} - \frac{d}{dx}\right)f_l(x) \end{cases} \quad f_l(x) = j_l(x), y_l(x) \quad (8.25)$$

8.12.6 母関数

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{j_{l-1}(x)}{l!} \zeta^l = \frac{\cos \sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n_{l-1}(x)}{l!} \zeta^l = -\frac{\sin \sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \end{cases} \quad (8.26)$$

8.12.7 隣接 3 項間漸化式

$$f_{l+2}(x) - \frac{2l+3}{x}f_{l+1}(x) + f_l(x) = 0 \quad (f_l(x) = j_l(x), y_l(x)) \quad (8.27)$$



8.13 球ハンケル関数

[章の最初に戻る](#)

8.13.1 定義

$$h_l^{(\pm)}(x) = n_l(x) \pm i j_l(x) \quad (8.28)$$

8.13.2 Rodrigues の公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{e^{\pm ix}}{x} \quad (8.29)$$

8.13.3 展開公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (R_l(x) \pm i S_l(x)) \frac{e^{\pm ix}}{x} \quad (8.30)$$

ただし、

$$R_l(x) \pm i S_l(x) = \sum_{k=0}^l \frac{(\mp i)^{l-k}}{2^k k!} \frac{(l+k)!}{(l-k)!} x^{-k} \quad (8.31)$$



8.13.4 性質

$$\begin{cases} h_{l+1}^{(\pm)}(x) = \left(\frac{l}{x} - \frac{d}{dx} \right) h_l^{(\pm)}(x) \\ h_{l-1}^{(\pm)}(x) = \left(\frac{l+1}{x} + \frac{d}{dx} \right) h_l^{(\pm)}(x) \end{cases} \quad (8.32)$$

8.13.5 母関数

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{h_{l-1}^{(\pm)}(x)}{l!} \zeta^l = \frac{\pm i e^{\pm i \sqrt{x^2 - 2x\zeta}}}{x} \quad (8.33)$$

8.13.6 隣接 3 項間漸化式

$$h_{l+2}^{(\pm)}(x) - \frac{2l+3}{x} h_{l+1}^{(\pm)}(x) + h_l^{(\pm)}(x) = 0 \quad (8.34)$$

