特殊関数

介川侑大[1]

November 16, 2020

[1]東京工業大学物理学系 3 年

目次

Contents

Contents

第1章　ガンマ関数

1.1 定義

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{t}^{x-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{1.1}$$

1.2 漸化式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (x > 0) \tag{1.2}$$

特に、

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{1.3}$$

から、

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{1.4}$$

1.3 Gauss の公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n} \tag{1.5}$$

1.4 Weiersrtrass の公式

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \tag{1.6}$$

γ はオイラー定数である。

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) \tag{1.7}$$

1.5 ディガンマ関数

$$\psi(x) := \frac{d}{dx}\mathrm{In}\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{k}\right) \tag{1.8}$$

1.6 Euler の反転公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{1.9}$$

1.7 Hankel の積分表示

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2i\sin \pi x}\int_c (-t)^{x-1}e^{-t}dt \tag{1.10}$$

1.8 Stirling の公式

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\, e^{-x}x^x \tag{1.11}$$

第2章　ベータ関数

2.1 定義

$$B(x,y) := \int_0^1 \mathrm{t}^{x-1}(1-\mathrm{t})^{y-1}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

2.2 積分表示

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+x)^{x+y}}ds \tag{2.2}$$

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\mathrm{d}\theta \tag{2.3}$$

2.3 ガンマ関数表示

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.4}$$

第3章　超幾何関数

3.1 定義

$$ {}_p\mathrm{F}_q\left({a_1 \quad \dots \quad a_p \atop b_1 \quad \dots \quad b_q}; x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{3.1} $$

3.2 超幾何方程式

$$ x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}u + (c-(a+b+1)x)\frac{d}{dx}u - abu = 0 \tag{3.2} $$

解は、

$$ u = {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{3.3} $$

3.3 積分表示

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b} dt \tag{3.4} $$

3.4 合流型超幾何方程式

$$ x\frac{d^2}{dx^2}u + (c-x)\frac{d}{dx}u - au = 0 \tag{3.5} $$

解は、

$$ u = {}_1F_1(a,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{3.6} $$

3.5 積分表示

$$ {}_1F_1(a;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}dt \tag{3.7} $$

第4章　Legendre関数

4.1 Legendreの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}u\}+\nu(\nu+1)u=0 \tag{4.1}$$

4.2 定義

$\nu = n(\in \mathbb{N})$ の時、

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!}x^{n-2k} \tag{4.2}$$

4.3 超幾何関数表示

$$P_n(x) = {}_2F_1(n+1,-n;1;\frac{1-x}{2}) \tag{4.3}$$

4.4 Rodriguesの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{4.4}$$

4.5 直行性

$$(P_n(x),P_m(x)) := \int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m} \tag{4.5}$$

4.6 シュレーフリの積分表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \tag{4.6}$$

4.7 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\zeta^n = \frac{1}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}} \tag{4.7}$$

4.8 隣接３項間漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{4.8}$$

4.9 Legendre 陪多項式

4.9.1 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}u\} - \frac{k^2}{1-x^2}u + n(n+1)u = 0 \tag{4.9}$$

4.9.2 定義

$$P_n^k(x) \coloneqq (-1)^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \tag{4.10}$$

4.9.3 直行性

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \frac{2(n+k)!}{(2n+1)!(n-k)!}\delta_{n,m} \tag{4.11}$$

第5章　Tchebysheff多項式

5.1　微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}u\}+\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}u=0 \tag{5.1}$$

5.2　超幾何関数表示

$$T_n(x)=\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}{}_2F_1(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}) \tag{5.2}$$

5.3　Rodrigues の公式

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

5.4　直行性

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2}\delta_{n,m} & otherwise\end{cases} \tag{5.4}$$

5.5　母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)\zeta^n=\frac{1-x\zeta}{1-2x\zeta+\zeta^2} \tag{5.5}$$

5.6　隣接３項間漸化式

$$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0 \tag{5.6}$$

5.7 三角関数関係

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \tag{5.7}$$

第6章　Hermite関数

6.1 Hermiteの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x^2}\frac{d}{dx}u\} + 2ne^{-x^2}u = 0 \tag{6.1}$$

6.2 定義

$$H_n(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{6.2}$$

6.3 合流型超幾何関数表示

$$H_{2n}(x) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}{}_1F_1(-n,\frac{1}{2};x^2) \tag{6.3}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n\frac{2(2n+1)!}{n!}x{}_1F_1(-n,\frac{3}{2};x^2) \tag{6.4}$$

6.4 Rodriguesの公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{6.5}$$

6.5 直行性

$$(H_n(x), H_m(x)) := \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 2^n n!\delta_{n,m} \tag{6.6}$$

6.6 積分表示

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{2xz-z^2}}{z^{n+1}} dz \tag{6.7}$$

6.7 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \zeta^n = e^{-\zeta^2+2x\zeta} \tag{6.8}$$

6.8 隣接３項間漸化式

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \tag{6.9}$$

第7章　Laguerre関数

7.1 Laguerreの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{xe^{-x}\frac{d}{dx}u\} + ne^{-x}u = 0 \tag{7.1}$$

7.2 定義

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} x^k \tag{7.2}$$

7.3 合流型超幾何関数表示

$$L_n(x) = n!\,{}_1F_1(-n, 1; x) \tag{7.3}$$

7.4 Rodriguesの公式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \tag{7.4}$$

7.5 直行性

$$(L_n(x), L_m(x)) := \int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = (n!)^2\delta_{n,m} \tag{7.5}$$

7.6 積分表示

$$L_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}dz \tag{7.6}$$

7.7 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} \zeta^n = \frac{e^{\frac{-x\zeta}{1-\zeta}}}{1-\zeta} \tag{7.7}$$

7.8 隣接 3 項間漸化式

$$L_{n+1}(x) + (x-(2n+1))L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \tag{7.8}$$

7.9 Laguerre 陪多項式

7.9.1 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\{x^{k+1}e^{-x}\frac{d}{dx}u\} + nx^k e^{-x}\frac{d}{dx}u = 0 \tag{7.9}$$

7.9.2 定義

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{((n+k)!)^2}{(n-l)!(l+k)!(l)!} x^l \tag{7.10}$$

7.9.3 合流型超幾何関数表示

$$L_n^k(x) = \frac{((n+k)!)^2}{n!k!} {}_1F_1(-n, k+1; x) \tag{7.11}$$

7.9.4 Rodrigues の公式

$$L_n^k(x) = e^x x^{-k} \frac{(n+k)!}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{(-x)} x^{n+k}) \tag{7.12}$$

7.9.5 直行性

$$(L_n^k(x), L_m^k(x)) := \int_0^\infty L_n^k(x) L_m^k(x) e^{-x} x^k dx = \frac{((n+k)!)^3}{n!} \delta_{n,m} \tag{7.13}$$

7.9.6　母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)\frac{\zeta^n}{(n+k)!} = \frac{e^{\frac{-x\zeta}{(1-\zeta)}}}{(1-\zeta)^{k+1}} \tag{7.14}$$

7.9.7　隣接３項間漸化式

$$\frac{n+1}{n+1+k}L_{n+1}^k(x) + (x-(2n+k+1))L_n^k(x) + (n+k)^2 L_{n-1}^k(x) \tag{7.15}$$

第8章　Bessel関数

8.1 Besselの微分方程式

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)-\frac{\nu^2}{x}\right\}u+xu=0 \tag{8.1}$$

または、

$$\frac{d^2}{dx^2}u+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}u+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u=0 \tag{8.2}$$

8.2 定義

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{8.3}$$

8.3 合流型超幾何関数表示

$$J_\nu(x)=\frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_1F_1(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2ix) \tag{8.4}$$

8.4 直行性

$$\int_0^1 J_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_l x)x dx=\frac{1}{2}\{J_{\nu+1}(\lambda_k)\}^2\delta_{k,l} \tag{8.5}$$

8.5 性質

$$\frac{d}{dx}\{x^\nu J_\nu(x)\}=x^\nu J_{\nu-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}\{x^{-\nu}J_\nu(x)\}=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \tag{8.6}$$

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{8.7}$$

8.6 積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\phi - n\phi)}\,d\phi \tag{8.8}$$

8.6.1 シュレーフリの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} z^{-\nu-1} \tag{8.9}$$

8.6.2 ポアソンの積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{\pm ixt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt \tag{8.10}$$

8.7 母関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\zeta^n = e^{\frac{1}{2}x\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{8.11}$$

8.8 漸化式

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \qquad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \tag{8.12}$$

8.9 ノイマン関数

8.9.1 定義

$$Y_\nu(x) := \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu x)} \tag{8.13}$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} \tag{8.14}$$

8.10 ハンケル関数

8.10.1 定義

$$H_\nu^{(\pm)} := J_\nu(x) \pm iY_\nu(x) \tag{8.15}$$

8.11 変形ベッセル関数

8.11.1 定義

第一種変形ベッセル関数は次のように定義される。

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \tag{8.16}$$

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{8.17}$$

8.11.2 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}u - (x^2+\nu^2) = 0 \tag{8.18}$$

8.11.3 合流型超幾何関数表示

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_1F_1(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2x) \tag{8.19}$$

8.11.4 母関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\zeta^n = e^{\frac{x}{2}(\zeta+\frac{1}{\zeta})} \tag{8.20}$$

8.11.5 漸化式

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \quad I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I_\nu'(x) \tag{8.21}$$

8.12 球ベッセル関数と球ノイマン関数

8.12.1 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}u + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)u = 0 \tag{8.22}$$

8.12.2 定義

$$\begin{cases} j_l(x) := & \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ y_l(x) := & \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \end{cases} \tag{8.23}$$

8.12.3 Rodrigues の公式

$$\begin{cases} j_l(x) = & (-1)^l x^l \left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^l \dfrac{\sin x}{x} \\ n_l(x) = & (-1)^l x^l \left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^l \dfrac{\cos x}{x} \end{cases} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8.24}$$

8.12.4 性質

$$\begin{cases} f_{l+1}(x) = & \left(\dfrac{l}{x} - \dfrac{d}{dx}\right) f_l(x) \\ f_{l-1}(x) = & \left(\dfrac{l+1}{x} - \dfrac{d}{dx}\right) f_l(x) \end{cases} \quad f_l(x) = j_l(x), y_l(x) \tag{8.25}$$

8.12.5 母関数

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{j_{l-1}(x)}{l!}\zeta^l = & \dfrac{\cos\sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{n_{l-1}(x)}{l!}\zeta^l = & -\dfrac{\sin\sqrt{x^2 - 2x\zeta}}{x} \end{cases} \tag{8.26}$$

8.12.6　隣接３項間漸化式

$$f_{l+2}(x) - \frac{2l+3}{x} f_{l+1}(x) + f_l(x) = 0 \quad (f_l(x) = j_l(x), y_l(x)) \tag{8.27}$$

8.13　球ハンケル関数

8.13.1　定義

$$h_l^{(\pm)}(x) = n_l(x) \pm i j_l(x) \tag{8.28}$$

8.13.2　Rodrigues の公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \frac{e^{\pm ix}}{x} \tag{8.29}$$

8.13.3　展開公式

$$h_l^{(\pm)}(x) = (R_l(x) \pm i S_l(x)) \frac{e^{\pm ix}}{x} \tag{8.30}$$

ただし、

$$R_l(x) \pm i S_l(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(\mp i)^{l-k}}{2^k k!} \frac{(l+k)!}{(l-k)!} x^{-k} \tag{8.31}$$

8.13.4　性質

$$\begin{cases} h_{l+1}^{(\pm)}(x) = & \left(\frac{l}{x} - \frac{d}{dx}\right) h_l^{(\pm)}(x) \\ h_{l-1}^{(\pm)}(x) = & \left(\frac{l+1}{x} + \frac{d}{dx}\right) h_l^{(\pm)}(x) \end{cases} \tag{8.32}$$

8.13.5　母関数

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{h_{l-1}^{(\pm)}(x)}{l!} \zeta^l = \frac{\pm i e^{\pm i\sqrt{x^2-2x\zeta}}}{x} \tag{8.33}$$

8.13.6 隣接３項間漸化式

$$h_{l+2}^{(\pm)}(x) - \frac{2l+3}{x} h_{l+1}^{(\pm)}(x) + h_l^{(\pm)}(x) = 0 \tag{8.34}$$