TUGAS MATEMATKA DISKRIT

26 Oktober – 1 November 2020
C. Kuntoro Adi SJ

Pengantar:

1. Pelajari catatan awal di Bagian 1 (halaman 1-4)
2. Kerjakan 3 soal yang ada di Bagian 2 (halaman 4)
3. Jawaban soal dikumpulkan melalui LMS pada tanggal **1 November 2020**

BAGIAN 1: CATATAN AWAL

1. **Fungsi injektif-surjektif-bijektif**
   a. Injektif $f:X\rightarrow Y$
      – Setiap anggota Y (co-domain) paling banyak memiliki <u>satu kawan</u> di X (domain)
      – $y \in Y$ boleh tidak memiliki kawan di X

   b. Surjektif $f:X\rightarrow Y$
      – <u>Setiap anggota</u> Y (<u>co-domain</u>) memiliki kawan di X (domain)
      – $y \in Y$ boleh memiliki kawan lebih dari satu di X

   c. Beberapa contoh
      1. $f:Z\rightarrow Z$; Z <u>bilangan bulat</u>
         $f(n) = 2n+1$ injektif, surjektif?

         Injektif: $\forall(n_1, n_2 \in Z)\ f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow n_1=n_2$
         $f(n_1) = f(n_2)$
         $2n_1+1 = 2n_2+1$
         $2n_1 = 2n_2$
         Maka $n_1 = n_2$
         Maka f injektif

         Surjektif: $(\forall y \in Z)(\exists n \in Z)\ f(n)=y$
         Ambil sebarang bilangan bulat y, teliti apakah ada bilangan bulat n yang dikawankan dengan y (f(n)=y). jika n ada untuk sebarang y, maka f surjektif.
         $f(n) = y$
         $2n+1 = y$
         $2n = y-1$
         $n = (y-1)/2$

Tidak setiap bilangan bulat di kodomain Y memiliki kawan di domain X. So: tidak surjektif

2. Contoh 2
   $f:R \rightarrow R$; R <u>bilangan riil</u>
   $f(x) = 2x+1$ injektif, surjektif?
   Yes!
   So bisa dilihat dari contoh a dan b, sifat injektif/surjektif tidak hanya ditentukan oleh cara perkawanan fungsi, tetapi juga ditentukan oleh karakter domain/kodomainnya.

3. Suatu fungsi didefinisikan pada himpunan bilangan bulat Z dengan rumus $g:Z \rightarrow Z$; $g(n) = n^2$ untuk $\forall n \in Z$. Pertanyaan: apakah fungsi tersebut injektif, surjektif?
4. Apakah fungsi g juga injektif atau surjektif jika g didefinisikan pada bilangan riil R?

2. Invers Fungsi

Misalkan $f:X \rightarrow Y$ adalah suatu fungsi. Jika fungsi tersebut bijektif (injektif dan surjektif) maka:

- setiap elemen $y \in Y$ memiliki tepat satu kawan di X
- berarti bahwa relasi Y ke X merupakan fungsi juga
- fungsi Y ke X disebut invers fungsi f (simbol f^{-1})

Inverse fungsi f didefinisikan sebagai berikut:

$$f^{-1}(y) = \text{elemen } x \in X \text{ sedemikian sehingga } f(x)=y$$

$$\text{maka } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x)=y$$

Contoh: carilah invers fungsi f yang didefinisikan $f:Z \rightarrow Z$ dengan $f(n)=n+2$; $\forall n \in Z$

a. Perlu dibuktikan dahulu $f(n)=n+2$ adalah bijektif
b. Penghitungan invers:
   Ambil sembarang $x \in Z$ dengan $f(x)=y$
   Invers fungsi f adalah f^{-1} dengan $f^{-1}(y)=x$

   $y = f(x) = x+2$
   $x = y-2$
   maka $f^{-1}(y) = x = y-2$
   Jadi invers fungsi f adalah f^{-1} dengan $f^{-1}(n) = n-2$

c. Komposisi Fungsi

Jika ada beberapa fungsi, fungsi-fungsi tersebut bisa dikomposisikan untuk menghasilkan fungsi baru. Misalkan $f:X \rightarrow Y$ dan $g:Y' \rightarrow Z$ adalah fungsi-fungsi dengan sifat kodomain $f(=Y) \subseteq$ domain $g(=Y')$.

Didefinisikan komposisi fungsi g dan f (simbol $g \circ f$) sebagai berikut:

$$(\forall x \in X)(g \circ f)(X) = g(f(x))$$

Contoh 1

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi pada himpunan bilangan bulat Z yang didefinisikan dengan rumus $f(n)=n+1$ dan $g(n)=n^2$; $\forall n \in Z$. Hitunglah:

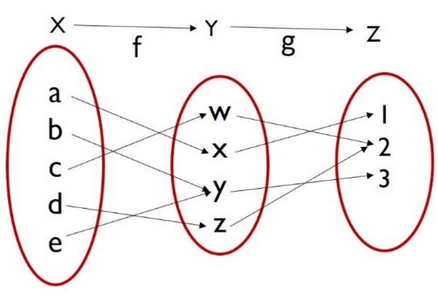
a. $(g \circ f)(n)$
b. $f(f(n))$
c. Apakah $(g \circ f) = (f \circ g)$?

Penyelesaian:

a. $f(n)=n+1$ dan $g(n)=n^2$
   $(g \circ f)(n) = g(f(n))=g(n+1) = (n+1)^2$
b. $f(f(n)=f(n+1)=(n+1)+1 = n+2$
c. $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2+1$
   Terlihat bahwa $(g \circ f)(n) \neq (f \circ g)(n)$ sehingga $(g \circ f) \neq (f \circ g)$

Contoh 2

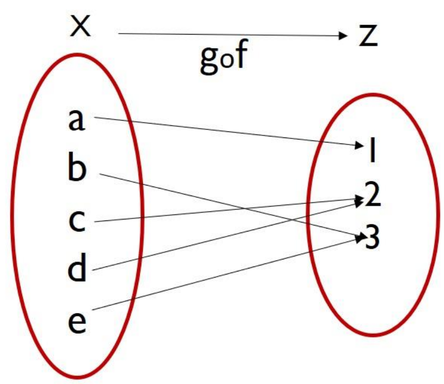
Misalkan X={a, b, c, d, e}; Y={w, x, y, z} dan Z = {1, 2, 3}. Didefinisikan fungsi $f:X \rightarrow Y$ dan $g:Y \rightarrow Z$ dengan diagram seperti pada gambar di bawah. Buatkan diagram panah fungsi $g \circ f$.



Gambar 1 Fungsi f dan g

Penyelesaian:
$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(x) = 1$
$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(y) = 3$
$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(w) = 2$
$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(z) = 2$
$(g \circ f)(e) = g(f(e)) = g(y) = 3$

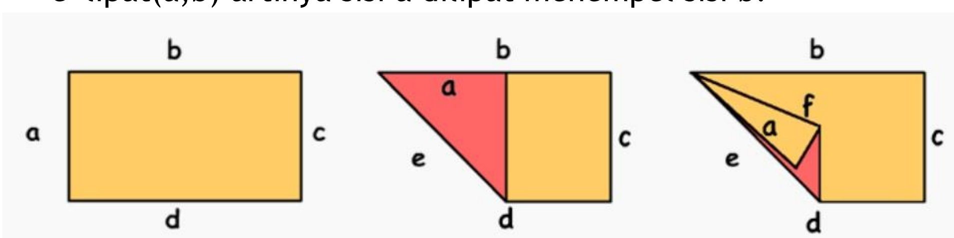
Oleh karena itu diagram panah fungsi $g \circ f$ terihat sebagaimana pada gambar 2 di bawah ini:



Gambar 2 gof

BAGIAN 2: TUGAS (Dikumpulkan 1 November 2020)

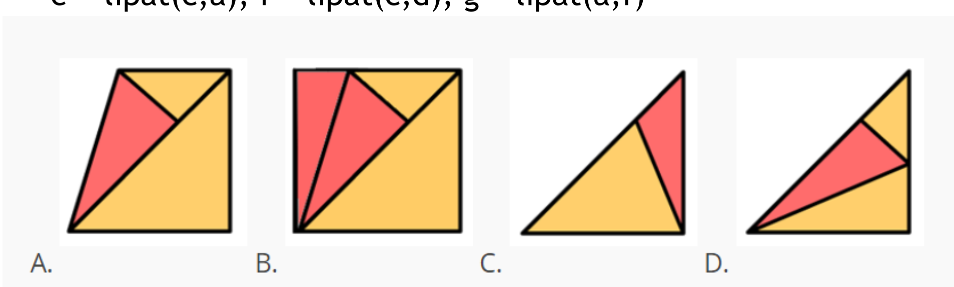
1. (Soal diambil dari salah satu soal kompetisi Bebras SMA):
   Binatang berang-berang (beaver) mengembangkan sebuah bahasa untuk melipat kertas: lipat. Ukuran kertas bisa dilihat di gambar di bawah ini. Panjang sisi b = 2 kali panjang sisi a. Contoh pelipatan bisa dilihat dari perintah berikut:
   e=lipat(a,b) artinya sisi a dilipat menempel sisi b.

   e = lipat(a,b) f = lipat(a,e)

   Pertanyaan: bagaimana bentuk kertas (a,b,c,d) setelah mengalami proses pelipatan dengan perintah berurutan berikut:

   e = lipat(c,a); f = lipat(c,d); g = lipat(a,f)

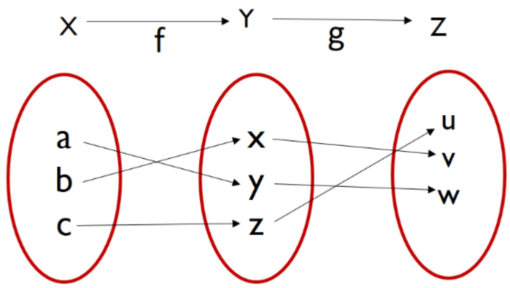
   

   Hasil akhir akan berupa lipatan A, B, C atau D?

2. Misalkan X = {1, 2, 3}, Y = {1, 2, 3, 4}, dan Z = {1,2}.

a. Buatkan fungsi $f:X \to Y$ yang injektif tetapi tidak surjektif
b. Buatkan fungsi $g:X \to Z$ yang surjektif tetapi tidak injektif
c. Buatkan fungsi $h:X \to X$ yang tidak injektif dan tidak surjektif

3. Misalkan X ={a, b, c}, Y={x, y, z}, Z={u, v, w}. Didefinisikan $f:X \to Y$ dan $g:Y \to Z$ dengan diagram panah sebagai berikut:



a. Carilah (gof)
b. $(gof)^{-1}$
c. g^{-1} dan f^{-1}
d. $(f^{-1}og^{-1})$