

PEMODELAN GRAF: NETWORKS

Algoritma Dijkstra - Floyd

C. Kuntoro Adi, SJ
Universitas Sanata Dharma
MATEMATIKA DISKRIT 2020/2021

Referensi:

Rosen, 2019, Discrete Mathematics and Its Applications, Bab 11
Taha, 2017, Operation Research an Introduction, Bab 6

1

Pokok Bahasan

1. Pengantar
2. Minimal spanning tree
3. Route terpendek: Dijkstra
4. Route terpendek: Floyd

2

3. ROUTE TERPENDEK: ALGORITMA FLOYD

Ada dua model dalam menentukan jarak terpendek

1. Dijkstra Algorithm: untuk menentukan jarak terpendek suatu sumber (asal) terhadap node lain yang ada dalam jaringan
2. Floyd Algorithm: dipergunakan untuk menentukan jarak atau route terpendek setiap node dalam suatu jaringan

3

Algoritma Floyd

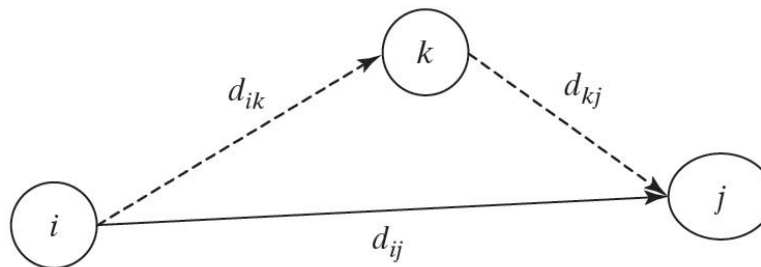
Catatan awal

- Algoritma Floyd mencoba menemukan jarak atau route terpendek tiap node dalam suatu jaringan
- Digambarkan melalui matriks n-nodes ukuran $(n \times n)$
- Menggunakan "triple operation" untuk menemukan perlu tidaknya jarak antar node diganti dengan jarak yang lebih pendek

4

Triple operation Floyd

(Taha, 2017)



- Triple operation: jika $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$, maka jarak terpendek node i ke node j adalah $d_{ik} + d_{kj}$

5

	1	2	...	j	...	n
1	—	d_{12}	...	d_{1j}	...	d_{1n}
2	d_{21}	—	...	d_{2j}	...	d_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$D_0 = I$	d_{i1}	d_{i2}	...	d_{ij}	...	d_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	D_{n1}	d_{n2}	...	d_{nj}	...	—

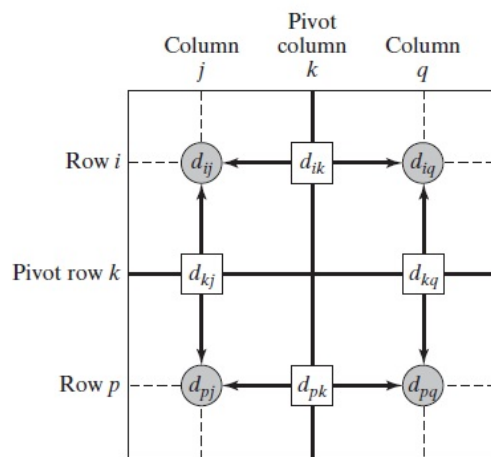
	1	2	...	j	...	n
1	—	2	...	j	...	n
2	1	—	...	j	...	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_0 =$	1	2	...	j	...	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	2	...	j	...	—

Algoritma Floyd

Langkah 0:

Tentukan matriks jarak
Do dan matriks sequence
So, set $k = 1$

6



Langkah k:

1. tentukan "pivot row" dan "pivot column" k; lakukan "triple operation" untuk setiap elemen jarak d_{ij} di matriks D_{k-1} untuk semua node i dan j
2. Jika $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$, (dengan $i \neq k$, $j \neq k$ dan $i \neq j$) maka d_{ij} di D_{k-1} diganti dengan $(d_{ik} + d_{kj})$ dan s_{ij} di S_{k-1} diganti dengan k
3. $k=k+1$. Jika $k = n+1$ stop. Otherwise ulang step k

7

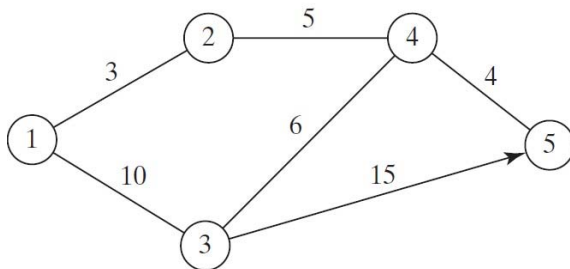
Menemukan jarak terpendek dari matrix D_n dan S_n

Kita bisa menemukan jarak terpendek setiap node i dan node j dari matrix D_n dan S_n dengan patokan sebagai berikut:

1. Dari matrix D_n , d_{ij} memberi informasi jarak terpendek antara node i dan node j
2. Dari matrix S_n , temukan node intermediate $k = s_{ij}$ yang memberi informasi mengenai route $i \rightarrow k \rightarrow j$. Jika $s_{ik} = k$ dan $s_{kj} = j$, stop. Semua node intermediate ditemukan. Otherwise, ulang prosedur antar node i dan k dan antar node k dan j.

8

Contoh



Pada jaringan sebagaimana terlihat di gambar, temukan route terpendek untuk setiap node. Link (3,5) adalah jalur satu arah. Kendaraan tidak diperbolehkan mengambil jalur dari 5 ke 3; sedangkan yang lain adalah jalur dua arah.

9

Penyelesaian

Iterasi 0

Matrix D_0 dan S_0 merupakan representasi awal jaringan. D_0 adalah matrix simetri, kecuali $d_{53} = \infty$ mengingat kendaraan tidak diperkenankan menggunakan jalur 5 ke 3

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	∞	5	∞
3	10	∞	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	3	4	5
3	1	2	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

10

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	∞	5	∞
3	10	∞	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	3	4	5
3	1	2	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iterasi 1

Set $k = 1$; pivot row dan pivot column berupa daerah terarsir di baris pertama dan kolom pertama pada matrix D_0 (slide sebelumnya). Sel d_{23} dan d_{32} adalah sel yang bisa diupdate melalui triple operation.

D_1 dan S_1 diperoleh dari D_0 dan S_0 dengan cara sebagai berikut:

1. Modifikasi d_{23} dengan $d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13$; dan ubah $s_{23} = 1$
2. Ganti d_{32} dengan $d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13$ dan ubah $s_{32} = 1$

11

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Perubahan nilai jarak terlihat di huruf tebal pada matrix D_1 dan S_1

12

D_1					
	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_1					
	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iterasi 2

- Set $k = 2$; pivot row dan pivot column berupa daerah terarsir di baris kedua dan kolom kedua pada matrix D_1 (slide sebelumnya).
- Triple operation dilakukan untuk sel d_{14} dan d_{41} , menghasilkan perubahan (sel berisi angka dengan huruf tebal di matrix D_2 dan S_2)

13

D_2					
	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_2					
	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

14

D_2					
	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_2					
	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iterasi 3

Set $k = 3$; pivot row dan pivot column berupa daerah terarsir di baris ketiga dan kolom ketiga pada matrix D_2 .

15

Iterasi 3

Set $k = 3$; pivot row dan pivot column berupa daerah terarsir di baris ketiga dan kolom ketiga pada matrix D_2 . Triple operation membentuk matrix D_3 dan S_3 sebagai berikut:

D_3					
	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	25
2	3	—	13	5	28
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_3					
	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	3
2	1	—	1	4	3
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

16

Iterasi 4

Set $k = 4$; pivot row dan pivot column berupa daerah terarsir di baris keempat dan kolom keempat pada matrix D_3 .

$$D_3$$

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	25
2	3	—	13	5	28
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

$$S_3$$

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	3
2	1	—	1	4	3
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

17

Iterasi 4

Set $k = 4$; pivot row dan pivot column berupa daerah terarsir di baris keempat dan kolom keempat pada matrix D_3 . Triple operation membentuk matrix D_4 dan S_4 sebagai berikut:

$$D_4$$

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	12
2	3	—	11	5	9
3	10	11	—	6	10
4	8	5	6	—	4
5	12	9	10	4	—

$$S_4$$

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	4
2	1	—	4	4	4
3	1	4	—	4	4
4	2	2	3	—	5
5	4	4	4	4	—

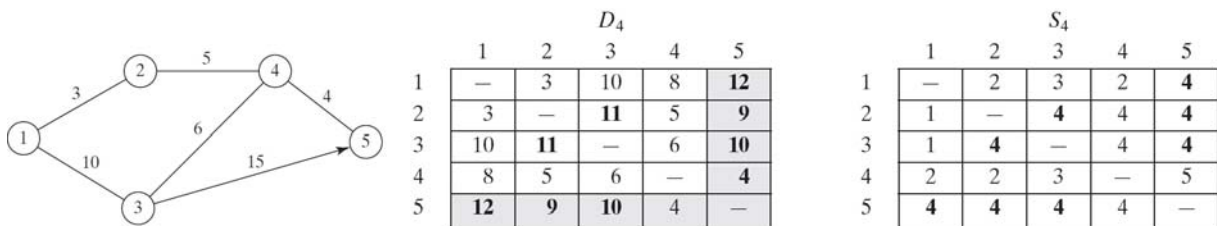
18

Iterasi 5

- Set $k=5$; pivot row dan pivot column berupa daerah terarsir di baris kelima dan kolom kelima pada matrix D_4 . Tidak ada lagi kemungkinan modifikasi dengan triple operation. Iterasi berhenti.
- Matrix D_5 dan S_5 memberi informasi lengkap jarak dan route terdekat antar node

19

Membaca jarak dan route terdekat (dengan D_4 dan S_4)



Misalkan ditanyakan, berapa jarak terdekat node 1 ke node 5, dan routenya seperti apa?

- Jarak node 1 ke node 5 = $d_{15} = 12$ km
- Route? Segmen (i,j) merupakan sambungan langsung jika $s_{ij} = j$. Otherwise: tersambung melalui node lain. Oleh karena itu
 - $s_{15} = 4 \neq 5$ sehingga routenya $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$
 - $s_{14} = 2 \neq 4$ sehingga routenya $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$
 - $s_{12} = 2$, $s_{24} = 4$ dan $s_{45} = 5$; tidak ada modifikasi lebih lanjut
 - $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ menggambarkan route terpendek node 1 ke node 5

20

Soal Latihan

21