Relasi Rekurensi

MATERI PERKULIAHAN MATEMATIKA DISKRIT

Materi

- Pengertian relasi rekurensi
- Solusi dari relasi rekurensi linear

Pengertian Relasi Rekurensi

Relasi rekurensi adalah suatu persamaan yang mendefinisikan suatu barisan secara rekursif, yaitu dengan diberikan satu atau beberapa suku awal, suku-suku berikutnya dapat ditentukan dari suku-suku yang mendahuluinya.

Contoh:

1. Barisan $\{a_n\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$a_1=1$, $a_n=n.a_{n-1}$.

Suku ke-n adalah n dikali suku sebelumnya, yaitu suku ke-(n-1).

2. Barisan Fibonacci $\{f_n\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$f_1=1$, $f_2=1$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

Suku ke-n adalah jumlahan dari dua suku sebelumnya, yaitu suku ke-(n-1) dan suku ke-(n-2).

Contoh 1

$a_1=1$, $a_n=n.a_{n-1}$.

Beberapa suku awal dari barisan $\{a_n\}$ adalah:

$a_1=1$

$a_2=2.a_1=2.1=2$

$a_3=3.a_2=3.2=6$

$a_4=4.a_3=4.6=24$

$a_5=5.a_4=5.24=120$

dst.

Mudah dipahami bahwa rumus ekplisit dari barisan tersebut adalah $a_n=n!$ (n faktorial)

Contoh 2

Untuk barisan Fibonacci, beberapa suku pertamanya adalah:

$f_1=1$

$f_2=1$

$f_3=f_1+f_2=1+1=2$

$f_4=f_2+f_3=1+2=3$

$f_5=f_3+f_4=2+3=5$

$f_6=f_4+f_5=3+5=8$

dst.

Bagiamana rumus eksplisit dari barisan Fibonacci? Agak cukup sulit untuk membaca polanya.

Rumus Rekursif vs Rumus Ekplisit

Pada contoh pertama, persamaan $a_n=n.a_{n-1}$ disebut sebagai rumus rekursif, yang menggambarkan relasi antara satu suku barisan dengan suku barisan yang mendahuluinya, sedangkan $a_1=1$ merupakan suku awal yang akan menentukan suku-suku berikutnya.

Pada contoh kedua, persamaan $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ merupakan rumus rekursif dari barisan Fibonacci, dengan $f_1=1$ dan $f_2=1$ merupakan suku-suku awalnya. Karena pada rumus rekursifnya, satu suku ditentukan oleh dua suku yang mendahuluinya, maka harus ditentukan dua suku pertamanya.

Di lain pihak, rumus $a_n=n!$ merupakan rumus eksplisit dari contoh pertama, yaitu rumus suku barisan yang hanya melibatkan unsur n (indeks suku barisan) saja sebagai variabel. Rumus eksplisit dapat ditentukan dengan melihat pola, tetapi tidak semua barisan yang didefinisikan secara rekursif memiliki pola yang cukup jelas. Salah satunya adalah barisan Fibonacci. Selanjutnya akan dipelajari bagaimana menentukan rumus eksplisit dari berbagai macam relasi rekurensi.

Relasi Rekurensi Linear

Suatu relasi rekurensi disebut relasi rekurensi linear orde-k jika rumus rekursifnya berbentuk:

$a_n = c_1.a_{n-1} + c_2.a_{n-2} + \dots + c_k.a_{n-k} + f(n)$.

dengan $c_1, c_2, \dots, c_k$ merupakan konstanta dan f(n) suatu fungsi eksplisit dari n.

(dengan kata lain, suatu suku merupakan kombinasi linear dari k suku yang mendahuluinya)

Jika f(n)=0, maka relasi rekurensi tersebut dikatakan homogen. Pada perkuliahan ini solusi eksplisit dari relasi rekurensi difokuskan untuk kasus linear homogen saja.

Contoh

Diberikan relasi rekurensi dengan definisi:

$a_n = r.a_{n-1}$, $a_1=m$.

Jika suku-suku dari an dijabarkan akan diperoleh:

$a_1 = m$

$a_2 = r.a_1 = r.m$

$a_3 = r.a_2 = r.(r.m) = r^2.m$

$a_4 = r.a_3 = r.(r^2.m) = r^3.m$

dst.

Jadi rumus eksplisitnya adalah: $a_n = r^{n-1}.m$.

Contoh

Diberikan relasi rekurensi dengan definisi:

$a_n = 3.a_{n-1}$, $a_1=5$.

Jika suku-suku dari an dijabarkan akan diperoleh:

$a_1 = 5 = 5.3^0$

$a_2 = 3.a_1 = 3.5 = 15 = 5.3^1$

$a_3 = 3.a_2 = 3.15 = 45 = 5.3^2$

$a_4 = 3.a_3 = 3.45 = 135 = 5.3^3$

dst.

Jadi rumus eksplisitnya adalah: $a_n = 5.3^{n-1}$.

Relasi Rekurensi Linear Orde 2

Diberikan relasi rekurensi dengan persamaan:

$a_n = 2.a_{n-1} + 3.a_{n-2}$,

dengan suku awal $a_0=3$ dan $a_1=1$.

Bagaimana cara menentukan rumus eksplisit dari a_n?

Jika hanya dengan melihat pola beberapa suku awal, masih belum terbaca rumus eksplisitnya:

$a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2.a_1 + 3.a_0 = 2.1 + 3.3 = 11$,

$a_3 = 2.a_2 + 3.a_1 = 2.11 + 3.1 = 25$, $a_4 = 2.a_3 + 3.a_2 = 2.25 + 3.11 = 83$.

Solusi

Pada contoh sebelumnya, solusi dari relasi rekurensi linear orde 1 berupa fungsi perpangkatan (dikali konstanta). Oleh karena itu cukup beralasan apabila kita duga bahwa rumus eksplisit dari relasi rekurensi linear orde 2 juga berbentuk fungsi perpangkatan atau kombinasi linearnya.

Misalkan $a_n = x^n$ dengan $x \neq 0$ merupakan suatu solusi dari persamaan $a_n = 2.a_{n-1} + 3.a_{n-2}$, maka haruslah:

$x^n = 2.x^{n-1} + 3.x^{n-2}$ $\leftrightarrow x^2 = 2.x + 3$ $\leftrightarrow x^2 - 2.x + 3 = 0$ (persamaan karakteristik)

$\leftrightarrow (x-3).(x+1) = 0$ $\leftrightarrow x = 3$ atau $x = -1$ (akar dari persamaan karakteristik)

Dengan demikian rumus eksplisit dari a_n adalah kombinasi linear dari 3^n dan $(-1)^n$, yaitu:

$a_n = c_1.3^n + c_2.(-1)^n$

Solusi

Substitusikan suku awal $a_0=3$ dan $a_1=1$:

$a_0 = 3 \leftrightarrow 3 = c_1.(3)^0 + c_2.(-1)^0 = c_1 + c_2.$

$a_1 = 1 \leftrightarrow 1 = c_1.(3)^1 + c_2.(-1)^1 = 3c_1 - c_2.$

Diperoleh dua buah persamaan dalam c_1 dan c_2, yaitu $c_1+c_2=3$ dan $3c_1-c_2=1$. Dengan menggunakan eliminasi, diperoleh bahwa $c_1=1$ dan $c_2=2$.

Jadi rumus eksplisit dari relasi rekurensi tersebut adalah:

$a_n = 3^n + 2.(-1)^n.$

Verifikasi Solusi

Jika solusi tersebut diverifikasi untuk beberapa suku pertama:

$a_0 = 3^0 + 2.(-1)^0 = 1 + 2 = 3$

$a_1 = 3^1 + 2.(-1)^1 = 3 + (-2) = 1$

$a_2 = 3^2 + 2.(-1)^2 = 9 + 2 = 11$

$a_3 = 3^3 + 2.(-1)^3 = 27 + (-2) = 25$

$a_4 = 3^4 + 2.(-1)^4 = 81 + 2 = 83$

Terlihat bahwa rumus ekplisit tersebut telah sesuai dengan pola beberapa suku awal yang dicoba di awal.

Latihan

1. Tentukan rumus eksplisit dari barisan Fibonacci. (Hati-hati, akar dari persamaan karakteristiknya bukan bilangan bulat dan memuat bentuk akar)

2. Tentukan rumus eksplisit dari relasi rekurensi dengan rumus rekursif:

$b_n = 7.b_{n-1} – 12.b_{n-2}$,

dengan syarat awal b_0=1 dan b_1=2.

TERIMA KASIH