Pertemuan 3

RELASI

MATERI PERKULIAHAN MATEMATIKA DISKRIT

(Dipersiapkan oleh Bp. Hartana, Rm. Kun)

Materi

1. Pengertian Relasi
   a. Relasi pada Himpunan
   b. Operasi pada relasi
   c. Representasi dalam graf dan matrix
2. Sifat Refleksif, Simetris dan Transitif
3. Relasi Ekuivalensi

1. Pengertian Relasi

Relasi antara dua buah himpunan A dan B adalah gambaran bagaimana anggota-anggota dari himpunan A berelasi dengan himpunan B. Suatu anggota himpunan A dapat berelasi dengan suatu anggota himpunan B, dapat juga tidak.

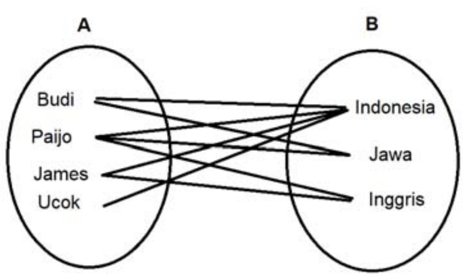
Sebagai contoh, misalnya A={Budi, Paijo, James, Ucok} dan B={Indonesia, Jawa, Inggris}, lalu x (anggota A) dikatakan berelasi dengan y (anggota B) jika x fasih berbahasa y.

Misalnya diketahui:

- Budi fasih berbahasa Indonesia & Jawa
- Paijo fasih berbahasa Indonesia, Jawa & Inggris.
- James fasih berbahasa Indonesia & Inggris
- Ucok fasih berbahasa Indonesia saja.

Cara Penyajian Relasi

Relasi "fasih berbahasa" tersebut dapat dinyatakan dalam diagram panah dan tabel berikut:



Nama/Bahasa	Indonesia	Jawa	Inggris
Budi	√	√	
Paijo	√	√	√
James	√		√
Ucok	√		

Definisi Formal

Relasi pada contoh sebelumnya dapat ditulis juga sebagai himpunan pasangan berurutan sebagai berikut:

- R={(Budi, Indonesia), (Budi, Jawa), (Paijo, Indonesia), (Paijo, Jawa), (Paijo, Inggris), (James, Indonesia), (James, Inggris), (Ucok, Indonesia)}

Secara umum,

- Suatu relasi R antara himpunan A dan B merupakan suatu himpunan bagian dari AxB (hasil kali Cartesian / himpunan pasangan berurutan dari anggota A dan B).
- Suatu **x** anggota A dan **y** anggota B dikatakan berelasi R, dinotasikan xRy, jika (x,y) merupakan anggota R. Jika (x,y) bukan anggota R, maka x dan y dikatakan tidak berelasi R, atau (x $\not R$ y)

a. Relasi pada Suatu Himpunan

Relasi pada suatu himpunan A adalah relasi antara sesama anggota himpunan A. Satu anggota dapat berelasi dengan beberapa anggota lain, dapat juga tidak.

Sebagai gambaran, misal:

- himpunannya adalah himpunan mahasiswa prodi Informatika USD angkatan 2020,
- relasinya adalah "mengetahui tempat tinggal".
- Mahasiswa x dikatakan berelasi dengan mahasiswa y jika x mengetahui tempat tinggal dari y. xRy. Anda mungkin mengetahui tempat tinggal dari beberapa teman Anda, tetapi tidak untuk beberapa teman lain.

Relasi pada Suatu Himpunan

Relasi pada suatu himpunan A adalah relasi antara sesama anggota himpunan A. Satu anggota dapat berelasi dengan beberapa anggota lain, dapat juga tidak.

Contoh lain misalnya

- mahasiswa x dikatakan berelasi dengan mahasiswa y jika x dan y berada di kelas yang sama untuk mata kuliah Matematika Diskrit.
- Jadi relasi ada bermacam-macam dan antara satu anggota dengan anggota yang lain bisa berelasi, bisa juga tidak.

Definisi Formal

Suatu relasi R pada himpunan A adalah suatu himpunan bagian dari AxA (pasangan berurutan anggota A). Suatu $x \in A$ dikatakan berelasi R dengan $y \in A$, dinotasikan xRy, jika $(x,y) \in R$.

Contoh: A himpunan yang beranggotakan empat orang mahasiswa, yaitu a, b, c dan d.

- Tentu saja setiap mahasiswa mengetahui tempat tinggalnya masing-masing.
- Mahasiswa a juga mengetahui tempat tinggal dari b, c dan d.
- Mahasiswa b juga mengetahui tempat tinggal mahasiswa a, tetapi tidak mengetahui tempat tinggal dari c dan d.
- Mahasiswa c tidak mengetahui tempat tinggal dari a, b dan d.
- Mahasiswa d mengetahui tempat tinggal b, tetapi tidak mengetahui tempat tinggal dari a dan c.

Definisi Formal

Contoh: Diberikan A himpunan yang beranggotakan empat orang mahasiswa, yaitu a, b, c dan d. Tentu saja setiap mahasiswa mengetahui tempat tinggalnya masing-masing. Mahasiswa a juga mengetahui tempat tinggal dari b, c dan d. Mahasiswa b juga mengetahui tempat tinggal mahasiswa a, tetapi tidak mengetahui tempat tinggal dari c dan d. Mahasiswa c tidak mengetahui tempat tinggal dari a, b dan d. Mahasiswa d mengetahui tempat tinggal b, tetapi tidak mengetahui tempat tinggal dari a dan c.

Dengan demikian, jika R adalah relasi "mengetahui tempat tinggal dari", maka relasi R dapat dituliskan sebagai berikut:

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(c,c),(d,b),(d,d)\}.$$

Contoh yang Lebih Matematis

Diketahui $A=\{1,3,5,7,9\}$ dan relasi R didefinisikan sebagai berikut:
$(x,y) \in R$ jika dan hanya jika $x+y$ merupakan kelipatan 3.

Relasi R dapat dituliskan secara eksplisit sebagai berikut:
$R = \{(1,5), (3,3), (3,9), (5,1), (5,7), (7,5), (9,3), (9,9)\}$

Latihan

1. Diketahui A={1,3,5,7,9}, relasi S didefinisikan sebagai berikut: $(x,y) \in S$ jika dan hanya jika $x+2y$ merupakan kelipatan 5. Tuliskan secara eksplisit semua anggota relasi S.

2. Misalkan A = {1, 2}, B = {1, 2, 3}. Didefinisikan relasi R dari A ke B sebagai berikut: $x \in A$ berelasi dengan $y \in B$ bila dan hanya bila x-y genap.
   a. Apakah 1R3, 2R3, 2R2 ?
   b. Tulislah anggota-anggota R

b. Operasi-operasi pada relasi

Misalkan R dan S adalah 2 buah relasi dari himpunan A ke himpunan B.

1. **Irisan, gabungan**

$$R \cup S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ atau } (x,y) \in S\}$$
$$R \cap S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ dan } (x,y) \in S\}$$

Dengan

- $R \cup S$ = gabungan = himpunan semua pasangan berurutan $(x,y) \in A \times B$ sedemikian sehingga $(x,y) \in R$ **atau** $(x,y) \in S$
- $R \cap S$ = irisan = himpunan semua pasangan berurutan $(x,y) \in A \times B$ sedemikian sehingga $(x,y) \in R$ **dan** $(x,y) \in S$

Contoh:

Misalkan A ={-1, 0, 1} dan B ={0, 1}. Relasi R dan S dari himpunan A ke himpunan B adalah sebagai berikut:

R ={(-1,0), (-1,1), (0,1)}

S = {(0,0), (1,1), (-1,1)}

Temukan $R \cup S$, dan $R \cap S$

b. Operasi-operasi pada relasi

2. **Komposisi**

Misalkan ada tiga himpunan A, B dan C. R merupakan relasi dari A ke B (atau $R \subseteq AxB$) dan S merupakan relasi dari himpunan B ke C (atau $S \subseteq BxC$). Komposisi R dan S (simbol $R \bullet S$) = relasi dengan elemen pertama merupakan elemen pertama R dan elemen kedua merupakan elemen kedua S

$$R \bullet S = \{ (x,z) \mid (x,y) \in R \text{ dan } (y,z) \in S \}$$

Contoh:

Misalkan R = {(a,a), (a,b), (c,b)} dan S = {(a,a), (b,c), (b,d)}. Temukan (R●S)

Penyelesaian:

(R●S) = {(a,a), (a,c), (a,d), (c,c), (c,d)}

c. Representasi Relasi (graf, matrix)

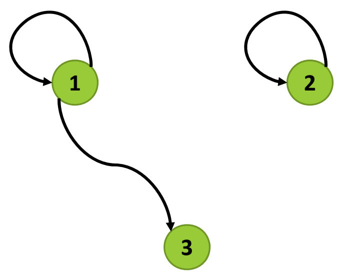
Misalkan R adalah relasi biner himpunan V={v1, v2….vm} ke himpunan W={w1, w2…wn}. R bisa dinyatakan dalam matriks Boolean A dengan ordo mxn dengan elemen-elemen sebagai berikut

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 \ jika \ (vi,wj) \in R \\ 0 \ jika (vi,wj) \notin R \end{cases}$$

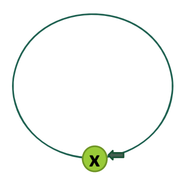
Nyatakan relasi R={(1,1), (1,3), (2,2)} dalam bentuk matriks. Maka

$$A = \begin{bmatrix} 101 \\ 010 \\ 000 \end{bmatrix}$$

Relasi R={(1,1), (1,3), (2,2)} bisa digambarkan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



2. Relasi Refleksif



Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan bersifat **refleksif** jika (x,x) ∈ R, untuk setiap x ∈ A. (Dengan kata lain, setiap anggota A berelasi dengan dirinya sendiri)

Contoh:

1. Relasi "mengetahui tempat tinggal dari" pada himpunan mahasiswa merupakan relasi yang refleksif, karena setiap orang mengetahui tempat tinggalnya masing-masing.
2. Pada himpunan bilangan bulat, relasi R yang didefinisikan: (x,y) ∈ R jika dan hanya jika x+y merupakan bilangan genap, merupakan relasi yang refleksif, karena setiap bilangan bulat x jika dijumlahkan dengan dirinya sendiri akan menjadi 2x, yang pasti merupakan bilangan genap.

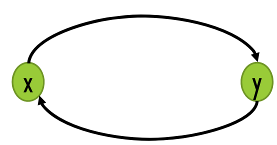
Relasi Refleksif

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan bersifat **refleksif** jika (x,x) ∈ R, untuk setiap x ∈ A. (Dengan kata lain, <u>setiap anggota A berelasi dengan dirinya sendiri</u>)

Contoh:

3. Pada himpunan bilangan bulat, relasi S yang didefinisikan: (x,y) ∈ S jika dan hanya jika x+y merupakan kelipatan 3, bukan merupakan relasi yang refleksif, karena ada bilangan 1 yang jika dijumlahkan dengan dirinya sendiri akan menjadi 2, yang bukan kelipatan 3.

Relasi Simetris

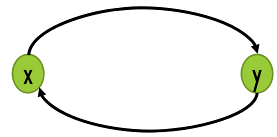


Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan bersifat **simetris** jika (x,y) ∈ R berakibat (y,x) ∈ R. (x berelasi dengan y berakibat y berelasi dengan x / ingat bahwa secara umum relasi hanya bersifat satu arah)

Contoh:

1. Relasi "berada dalam satu kelas yang sama" merupakan relasi yang bersifat simetris, karena jika x sekelas dengan y, maka y sekelas dengan x.

Relasi Simetris



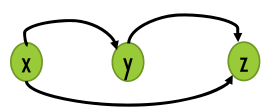
Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan bersifat **simetris** jika (x,y) ∈ R berakibat (y,x) ∈ R. (x berelasi dengan y berakibat y berelasi dengan x / ingat bahwa secara umum relasi hanya bersifat satu arah)

Contoh:

2. Relasi "mengetahui tempat tinggal" secara umum bukan merupakan relasi yang simetris, karena meskipun x mengetahui tempat tinggal y, belum tentu y juga mengetahui tempat tinggal x.

3. Pada himpunan bilangan bulat, relasi S yang didefinisikan: (x,y) ∈ S jika dan hanya jika x-y merupakan kelipatan 3, merupakan relasi yang simetris karena jika x-y merupakan kelipatan 3, maka y-x = -(x-y) juga merupakan kelipatan 3.

Relasi Transitif



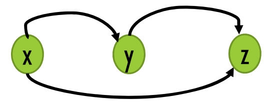
Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan bersifat **transitif** jika (x,y) ∈ R dan (y,z) ∈ R berakibat (x,z) ∈ R.

(jika x berelasi dengan y dan y berelasi dengan z, maka x berelasi dengan z / dapat diilustrasikan bahwa x berelasi dengan z melalui 'perantara' y)

Contoh:

1. Relasi "berada dalam satu kelas yang sama" merupakan relasi yang bersifat transitif, karena jika x sekelas dengan y dan y sekelas dengan z, maka x juga sekelas dengan z.

Relasi Transitif



Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan bersifat **transitif** jika $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ berakibat $(x,z) \in R$.

(jika x berelasi dengan y dan y berelasi dengan z, maka x berelasi dengan z / dapat diilustrasikan bahwa x berelasi dengan z melalui 'perantara' y)

Contoh:

2. Relasi "kurang dari" pada bilangan bulat, yaitu x berelasi dengan y jika $x<y$ merupakan relasi yang transitif karena $x<y$ dan $y<z$ berakibat $x<z$.

3. Relasi "ayah dari" bukan merupakan relasi yang transitif karena jika x ayah dari y dan y ayah dari z, maka x bukan ayah dari z (melainkan kakeknya).

3. Relasi Ekuivalensi

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan **relasi ekuivalensi** jika relasi R bersifat refleksif, simetris dan transitif pada A.

Contoh:

Pada himpunan mahasiswa prodi Informatika USD angkatan 2020, didefinisikan relasi: mahasiswa x berelasi dengan mahasiswa y jika x dan y berada di kelas yang sama untuk mata kuliah Matematika Diskrit. Relasi ini bersifat refleksif (karena setiap mahasiswa berada di kelas yang sama dengan dirinya sendiri), simetris dan transitif (sudah dijelaskan pada contoh-contoh sebelumnya).

Contoh yang Lebih Matematis

Pada himpunan bilangan bulat, didefinisikan relasi S sebagai berikut:
(x,y) ∈ S jika dan hanya jika x-y merupakan kelipatan 3.

Relasi S merupakan relasi ekuivalensi, karena:

1. Untuk setiap bilangan bulat x, x-x = 0. Bilangan 0 merupakan kelipatan 3 karena 0 = 3.0. Jadi (x,x) ∈ S, sehingga relasi S bersifat refleksif.

Contoh yang Lebih Matematis

2. Misal x dan y dua buah bilangan bulat sehingga (x,y) ∈ S. Hal ini berarti x-y merupakan kelipatan 3, atau dapat ditulis x-y=3.k, untuk suatu bilangan bulat k. Dengan demikian y-x= -(x-y) = -3.k = 3.(-k), dengan –k juga bilangan bulat. Jadi y-x juga kelipatan 3, sehingga (y,x) ∈ S. Dengan kata lain, relasi S bersifat simetris.
3. Misal x, y dan z bilangan-bilangan bulat sehingga (x,y), (y,z) ∈ S. Hal ini berarti x-y dan y-z merupakan kelipatan 3, atau dapat ditulis x-y=3.k dan y-z=3.m, untuk suatu bilangan bulat k dan m. Dengan demikian x-z=(x-y)+(y-z)=3.k+3.m=3.(k+m), dengan k+m juga bilangan bulat. Jadi x-z juga kelipatan 3, sehingga (x,z) ∈ S. Dengan kata lain, relasi S bersifat transitif.

Partisi dan Kelas-kelas Ekuivalensi

Relasi ekuivalensi pada suatu himpunan akan mempartisi himpunan tersebut menjadi beberapa himpunan bagian yang saling asing, yang kemudian disebut dengan kelas-kelas ekuivalensi. Dua anggota dari suatu himpunan dikatakan ekuivalen terhadap suatu relasi ekuivalensi jika keduanya berada di kelas ekuivalensi yang sama.

Contoh:

1. Relasi "berada di kelas yang sama untuk mata kuliah Matematika Diskrit" pada contoh sebelumnya akan mempartisi himpunan mahasiswa prodi Informatiks USD angkatan 2020 ke dalam lima buah kelas ekuivalensi, yaitu mahasiswa-mahasiswa kelas A, kelas B, kelas C, kelas D dan kelas E. Kelima himpunan bagian ini saling asing (tidak beririsan). Dua orang mahasiswa dikatakan "ekuivalen" jika berada di kelas yang sama.

Partisi dan Kelas-kelas Ekuivalensi

2. Pada himpunan bilangan bulat, didefinisikan relasi S sebagai berikut:
$(x,y) \in S$ jika dan hanya jika $x-y$ merupakan kelipatan 3.
Pada penjelasan sebelumnya telah dibuktikan bahwa S merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan bilangan bulat. Relasi S akan mempartisi himpunan bilangan bulat menjadi tiga buah kelas ekuivalensi, yaitu:
- himpunan bilangan bulat yang merupakan kelipatan 3.
- himpunan bilangan bulat yang jika dibagi 3 akan bersisa 1.
- himpunan bilangan bulat yang jika dibagi 3 akan bersisa 2.

Latihan

Pada himpunan bilangan bulat didefinisikan relasi R dan S sebagai berikut:

Untuk setiap bilangan bulat x dan y, $(x,y) \in R$ jika dan hanya jika $x+y$ merupakan bilangan genap, $(x,y) \in S$ jika dan hanya jika $x+y$ merupakan kelipatan 3.

1. Apakah relasi R merupakan relasi ekuivalensi? Jika benar, buktikan dan tentukan kelas-kelas ekuivalensinya. Jika salah, jelaskan sifat mana yang tidak terpenuhi.
2. Apakah relasi S merupakan relasi ekuivalensi? Jika benar, buktikan dan tentukan kelas-kelas ekuivalensinya. Jika salah, jelaskan sifat mana yang tidak terpenuhi.