

# PENGANTAR TEORI GRAF

(Eko Budi Santosa SJ)  
Universitas Sanata Dharma  
MATEMATIKA DISKRIT 2020/2021

## AGENDA

0. Pengantar
1. Awal Mula
2. Definisi Awal
3. Graf Euler
4. Graf Hamilton
5. Graf Berarah

## 0. Pengantar

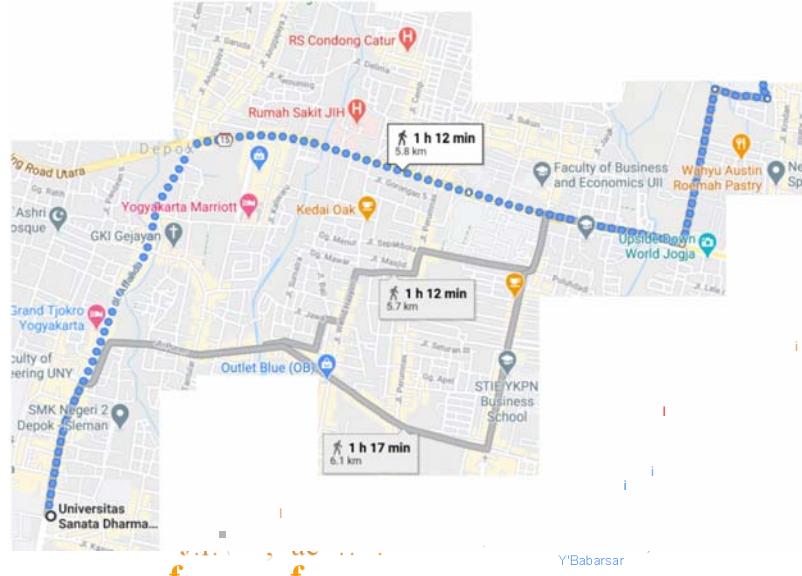


Eko Budi Santoso, S.J.

Matematika Diskrit

3/64

## Motivation



Eko Budi Santoso, S.J.

Matematika Diskrit

4/64

## Motivation



### Aplikasi GPS

Matematika apa yang dipakai oleh teknologi/aplikasi GPS?



Eko Budi Santoso, SJ.

Matematika Diskrit

5/64

## Motivation

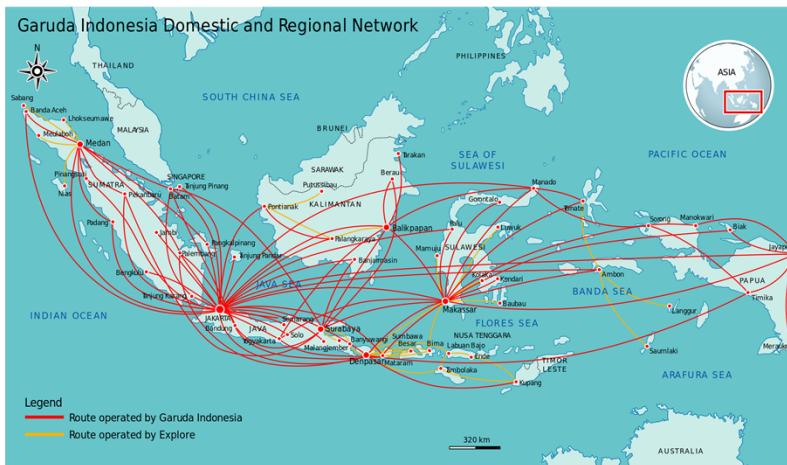
Banda Aceh (BTJ)		Timika (TIM)		Your booking	
Indonesia		Indonesia			
SUNDAY	MONDAY	TUESDAY	WEDNESDAY	THURSDAY	SATURDAY
			WED 26 AUG 2020		
(BTJ) 15:40 B11fd1(Aceh,Indone sia) GA147.GA654 ~ Show flight details	(I) 1stop(s) (CGK,PG)	(TIM) 10:00 Timika,Indonesi a 6738.8738.6738	USO 420.0	USO 1,669.0	0 0
(BTJ) 15:40 B11fd1(Aceh,Indone sia) GA147.GA654 ~ Show flight details	(I) 2stop(s) (CGK,UPG)	(TIM) 10:00 Timika,Indonesi a 6738.8738.6738	USO 442.0	USO 1,675.0	0 0
(BTJ) 15:40 B11fd1(Aceh,Indone sia) GA147.GA654 ~ Show flight details	(I) 2stop(s) (CGK,UPG)	(TIM) 10:00 Timika,Indonesi a 6738.8738.6738	USO 442.0	USO 1,675.0	0 0
(BTJ) 15:40 B11fd1(Aceh,Indone sia) GA147.GA654 ~ Show flight details	(I) 2stop(s) (CGK,CGT)	(TIM) 13:55 Timika,Indonesi a 8738.8738.6738	USO 1,908.0 2SeatLe n	USO 2,376.0	0 0

Eko Budi Santoso, SJ.

Matematika Diskrit

6/64

## Motivation



Eko Budi Santoso, SJ.

Matematika Diskrit

7/64

## Motivation

```
from Tkinter import *
import tkMessageBox
from ttk import *
import sqlite3
con=sqlite3.Connection('hrdb')
root=Tk()
Label(root,text="Simple Airline Booking System",font="Bold 20").pack()
def fun():
    root.destroy()
    root2=Tk()
    root2.title("Welcome,Customer To our Cancellation System")
    Label(root2,text="Enter last 4 digit of your Citizenship Number").grid(row=0,column=0)
    e1=Entry(root2)
    e1.grid(row=0,column=1)
    Label(root2,text="Choose your class").grid(row=1,column=0)
    w2=Combobox(root2,height=5,width=15,values=["BusinessClass","Economic"])
    w2.grid(row=1,column=1)
    Label(root2,text="select boarding").grid(row=2,column=0)
    w3=Combobox(root2,height=5,width=15,values=["New York","Chicago","Dallas","San Francisco"])
    w3.grid(row=2,column=1)
def fun2():
    d=e1.get()
    b=w2.get()
    c=w3.get()
    cur=con.cursor()
```

### Aplikasi Tiket

Matematika apa yang dipakai dalam aplikasi tiket?



Eko Budi Santoso, SJ.

Matematika Diskrit

8/64

## Motivation

5	3			7				
6				1	9	5		
	9	8					6	
8				6				3
4				8	3			1
7				2				6
	6				2	8		
		4	1	9				5
			8		7	9		



## Motivation

5	3			7				
6				1	9	5		
	9	8					6	
8				6				3
4				8	3			1
7				2				6
	6			2	8			
		4	1	9				5
			8		7	9		

```

board = [
    [5,3,0,0,7,0,0,0,01,
     [6,0,0,1,9,5,0,0,01,
      [0,9,8,0,0,1,0,6,01,
       [8,0,0,0,6,0,0,0,31,
        [4,0,0,8,0,3,0,0,11,
         [7,0,0,0,2,0,0,0,61,
          [0,6,0,0,0,0,2,8,01,
           [0,0,0,4,1,9,0,0,51,
            [0,0,0,0,8,0,0,7,9]
]

def print_board(bo):
    for i in range(len(bo)):
        if i % 3 == 0 and i != 0:
            print("-----")
        for j in range(len(bo[0])):
            if j % 3 == 0 and j != 0:
                print(" | ", end="")
            if j == 0:
                print(bo[i][j])
            else:
                print(str(bo[i][j]) + " ", end="")

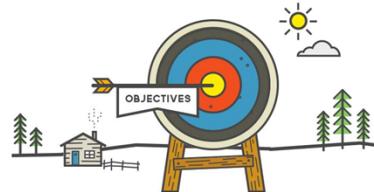
```

## Programming

Jika Anda diminta membuat sebuah program untuk menyelesaikan game sudoku tersebut, matematika apa yang dipakai?



## Learning Outcome



### Capaian Pembelajaran

Di akhir pembelajaran, Anda diharapkan

- ① mengetahui istilah-istilah dasar dalam teori graf
- ② mampu membuat model graf sebuah permasalahan sederhana
- ③ mampu menyelesaikan sebuah permasalahan sederhana dengan teori graf



## Masalah Pembagian Kelompok

### Pembagian Kelompok

Delapan orang akan melakukan rekreasi ke pantai. Berapa banyak mobil yang dibutuhkan dengan catatan pasangan-pasangan berikut tidak berada dalam satu mobil.

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>● Alan dan Clara</li> <li>● Budi dan David</li> <li>● Clara dan Edgar</li> <li>● Budi dan Fredi</li> <li>● Edgar dan Anna</li> <li>● David dan Greg</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● Alan dan Fredi</li> <li>● Clara dan Greg</li> <li>● Alan dan Anna</li> <li>● David dan Anna</li> <li>● Edgar dan Fredi</li> <li>● Greg dan Anna.</li> </ul> |
|---|--|



## Masalah Penjadwalan

	L	A	R	K	S	D	G	T	B
Logika		X		X	X				
Aljabar	X		X	X	X	X			X
Real		X				X			
Kalkulus	X	X			X		X		X
Statistika	X	X		X		X		X	
Diskrit		X	X		X				X
Graf				X				X	
Topologi					X		X		X
Bilangan		X		X		X		X	

### Penjadwalan

Perhatikan tabel data di atas. Kotak yang bertanda "X" berarti ada mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah tersebut.



## Masalah Penjadwalan

	L	A	R	K	S	D	G	T	B
Logika		X		X	X				
Aljabar	X		X	X	X	X			X
Real		X				X			
Kalkulus	X	X			X		X		X
Statistika	X	X		X		X		X	
Diskrit		X	X		X				X
Graf				X				X	
Topologi					X		X		X
Bilangan		X		X		X		X	

### Penjadwalan

Berdasarkan data tersebut, akan dibuat jadwal kuliah sehingga tidak ada tabrakan antar mata kuliah.



## Masalah Penjadwalan

	L	A	R	K	S	D	G	T	B
Logika	X			X	X				
Aljabar	X		X	X	X	X			X
Real		X				X			
Kalkulus	X	X			X		X		X
Statistika	X	X		X		X		X	
Diskrit		X	X		X				X
Gnf				X			X		
Topologi					X		X		X
Bilangan		X		X		X		X	

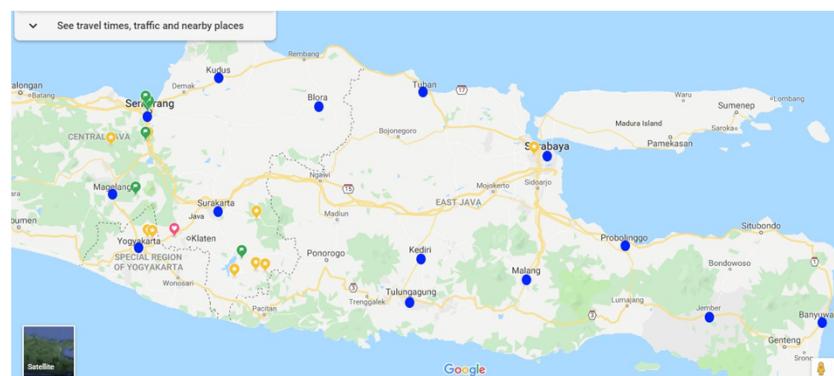
07.00-09.45					
10.00-12.45					
13.00-15.45					
16.00-18.45					

### Penjadwalan

Artinya, tidak ada mahasiswa yang dijadwalkan mengikuti dua kuliah pada saat yang sama.



## Route Terpendek

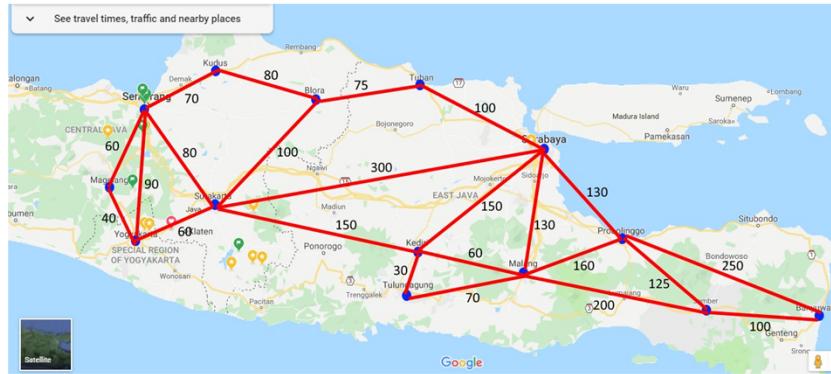


### Route Terpendek

Sebuah perusahaan yang berpusat di Surabaya akan mengadakan supervisi pada kantor-kantor cabang di Jawa Tengah dan Jawa Timur.



## Route Terpendek



### Route Terpendek

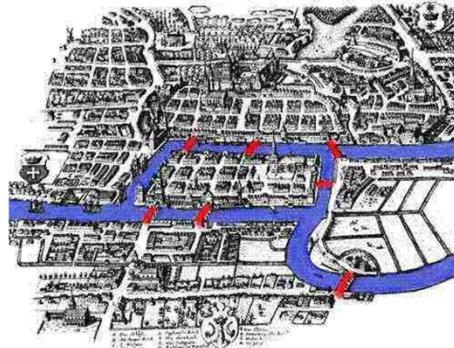
Tentukan jalur yang merupakan jalur terpendek untuk mengunjungi kantor-kantor cabang tersebut.



## 1. Awal Mula



## Konigsberg Problem

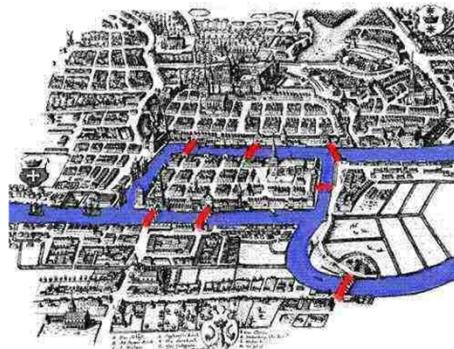


### Konigsberg Problem

Tahun 1737, Euler ditanya oleh warga kota Konigsberg, apakah mungkin berangkat dari satu tempat, kemudian berjalan melalui semua jembatan sekali saja dan kembali ke tempat semula.



## Konigsberg Problem



### Konigsberg Problem

Pertanyaan tersebut kemudian melahirkan teori baru dalam Matematika Diskrit yang dikenal dengan Teori Graf.



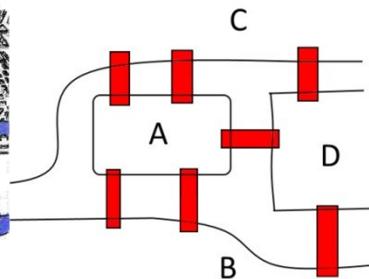
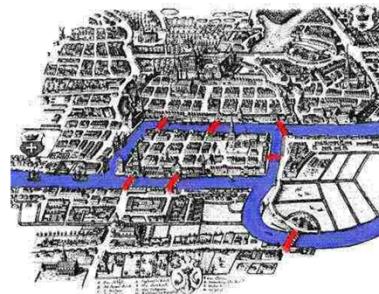
## Konigsberg Problem



- Léonhard Euler (1707 - 1783) was a great Swiss mathematician.
- Beginning his scientific career shortly after the death of Sir Isaac Newton.
- Spent the last 17 years of his life blind, but still very active.
- Theory of convergent sequences and to the calculus of variation.
- Quadratic equations, conic sections, and quadrics in Euclidean space.
- Because of his imaginative solution to the Konigsberg Bridge Problem, Euler is generally considered to be the father of modern-day graph theory.



## Konigsberg Problem

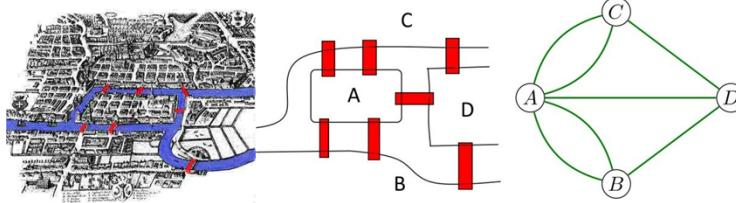


### Konigsberg Problem

Bagaimana Euler menjawab pertanyaan warga kota Konigsberg tersebut?



## Konigsberg Problem



### Konigsberg Problem

Permasalahan Konigsberg melahirkan Teori Graf. Gambar paling kanan adalah hasil abstraksi dari gambar paling kiri. Graf memuat titik dan sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut.



## 2. Definisi-definisi Awal



## Definisi Formal

### Definisi Graf

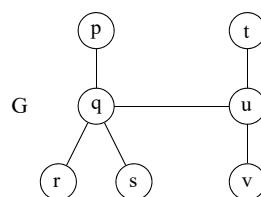
Sebuah **graf**  $G$  dibentuk dari himpunan tidak kosong  $V(G)$  yang memuat elemen-elemen yang disebut **titik** atau **simpul** (vertex) dan himpunan  $E(G)$  yang memuat pasangan-pasangan elemen  $V(G)$ , disebut **sisi** atau **rusuk** (edge), digambarkan dengan **ruas garis** atau **busur**. Setiap sisi memiliki satu atau dua titik yang berkaitan dengannya, disebut **titik ujung**.



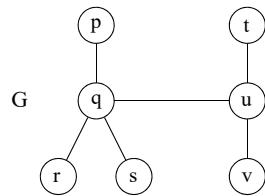
## Definisi Formal

### Definisi Graf

Sebuah **graf**  $G$  dibentuk dari himpunan tidak kosong  $V(G)$  yang memuat elemen-elemen yang disebut **titik** atau **simpul** (vertex) dan himpunan  $E(G)$  yang memuat pasangan-pasangan elemen  $V(G)$ , disebut **sisi** atau **rusuk** (edge), digambarkan dengan **ruas garis** atau **busur**. Setiap sisi memiliki satu atau dua titik yang berkaitan dengannya, disebut **titik ujung**.



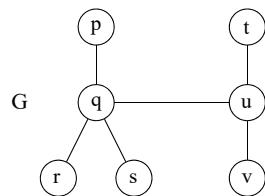
## Definisi



$$V(G) = \{p, q, r, s, t, u, v\}$$



## Definisi

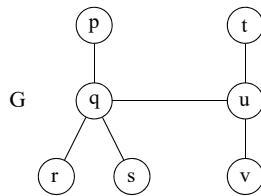


$$V(G) = \{p, q, r, s, t, u, v\}$$

$$E(G) = \{\{p, q\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{q, u\}, \{u, t\}, \{u, v\}\}$$



## Definisi



$$\begin{aligned} V(G) &= \{p, q, r, s, t, u, v\} \\ E(G) &= \{\{p, q\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{q, u\}, \{u, t\}, \{u, v\}\} \end{aligned}$$

Banyaknya titik disebut **orde** graf G.

Banyaknya sisi disebut **ukuran** graf G.

Jika  $V(G)$  dan  $E(G)$  adalah himpunan berhingga, graf G disebut sebagai **graf berhingga**.



## Definisi

(c)

(a)

(d)

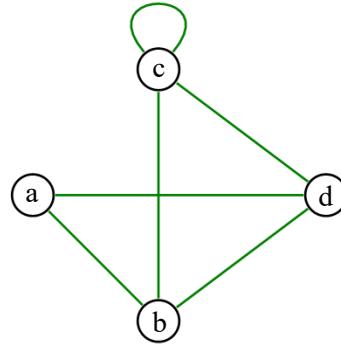
(b)

### Beberapa Definisi

Graf G dinamakan **graf kosong** jika dan hanya jika graf tersebut tidak memiliki sisi atau  $E(G) = \emptyset$ .



## Definisi

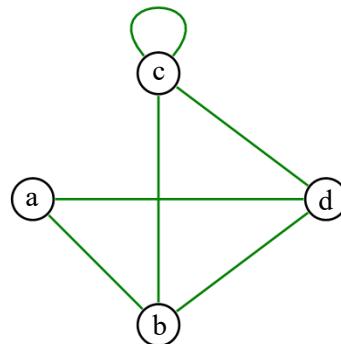


### Beberapa Definisi

Loop adalah sisi yang menghubungkan sebuah simpul dengan dirinya sendiri.



## Definisi

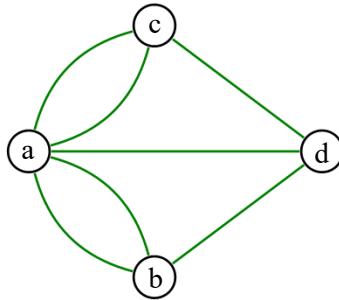


### Beberapa Definisi

Graf G dinamakan **pseudo graf** jika dan hanya jika graf tersebut memiliki loop.



## Definisi

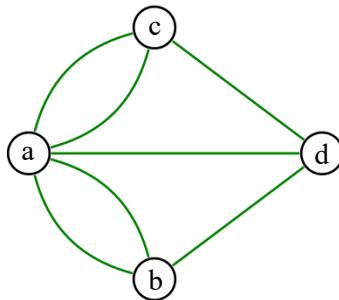


### Beberapa Definisi

Jika dua simpul dihubungkan oleh dua atau lebih sisi, maka sisi-sisi tersebut dinamakan sisi berganda (multiple edges).



## Definisi

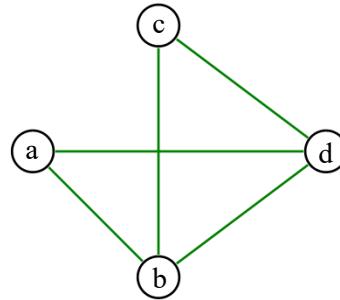


### Beberapa Definisi

Graf G dinamakan **multi graf** jika dan hanya jika graf tersebut memiliki sisi berganda.



## Definisi

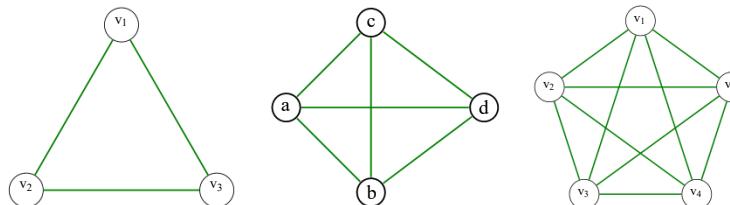


### Beberapa Definisi

Graf G dinamakan **graf sederhana** jika dan hanya jika graf tersebut tidak memiliki loop dan sisi berganda.



## Definisi

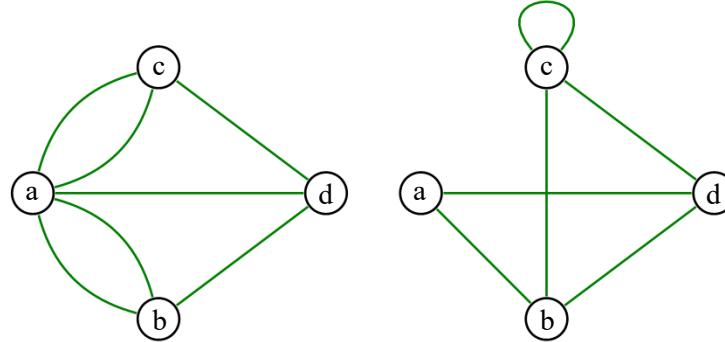


### Beberapa Definisi

Graf G dinamakan **graf lengkap**, diberi lambang  $K_n$ , jika dan hanya jika setiap pasang simpul dalam graf tersebut dihubungkan tepat satu sisi.



## Definisi

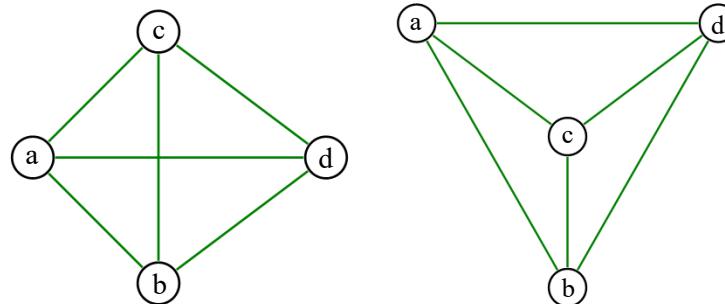


### Derajat Simpul

Diberikan graf  $G = (V, E)$ . Derajat simpul  $v \in V(G)$ , dilambangkan dengan  $\deg_G(v)$ , didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang melekat (incident) pada simpul tersebut.



## Catatan

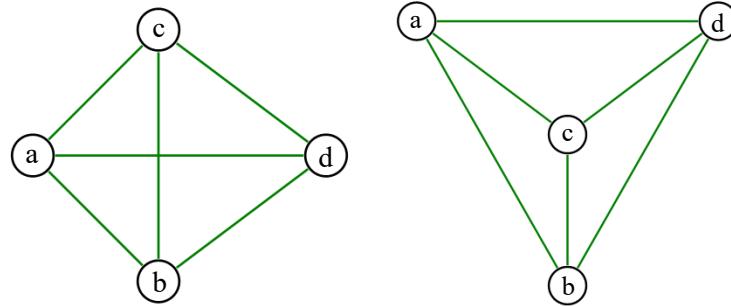


### Catatan

Graf  $G$  tidak ditentukan oleh gambar melainkan oleh hubungan antar sisi. Graf dalam gambar kiri dan graf dalam gambar kanan adalah dua graf yang sama.



## Definisi

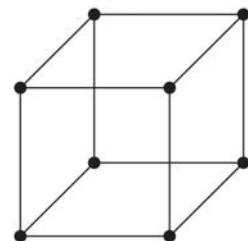


### Graf Planar

Graf G dinamakan **graf planar**, jika dan hanya jika graf tersebut bisa digambar sedemikian sehingga tidak ada sisi yang bersilangan.



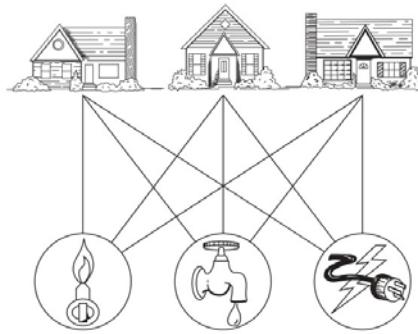
## Latihan Soal



Apakah graf planar?



## Latihan Soal

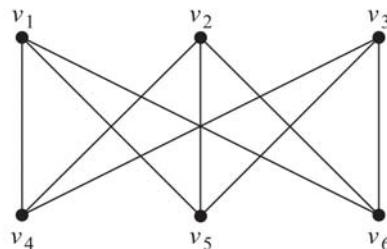


**FIGURE 1** Three houses and three utilities.

Ada tiga rumah yang akan dipasang instalasi saluran gas, air, dan listrik. Mungkinkan developer menghubungkan ketiga rumah tersebut sehingga saluran gas, air, dan listrik tidak bersilangan?



## Latihan Soal



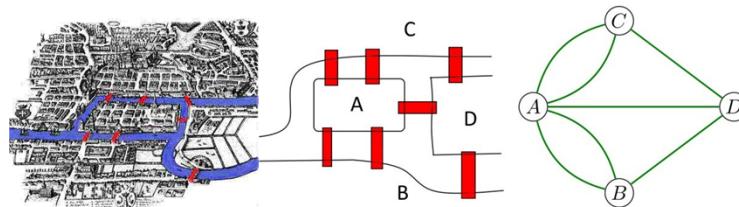
Apakah graf planar?



### 3. Graf Euler



#### Konigsberg Problem



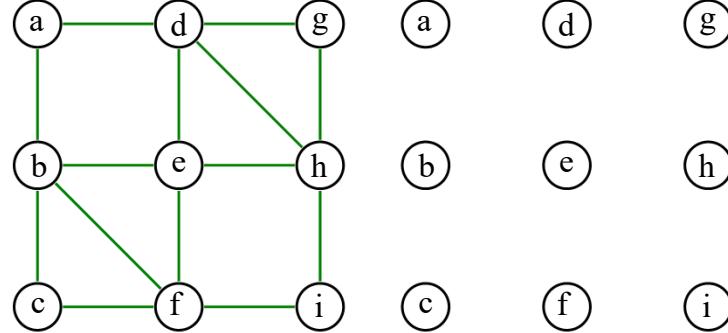
#### Konigsberg Problem

Kembali ke permasalahan penduduk kota Konigsberg. Dapatkah seseorang berangkat dari satu tempat, melewati semua jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat asal.

Jawab: Tidak bisa



## Graf Euler

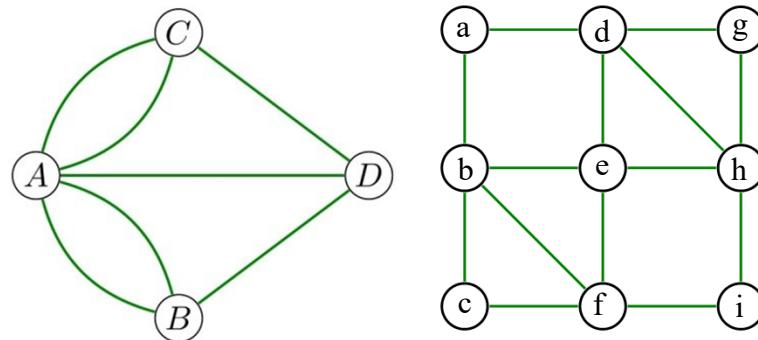


### Graf Euler

Dapatkah kita berangkat dari satu simpul, melewati setiap sisi tepat satu kali dan kembali ke simpul asal?



## Konigsberg Problem

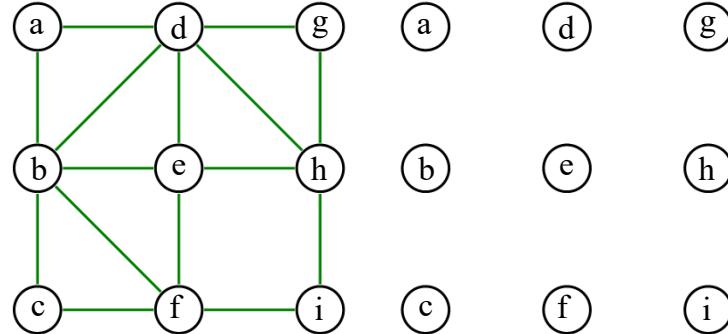


### Graf Euler

Graf G adalah graf Euler jika dan hanya jika setiap simpul berderajat genap.



## Graf Semi Euler



### Graf Semi Euler

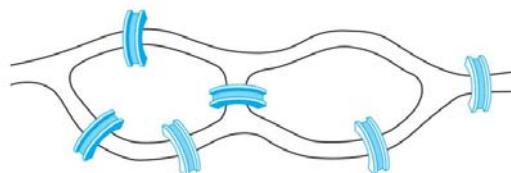
Dapatkah kita berangkat dari satu simpul, melewati setiap sisi tepat satu kali dan kembali ke simpul asal?

Jawab: **Tidak bisa**



## Latihan Soal

- 10.** Can someone cross all the bridges shown in this map exactly once and return to the starting point?

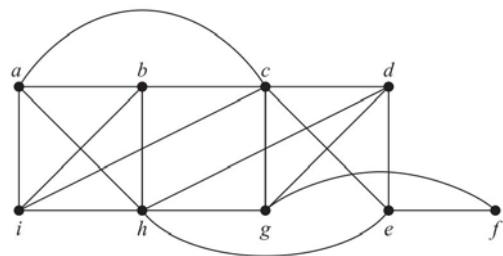


Bisakah seseorang melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke titik asal.



## Latihan Soal

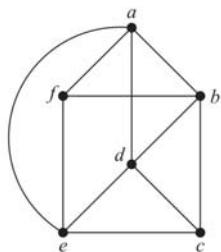
7.



Apakah graf Euler?



## Latihan Soal



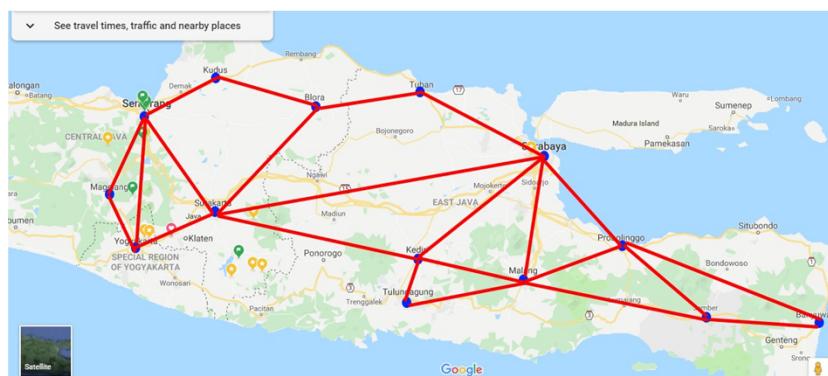
Apakah graf Euler?



## 4. Graf Hamilton



### Graf Hamilton

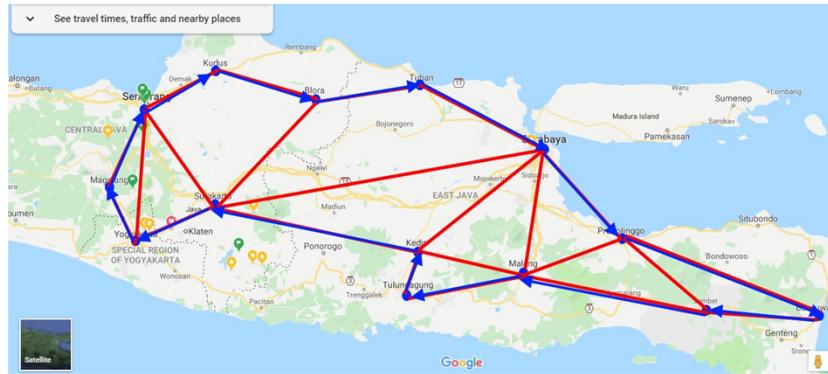


#### Graf Hamilton

Seorang salesman bertanggung jawab untuk wilayah Jawa Tengah, DIY, dan Jawa Timur. Berawal dari kantor pusat di DIY, dapatkah ia mengunjungi kantor-kantor cabang tepat sekali.



## Graf Hamilton



### Graf Hamilton

Seorang salesman bertanggung jawab untuk wilayah Jawa Tengah, DIY, dan Jawa Timur. Berawal dari kantor pusat di DIY, dapatkah ia mengunjungi kantor-kantor cabang tepat sekali.

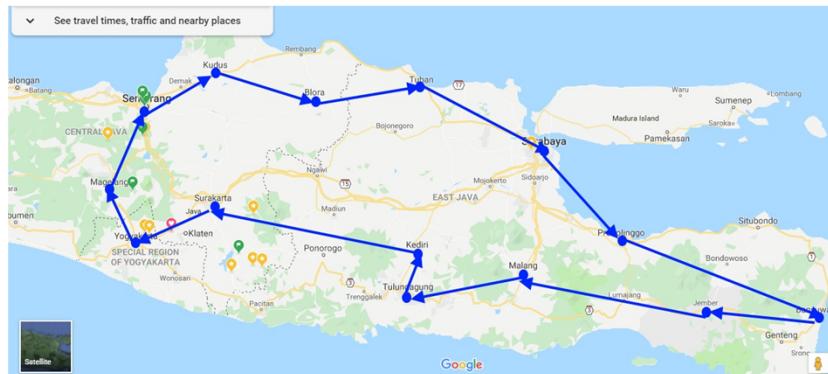


Eko Budi Santoso, S.J.

Matematika Diskrit

50/64

## Graf Hamilton



### Graf Hamilton

Seorang salesman bertanggung jawab untuk wilayah Jawa Tengah, DIY, dan Jawa Timur. Berawal dari kantor pusat di DIY, dapatkah ia mengunjungi kantor-kantor cabang tepat sekali.

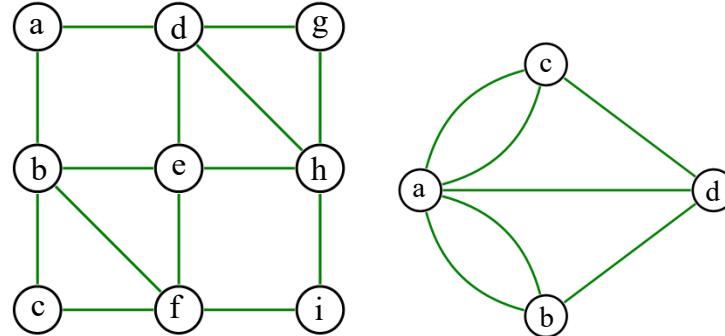


Eko Budi Santoso, S.J.

Matematika Diskrit

51/64

## Konigsberg Problem



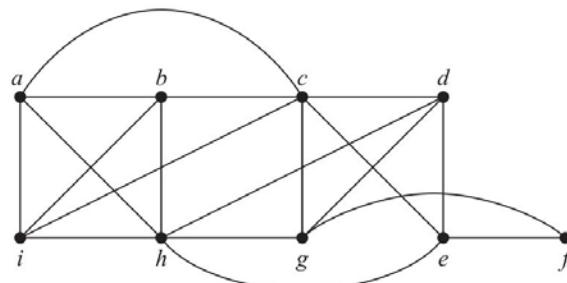
### Graf Hamilton

Graf G yang setiap simpul bisa dikunjungi tepat sekali (tidak harus melewati semua sisi) dan kembali ke simpul asal disebut **graf Hamilton**.



## Latihan Soal

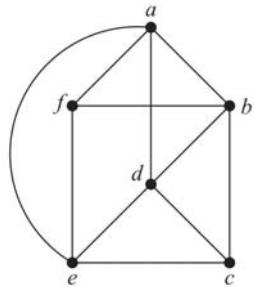
7.



Apakah graf Hamilton?



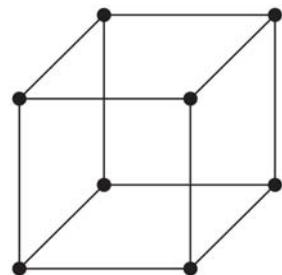
## Latihan Soal



Apakah graf Hamilton?



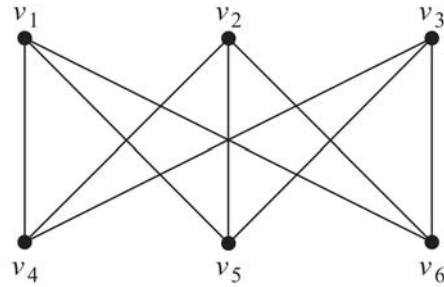
## Latihan Soal



Apakah graf Hamilton?



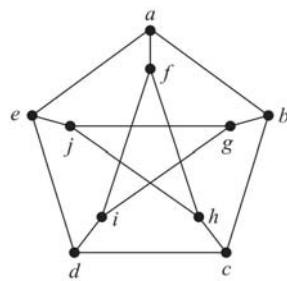
## Latihan Soal



Apakah graf Hamilton?



## Latihan Soal



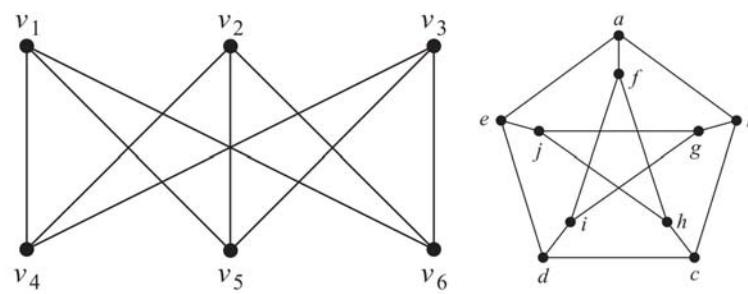
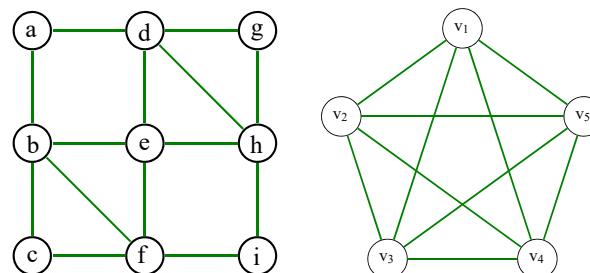
Apakah graf Hamilton?



## 5. Graf Berarah



### Graf Tidak Berarah



## Definisi

### Definisi Graf Berarah

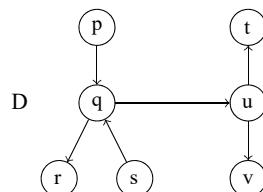
Sebuah **graf berarah** atau **Digraf** D dibentuk oleh sebuah himpunan tidak kosong  $V(D)$  yang memuat elemen-elemen **simpul** (vertex) dan himpunan  $E(D)$  yang memuat pasangan urut elemen  $V(D)$ , disebut **ruas garis berarah** atau **busur** (directed edge).



## Definisi

### Definisi Graf Berarah

Sebuah **graf berarah** atau **Digraf** D dibentuk oleh sebuah himpunan tidak kosong  $V(D)$  yang memuat elemen-elemen **simpul** (vertex) dan himpunan  $E(D)$  yang memuat pasangan urut elemen  $V(D)$ , disebut **ruas garis berarah** atau **busur** (directed edge).



$$E(D) = \{(p, q), (q, r), (s, q), (q, u), (u, t), (u, v)\}$$



## Graf Berarah



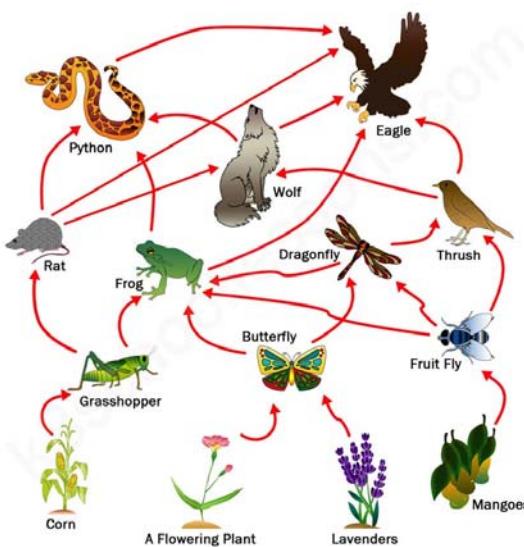
Eko Budi Santoso, SJ.

Matematika Diskrit

61/64

## Graf Berarah

A Food Web



Eko Budi Santoso, SJ.

Matematika Diskrit

62/64

## Latihan Soal

- 19.** Construct an influence graph for the board members of a company if the President can influence the Director of Research and Development, the Director of Marketing, and the Director of Operations; the Director of Research and Development can influence the Director of Operations; the Director of Marketing can influence the Director of Operations; and no one can influence, or be influenced by, the Chief Financial Officer.

Dalam sebuah perusahaan Presiden Direktur dapat mempengaruhi Direktur Penelitian dan Pengembangan, Direktur Pemasaran, dan Direktur Operasional. Direktur Penelitian dan Pengembangan dapat mempengaruhi Direktur Operasional. Direktur Pemasaran juga dapat mempengaruhi Direktur Operasional. Tidak ada yang dapat mempengaruhi atau dipengaruhi oleh Kepala Bagian Keuangan.



## Latihan Soal

- 20.** The word apple can refer to a plant, a food, or a computer company. Construct a word graph for these nouns: apple, strawberry, lenovo, cheese, chocolate, ibm, oak, microsoft, hedge, grass, cake, quiche, hp, cider, donut, azalea, pine, dell, fir, raspberry. Connect two vertices by an undirected edge if the nouns they represent have similar meaning.

Kata "Apple" dapat mengacu pada sebuah tanaman, makanan, atau perusahaan komputer. Buatlah sebuah graf yang menyatakan situasi berikut: apple, strawberry, lenovo, cheese, chocolate, IBM, oak (nama pohon), Microsoft, pagar, rumput, cake, quiche (sejenis kue), HP, cedar (nama pohon), donut, Azalea (nama bunga), Pinus, Dell, Fir (nama pohon), dan rasberry. Hubungkan dua kata dengan sisi tidak berarah jika keduanya memiliki makna yang sama.

