

VOLUME  
4

GUIDORIZZI

Um Curso de  
**CÁLCULO**

6ª edição

50 ANOS  
LTC

# Sumário

- 1 Sequências Numéricas, 1**
  - 1.1 Sequência e Limite de Sequência, 1
  - 1.2 Sequências Crescentes e Sequências Decrescentes, 10
- 2 Séries Numéricas, 15**
  - 2.1 Série Numérica, 15
  - 2.2 Critério de Convergência para Série Alternada, 31
  - 2.3 Uma Condição Necessária para que uma Série Seja Convergente.  
Critério do Termo Geral para Divergência, 34
- 3 Critérios de Convergência e Divergência para Séries de Termos Positivos, 36**
  - 3.1 Critério da Integral, 36
  - 3.2 Critérios de Comparação e do Limite, 39
  - 3.3 Critério de Comparação de Razões, 50
  - 3.4 Critérios da Razão e da Raiz, 54
  - 3.5 Critério de Raabe, 60
  - 3.6 Critério de De Morgan, 62
- 4 Séries Absolutamente Convergentes. Critério da Razão para Séries de Termos Quaisquer, 66**
  - 4.1 Série Absolutamente Convergente e Série Condicionalmente Convergente, 66
  - 4.2 Critério da Razão para Séries de Termos Quaisquer, 68
  - 4.3 Reordenação de uma Série, 72
- 5 Critérios de Cauchy e de Dirichlet, 75**
  - 5.1 Sequências de Cauchy, 75
  - 5.2 Critério de Cauchy para Convergência de Série, 79
  - 5.3 Critério de Dirichlet, 80
- 6 Sequências de Funções, 85**
  - 6.1 Sequência de Funções. Convergência, 85
  - 6.2 Convergência Uniforme, 89
  - 6.3 Continuidade, Integrabilidade e Derivabilidade de Função Dada como Limite de uma Sequência de Funções, 95
  - 6.4 Critério de Cauchy para Convergência Uniforme de uma Sequência de Funções, 97
  - 6.5 Demonstrações de Teoremas, 98
- 7 Série de Funções, 101**
  - 7.1 Série de Funções, 101

- 7.2 Critério de Cauchy para Convergência Uniforme de uma Série de Funções, 102
- 7.3 O Critério  $M$  de Weierstrass para Convergência Uniforme de uma Série de Funções, 102
- 7.4 Continuidade, Integrabilidade e Derivabilidade de Função Dada como Soma de uma Série de Funções, 108
- 7.5 Exemplo de Função que É Contínua em  $\mathbb{R}$ , mas que Não É Derivável em Nenhum Ponto de  $\mathbb{R}$ , 111
- 8 Série de Potências, 115**
  - 8.1 Série de Potências, 115
  - 8.2 Série de Potências: Raio de Convergência, 116
  - 8.3 Continuidade, Integrabilidade e Derivabilidade de Função Dada como Soma de uma Série de Potências, 121
- 9 Introdução às Séries de Fourier, 134**
  - 9.1 Série de Fourier de uma Função, 134
  - 9.2 Uma Condição Suficiente para Convergência Uniforme de uma Série de Fourier, 141
  - 9.3 Uma Condição Suficiente para que a Série de Fourier de uma Função Converja Uniformemente para a Própria Função, 144
  - 9.4 Convergência de Série de Fourier de Função de Classe  $C^2$  por Partes, 153
- 10 Equações Diferenciais de 1ª Ordem, 158**
  - 10.1 Equação Diferencial de 1ª Ordem, 158
  - 10.2 Equações de Variáveis Separáveis. Soluções Constantes, 159
  - 10.3 Equações de Variáveis Separáveis: Método Prático para a Determinação das Soluções Não Constantes, 162
  - 10.4 Equações Lineares de 1ª Ordem, 170
  - 10.5 Equação de Bernoulli, 176
  - 10.6 Equações do Tipo  $y' = f(y/x)$ , 178
  - 10.7 Redução de uma Equação Autônoma de 2ª Ordem a uma Equação de 1ª Ordem, 180
  - 10.8 Equações Diferenciais Exatas, 188
  - 10.9 Fator Integrante, 197
  - 10.10 Exemplos Diversos, 204
- 11 Equações Diferenciais Lineares de Ordem  $n$ , com Coeficientes Constantes, 226**
  - 11.1 Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem, com Coeficientes Constantes, 226
  - 11.2 Equações Diferenciais Lineares, Homogêneas, de 2ª Ordem, com Coeficientes Constantes, 230
  - 11.3 Equações Diferenciais Lineares, com Coeficientes Constantes, de Ordens 3 e 4, 239
  - 11.4 Equações Diferenciais Lineares, Não Homogêneas, com Coeficientes Constantes, 247
  - 11.5 Determinação de Solução Particular pelo Método da Variação das Constantes, 265
  - 11.6 Determinação de Solução Particular através da Transformada de Laplace, 267

- 12 **Sistemas de Duas e Três Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem e com Coeficientes Constantes, 278**
  - 12.1 Sistema Homogêneo de Duas Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem, com Coeficientes Constantes, 278
  - 12.2 Método Prático: Preliminares, 285
  - 12.3 Método Prático para Resolução de um Sistema Homogêneo, com Duas Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem e com Coeficientes Constantes, 295
  - 12.4 Sistemas com Três Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem, Homogêneas e com Coeficientes Constantes, 307
  - 12.5 Sistemas Não Homogêneos: Determinação de Solução Particular pelo Método das Variações das Constantes, 326
- 13 **Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem, com Coeficientes Variáveis, 335**
  - 13.1 Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem, com Coeficientes Variáveis e Homogêneas, 335
  - 13.2 Wronskiano. Fórmula de Abel-Liouville, 340
  - 13.3 Funções Linearmente Independentes e Funções Linearmente Dependentes, 342
  - 13.4 Solução Geral de uma Equação Diferencial Linear de 2ª Ordem Homogênea e de Coeficientes Variáveis, 346
  - 13.5 Redução de uma Equação Diferencial Linear de 2ª Ordem, com Coeficientes Variáveis, a uma Linear de 1ª Ordem, 349
  - 13.6 Equação de Euler de 2ª Ordem, 355
  - 13.7 Equação Diferencial Linear de 2ª Ordem e Não Homogênea. Método da Variação das Constantes, 356
- 14 **Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais de 1ª e 2ª Ordens, 363**
  - 14.1 Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais de 1ª e 2ª Ordens, 363
- 15 **Tipos Especiais de Equações, 380**
  - 15.1 Equação Diferencial de 1ª Ordem e de Variáveis Separáveis, 380
  - 15.2 Equação Diferencial Linear de 1ª Ordem, 382
  - 15.3 Equação Generalizada de Bernoulli, 383
  - 15.4 Equação de Riccati, 385
  - 15.5 Equação do Tipo  $y' = f(ax + by)$ , 387
  - 15.6 Equação do Tipo  $y' = f(ax + by + c)$ , 388
  - 15.7 Equação do Tipo  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , 388
  - 15.8 Equação do Tipo  $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + c}\right)$ , 389
  - 15.9 Equação do Tipo  $xy = yf(xy)$ , 391
  - 15.10 Equação do Tipo  $\ddot{x} = f(x)$  (ou  $y'' = f(y)$ ), 391
  - 15.11 Equação Diferencial de 2ª Ordem do Tipo  $F(x, y', y'') = 0$ , 393
  - 15.12 Equação Diferencial de 2ª Ordem do Tipo  $y'' = f(y) y'$ , 394

- 15.13 Equação Diferencial de 2ª Ordem do Tipo  $y'' = f(y, y')$ , 395
- 15.14 Redução de uma Equação Linear de 2ª Ordem do Tipo  $\ddot{y} = g(t)y$  a uma Equação de Riccati, 399
- 15.15 Redução de uma Equação Diferencial Linear de 2ª Ordem do Tipo  $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$  a uma da Forma  $\ddot{y} = g(t)y$ , 401

**Apêndice A Teorema de Existência e Unicidade para Equação Diferencial de 1ª Ordem do Tipo  $y = f(x, y)$ , 403**

- A.1 Preliminares, 403
- A.2 Teorema de Existência, 406
- A.3 Teorema de Unicidade, 410

**Apêndice B Sobre Séries de Fourier, 413**

- B.1 Demonstração do Lema da Seção 9.3, 413
- B.2 Estudo da Série  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x}$ , 417
- B.3 Demonstração do Teorema da Seção 9.4, 420
- B.4 Utilização das Séries de Fourier na Determinação de Solução Particular de uma Equação Diferencial Linear de 2ª Ordem, com Coeficientes Constantes, Quando o 2º Membro É uma Função Periódica, 424

**Apêndice C O Incrível Critério de Kummer, 427**

- C.1 Lema de Kummer, 427
- C.2 Critério de Kummer, 428

**Respostas, Sugestões ou Soluções, 431**

**Bibliografia, 472**

**Índice, 474**