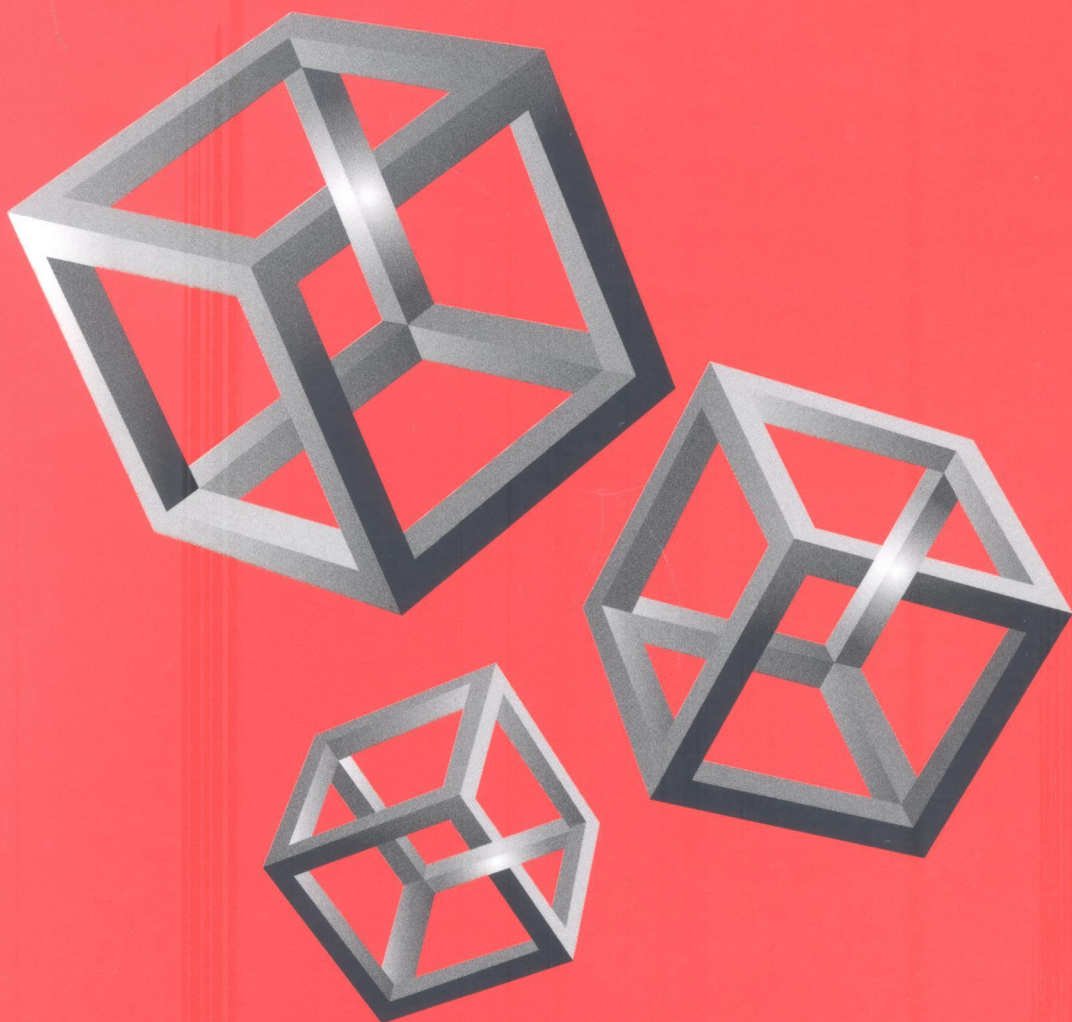


# Um Convite à Matemática

*com técnicas de demonstração e notas históricas*

**Daniel Cordeiro de Moraes Filho**



**SBM**

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>xi</b>
<b>1 As notações matemáticas</b>	<b>1</b>
1.1 Para que servem as notações matemáticas? . . . . .	2
1.2 Algumas notações mais utilizadas . . . . .	4
1.3 Alguns fatos sobre as notações . . . . .	6
1.3.1 O alfabeto grego . . . . .	6
1.3.2 Fatos importantes sobre o uso de certas notações . . . . .	7
1.3.3 *Como representar o infinito . . . . .	9
1.3.4 A diferença entre expressões indeterminadas e expressões impossíveis . . . . .	10
1.3.5 *Curiosidades sobre o número $\pi$ . . . . .	13
1.4 *Uma viagem pelas notações do passado . . . . .	15
1.4.1 Curiosidade: como surgiu o símbolo de igualdade . . . . .	16
1.4.2 Outros episódios da história das notações . . . . .	17
1.5 Problemas envolvendo raciocínio lógico - I . . . . .	19
<b>2 Como se expressa um fato matemático: um pouco de Lógica</b>	<b>21</b>
2.1 Sentenças, sentenças abertas e quantificadores . . . . .	21
2.1.1 Os quantificadores universal e existencial . . . . .	25
2.1.2 A linguagem de conjuntos e a Lógica . . . . .	27
2.1.3 *Curiosidade: os paradoxos lógicos . . . . .	33
2.2 Conectivos e proposições compostas (O Cálculo Proposicional) . .	36
2.3 Problemas envolvendo raciocínio lógico - II . . . . .	41
<b>3 Mais um pouco de Lógica Matemática</b>	<b>43</b>
3.1 Tabelas-verdade . . . . .	43

3.2	Sentenças equivalentes na Lógica Formal . . . . .	44
3.2.1	**Sentenças condicionais e implicativas na Lógica Formal . . . . .	45
3.3	Argumentos . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Sentenças condicionais e implicativas. Condições necessárias e suficientes</b>	<b>53</b>
4.1	Sentenças condicionais . . . . .	53
4.2	Sentenças implicativas . . . . .	57
4.3	Sentenças condicionais, implicativas e a linguagem de conjuntos . . . . .	58
4.4	*Curiosidade: a verdade das premissas . . . . .	61
4.5	Duas notações que se costumam confundir . . . . .	62
4.6	Condição necessária e condição suficiente . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Se vale a ida, vale a volta? A recíproca de uma sentença</b>	<b>69</b>
5.1	A recíproca de uma sentença . . . . .	69
5.2	Sentenças equivalentes . . . . .	71
5.2.1	A importância da equivalência de sentenças . . . . .	73
5.3	Um exemplo de como usar a recíproca de uma sentença . . . . .	74
5.4	**A bicondicional . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Desvendando os teoremas - Parte I</b>	<b>79</b>
6.1	O que é um teorema? (Hipótese e tese) . . . . .	79
6.1.1	*Curiosidade: famosos e apaixonados por Matemática . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Desvendando os teoremas - Parte II</b>	<b>89</b>
7.1	Mais tipos de teorema . . . . .	89
7.2	A generalização de um teorema . . . . .	92
7.3	A família dos teoremas . . . . .	95
7.3.1	Teoremas de existência e unicidade . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Desvendando as definições matemáticas</b>	<b>101</b>
8.1	O que é uma definição matemática? . . . . .	101
8.1.1	Definições equivalentes . . . . .	111
<b>9</b>	<b>Modelos axiomáticos. Convenções matemáticas</b>	<b>115</b>
9.1	Noções primitivas e axiomas . . . . .	115
9.2	O modelo axiomático . . . . .	118
9.2.1	Mais algumas palavras sobre modelos axiomáticos . . . . .	120
9.2.2	Axiomatização da adição de números reais . . . . .	122
9.2.3	*Curiosidade: o modelo axiomático em outras áreas . . . . .	129
9.3	Convenções matemáticas . . . . .	130

<b>10</b>	<b>Conjecturas e contraexemplos</b>	<b>135</b>
10.1	Conjecturas e contraexemplos . . . . .	135
10.1.1	Demonstrações usando contraexemplo . . . . .	139
10.1.2	*Curiosidade: a perfeição do conjunto vazio . . . . .	141
10.2	Problemas envolvendo raciocínio lógico - III . . . . .	142
<b>11</b>	<b>Desvendando as demonstrações</b>	<b>145</b>
11.1	O que é uma demonstração? (O raciocínio dedutivo) . . . . .	145
11.2	Exemplo motivador da estrutura lógica de uma demonstração . . .	146
11.3	Definição de demonstração . . . . .	149
<b>12</b>	<b>*Estratégias para demonstrar um resultado matemático</b>	<b>155</b>
12.1	A redação de uma demonstração . . . . .	157
12.2	O que fazer para demonstrar um teorema? . . . . .	157
12.3	Pausa para uma observação pertinente . . . . .	159
<b>13</b>	<b>Técnicas de demonstração</b>	<b>161</b>
13.1	Introdução . . . . .	161
13.2	As técnicas mais simples de demonstração . . . . .	162
13.3	Demonstrações utilizando a forma de representar um número . . .	164
<b>14</b>	<b>Quando é necessário saber negar (aprendendo a negar na Matemática)</b>	<b>171</b>
14.1	Negação de sentenças envolvendo quantificadores . . . . .	172
14.2	A negação de uma sentença condicional . . . . .	174
14.3	Resumo da negação de sentenças . . . . .	175
14.4	Método para negar sentenças com mais de um quantificador . . .	177
<b>15</b>	<b>Um pouco mais de Lógica. As demonstrações por casos</b>	<b>181</b>
15.1	*Tautologias . . . . .	181
15.1.1	*Curiosidade: um papo tautológico . . . . .	182
15.2	Absurdos, contradições . . . . .	182
15.3	**Tabelas-resumo das Leis do Cálculo Proposicional . . . . .	182
15.4	Demonstração de teoremas com hipóteses e teses especiais . . . .	184
15.4.1	Teoremas cuja hipótese é uma sentença disjuntiva. As demonstrações por casos ou por exaustão . . . . .	184
15.4.2	Teoremas cuja tese é uma sentença conjuntiva . . . . .	185
15.4.3	Teoremas cuja tese é uma sentença disjuntiva . . . . .	186
<b>16</b>	<b>O absurdo tem seu valor! As demonstrações por redução a um ab-</b>	
	<b>surdo</b>	<b>187</b>
16.2	Redução a um absurdo . . . . .	188

16.3	Demonstração direta <i>versus</i> demonstração por contradição . . . .	193
16.4	Quando usar a demonstração direta e quando usar a indireta? . . .	194
<b>17</b>	<b>Mais duas técnicas de demonstração</b>	<b>203</b>
17.1	Não perca a tese de vista. A técnica “de trás para frente” . . . . .	203
17.2	Uma outra técnica para demonstrar $H \Rightarrow (T_1 \text{ ou } T_2)$ . . . . .	205
<b>18</b>	<b>Absurdo, resultados de existência, de unicidade</b>	<b>207</b>
18.1	Demonstrações construtivas. O absurdo e os resultados de existência	207
18.2	Demonstração por absurdo para demonstrar resultados de unicidade	209
18.3	Redução ao absurdo e as demonstrações gratuitas . . . . .	210
<b>19</b>	<b>Demonstrações usando a contrapositiva</b>	<b>213</b>
19.1	A contrapositiva de uma sentença . . . . .	213
19.2	Redução a um absurdo <i>versus</i> demonstração usando a contrapositiva	215
<b>20</b>	<b>Demonstrações em um modelo axiomático: um pouco de abstração</b>	<b>219</b>
20.1	Trabalhando com demonstrações em um modelo axiomático . . .	219
<b>21</b>	<b>Demonstrações com o auxílio de figuras</b>	<b>229</b>
<b>22</b>	<b>Demonstrações por Indução. O método indutivo e o método dedutivo</b>	<b>235</b>
22.2	Princípio de Indução: o infinito dominado! . . . . .	236
22.3	*Raciocínio indutivo, generalizações . . . . .	243
<b>23</b>	<b>Sofismas, o cuidado com os autoenganos e com os enganadores!</b>	<b>247</b>
23.1	*Sofismas . . . . .	247
23.2	Seção desafio final: descubra se é demonstração! . . . . .	252
<b>24</b>	<b>Resumo e tabela-resumo das técnicas de demonstração</b>	<b>255</b>
24.1	Resumo das técnicas de demonstração . . . . .	255
24.2	Tabela-resumo das técnicas de demonstração . . . . .	257
<b>25</b>	<b>*Textos complementares de leitura</b>	<b>259</b>
25.1	Conjecturas e problemas em aberto mais socialmente famosos . .	259
25.1.1	O problema das quatro cores . . . . .	259
25.1.2	Até os gênios se enganam . . . . .	260
25.1.3	A sensação do século passado: o Último Teorema de Fermat	261
25.1.4	Curiosidade: coisas da Matemática... . . . .	264
25.2	Alguns problemas em aberto de fácil entendimento . . . . .	266
25.2.1	A Conjectura de Goldbach . . . . .	266
25.2.2	Os primos gêmeos . . . . .	266

25.2.3	Números perfeitos . . . . .	266
25.2.4	Os números de Mersenne . . . . .	267
25.2.5	Números amigos . . . . .	269
25.2.6	Números de Fermat . . . . .	269
25.3	Outros problemas em aberto . . . . .	270
25.3.1	Dinheiro para quem resolver problemas matemáticos . . .	270
25.3.2	Curiosidade: uma palestra silenciosa . . . . .	271
25.4	Algumas cômicas demonstrações . . . . .	271
<b>26</b>	<b>Respostas e sugestões para os exercícios</b>	<b>273</b>
	<b>Referências</b>	<b>299</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>304</b>