Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ»

Выполнил
студент группы 3630102/70201

Густомясов Евгений

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

1.1 Задача 1

Имеем 2x2 матрицу A: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$

Пусть все элементы матрицы a_{ij} имеют теперь радиус ϵ: $rada_{ij} = \epsilon$.

Получаем $\begin{pmatrix} [1-\epsilon, 1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \\ [1.1-\epsilon, 1.1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \end{pmatrix}$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица (1.1) содержит особенные матрицы.

1.2 Задача 2

Имеем n x n матрицу **A**: $\begin{pmatrix} 1 & [0,\epsilon] & ... & [0,\epsilon] \\ [0,\epsilon] & 1 & ... & [0,\epsilon] \\ : & : & : & : \\ [0,\epsilon] & [0,\epsilon] & ... & 1 \end{pmatrix}$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица (1.2) содержит особенные матрицы.

2 Теория

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ называется неособенной, если неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

2.1 Признак Бека

Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ такова, что ее середина mid A неособенна и

$$\rho(|(midA)|^{-1} \cdot radA) < 1 \tag{1}$$

Тогда **A** неособенна.

2.2 Теорема

Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ такова, что ее середина mid A неособенна и

$$\max_{i \le j \le n} (radA \cdot |(midA)|^{-1})_{jj} \ge 1 \tag{2}$$

Тогда **A** - особенная.

2.3 Теорема Адамара

Интервальная матрица с диагональным преобладанием является неособенной.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python в среде разработки PyCharm. Использованы библиотеки numpy для реализации вычислений. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Задача 1

Воспользуемся для решения теоремой о максимальном элементе диагонали.
Имеем интервальную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\epsilon, 1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \\ [1.1-\epsilon, 1.1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \end{pmatrix} \tag{3}$$

Рассчитаем для нее середину:

$$midA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

а также радиус:

$$radA = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \tag{5}$$

Определитель середины отличен от 0, т.е. матрица не вырождена и можно применить теорему.
Имеем:

$$radA \cdot |(midA)|^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21\epsilon & 20\epsilon \\ 21\epsilon & 20\epsilon \end{pmatrix} \tag{6}$$

Среди элементов диагонали ищем максимальный и применяем (2): $\epsilon \geq \frac{1}{21}$.

Проверим с помощью программы. В ней реализованы критерий Бека и данная теорема. На вход подается ϵ и далее выдается результат:

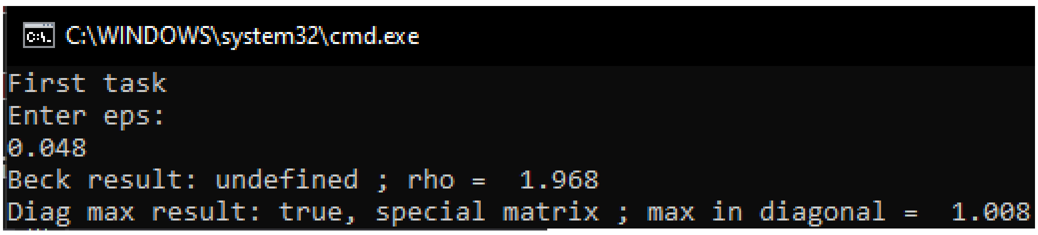
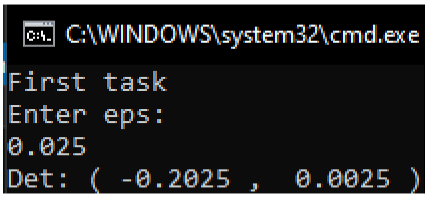


Рис. 1: Проверка правильности решения задачи 1 критерием Бека

Попробуем улучшить оценку.
Введем $\delta = 0.1$ - разность неединичного элемента исходной матрицы и 1.

Имеем оценку $\epsilon = \frac{\delta}{n^2}$.
Тогда получаем $\epsilon = 0.025$.
Проверим:

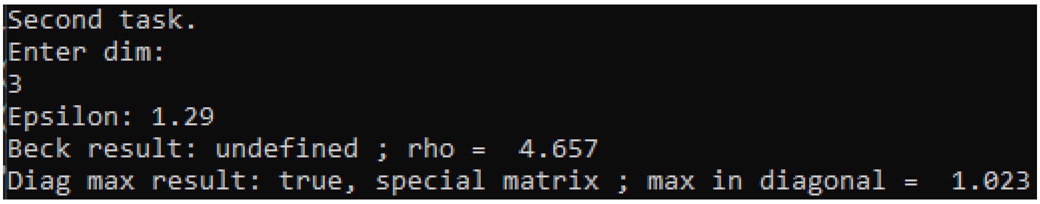


```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
First task
Enter eps:
0.025
Det: ( -0.2025 ,  0.0025 )
```

Рис. 2: Проверка правильности решения задачи 1

4.2 Задача 2

С помощью критерия Бека и теоремы о максимальном элементе диагонали получим для размерности n = 3 следующие значения.

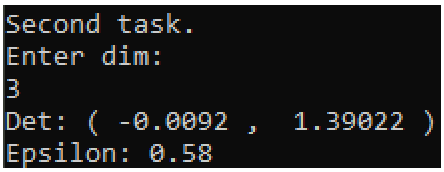


```
Second task.
Enter dim:
3
Epsilon: 1.29
Beck result: undefined ; rho =  4.657
Diag max result: true, special matrix ; max in diagonal =  1.023
```

Рис. 3: Критерий Бека для задачи размерности 3

Однако оценка является грубой и не включает 1, которая очевидно приводит к тому, что матрица является особенной. Можно попробовать уточнить ее.

Построим численный эксперимент: ϵ будет меняться от 0 с шагом 0.01. На каждой итерации вычисляется определитель матрицы и в случае, если 0 входит в интервал, матрицу считаем особенной.
Посмотрим результаты для матрицы размером 3x3.

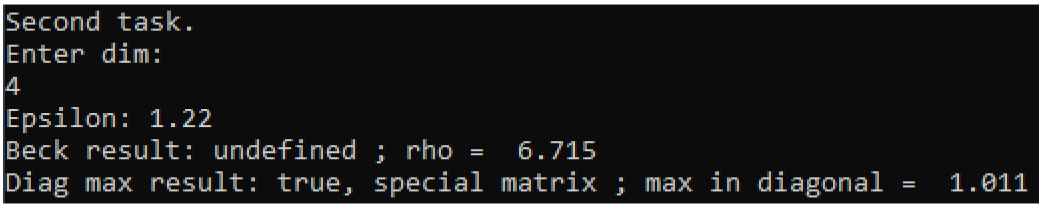


```
Second task.
Enter dim:
3
Det: ( -0.0092 ,  1.39022 )
Epsilon: 0.58
```

Рис. 4: Вычислительный эксперимент для задачи размерности 3

Видим, что нижняя граница интервала существенно уменьшилась и теперь подходят $\epsilon \geq 0.58$.

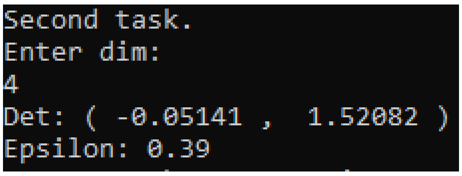
Аналогично рассмотрим для матрицы 4x4.
Критерий Бека и теорема о максимальном элементе диагонали приводят к результату:



```
Second task.
Enter dim:
4
Epsilon: 1.22
Beck result: undefined ; rho =  6.715
Diag max result: true, special matrix ; max in diagonal =  1.011
```

Рис. 5: Критерий Бека для задачи размерности 4

Результат снова не включает 1. Поэтому проведем аналогичный численный эксперимент.



```
Second task.
Enter dim:
4
Det: ( -0.05141 ,  1.52082 )
Epsilon: 0.39
```

Рис. 6: Вычислительный эксперимент для задачи размерности 4

Результат, полученный в ходе эксперимента: $\epsilon \geq 0.39$.

Можно заметить, что результаты (4) и (6) близки к нарушению диагонального преобладания(т. Адамара): $\epsilon > \frac{1}{n-1}$, так как максимальная сумма элементов вне диагонали равна $\epsilon * (n-1)$. Полученный при эксперименте отрезок входит в $(\frac{1}{n-1}, +\infty)$.