2019年7月

数学

向量和矩阵入门



数学 – 向量和矩阵入门：目录

[写给同学们的话：这门课程的目的 5](#_Toc12560553)

[第 1 课 基础知识 (1) 有理数及其四则运算 6](#_Toc12560554)

[1.1 什么是有理数？ 6](#_Toc12560555)

[1.2 数轴、相反数和绝对值 6](#_Toc12560556)

[1.3 有理数的四则运算 7](#_Toc12560557)

[1.4 习题 8](#_Toc12560558)

[第 2 课 基础知识 (2) 实数及其四则运算 9](#_Toc12560559)

[2.1 乘方和开方运算 9](#_Toc12560560)

[2.2 数轴上的无理数 10](#_Toc12560561)

[2.3 实数的四则运算 10](#_Toc12560562)

[2.4 倒数 11](#_Toc12560563)

[2.5 分母有理化 11](#_Toc12560564)

[2.6 （选读）指数记号：指数的运算 12](#_Toc12560565)

[2.7 习题 13](#_Toc12560566)

[第 3 课 基础知识 (3) 字母表达式的化简方法 14](#_Toc12560567)

[3.1 整式和分式 14](#_Toc12560568)

[3.2 分式的通分 14](#_Toc12560569)

[3.3 合并同类项 15](#_Toc12560570)

[3.4 因式分解 15](#_Toc12560571)

[3.5 习题 16](#_Toc12560572)

[第 4 课 平面直角坐标系和平面向量 18](#_Toc12560573)

[4.1 位置和坐标 18](#_Toc12560574)

[4.2 两点之间的距离：勾股定理 19](#_Toc12560575)

[4.3 平面向量：两点间的相对位置 20](#_Toc12560576)

[第 5 课 平面向量的运算 22](#_Toc12560577)

[5.1 平面向量的加法 22](#_Toc12560578)

[5.2 平面向量的数乘和减法 23](#_Toc12560579)

[5.3 用向量表示直线 23](#_Toc12560580)

[5.4 向量的运算规律 24](#_Toc12560581)

[5.5 习题 24](#_Toc12560582)

[第 6 课 平面向量的应用：三角形的性质 (1) 中线和重心 26](#_Toc12560583)

[6.1 三角形的中线 26](#_Toc12560584)

[6.2 定理：三角形的三条中线交于一点 27](#_Toc12560585)

[6.3 重心的物理意义 28](#_Toc12560586)

[6.4 习题 28](#_Toc12560587)

[第 7 课 三角函数 29](#_Toc12560588)

[7.1 一元函数及其图象 29](#_Toc12560589)

[7.2 圆形和三角函数 30](#_Toc12560590)

[7.3 三角函数的图象 31](#_Toc12560591)

[7.4 一些特殊角度的三角函数值 32](#_Toc12560592)

[7.5 大于 360° 的角和小于 0° 的角 33](#_Toc12560593)

[7.6 习题 34](#_Toc12560594)

[第 8 课 平面向量的应用：三角形的性质 (2) 角平分线和内接圆 35](#_Toc12560595)

[8.1 平面向量的数量积 35](#_Toc12560596)

[8.2 角平分线 36](#_Toc12560597)

[8.3 定理：三角形的三条角平分线交于一点 37](#_Toc12560598)

[8.4 三角形的内接圆 37](#_Toc12560599)

[8.5 习题 37](#_Toc12560600)

[第 9 课 平面向量的应用：三角形的性质 (3) 垂直平分线和外接圆 40](#_Toc12560601)

[9.1 直线垂直的判定 40](#_Toc12560602)

[9.2 线段的中垂线 40](#_Toc12560603)

[9.3 定理：三角形三边的垂直平分线交于一点 41](#_Toc12560604)

[9.4 三角形的外接圆 41](#_Toc12560605)

[9.5 习题 42](#_Toc12560606)

[第 10 课 平行四边形的面积：2 × 2矩阵和行列式 43](#_Toc12560607)

[10.1 直角坐标系中平行四边形面积的求法 43](#_Toc12560608)

[10.2 2 2矩阵和行列式 44](#_Toc12560609)

[10.3 习题 47](#_Toc12560610)

[第 11 课 （选读）矩阵的应用：图形的线性变换 48](#_Toc12560611)

[11.1 常见的图形变换 48](#_Toc12560612)

[11.2 组合变换和矩阵乘法 49](#_Toc12560613)

[11.3 矩阵乘法和行列式 51](#_Toc12560614)

[第 12 课 （选读）平面的基向量和维数 52](#_Toc12560615)

[12.1 坐标系的基向量 52](#_Toc12560616)

[12.2 变换矩阵的几何意义 52](#_Toc12560617)

[12.3 正交基向量和一般基向量 53](#_Toc12560618)

[第 13 课 （选读）矩阵和方程组的关系 55](#_Toc12560619)

[13.1 克莱默法则 55](#_Toc12560620)

[13.2 逆变换和逆矩阵 56](#_Toc12560621)

[13.3 逆矩阵的存在性 57](#_Toc12560622)

[13.4 方程组和逆矩阵 58](#_Toc12560623)

[13.5 习题 59](#_Toc12560624)

# 写给同学们的话：这门课程的目的

这门课程希望做的事情，是让刚刚从小学毕业的同学们以一个非常快的速度了解直角坐标系、向量、矩阵这些强大的数学工具。这门课覆盖的数学知识，在通常的中学学习过程中横跨了五年（从初中一年级到高中二年级），而且一些内容与中学的标准教法有不小的区别。所以这门课并不要求大家学完之后就精通了坐标系方法（这也是不可能的），而是只需要对这些内容有大概的印象。如果同学们真的能够理解并运用向量、矩阵方法解决平面几何问题，那就更好了。之后，同学们在中学会用另外的方法仔细学习平面几何知识，到那时，同学们就能够有意识地比较这门课的内容和通常的教法，看看两种教几何方法各有什么优缺点。

“生活中不缺少美，而是缺少发现美的眼睛”。坐标系就是一个在数学和物理世界中帮助大家发现美的眼睛，可惜的是，在我自己学习的过程中，我经过了太长的时间才学完这些内容，而且学完之后，我总是觉得：应该有一种更好的方法来教这些知识。所以，这门课更像是一次挑战同学们接受能力的试验，看看这些知识是不是能够被更快、更早地掌握。如果事实证明，我的教法让大家对数学产生了厌恶或者害怕的情绪，那我非常抱歉：同学们以后在中学里，跟着更擅长教数学的老师学习，也许会发现，数学并没有那么可恶或者可怕。不过，这门课程还是可以成为同学们以后学习的一个有用参考。

这本与课程配套的小册子中，有一些确实比较难接受、或者是上课的时候没有讲到的内容，我已经用“选读”把它们标记出来了，同学们可以等上一段时间再回来阅读。当然，如果你确实非常感兴趣，现在就阅读也是没有问题的。

希望同学们在课程结束之后，发现和解决的能力都得到提高，并且能喜欢我的教法。这是对一位老师最大的鼓励。

2019年6月14日

# 基础知识 (1) 有理数及其四则运算

**学习目标：**

* **了解有理数、相反数和绝对值的概念**
* **能够用数轴表示有理数**
* **能够在有理数范围内做四则运算**

这是一门关于向量和矩阵的数学课。但是在学习它们的过程中，我们会遇到同学们目前还不认识的奇怪数字。自然地，同学们就还不会对它们进行运算。所以，我们先用两节课让同学们认识这些新的数字，以及引入这些数字之后的四则运算。

## 什么是有理数？

我们先把同学们已经学过的数字复习一遍。

* **正整数：**
* **零：**
* **负整数：**
* **正分数：**
* **负分数：**

这些数字（所有的整数和分数）统称为**有理数**。

## 数轴、相反数和绝对值

同学们在学习过程中应该体会到，图形比数字更容易理解。**数轴**就是一种把数字图像化的好工具，它是一条被人为规定了方向的直线，通常沿着水平（左右）方向绘制。人们在这条直线上确定一个特殊点，称为**原点**，并用这个点表示数字0。正有理数用原点右边的点表示，负有理数用原点左边的数表示。**对于正数，越大的数离原点越远；对于负数，情况相反，越小的数离原点越远。**

数轴上的数字是**均匀分布的**，也就是说，随便取两个数字，如果大数减小数的差一样，那么在数轴上表示它们的点的间距就是一样的。下图用数轴表示了一些数字：



显然，数 和 在数轴上到原点的距离是一样的，都等于 （同学们可以量一下上图中 和 两个数到原点0的距离）。我们把数字 在数轴上对应的点**到原点的距离**称为这个数字的**绝对值**，记作 ，并且称绝对值相同、但在数轴上对应的点在原点两侧的两个数互为**相反数**。我们马上得到下面的结论：

* **正有理数的绝对值等于它自己**
* **负有理数的绝对值等于它的相反数**
* **0的绝对值等于0**

相反数通常用来表示大小相同但意义相反的量。例如，人们通常用负数表示支出，用正数表示收入，加起来就能知道最终是收入还是支出，收入或支出了多少；当物体沿着直线运动时，人们把向一个方向运动的距离记作正数，把向另一个方向运动的距离记作负数，把这些距离加起来，就能知道这个物体最终向哪个方向运动了多远。

## 有理数的四则运算

我们已经知道，对于所有正有理数还有0，加法和乘法满足下面的运算定律（下面的字母表示大于等于0的正数或分数）：

* **加法交换律：**
* **加法结合律：**
* **乘法交换律：**
* **乘法结合律：**
* **乘法分配律：**

但是，同学们还没有学习过如何对负数做四则运算。一个自然的想法是，我们希望把加法和乘法推广到有理数范围之后，以前的运算定律仍然正确。实际上：

* **交换律、结合律对于有理数的加法仍然成立**
* **交换律、结合律、分配律对于有理数的乘法仍然成立**

有理数范围四则运算的主要规则如下：

* **0加任何有理数都等于这个有理数自己**
* **0乘任何有理数都等于0**
* **1乘任何有理数都等于这个有理数自己**
* **正数与负数相加：**

也就是说，**正数与负数相加，等于正数减去这个负数的相反数**。我们发现，正数之间的减法，在有理数范围内其实就是加法，只不过加了一个负数而已。

**例子**：

在第二个例子中，当负数的绝对值更大的时候怎么办？我们可以这样想：

* **负数与负数相加：**

这说明，**两个负数相加，等于两个负数的相反数相加，再取相反数**。

**例子**：

* **正数与负数相乘：**

这说明，**正数与负数相乘，等于正数与这个负数的相反数相乘，再取相反数**。

* **乘法分配律的减法版本：**
* **负数与负数相乘：**

也就是说，**两个负数相乘，等于它们的相反数相乘**。这也是人们常说的“负负得正”的由来。从这一条定理出发，我们容易发现：

**奇数个负数相乘，结果是负数；偶数个负数相乘，结果是正数。**

## 习题

**习题1**：请同学们计算下面的式子

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

# 基础知识 (2) 实数及其四则运算

**学习目标：**

* **了解乘方和开方运算的概念和它们的指数表示**
* **了解无理数和实数的概念**
* **将四则运算、乘方和开方运算推广到实数范围**

除了有理数以外，还有一种不能表示成分数（包括无限循环小数）的数，称为**无理数**。无理数可以表示成无限不循环小数；如果我们写到小数点后某一位就不写了，得到的有理数称为无理数的**近似值**。我们总可以通过增加小数的位数来用有理数无限地逼近一个无理数。之所以把无理数叫做“无理”数，是因为人们不喜欢这些永远也写不完的数字。最著名的无理数就是圆周率 ，它约等于

除了圆周率之外，无理数其实非常常见。无理数和有理数统称为**实数**。

## 乘方和开方运算

在以前的学习中，同学们已经遇到过一个数字自己乘自己的运算。例如，一个边长为 的正方形的面积等于 。它也写作 ，称为 的**平方**，其中上标2表示有两个 相乘。我们可以容易地把这种运算推广到一个数自己乘自己很多次的情况，这种运算称为**乘方**：如果数 自己乘自己乘了 次，得到的结果记作 ，称为 **的 次方**。

反过来，我们有时候要找出哪个数的平方等于 ，这个数就称为 的**算术平方根**，记作 或者 。顺便说明一下，第二种记号称为指数记号，“**指数**”就是记号中的上标 。

为什么人们把平方根记作“半个” 次方？这是因为平方根的平方（也就是半个次方的二次方）等于一次方。同学们可以在2.6节进一步了解指数的意义。

在第 1 课里，我们知道两个负数相乘等于正数，所以 的平方也等于 。我们把 和 统称为 的**平方根**。例如，25的平方根是 ，256/49的平方根是 16/7，等等。因为“负负得正”，所以**负实数在实数范围内没有平方根**。

思考：什么叫做“在实数范围内没有”平方根？

接下来很容易想到，我们会遇到这样一个问题：什么数自己乘自己 次之后等于 ？这个数被称为 **的 次方根**，记作 或 。求这个数的过程称为**开方运算**。

许多数字的方根都是无理数。即使原来的那个数字是有理数，它的方根也可能是无理数。最出名的例子就是 ，这是历史上被人们认识到的第一个无理数，它大约等于

同学们在初中一年级下学期就会学习如何证明它是无理数。

我们已经知道，有理数乘有理数，得到的还是一个有理数。因此，**无理数开方运算的结果一定是无理数。**由此可见，无理数也有无数个。

## 数轴上的无理数

我们已经知道如何在数轴上表示有理数，那么无理数是否可以在数轴上表示出来？答案是肯定的。如何表示？我们知道，任何一个无理数都处于两个有理数之间，例如

随着我们把小数位数逐渐增多，这两个有理数会越靠越近，最终趋向于一个点，这个点就是 在数轴上的位置。

## 实数的四则运算

因为无理数可以用有理数无限精确地近似，在前面的推导中，我们也没有用到“有理数可以用分数表示”这个特征，所以（同学们能看出其中的因果关系吗？）四则运算可以很容易地推广到实数范围内，要点如下（这几乎就是把上一节课里的对应内容抄了一遍）：

* **0加任何实数都等于这个实数自己**
* **0乘任何实数都等于0**
* **1乘任何实数都等于这个实数自己**
* **运算定律：**
  1. **加法交换律：**
  2. **加法结合律：**
  3. **乘法交换律：**
  4. **乘法结合律：**
  5. **乘法分配律：**
* **运算技巧：**
  1. **正数与负数相加：**
  2. **负数与负数相加：**
  3. **正数与负数相乘：**
  4. **乘法分配律的减法版本：**
  5. **负数与负数相乘：**

## 倒数

同学们已经知道，如果两个数相乘等于1，那么我们说这两个数互为**倒数**。例如，2和1/2互为倒数，7/4和4/7互为倒数。在引入无理数后，我们还可以说 和 互为倒数， 和 互为倒数……等等。对于一个数 ，它的倒数用指数记号写作 。

因为0乘任何数都等于0，所以**0没有倒数**。

## 分母有理化

在上一节里，我们遇到了无理数的倒数。但是无理数是无限不循环小数，用它去除以1得到它的倒数的近似值不太方便。这时我们就要用到所谓的**分母有理化**过程，这是**让分母中不出现平方根**的方法。分母有理化会经常用到**平方差公式**：

**证明**：（请同学们思考，下面的每一步应用了什么运算规律）

我们看两个简单的例子：

这样，我们就把问题转化为一个无限不循环小数除以一个整数，也就能比较容易地计算无理数倒数的近似值了。我们可以把这个过程推广到无理数之间的除法，例如

## （选读）指数记号：指数的运算

我们把用到指数记号的地方总结如下：对于任意一个实数 和正整数

|  |  |
| --- | --- |
| * **次方根：** | 例： |
| * **次方：** | 例： |
| * **倒数：** | 例： |

注意，如果 而且 是偶数，那么 在实数范围内不存在；如果 ，那么 不存在。经过观察我们容易发现，对于任意的实数 和正整数

因此我们规定，指数的意义如下（ 是正整数）：

|  |  |
| --- | --- |
| * **正分数指数：** | 例： |
| * **负整数指数：** | 例： |
| * **次方根的倒数：** | 例： |
| * **负分数指数：** | 例： |

这样，所有的非0有理数都可以作为指数了。对于非零无理数，因为它们可以用有理数近似，所以它们也可以作为指数。接下来，我们就可以规定指数加法和乘法的意义（ 是非0实数）：

* **指数加法：**
* **指数乘法：**

为了让0也可以作为指数，我们假设指数加法和乘法对于0指数也成立，于是得到

一个自然的定义就是

* **零指数：**

容易验证，**这样定义的指数加法和普通加法一样满足结合律和交换律；同样，指数乘法和普通乘法一样满足结合律、交换律和分配律。**

## 习题

**习题1**：请同学们计算下面的式子。计算结果的分母里不要保留根号，根号里的数的平方根不能是整数或分数（如果是，请把这个整数或分数算出来）。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

# 基础知识 (3) 字母表达式的化简方法

**学习目标：**

* **能够用去括号、合并同类项的方法化简整式**
* **掌握常见的因式分解方法**
* **能够利用因式分解化简比较简单的分式**

同学们已经了解了所有的实数，以及在实数范围内的四则运算、乘方和开方运算。在真正进入这门课程的主要内容之前，我们还需要让同学们能够比较熟练地处理用字母表达的算式。否则，当同学们继续学习时，就会淹没在字母的汪洋大海之中。在这节课里，我们就通过一些具体的例子，来学习如何化简字母表达式。我们只介绍最常见的、在这门课里会用到的一些技巧。同学们在中学会学习到更多的化简方法。

接下来，繁多的字母可能会让你感到头痛。但是不要怕！只需记住：字母在运算过程中和普通数字遵守同样的规则。

## 整式和分式

为了学习的方便，我们把字母表达式分成两类：**整式**和**分式**。所谓“整式”，就是表达式中没有字母在分母的位置上；与之对应，既然分数是两个整数相除，“分式”就是两个整式相除。下面给出了整式和分式的一些例子：

* **整式**
* **分式**

## 分式的通分

同学们知道，做分数加减法的时候，我们要让两个分数的分母相同（这个过程叫做通分），再把它们的分子直接相加，最后再来化简结果。例如

在分式相加或相减的时候，我们也要对相加的两个分式做通分操作。例如

## 合并同类项

在上面化简的过程中有一步

这叫做**合并同类项**。顾名思义，这是说，如果两个整式分别是数字和字母的乘积，而且它们的字母部分一样，我们就可以用乘法分配律把它们合并，得到的整式**字母部分不变，数字部分是原来的两个数字相加**。

## 因式分解

在化简分式的时候，我们有时需要的不是去括号，而是加括号。下面我们就来看两个加括号的方法。把整式写成另外几个整式相乘的过程叫做**因式分解**，这些“另外的整式”就叫做这个整式的**因式**。例如， 的两个因式就是 和 。

在因式分解的过程中，人们会经常遇到某些特定的表达式，以至于时间长了之后，看到这些式子，就可以脱口而出它的因式是什么。现在我们就来看看，在这门课中会遇到的常见字母表达式。

* **平方差公式：**

我们在上一节课里已经见过它了。

* **完全平方公式：**

**证明**：我们只证明 的结果； 的情况留给同学们自己做出来。

这种背下结果、遇到的时候直接使用的因式分解方法被叫做“**公式法**”。

顾名思义，“因式分解”和我们把一个整数写成另外几个整数（这个整数的**因数**）相乘（不妨把它叫做整数的“因数分解”）是类似的。这样做有什么意义呢？同学们知道，分数的化简就是把分子和分母除以它们共同的因数，那么，分式的化简就是把分子和分母同时除以它们共同的因式。例如

同学们可能会说：“要是 怎么办？”我们先不考虑这个问题。但是在实际应用中还是要注意，化简的过程中是否遇到了除以0的情况。

在上面这个简单的例子中，我们用了“公式法”来做因式分解。实际上，乘法分配律才是因式分解背后真正的道理。但是，只有对于一些简单的式子，我们才能比较容易地直接看出结果。例如

这种方法把整式中每一项的共同因式提取出来，因此被叫做“**提取公因式法**”。

现在，我们就来看看在实际操作中，如何化简字母表达式。如果有小数系数，人们一般把它先改写成分数，再继续后面的计算。不过还是请同学们记住，在化简字母表达式的时候，要有随机应变的能力，不能总是靠老师或者题目提示说这里要用因式分解、那里要提公因式，等等。

**例题1**：

**例题2：立方差公式**

**例题3**：

**例题4**：

## 习题

**习题1**：化简下面的字母表达式（有括号的去括号）

**习题2**：化简字母表达式（分式运算）

# 平面直角坐标系和平面向量

**学习目标：**

* **能够用平面直角坐标系表示平面上点的位置**
* **能够计算坐标系中两点之间的距离**
* **能够用平面向量描述两个点的相对位置**

在掌握了实数的运算和字母表达式的化简方法之后，现在我们终于要开始学习这门课程的主要内容。我们从平面直角坐标系和平面向量的概念开始。

## 位置和坐标

同学们之前学习过用方向角和距离来描述物体的位置。例如，在左图中，相对于校门，国旗杆在北偏东30度50米处。这个图中有两条**互相垂直、相交于各自的原点**的数轴（称为**坐标轴**）：一条表示南北方向（称为**纵轴**），另一条表示东西方向（称为**横轴**）。它们形成的就是**平面直角坐标系**。这是由法国人勒内·笛卡尔（René Descartes，1596 – 1650）发明的数学工具。通常，人们用 表示横轴，用 表示纵轴，将两个字母标在两个坐标轴的正方向处。

现在，我们采用另外一种描述国旗杆位置的方法。从国旗杆出发，沿着与纵轴平行的方向画一条直线，它与横轴交于一点，这个点在横轴上表示的数称为国旗杆的**横坐标**或 **坐标**；类似地，沿着与横轴平行的方向画一条线，它与纵轴也交于一点，这个点在纵轴上表示的数称为国旗杆的**纵坐标**或 **坐标**。容易看出，在平面直角坐标系中，给定一个点的横坐标和纵坐标（统称**坐标**），这个点在平面上的位置就唯一确定下来了。横、纵坐标可以是正数，可以是负数，也可以是0。

在第 7 课中，我们将学习如何从“50米”和“30度”这两个条件得到国旗杆坐标。现在，我们先使用答案：国旗杆的横坐标是25，纵坐标是 。我们把这两个数用括号包起来，**按顺序**写成一行或者一列。写成一行时，横坐标在前；写成一列时，横坐标在上：

通常，对于一个点A，它的横、纵坐标分别用符号 、 表示。

注释：关于下标的说明

同学们刚刚看到了一种以前还没有见过的记号：以前，同学们用字母表示数字的时候，这个字母（我们把它叫做“主体”）周围（除了右上角可能有一个指数之外）没有什么别的奇怪的东西。可是现在，我们在主体字母的右下角放上了另一个字母，比如 里面的 ，它被叫做下标，它对主体字母的意义起到辅助说明作用。例如，记号 中的“”表示：它代表的**是A的、而不是其他点的**横坐标。

## 两点之间的距离：勾股定理

我们经常遇到测量两点之间距离的问题。平面直角坐标系是解决这个问题的好帮手：我们可以用两个点的坐标算出它们之间的距离。

按照左图，我们分别在坐标系中的A、B两点画出与坐标轴平行的线。因为坐标轴互相垂直，所以这些线围出了一个直角三角形ABC，其中以C为顶点的角是直角。容易看出，这个三角形两个直角边的边长为

在继续解决这个问题之前，我们先证明直角三角形的三条边之间满足的一个关系。之所以会有这个关系，是因为不是所有的三角形都是直角三角形。这个关系被称作**勾股定理**（在中国古代，短的直角边称为“勾”，长的直角边称为“股”），采用的证明方法由中国三国时期的赵爽提出（人们不知道他哪年出生，也不知道他哪年去世）。

**定理：平面上，直角三角形斜边长度的平方等于两条直角边长度的平方和。**

用字母表示：如果两条直角边的长度为 和 ，斜边的长度为 ，那么

**证明**：同学们还记得三角形的三个角加起来等于180° 吗？因为直角三角形有一个角等于90° ，所以剩下的两个锐角加起来也等于90° 。所以，我们可以用四个完全一样的直角三角形按左图的方法拼出一个大的正方形来，这个正方形的边长为 。

同时，这四个三角形还在大正方形的中间围出了一个小的正方形，它的边长是 （在这里我们假设 ）。这样，我们就有两种方法来表示大正方形的面积。于是：

于是我们得到直角坐标系中**两点之间的距离公式**：

## 平面向量：两点间的相对位置

同学们知道，当其中一个物体A位于坐标系的原点时，另一个物体B相对A的位置就由它在坐标系中的坐标确定了下来。如果两个物体都不在坐标系的原点，我们如何描述B相对A（或者A相对B）的位置呢？现在我们就引入平面向量的概念。

左图是某地区各个建筑的位置，其中坐标系已经建好（ 轴沿东西方向， 轴沿南北方向，长度单位：1千米）。同学们可以从图上读出各个建筑的坐标：

学校A：（2，2） 医院B：（–1，3）

菜市场C：（–2，1） 政府D：（–1，–2）

商场E：（2，0）

如何说明学校A相对于政府D的位置呢？容易看出，要从政府D走到学校A，需要向东走 千米，再向北走 千米。现在我们定义**平面向量** ，它是从政府D点出发、指向学校A的一个带箭头的**有向线段**。平面向量的值规定为终点的 、 坐标与起点的 、 坐标相减，它的记法与点的坐标十分相似：

两种记法分别被称作**行向量**和**列向量**，其中的第一个数称为向量的 **分量**，第二个数称为向量的 **分量**。我们同时发现，一个点的 坐标就是从原点指向这个点的向量的 分量

因此 。我们发现，这两个分量就是从D出发走到A需要向东和向北走的长度。反过来，如果要表示政府D相对学校A的位置，我们采用向量 ：

如果两个向量的**分量分别对应相等**，我们就说这两个向量**相等**。例如，左图中 。我们注意到，虽然这两个向量的起点在坐标系的不同位置，但是只要它们的分量对应相等，它们就是相等的。所以，**我们可以把表示向量的有向线段在平面直角坐标系中随意移动**。

另外需要提醒同学们的是，。

我们也可以简单地用小写字母上加一个箭头 来表示向量（印刷书籍则通常使用加粗的小写字母 ），它的两个分量记作 和 ，或者 和 。

思考：如何用向量表示其他几个建筑之间的相对位置？

从两点之间的距离公式，我们可以定义**向量的长度**（也叫做向量的**模**），记作

# 平面向量的运算

**学习目标：**

* **掌握平面向量的加法、减法和数乘运算**
* **能够利用平面向量判断直线的平行关系**

## 平面向量的加法

我们继续用第 4 课里见过的地图，来说明平面向量的加法运算。假设我们从政府D出发走到了学校A，现在我们又要走到菜市场C，应该如何走呢？向量 告诉我们，应该这样走：

也就是向西走4千米、向南走1千米。我们当然也可以从政府D出发，不经过学校，直接走到菜市场C。这样走的方法由向量 表示：

即向西走1千米、向北走3千米。我们发现

因此，我们这样定义**向量的加法**：

**两个向量相加得到一个新的向量，它的分量是原来两个向量的对应分量之和**

用字母表示：

这里面，符号 的意义是：向量 的 分量。其他符号的含义类似。这样定义加法之后，我们看到

这三个向量围成了一个三角形ACD，因此平面向量的加法规则也被称为**三角形法则**：

**两个向量首尾相连，形成的折线路径的起点和终点  
就是这两个向量相加得到的向量的起点和终点**

## 平面向量的数乘和减法

我们在4.3节发现，如果把向量的起点和终点交换，得到的新的向量的分量是原来的分量乘上 。一般地，我们定义**向量的数乘运算**如下：

**向量乘上一个数得到一个新的向量，这个向量的分量是原来的分量乘上这个数**

用字母表示就是（数字可以写在向量前面，也可以写在向量后面）

所以，交换向量 的起点和终点得到的向量就是 ，也记作 。它们长度相等，方向相反。对于其他的 ，我们不难看出

**时， 与 方向相同； 时， 与 方向相反**

我们现在可以定义向量的减法：

特别地，我们得到

右边得到的结果称为零向量，记作 或**0**。当然，只要不造成误解，我们也可以偷懒记成普通数字0。

## 用向量表示直线

我们可以利用向量的数乘运算来表示一条直线。同学们已经知道，**平面上两点确定一条直线**。实际上，我们也可以通过确定**直线上的一个点**，以及**直线的方向**来确定这条直线。

直线的方向可以用一个向量来确定，我们把它叫做这条直线的**方向向量**。如果我们用两点确定一条直线，这条直线的方向向量就是连接这两个点的向量。显然，**方向向量的长度可以是不确定的**：如果一个人选择的方向向量是 ，另外一个人当然也可以选择 作为方向向量（只要 就可以了），因为这两个向量的方向要么相同，要么相反。但是，不管是 还是别的什么 ，它们的**两个分量的比值都是一样的**。我们把这个比值叫做直线的**斜率**，一般记作 ：

同学们要问：“ 怎么办？”容易看出，这时对应的直线**与 轴平行**，我们规定它的斜率等于**无穷大**。

现在，我们可以写出表示直线的方程了。假设直线上的一个点是 ，方向向量是 ，那么直线上其他点 就和 通过不同长度的方向向量连接起来：

当 时，数字 的**绝对值**表示点 和 之间的距离。这就是直线的**向量表示**。

思考： 和 表示什么含义？

我们还可以利用方向向量来判断两条直线是否平行：

**如果两条直线的方向向量只相差一个数乘运算，  
那么两条直线平行**

## 向量的运算规律

可以验证，向量的加法和数字加法一样满足**交换律**和**结合律**：（你是否能一眼看出来应该是这样？）

从加法交换律，我们可以发现向量加法的**平行四边形法则**：（你是否能从左图看出这是为什么？）

**让两个向量起点重合，以这两个向量为邻边形成的平行四边形的对角线就是这两个向量的和。它的起点与原来的两个向量相同，终点是对角线的另一个端点。**

向量的数乘运算也满足一些运算规律：

* **结合律：**
* **数字部分分配律：**
* **向量部分分配律：**

## 习题

**习题1：直角坐标系中的直线方程**

我们可以把直线的向量表示改写成坐标 之间应该满足的方程（叫做**直线的方程**）。

1. 直线的方程的一般形式为：

请同学们从 **消去** 得到上面的表达式。 应该等于多少？用符号 表示出来。

**提示**：因为直线方程两边总可以同时乘一个数，所以当你和同学对答案时，发现你们算出来的 全都差一个倍数（例如 ），不要说你的同学做错了；如果错了，也是你们一起错。

1. 当 时，我们可以把直线方程改写成

请问 分别等于多少？用符号 表示出来。 的意义是什么？

# 平面向量的应用：三角形的性质 (1) 中线和重心

**学习目标：**

* **掌握使用平面向量和直角坐标系解决平面几何问题的基本步骤**
* **了解三角形中线的性质，掌握寻找中线的方法**
* **了解重心的物理意义**

在学习了平面向量之后，同学们肯定想知道：它有什么用？除了表示两点之间的相对位置之外，它还是我们进行几何证明的强大工具。在这门课中，我们将用三节课来学习，如何利用坐标系和平面向量的方法来得到三角形的一些几何性质。解决这些问题的过程，也是同学们练习字母表达式化简的好机会。我们先从三角形的中线开始。

## 三角形的中线

三角形的**中线**，是从三角形的一个角的顶点、这个角所对的边的中点为端点的一条线段。显然，三角形中有三条中线。下面我们就来找出三条中线对应的方向向量。

为了方便，我们把三角形ABC的三个顶点的坐标设置在 和 三个位置。我们以角A所对边（BC）的中线为例说明找出中线方向向量的方法。

思考： 的几何意义分别是什么？你能在上图中用合适的线段把它们标出来吗？

设BC的中点为P。因为 （同学们能看出这个 的来历吗？这就是“中点”的数学表示），所以P的坐标应该为

那么中线AP的方向向量就是

按照相似的过程，我们可以得到另外两条边的中线：设角B、C所对边（AC、AB）的中点分别为Q、R，那么

细心的同学会发现，三条中线**好像**交于同一个点。这个观察得到的印象是不是正确的呢？答案是肯定的。下面我们就来证明这个结论。

## 定理：**三角形的三条中线交于一点**

**证明**：要证明三条中线交于一点，我们只需要证明，存在三个正实数 使得

三个表达式给出的结果就是从原点指向中线交点（如果它存在的话）的向量。 三个数的几何意义，就是顶点A、B、C到重心的距离分别占它们对应的中线长度的比例。所以，严格地说， 应该是三个0到1之间的正数。

同样，为了方便，让 和 。非常不幸，同学们现在要面对6个未知数，但实际上我们把 三个数当成已知，我们真正要求的未知数是 。

给出

给出

哈！利用 (2), (4) 两条等式，我们马上消去了两个未知数

同学们也许会有疑问：现在只有 一个未知数，但还剩下 (1), (3) 两个方程没有用到，这是怎么回事？其实，要证明 的存在，就是要说明，用这两个剩下的方程解出来的 是一样的；如果不一样，那就说明我们想要的 是不存在的。实际上，两个等式化简分别得到

同时我们立即发现

惊不惊喜？意不意外？我们不仅证明了 的存在性，还发现它们都等于 2/3 ！因此，我们的结论是：

* **三角形三条边的中线交于同一个点**（这个点被称作三角形的**重心**）
* **三角形一个角的顶点到重心的距离，等于这个角对应的中线长度的 2/3**

同学们到中学学习得到这两个结论的普通方法之后，会更加体会到平面向量的威力。

## 重心的物理意义

为什么三角形三条中线的交点被称为三角形的“重心”？要理解这个名称的来历和意义，我们来做一个小实验。

**实验内容：**

1. 用一块厚薄均匀的硬纸板做一个三角形（不要把它做的太规则，比如一不小心做成了直角三角形、等腰三角形甚至等边三角形），并在三个顶点处分别打一个小孔。
2. 用绳子穿过其中一个孔把三角形悬挂起来，等三角形静止后，从小孔的位置出发沿着竖直方向向下画线（你可以用一根自由下垂的绳子来确定“竖直”是哪个方向），观察这条线与小孔所对边的交点的位置
3. 对另外两个顶点重复步骤2，这样你会在三角形上画出三条线。仔细观察这三条线有什么特别之处。

你应该会发现，这三条线就是三角形纸板的三条中线！

## 习题

**习题1**：请同学们找出任意一个直角三角形斜边中线的长度与斜边长度之间的关系。我们在第 7 课里要用到这一题的结论。（在坐标系中，怎样放置这个三角形可以简化证明？）

# 三角函数

**学习目标：**

* **理解函数的概念以及它的一个例子：三角函数**
* **理解函数图象的含义，并能从图象上提取有用信息**
* **掌握绘制三角函数图象的方法**
* **了解圆、直角三角形和三角函数之间的关系**

在第 4 课里，我们预告了这一节课的内容：怎样从一个点的方位角和它到原点的距离计算这个点的坐标。现在我们就来着手系统地解决这个问题。

## 一元函数及其图象

同学们已经在第 5 课的习题里面知道，对于一条已知的直线（不与 轴平行），线上点的纵坐标 由横坐标 按照下面的方程决定：

其中 是我们当做已经知道的**参数**。对于其他曲线， 根据别的方程由 确定。在数学上，我们说 是 的**函数**， 被称为**自变量**， 被称为**因变量**；等号右边以 为自变量的表达式（在上面的例子中就是 ）通常被记作 ，其中 是我们给这个式子起的**名字**，括号、括号里的 表示这个式子的自变量是 。注意，**不要把这个记号理解成“ 乘以 ”**。

这样，“ 是 的函数”在数学上就表示为

因为我们目前考虑的式子 里面只有 一个自变量，所以这样的函数被叫做**一元函数**。

人们采用这样一种方法在直角坐标系上表示一个一元函数：以足够小的间隔取很多个 的值，并且把对应的 计算出来，在平面直角坐标系上描出这些点，再把它们连接起来，得到一条直线或曲线。这条线被叫做一元函数的**图象**。所以，我们说函数 的图象是一条直线。

同学们将来会遇到各种各样的函数，人们给比较常见而且重要的几个起了名字。例如，直线所对应的一元函数（）被叫做**一次函数**，因为它只包含 的一次方；如果函数是由表达式 确定的，那么它被叫做**二次函数**。还有一种重要的函数被叫做**三角函数**，它不能简单地表示成 的**有限**次方相加（同学们要等到大学才会知道为什么；否则三角函数就会被叫做 次函数了）。这就是我们接下来要学习的。

咬文嚼字：“函数”一词的由来

函数这个词于17世纪末产生于欧洲，由德国数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646 – 1716）首次提出。中文的“函数”一词则是由清朝数学家李善兰（1811 – 1882）译出。他著作的《代数学》书中对这个翻译的解释是：“凡此变量中函彼变量者，则此为彼之函数”。因此，“函”的意思实际上是“包涵”，即包括了另外一个数。

## 圆形和三角函数

角度的大小与圆形密切相关。同学们以前学习角度的度量的时候，我们把一个圆分成了360份，每一份对应的角度是1度。这种度量角度的方法称为**角度制**。

现在，我们学习一种度量角度的新方法。画一个半径 是1的圆（称为**单位圆**）；再从圆心O出发，画一条长度为1的线段OA；将这个线段绕着圆心**逆时针**旋转一个角度，得到线段OB。**我们把点A在旋转过程中走过的长度定义为这一个角度的大小**。这种方法因此被叫做**弧度制**。

通常用小写的希腊字母 等表示角度。

因为单位圆的周长是 ，所以这样度量角度时，角的大小范围是0到 。角度制和弧度制之间的转换关系是

一些常见的角度的弧度制表示如下：

同学们在将来的学习过程中，会逐渐习惯采用弧度制描述角的大小。

现在我们把这个单位圆放到直角坐标系中，让圆心O和坐标系原点重合，扇形的边OA与 轴重合。向量 的 分量和 分量由扇形的角度 决定，所以我们说它们分别是 的函数。现在我们就定义这两个函数：

* B的纵坐标 与 的关系称为**正弦函数**，记作
* B的横坐标 与 的关系称为**余弦函数**，记作

这里，我们用单词“sin”和“cos”，而不是一个简单的“”来给函数表达式命名。这两个函数统称为**三角函数**。 分别称为角 的**正弦值**和**余弦值**。

如果我们画的圆半径 不是1，那么上面的关系可以很容易地改成

同学们现在可以看出三角函数的作用：知道一个点与原点连线的长度 ，以及这条线段对应的向量（原点为起点）和 轴正方向的夹角 ，我们就可以利用三角函数表示出它的坐标 的值：

根据勾股定理，我们不难得到

三角函数也可以用来表示直角三角形中两条直角边和斜边之间的关系：如果直角三角形中的斜边是 ，一个角是 （），这个角所对的直角边为 ，另一条直角边为 ，那么

直线的方向向量也可以利用三角函数表示。假设这条直线往上走的方向与 轴的夹角是 （），那么它的方向向量就是（这里我们让方向向量的长度等于1）

不幸的是，除了极其少数角度之外，大多数的三角函数值都没有一个简单的表示，更不要想把它们写成有理数了。我们会在稍后（7.4节）推导这些特殊角度的三角函数。但是，这并不妨碍我们用几何的方法画出三角函数的图象。

## 三角函数的图象

我们以正弦函数 为例来说明如何画三角函数的图象。基本步骤如下：

* **在直角坐标系中，以横轴上的某一点A为圆心，画一个半径是1的圆；**
* **从圆心出发，向右画一条长度是1的线AB；从点B开始，逆时针地把圆分成 份（例如8份）；**
* **从圆上的分点C（设分点C对应的角度为 ，那么C的纵坐标是 ）做水平线**
* **从点 做竖直线，描下这两条线的交点；这个交点的坐标就是**
* **用折线把这些点依次连接起来。当 足够大之后，同学们就会发现函数图像是一条漂亮的曲线；**

用计算机（它使用的 非常大，基本看不出折线的感觉）画出的正弦函数图像如下：



类似地，我们可以画出余弦函数 的图象：



从三角函数的图象，我们看出一个重要性质：

**正弦函数在 （也就是 ）范围内的值和自变量 一一对应**

**余弦函数在 （也就是 ）范围内的值和自变量 一一对应**

所以对于 之间的角，只要知道了它的余弦值，我们就知道了这个角有多大。我们在第 8 课要用到这个性质。

## 一些特殊角度的三角函数值

虽然绝大多数的三角函数值都没有简单的表达式，但还是有一些角度的三角函数值是可以严格地计算出来的。有的甚至可以一眼就看出来，例如：

利用第 6 课学到的三角形中线的性质，我们还可以推导出：

**证明**：我们只对 证明。对 的证明过程类似。

在坐标系中按照左图画出 直角三角形，P是斜边OB的中点，OB的长度是1。由于直角三角形斜边的中线是斜边的一半（做作业了吗？），我们得到 。但是请同学们注意，角OBA是 ：所以三角形PBA其实是一个等边三角形！那么

思考：你现在知道第 4 课里国旗杆的坐标是怎样得到的了吗？

**证明**：在坐标系中按照左图画出 直角三角形，P是斜边OB的中点，OB的长度是1。由于直角三角形斜边的中线是斜边的一半，我们得到AP = PB = OP = 。这时我们发现，三角形OAP和BAP的三条边分别对应相等：

OA = BA, PA = PA, OP = BP

容易理解，**如果两个三角形的三条边对应相等，那个这两个三角形就是完全一样的**（它们被称作**全等三角形**）。所以，三角形OAP和BAP是完全一样的，角BPA、OPA都等于 。这时，我们可以在三角形BPA中用勾股定理得到

## 大于 360° 的角和小于 0° 的角

同学们是否在思考一个问题：在7.2节定义角度的时候，如果我们

1. 把线段OA逆时针旋转了**超过一圈**，或者
2. **顺时针**旋转OA

会怎么样呢？对于第一种情况，我们根据已经有的定义，得到了一个大于360° (2π) 的角；对于第二种情况，我们约定，这时角度定义为A走过的路程再**乘** ；这就是负角度的由来。这些角度的三角函数值是多少呢？同学们可以在习题1找到答案。

## 习题

**习题1：任意角的三角函数的性质**

请同学们证明（可以画图说明），在定义了大于2π的角和小于0的角之后：

1. **（周期性）**对于任意一个整数 ：

我们看到，随着自变量增加或减少2π（也就是360° ），正弦和余弦函数会把自己重复一遍。因此人们称它们是**周期**为2π的函数。

1. **（奇偶性）**对于任意一个角度 ：

人们把像正弦函数这样，**当自变量变号时函数值也变号**的函数称为**奇函数**；像余弦函数这样，**当自变量变号时函数值不变**的函数称为**偶函数**。

**习题2：三角函数的诱导公式**

同学们观察三角函数图像的时候，是否觉得函数有很好的对称性？事实上，我们只需要知道0到 范围内的三角函数值，就可以用三角函数的**诱导公式**得到 到 范围内的三角函数值。诱导公式的表达式如下：

* **的三角函数值：设 ，那么**
* **的三角函数值：设 ，那么**
* **的三角函数值：设 ，那么**

1. 请同学们证明这些等式（可以画图说明），并利用它们计算：

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

**提示**：比较这些角度和 这几个特殊角度之间的差值。

1. （选做）实际上，在把角度的范围推广到所有实数（而不只是 ）后，上面的几个诱导公式对于任意的 都是对的。你是否能说明为什么？

# 平面向量的应用：三角形的性质 (2) 角平分线和内接圆

**学习目标：**

* **了解点到直线距离的概念**
* **掌握平面向量的数量积的计算方法和几何意义**
* **掌握求角平分线的方法，了解角平分线的几何性质**

## 平面向量的数量积

在寻找直角三角形的几何性质时，我们喜欢让直角三角形的两条直角边和坐标轴平行。但是，总有人（比如说老师）故意把直角三角形放歪。这时，我们怎样方便地从三角形斜边的长度得到两个直角边的长度呢？这就要引入平面向量的数量积的概念。

下图中的直角三角形ABP就是一个放歪的例子，其中角APB是直角。线段BP称为B到直线AP的**垂线**，P称为**垂足**，BP的长度称为点B到直线AP的**距离**。

如果我们知道：

* 1. 斜边的大小和方向（向量 ，记作 ）、
  2. 一条直角边AP的方向（这相当于知道AP所在直线方向向量 。为了方便，我们把 的起点放在A，并且把它的终点记作C。注意，我们现在还不知道P在这条直线上的具体位置），

我们就可以算出**向量 、 的夹角** （容易看出， **的取值范围是** ），再用三角函数确定两条直角边的长度。

那么如何算呢？假设 ，A的坐标是 。那么B和P的坐标是

于是三角形ABP三条边长度的平方分别是：

根据勾股定理，。它化简后就是

这样，我们就得到了角 的余弦值

也就得到了 本身。在上面最右边的表达式中，分母的意义是我们已经熟悉的，它是向量 、 的长度的乘积；分子是一个新的表达式，它被称作向量 、 的**数量积**，记作 。所以

其中 是向量 、 的夹角，取值范围是 。

## 角平分线

向量数量积一个常见的应用就是找出一个角的**角平分线**。顾名思义，这条线把原来的角分成相等的两半。我们用一道例题来说明用数量积找出角平分线方向的过程。

**例题**：在平面直角坐标系中，三角形ABC的顶点A与原点O重合，两条边AB、AC对应的向量为 。求角A平分线的方向向量。

**解答**：设角平分线的方向向量为 ，它与AB、AC的夹角都是 。我们根据数量积的公式得到

其中 分别表示向量 的长度。于是

我们关心的是方向向量的方向（也就是 ），而不是长度。所以我们可以让 随便取一个值，例如 ，这时方向向量为 。图中的蓝色箭头是取 时画出的角平分线。

思考：你是否觉得我们画出的角平分线与BC垂直？尝试用多种方法判断这是否正确。

角平分线有一个十分常用的性质：

**角平分线上的点到角两边的距离相等**

这个性质反过来说也是对的：

**到角两边距离相等的点在角平分线上**

它们可以用“正弦函数在 范围内的值和自变量 一一对应”来证明。从这两条性质，我们马上得到在下一节就要证明的定理：和中线一样，**三角形的三条角平分线也相交于同一点**。当然，这个点一般来说不是三角形的重心；我们在8.4节会了解到它的几何意义是什么。

## 定理：**三角形的三条角平分线交于一点**

**证明**：我们先把两条角平分线（例如角CAB和角BCA的平分线）的交点P找出来。容易看出，这个点到三角形的三条边距离都相等。所以，它也一定在剩下的那个角（角ABC）的角平分线上。（这就证明完了！）

## 三角形的内接圆

现在我们从角平分线的交点往三角形的三条边作垂线，得到三个垂足。根据角平分线的性质，这三个垂足到角平分线交点的距离相等，所以它们在同一个圆上。这个圆被称作**三角形的内接圆**，它的**圆心**就是**角平分线的交点**。

思考：什么情况下三角形的重心和内接圆圆心是同一个点？

## 习题

**习题1：点到直线的距离公式**

我们在第 5 课已经学习到，一条直线上的点的坐标 可以用下面的公式表示

其中 是直线上一个已知的点（记作A）的坐标。如何得到另外一个点（记作B） 到这条直线的距离 （也就是PB）呢？请同学们用8.1节里面的图，按照下面步骤得到**点到直线的距离公式**：

1. 我们在课上其实已经得到了AP的长度。请问它等于多少？

**提示**：它和我们已经计算出来的 有关系。

1. 直角三角形ABP的斜边AB的长度是多少？
2. 现在，同学们可以用勾股定理得到点B到直线的距离BP了。请证明：
3. 同学们在第 5 课习题中学到过另一种表示直线的方法

其中 。请证明：利用 三个符号，我们可以把点到直线的距离公式写成（同学们在中学里会更经常见到下面这个距离公式）

**习题2：三角函数的和差角公式**

1. 请同学们按照左图的提示，利用平面向量的数量积证明
2. 请同学们先证明（可以画图说明）

然后，请同学们把第1小问的 换成 ，利用上面两个等式证明

1. 现在请同学们把第1小问的 换成 ，利用三角函数的奇偶性证明
2. 最后，再请同学们证明

这四个公式中的前两个被称作三角函数的**和角公式**，后两个被称为三角函数的**差角公式**。它们在以后的数学学习中（例如这本小册子的第 11 课中）会发挥非常大的作用。

**习题3（选做）**： （结果可以不化到最简，但不要使用计算器）

**提示**：。现在同学们可以利用三角函数的诱导公式（第 7 课习题）以及上一题的结论来解决这个问题了。

**习题4（选做）：正弦定理**

平面上的一个三角形可以通过给定三角形的三条边来确定。所谓“确定”，就是说这三条边给定之后，三角形的三个角也就知道了。那么如何找到这三个角呢？这个问题可以通过**正弦定理**解决：如果三角形ABC的三个顶点A、B、C所对的边长 已知，那么正弦定理指出

其中 分别是三个角的大小。如何证明正弦定理呢？为了说明证明的方法，我们先证明等式里面的一部分

这个式子其实就是 。我们把这个式子的两边同时乘上 ，并且把它写成

请同学们思考：等式的两边分别是什么东西？如果同学们想清楚了，正弦定理的证明也就做完了。

**提示**：这个东西和面积有关。

**习题5（选做）：余弦定理**

三角形也可以通过给出三角形的两条边，以及这两条边所夹的角确定。第三条边的长度通过**余弦定理**确定：如果这两条边的长度是 ，它们的夹角是 ，那么第三条边 的长度的平方就是

余弦定理的证明需要用到平面向量的数量积，同学们可以按照下面的步骤证明它：

1. 我们假设已经知道的两条边对应的向量是 ，那么第三条边对应的向量可以如何用 来表示？
2. 请同学们根据数量积的定义证明：向量的数量积也满足一种分配律

所以

1. 现在同学们能看出来第三条边的长度应该是多少了吗？

# 平面向量的应用：三角形的性质 (3) 垂直平分线和外接圆

**学习目标：**

* **掌握用平面向量判断线段垂直的方法**
* **掌握求线段中垂线的方法**
* **了解中垂线的几何性质**

## 直线垂直的判定

除了寻找角平分线以外，平面向量的数量积的另一个常见的用处就是判断两条直线是否垂直。我们知道，两条直线垂直，也就意味着它们的方向向量的夹角等于 。但是 ，而且在 范围内只有 的余弦值等于0，所以我们马上得到：

**如果两条直线垂直，那么它们方向向量的数量积等于0**

**如果两条直线方向向量的数量积等于0，那么它们垂直**

## 线段的中垂线

对于一条线段，与这条线段垂直、而且经过它的中点的直线称作这条线段的**中垂线**，也叫做**垂直平分线**。平面向量是找中垂线的有力工具。我们来看一个具体例子。

**例题1**：一条线段PQ的两个端点为 ，写出它的垂直平分线的直线方程。

**解答**：先复习一下：直线方程的一般形式是 ，方向向量是 。现在我们就把 算出来。

线段PQ对应的向量是 ，显然它和 的数量积应该是0。所以

我们不妨让，那么 （人们习惯让 ）。如何得到 呢？我们知道，PQ的中点 应该在这条直线上，那么

所以PQ垂直平分线的方程是

线段的垂直平分线有如下性质：

**线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等**

**到线段两端的距离相等的点在线段垂直平分线上**

**证明**：假设一条线段AB的两个端点坐标分别是 。那么它的中点（记作P）坐标就是 。

**第一条定理**：在AB垂直平分线上取一个点C，并假设它的坐标是 。因为C在AB的垂直平分线上，所以PC垂直于AB，也就是说 。所以

这就是 应该满足的条件。那么C到A、B距离的平方分别是

所以（同学们现在是否意识到了熟记完全平方公式和平方差公式的必要性？）

这正好是上面那个条件的2倍！所以 ，C到A、B的距离是一样的。

**第二条定理**：这一部分证明和上面类似，请同学们自己完成。

从这两个性质，我们可以仿照上一节课的内容，证明三角形的三条垂直平分线交于一点。我们现在就来证明它。

## 定理：**三角形三边的垂直平分线交于一点**

**证明**：我们先把两条边（例如AC和AB）的垂直平分线交点P找出来。容易看出，这个点到三角形的三个顶点距离都相等。所以，它也一定在剩下的那条边（BC）的垂直平分线上。（我们只把角平分线交于一点的证明稍微改动了一下。）

## 三角形的外接圆

根据线段垂直平分线的性质，三条垂直平分线的交点到三角形的三个顶点距离都相等，所以它们在同一个圆上。这个圆被称作**三角形的外接圆**，它的的**圆心**就是**三角形各边垂直平分线的交点**。我们现在来通过一个例子，来说明如何找到这个圆心。

**例题2**：三角形ABC的三个顶点的坐标是 ，问这个三角形外接圆的圆心坐标是多少？

**解答**：实际上，我们不需要找三条垂直平分线的交点：只要找两条垂直平分线（例如AB和AC的垂直平分线）的交点就够了。仿照例题1中的过程，我们得到这两条线的直线方程（请同学们自己把详细过程做出来）：

它们的交点在什么地方呢？因为这个交点同时在这两条线上，所以**交点的坐标必须同时满足两条直线的方程**；也就是说，我们只需要解二元一次方程组

我们得到 。所以三角形ABC外接圆圆心在 处。

思考：用直线方程的方法，我们还可以找出三角形ABC的内接圆圆心的位置。请同学们尝试把它也找出来。

## 习题

**习题1**：请同学们把例题2中三角形ABC**三条边**的垂直平分线方程都找出来，并验证它们相交于同一个点。

**习题2**：请同学们找出直角三角形外接圆圆心的位置。由此，你是否能够得出一种方法，它可以判断外接圆圆心是在三角形里面还是外面？

**提示**：回忆直角三角形中线的性质。

**习题3（选做）：**同学们已经知道，三角形的三条中线、三条角平分线、三条边的垂直平分线都分别交于一个点。不过，三角形中还有一条线是我们没有仔细研究过的，那就是**三角形三条边上的高**。现在，这一题的暗示已经很明显了：

**三角形三条边上的高也相交于一个点**

请同学们证明这个定理。在解决这个问题之前，同学们要仔细考虑：怎么用向量方法来表示高？

# 平行四边形的面积：2 × 2矩阵和行列式

**学习目标：**

* **了解矩阵记号和2 × 2行列式的定义**
* **理解2 × 2行列式的几何意义**

这节课的目的是引入一些新的数学记号：**矩阵**和**行列式**，它们在下一节课里才会显示出威力。

## 直角坐标系中平行四边形面积的求法

在直角坐标系中表示平行四边形非常容易。给定这个角的顶点的位置、形成这个角的两条线段的另一个端点的位置（也就是以这个顶点为起点的两个向量），这个平行四边形就在坐标系中完全确定了下来。

当平行四边形的一条边和坐标轴（例如 轴）平行时，平行四边形的面积和容易得到。例如，左图中平行四边形ABCD四个顶点的坐标是

容易看出，平行四边形的底边AB的长度为3，高度是C（或D）与A（或B）纵坐标的差，为2。所以平行四边形的面积是6。

现在我们又要没事找事了：让我们故意把平行四边形放歪（例如下一页上的平行四边形ABCD）。这个时候怎样算它的面积呢？同学们应该还记得在推导平行四边形的面积时，我们把平行四边形一部分剪下来，和剩下的部分拼成了一个矩形（左图）。现在我们再次利用这种“割补法”，拼出一个有一条边和坐标轴平行的平行四边形。

我们直接考虑一般情况（所有的数都用字母代替）。为了方便，我们把一个顶点（例如A）放在原点处。割补的方法是：

* 沿着与 轴平行的DP把三角形DPC剪下来
* 把三角形DPC放到三角形AQB处，使得D与A重合，DP与 轴重合。

这样拼好之后，BQ和BC在同一条直线上，我们得到了一条边与 轴平行的平行四边形AQPD。它的高就是D的纵坐标 。

不过AQ的长度是多少呢？因为BQ与AD平行，我们可以假设

我们知道 ，也就是

从方程 (2) 我们得到 ，于是

我们终于得到平行四边形AQPD的（也就是ABCD的）面积

## 2 2矩阵和行列式

你是否觉得这个公式有一种对称美？我们现在引入一些新的数学记号，让这个公式看上去更加漂亮（在数学学习和研究中，好的记号是成功的一半）。我们把以A为起点的两个向量 叫做 ，把它们的 分量分别记作

这里的下标包括两个数字：第一个数字表示这是向量的第几个分量，第二个数字表示这个分量属于哪一个向量。在这里，我们规定给两个向量编号的顺序是：

**可以由 绕着它们共同的起点逆时针旋转不大于180° 得到**

我们把这两个向量分别写成一列，再把它们左右拼接起来，得到一个**矩阵**，记作 （大写英文字母上带一个帽子）：

这样，下标中的**第一个数字表示它在矩阵中的第几行，第二个数字表示它在矩阵中的第几列**。通常，在不会引起混淆的情况下，我们也简单地把 记作 。因为矩阵 有两行两列，所以它被称为 矩阵。有 行、 列的矩阵叫做 矩阵。

如果我们把矩阵 沿着它的左上到右下的**对角线**做对称操作，也就是把原来的 换成 （ 可以是1或2），得到的矩阵称作 的**转置**，记作 ：

上一节中平行四边形ABCD的面积现在可以表示成：

这个表达式在数学上被称为 矩阵的**行列式**，记作 ：

容易验证，行列式有如下性质：

* **交换两行或两列，行列式变号**

思考：现在你是否理解了我们为什么要规定两个向量编号的顺序？

我们把行列式的几何意义陈述如下：

**一个2 2矩阵的行列式的绝对值，等于它的两个列向量确定的平行四边形的面积**

同学们在以后的学习中会知道，对于所有行数等于列数的矩阵（称为**方阵**），都可以定义它们的行列式。例如，对于 矩阵定义的行列式，其几何意义是某个空间物体（称为**平行六面体**）的**体积**。这样定义出来的行列式满足上面的两个性质。行数不等于列数的矩阵没有行列式。

接下来我们用一些具体的例子来说明，如何利用矩阵和行列式计算一些图形的面积。

**注意**：当习惯了用坐标系解决问题后，你的几何直觉可能会发生巨大的退化。所以，在做完这些题目后，希望同学们尝试其他不需要坐标系的方法把题目再做一遍（不想做也得做——这是作业）。事实上，这两道例题都比较简单：杀鸡不用宰牛刀！

**例题1**：长方形ABCD长为8，宽为5，AE与BD平行，求三角形BED的面积。

**解答**：我们的目标是得到B、E、D三个点的坐标。

以B为原点，BC为x轴方向，BA为y轴方向建立平面直角坐标系。从题目得到长方形ABCD各顶点的坐标为

三角形BED的一条边BD对应的向量是

由于AE与BD平行，假设AE的长度是BD的 倍（当然也可以用别的字母），那么

这样我们就得到了三角形BED另一条边BE对应的向量

现在我们就可以用行列式方法计算三角形BED的面积，它是BD、BE两边形成的平行四边形面积的一半：

思考：我们发现最终结果与未知数 没有关系，你是否能直接看出为什么？

**例题2**：已知平行四边形ABCD面积为48，点E、F分别AB, AD的中点，求三角形EFC的面积。

**解答**：由于题目条件非常含糊，不知道平行四边形的倾斜程度，所以为了得到需要的向量的分量，我们不得不假设很多（3个）未知数。

假设平行四边形的底边长度为 ，高度为 （这两个字母是常用的，你也可以选择其他字母）。题目说明 。我们以B为原点，BC为x轴方向建立平面直角坐标系，得到平行四边形的四个顶点A、B、C、D的坐标：

现在A和D两个点的横坐标是多少还不能确定，在上面用问号表示。这意味着我们又要假设一个未知数：A的横坐标是 。容易看出（容易吗？如果不容易，你也许需要复习前面的内容），D的横坐标是 。这样

现在我们可以得到E、F的坐标了：E是BA的中点，这意味着

同样，因为F是AD的中点，

这样，我们得到了三角形EFC的两条边对应的向量

因此（思考：根据我们之前确定的规则，应该把哪一个向量放在第1列？）

现在你是否理解了为什么题目没有告诉我们平行四边形的倾斜程度（也就是 ）？这也意味着本题有更简单的解决方法，希望同学们自己把它找出来。

## 习题

请同学们**不用**直角坐标系，尝试解决例题1、例题2。

# （选读）矩阵的应用：图形的线性变换

**学习目标：**

* **理解矩阵与图形变换之间的关系**
* **理解矩阵乘法的定义和这样定义的道理**
* **认识一些常见平面线性变换的表示矩阵**
* **理解基向量与线性变换的关系**

我们在计算直角坐标系中的平行四边形面积时，引入了矩阵的概念。在这一课里，我们会学习矩阵主要的、也是它真正大显身手的用处：表示平面图形的变换。在数学里，研究向量、矩阵和变换的分支被称作**线性代数**。学完这节课以及之后的两节课，同学们应该能理解这个名字的含义。

## 常见的图形变换

图形的变换可以用图形上各个点位置（也就是它们在直角坐标系中的坐标）的变化来表示。同学们已经见过的一些变换包括伸缩、轴对称和旋转。如何用坐标系方法来表达这些变化呢？

我们考虑一个最简单的图形：一条线段。为了方便，我们把它的一个端点A放在坐标系原点，并假设它的另一个点的坐标是 。这里，我们规定伸缩变换时A点位置保持不变（同学们可以想象拉伸一根橡皮筋的过程来理解这个规定：我们把一头固定拉另一头，而不是同时拉两头）、轴对称操作的对称轴是两个坐标轴，旋转的中心是原点。在这样的伸缩、轴对称和旋转变换下，A点的位置始终保持在原点。现在我们就写出在不同的变换下，得到的线段的另一个端点B’点的位置 。

* **伸缩变换**

假设我们把线段沿左右方向拉伸 倍、沿上下方向拉伸 倍（），容易得到

如果我们压缩线段，只需要让 ，上面的表达式就仍然适用。

* **轴对称**

如果是关于 轴对称，

如果是关于 轴对称，

* **旋转**

前两种变换的结果都可以比较容易地看出来，但是对于旋转操作，我们需要做一些小小的推导。

假设原来的线段与 轴的夹角为 ，我们沿**逆时针**方向把线段旋转了角度 。同学们还记得吗？我们可以用 表示B点的坐标：

其中 是线段AB的长度。旋转之后得到的线段OB’长度不变，仍然为 ，但是与 轴的夹角变成了 。利用三角函数的和角公式**（做第 8 课作业了吗？）**，我们马上得到

## 组合变换和矩阵乘法

我们看到，上面三种变换有一个共同点：它们都可以写成下面的形式

思考：这些记号有没有让你想起上节课刚学过的什么东西？

满足这种关系的平面图形变换称为**线性变换**。例如，对于旋转变换，我们得到

为了理解“线性”这个名字的由来，同学们可以暂时把 当成系数，把上面两个等式看成 与 的一次函数关系。因为一次函数的图象是一条直线，所以人们给这种变换起名字叫线性变换。

如果我们把图形变了一次之后，又要变第二次（第二次和第一次的变换方程可以不一样），最终得到的结果 是什么呢？我们假设第二次变换的变换方程为

把 的值代入上面的方程，我们得到两个变换组合的结果

在上面，我们引入了一些新的系数 ：

所以，我们得到线性变换的一个重要性质：

**两个线性变换的组合还是一个线性变换**

更简单地，我们可以把上面四个 统一写成

其中符号 （大写的希腊字母西格玛Sigma）表示求和，例如

同学们应该已经意识到，我们用这样的记号来写线性变换方程，是因为它们和矩阵有非常紧密的联系。上面的那些带两个数字下标的 等系数，其实分别是2 × 2矩阵 的各个元素。这些矩阵（而且是方阵）分别称作对应的**线性变换的表示矩阵**（简称**变换矩阵**）。为了方便地表达从 两个矩阵得到 的方法，我们现在把上面那条标注了星号 (\*) 的公式定义为**矩阵的乘法**，简单地记作

通常我们把乘号略去不写。需要同学们特别注意的是，一般情况下，

也就是说，**矩阵乘法不满足交换律**。不过，它还是**满足结合律**的：

请同学们自己验证。矩阵乘法的计算方法用文字表达如下：

**两个矩阵 按顺序相乘得到一个新的矩阵 ，它的第 行、第 列的元素   
等于第一个矩阵的第 行、第二个矩阵的第 列的所有元素对应相乘再相加。**

这个规则不仅仅适用于2 × 2矩阵之间相乘，它也适用于其他形状的矩阵相乘，例如，我们可以做2 × 4和4 × 3矩阵的乘法，得到一个2 × 3矩阵：

但是，不是所有的矩阵都可以相乘：从矩阵乘法的定义可以看出，对于相乘的两个矩阵，**第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数**。它们得到的矩阵的行数等于第一个矩阵的行数，列数等于第二个矩阵的列数。

特别地，平面上的列向量和行向量分别可以被看作是2 × 1和1 × 2矩阵。如果我们把点的坐标写成列向量

（同学们注意区分向量 和它的第一个分量 ）那么线性变换方程可以用矩阵和列向量（注意：**不能用行向量**）简单地写成

例如，旋转变换可以写成（它的变换矩阵通常用大写字母 表示，因为“旋转”的英文单词是Rotation）：

如果我们没有做任何变换（即 ），同学们容易验证

这种“不做任何变换”的变换叫做**恒等变换**，它的变换矩阵 被称作**单位矩阵**。单位矩阵在矩阵乘法中的作用，与1在数字乘法中的作用相似：

单位矩阵与任何一个方阵相乘（如果它们能相乘的话）都是可以交换的。同学们现在应该已经对矩阵记号的作用有比较深刻的体会了。

## 矩阵乘法和行列式

我们在这里给出行列式的另外一个性质。对于两个方阵 ，如果它们的行数或者列数相等，那么它们可以相乘得到矩阵 。那么 的行列式是多少呢？答案是

这个式子对于所有的方阵（不只是 方阵）都是对的。同学们可以自己证明 方阵的情况。

# （选读）平面的基向量和维数

**学习目标：**

* **了解基向量的意义，以及变换矩阵和基向量的关系**
* **了解维数的数学定义**

## 坐标系的基向量

在学习平行四边形面积算法的时候，我们知道，矩阵的每一列是一个向量。例如，单位矩阵的两个列向量是

它们有什么意义吗？这两个向量分别是沿着 轴的长度为1的向量。同学们很容易验证，**任何一个**向量 都可以写成

在数学上，我们把这个关系描述为：平面上的**所有**向量 都可以表示成向量 的**线性组合**， 被称为**组合系数**。

中如果少了一个向量，我们只能表示某一个特定方向的向量；如果多了一个向量（比如说 ），因为多出来的这个向量可以表示成 的线性组合，所以实际上我们**不需要第三个向量**来描述平面上的向量，例如：

因此，我们**需要、但是只需要两个**向量，就能表示平面上的所有向量。这两个向量被称作平面的**基向量**（“基”意思是“基本”）。这也是我们说**平面的维数是2**的道理。

思考：我们日常生活的空间为什么被称为三维空间？

## 变换矩阵的几何意义

看完了单位矩阵这个比较无聊的家伙之后，我们再来观察其他的线性变换矩阵。

* **旋转**

旋转矩阵给出的两个列向量分别是：

我们发现， 可以分别由 逆时针旋转 角得到！类似的事情也可以在其他的变换上发现：

* **关于 轴对称**

可以分别由 关于 轴对称得到。

* **关于 轴对称**

可以分别由 关于 轴对称得到。

* **伸缩变换**

可以由 沿 轴拉长到 倍、 可以由 沿 轴拉长到 倍得到。

一般地，我们可以直接计算验证

其实这就是矩阵等式 的两列。所以：

**线性变换表示矩阵的两列，分别是向量 经过这个变换得到的结果向量**

## 正交基向量和一般基向量

我们前面给出的基向量 有一个特殊的性质：

也就是说，它们互相垂直（也叫做**正交**）。因此它们被称为平面的一组**正交基向量**（简称**正交基**）。不过，在经过了一个随便选取的线性变换之后，得到的向量 就不一定互相垂直了。这时，我们是否还能用 它们表示平面上的所有向量呢？

答案是：有时候能。什么时候能、什么时候不能呢？这时，行列式就派上用场了：

**当且仅当 时， 的线性组合不能表示平面上的所有向量**

换句话说，就是

**当且仅当 时， 的线性组合可以表示平面上的所有向量**

**证明**：我们在这里用了数学家们很喜欢用的一句口头禅“**当且仅当 (if and only if)** ”。这是什么意思？它表示，如果 ，那么 的线性组合不能表示平面上的所有向量；但是，只要 ，那就可以了。

* 我们先来看“**当**” 时发生了什么。这时

所以，这时 方向相同！不可能用两个方向相同的向量组合出别的方向的向量。

* 接下来我们来证明“**仅当**”，也就是当 时，我们可以用 的线性组合不能表示平面上的所有向量。在平面上随便取一个向量 。我们要证明，存在两个实数 满足 。我们得到

因为 ，所以这样的 是存在的。

现在我们看到，**平面基向量的选择不是唯一的**。这时，我们把随便选择的一对不沿着同一个方向的基向量 称为**一般基向量，**并且把上面证明中得到的数 称为在以 为基向量时 的**分量**。

# （选读）矩阵和方程组的关系

**学习目标：**

* **能够用矩阵记号表示二元一次方程组**
* **了解二元一次方程组的克莱默法则**
* **了解逆矩阵的意义，并且能够判断一个矩阵是否有逆矩阵**
* **能够利用矩阵和方程组的关系寻找矩阵的逆矩阵**

## 克莱默法则

在上节课里，我们解了一个关于 的二元一次方程组。不过，我们通常让 作未知数，所以为了方便下面的叙述，我们把 和 交换一下，得到

敏感的同学可能已经注意到，我们可以把 的分母也写成行列式：

如果我们定义向量 ，这两个行列式就分别是把矩阵 的第一列和第二列换成 得到的；同时，原来的二元一次方程组就可以用矩阵记号表示成

现在我们就得到了用来解二元一次方程组的**克莱默法则**（加布里尔·克莱默Gabriel Cramer，1704 – 1752，瑞士数学家）：

* **二元一次方程组 的解 ，分别是把矩阵 的第一列和第二列换成 得到的行列式再除以 的行列式。**
* **当 时，方程组无解。**

我们来看一个具体例子。

**例题1**：解二元一次方程组

**解答**：对于这个方程组

所以

在这里，我们看到了矩阵、向量和方程组之间的紧密联系。

思考：请同学们猜想，如果我们要解三元一次、四元一次……方程组，对应的克莱默法则是什么样的？按照现在教数学的方法，同学们要等到大学一年级才会学到一般情况下克莱默法则的证明。有兴趣的同学在学完这个入门课程之后，可以自己去找一些更高级的书去看（不幸的是，这些“更高级的书”一般假设读者已经读完了高中）。

## 逆变换和逆矩阵

同学们容易理解，对于一个变换，我们常常可以找到另外一个变换，这两个变换总的效果就是没有效果。例如，如果我们把一个图形先逆时针旋转 角（暂时把它叫做变换1），再顺时针旋转 角（叫做变换2），总的效果就是我们根本没有动它。数学上如何表示这一点呢？同学们在这节课的习题里会证明，顺时针旋转 角的变换矩阵，等于逆时针旋转 角的变换矩阵。所以上面两个变换的表示矩阵分别是

这里我们用到了三角函数的奇偶性。按照我们做变换的顺序，总的变换由下面的矩阵表示：

其实，我们还可以验证

我们看到，不管先做哪一个变换，总的变换的表示矩阵就是单位矩阵，这和我们的预期是符合的。

现在我们就可以引入逆变换和逆矩阵的概念了。如果两个变换**不管先做哪一个，总的效果是没有效果，**那么我们说这两个变换互为**逆变换**，它们的表示矩阵互为**逆矩阵**。所以，“逆时针旋转 角”和“顺时针旋转 角”互为逆变换，它们的表示矩阵 互为逆矩阵。

如果我们把这两个表示矩阵记作 ，那么“不管先做哪一个，总的效果是没有效果”的数学表达式就是：

这个式子与两个互为倒数的数相乘等于1的表达式很像。根据定义的要求，**两个互为逆矩阵的矩阵的相乘顺序要可以交换**。我们也可以从变换的角度来理解：**两个互为逆变换的变换的操作顺序要可以交换**。

对于一个有逆矩阵的矩阵，它的逆矩阵是**唯一的**。这是为什么呢？

**证明**：首先我们说明另外一条定理：如果矩阵 ，对于另外一个矩阵 ，只要 这两个矩阵乘法是可以做的，那么

同学们不难通过直接计算来验证它。现在，假设矩阵 有逆矩阵，而且有两个逆矩阵 ，也就是说

那么

但是因为 ，所以 ，也就是说 。所以 的逆矩阵只有一个。

既然逆矩阵是唯一的，我们就可以用一个确定的符号 表示 的逆矩阵（这是在仿照倒数的记号，但是我们一般不写 ）所以

## 逆矩阵的存在性

同学们知道，不是所有的数都有倒数：0就没有倒数。与此对应，不是所有的矩阵都有逆矩阵。在这里，我们只考虑方阵。

如何判断一个方阵是否有逆矩阵呢？这个问题和“如何判断一个变换是否有逆变换”是一样的。在12.3节，我们学习到，有一些变换（表示矩阵行列式等于0）会把平面的正交基向量 变成两个方向一样的向量，不能用它们表示平面上所有的点，让我们“丢失了某些信息”。因此，直观上理解，这样的变换就是不可逆的：丢失的信息再也找不回来。我们已经知道，这样的变换的标志，就是它的表示矩阵的行列式等于0。所以，我们得到逆矩阵存在性的判断方法：

**对于任何一个方阵 ，当且仅当 时，它有逆矩阵**

用变换的语言来说，就是

**对于任何一个线性变换，当且仅当它的表示矩阵行列式不为0时，它有逆变换**

现在，有了逆矩阵的唯一性，我们可以稍微放松一点对逆矩阵的要求：对于矩阵 ，如果我们能找到另一个矩阵 ，它**只需要满足 和 其中的一个**，那么 就是 的逆矩阵。

**证明**：假设我们找到的 只满足 ，要说明 是 的逆矩阵，我们只要再证明 就可以了。因为

所以 ，也就是说， 的逆矩阵是存在的。那么

这就证明完了。

## 方程组和逆矩阵

当一个矩阵有逆矩阵时，如何把这个逆矩阵找出来呢？

下面，我们利用矩阵和方程组的联系来得到求逆矩阵的方法。对于方程组 ，只要它有解（也就是 ），那么我们可以给方程左右两边都乘上 得到（注意：要乘在左边，不能乘在右边）

这个等式告诉了我们得到 的方法。我们用下面的例题来说明它。

**例题3**：求矩阵 的逆矩阵。

**解答**：矩阵 对应的二元一次方程组 是

现在我们来把 用 表示。容易得到

所以 的逆矩阵就是

同学们可以看出，当矩阵的行数、列数变得很大之后，按照上面的方法求逆矩阵就会十分麻烦。人们通常把这个工作交给计算机完成。

## 习题

**习题1**：请同学们证明，顺时针旋转 角的变换矩阵，等于逆时针旋转 角的变换矩阵。（这样我们就不需要去记忆两种旋转矩阵了。）

**习题2**：请同学们证明，**所有旋转变换的表示矩阵行列式等于1**。

**习题3**：请同学们证明，对于旋转矩阵 和平面上的任意两个列向量

这个等式的几何意义非常明显。请问同学们，这个意义是什么？

**提示**：回忆数量积的表达式 。