INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

PROJET DE ECMA

MAJOR : MASTER2 MPRO

ACADEMIC YEAR : 2021-2022

Optimisation robuste sur le problème le plus court chemin

Auteurs:
Yue ZHANG
Mohamed Salah MIMOUNA

Enseignants:
Zacharie ALÈS
Daniel PORUMBEL

Contents

1 Introduction du problème

1.1 Modélisation du problème statique

Données :

- un graphe orienté $G = (V, A)$;
- un sommet origine $s \in V$ et un sommet destination $t \in V$;
- une durée de trajet d_{ij} associée à chaque arc $ij \in A$;
- un poids p_i associé à chaque sommet $i \in V$.

Le problème statique consiste à trouver un plus court chemin de s à t dont le poids des sommets est inférieure ou égale à un entier S.

Variables : on propose deux variables binaires :
$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{si arc } (i, j) \text{ appartient plus court chemin} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$, et $y_i = \begin{cases} 1, \text{si sommet } i \text{ se trouve sur le plus court chemin} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$.

Objectif : L'objectif est donc minimiser le plus court chemin au sens la durée (1).

Contraintes :

- Contrainte du poids : la contrainte (2) indique la sommes des poids du sommet dans le plus court chemin ne dépasse pas la limite S.
- Contraintes du chemin de s à t : les contraintes (3)-(8) s'expriment un chemin de s à t. Pour cela, il exisiste exactement un arc sortant de s (3) et exactement un arc entrant à t (4). Les sommets s et t sont les extrémités du chemin (8). Pour tous les sommets intermédiaires (i.e. $\forall v \in V \backslash \{s, t\}$), au plus un arc peut rentrer à v (7), de même au plus un arc peut sortir de v (6). Dernièrement, la contrainte conservation (5): pour tous les sommets intermédiaires, le nombre de arcs sortant de v égale au nombre de arcs entrant à v. Evidemment, s'il exists un arc passant au sommet intermédiaire, alors ce sommet est bien-sûr dans le chemin de s à t.

Compacité : on peut dire que notre modèle mathématique est compacte. Le nombre de variables est $|V| + |A|$, le nombre de contraintes est $3(|V| - 2) + 4$.

Modèle :

$$
\begin{aligned}
(\text{P}) \quad \min_{x_{ij}} \quad & \sum_{ij\in A} d_{ij}x_{ij} && (1)\\
\text{s.c.} \quad & \sum_{i\in V} p_i y_i \leqslant S && (2)\\
& \sum_{sj\in A} x_{sj} = 1 && (3)\\
& \sum_{it\in A} x_{it} = 1 && (4)\\
\sum_{vi\in A} x_{vj} - \sum_{iv\in A} x_{iv} &= 0 \ , \forall v \in V\backslash\{s,t\} && (5)\\
& \sum_{vi\in A} x_{vj} = y_v \ , \forall v \in V\backslash\{s,t\} && (6)\\
& \sum_{iv\in A} x_{iv} = y_v \ , \forall v \in V\backslash\{s,t\} && (7)\\
& y_s = y_t = 1 && (8)\\
& y_i \in \{0,1\} \ , i \in V && (9)\\
& x_{ij} \in \{0,1\} \ , ij \in A && (10)
\end{aligned}
$$

1.2 Modélisation du problème robuste

Le problème robuste considère les incertitudes sur les durées et sur les poids.

Données :

- un graphe orienté $G = (V, A)$;
- un sommet origine $s \in V$ et un sommet destination $t \in V$;
- une durée de trajet d^1_{ij} associée à chaque arc $ij \in A$;
- un poids p^2_i associé à chaque sommet $i \in V$.

Incertitudes :

- Incertitude sur les durées : $\mathcal{U}^1 = \left\{\{d^1_{ij} = d_{ij}(1+\delta^1_{ij})\}_{ij\in A} \text{ t.q. } \sum_{ij\in A}\delta^1_{ij} \leqslant d_1, \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \forall ij \in A\right\}$.
- Incertitude sur les poids : $\mathcal{U}^2 = \left\{\{p^2_i = p_i + \delta^2_i \hat{p}_i\}_{i\in V} \text{ t.q } \sum_{i\in V}\delta^2_i \leqslant d_2, \delta^2_i \in [0,2] \forall i \in V\right\}$.

Le problème robuste consiste à trouver le minimum le plus long chemin au sens durée de s à t dont le poids des sommets est inférieure ou égale à un entier S en considérant tous les sénarios.

Objectif : L'objectif est donc minimiser le plus long chemin au sens de la durée (11) en considérant tous les sénarios.

Modèle :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{PR}) \quad & \min_{x_{ij}} \max_{d^1_{ij} \in \mathcal{U}^1} \quad \sum_{ij \in A} d^1_{ij} x_{ij} && (11)\\
\text{s.c.} \quad & \sum_{i \in V} p^2_i y_i \leqslant S \ , \ p^2_i \in \mathcal{U}^2 && (12)\\
\text{contraintes du chemin } s \text{ à } t : \ & (3) - (8)\\
\text{variables : } & (9) - (10)
\end{aligned}
$$

2 Résolution par plans coupants

2.1 Reformuler l'objectif

On modifie le problème afin que la robustesse n'apparaisse plus dans l'expression de l'objectif mais dans les contraintes.

$$
\begin{aligned}
(\overline{\text{PR}}) \quad & \min_{x_{ij}} \min_{z} z && (13)\\
\text{s.c.} \quad & \sum_{ij\in A} d^1_{ij} x_{ij} \leqslant z \, , \, d^1_{ij} \in \mathcal{U}^1 && (14)\\
& \text{contrainte du poids : (12)} \\
& \text{contraintes du chemin } s \text{ à } t : (3) - (8) \\
& \text{variables : } (9) - (10)
\end{aligned}
$$

2.2 Définir le problème maître

On définit le problème maître ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
(\text{MP}) \quad & \min_{z} z && (15)\\
\text{s.c.} \quad & \sum_{ij\in A} d^1_{ij} x_{ij} \leqslant z \, , \, d^1_{ij} \in \mathcal{U}^{1*} && (16)\\
& \sum_{i\in V} p^2_i y_i \leqslant S \; , \; p^2_i \in \mathcal{U}^{2*} && (17)\\
& \text{contraintes du chemin } s \text{ à } t : (3) - (8) \\
& \text{variables : } (9) - (10)
\end{aligned}
$$

d'où on propose trois différentes définitions possibles de $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$:

- Il n'y a pas d'augmentation pour la durée d_{ij} de chaque arc $ij \in A$ (i.e. $\delta^1_{ij} = 0, \forall ij \in A$). De même, Il n'y a pas d'augmentation du poids pour chaque sommet (i.e. $\delta^2_i = 0 \, , \forall i \in V$).

$$\mathcal{U}^{1*} = \left\{ \{ d^1_{ij} = d_{ij}(1 + \delta^1_{ij}) = d_{ij} \}_{ij\in A} \right\}$$

$$\mathcal{U}^{2*} = \left\{ \{ p^2_i = p_i + \delta^2_i \hat{p}_i = p_i \}_{i\in V} \right\}$$

- Toutes les augmentations de durée δ^1_{ij} sont uniformémént la moyenne de la limite d_1 (i.e. $\delta^1_{ij} = \min\left(\frac{d_1}{|A|}, D_{ij}\right) \, , \forall ij \in A$). De la même manière, les augmentations de poids sont le produit de $\hat{p}_i$ et la moyenne de la limite d_2 (i.e. $\delta_i^2 = \min\left(\frac{d_2}{|V|}, 2\right)$, $\forall i \in V$).

$$\mathcal{U}^{1*} = \left\{\{d_{ij}^1 = d_{ij}(1+\delta_{ij}^1)\}_{ij\in A} \text{ t.q. } \delta_{ij}^1 = \min\left(\frac{d_1}{|A|}, D_{ij}\right) , \forall ij \in A\right\}$$

$$\mathcal{U}^{2*} = \left\{\{p_i^2 = p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i\}_{i\in V} \text{ t.q. } \delta_i^2 = \min\left(\frac{d_2}{|V|}, 2\right) , \forall i \in V\right\}$$

- On prend aléatoirement un sous-ensemble des arcs $A' \subset A$, tel que tous les arc hors de A' n'a pas d'augmentation de durée et tous les arcs dans A' ont une pourcentage d'augmentation de $\frac{d_1}{|A'|}$ (i.e. $\delta_{ij}^1 = \begin{cases} \min\left(\frac{d_1}{|A'|}, D_{ij}\right), & \text{si l'arc } ij \in A' \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$, $\forall ij \in A$). De même façon, on prend aléatoirement un sous-ensemble des sommets $V' \subset V$, tel que tous les sommets hors de V' n'a pas d'augmentation de poids et tous les sommets dans V' ont une augmentation du produit de $\hat{p}_i$ et $\frac{d_2}{|V'|}$ (i.e. $\delta_i^2 = \begin{cases} \min\left(\frac{d_2}{|V'|}, 2\right), & \text{si le sommet } i \in V' \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$, $\forall i \in V$).

$$\mathcal{U}^{1*} = \left\{\{d_{ij}^1 = d_{ij}(1+\delta_{ij}^1)\}_{ij\in A} \text{ t.q. } \delta_{ij}^1 = \begin{cases} \min\left(\frac{d_1}{|A'|}, D_{ij}\right), & \text{si l'arc } ij \in A' \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} , \forall ij \in A\right\}$$

$$\mathcal{U}^{2*} = \left\{\{p_i^2 = p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i\}_{i\in V} \text{ t.q. } \delta_i^2 = \begin{cases} \min\left(\frac{d_2}{|V'|}, 2\right), & \text{si le sommet } i \in V' \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} , \forall i \in V\right\}$$

2.3 Définir les sous-problèmes

Soient (x_{ij}^*, y_i^*, z^*) est la solution du (MP).

Sous-problème lié à $\mathcal{U}^1$: on développe $\max_{d_{ij}^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{ij\in A} x_{ij}^* d_{ij}^1$:

$$(\text{SP}_1) \quad \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij\in A} x_{ij}^* d_{ij}(1+\delta_{ij}^1) \tag{18}$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_{ij\in A} \delta_{ij}^1 \leqslant d_1 \tag{19}$$

$$\delta_{ij}^1 \leqslant D_{ij} , \forall ij \in A \tag{20}$$

$$\delta_{ij}^1 \geqslant 0 , \forall ij \in A \tag{21}$$

Sous-problème lié à $\mathcal{U}^2$: on sait que $\sum_{i\in V} y_i^* p_i^2 \leqslant S, \forall p_i^2 \in \mathcal{U}^2$ est équivalent au fait que la valeur objective de (22) est inférieure ou égale à S :

$$(\mathrm{SP}_2) \quad \max_{\delta_i^2} \sum_{i\in V} y_i^* (p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i) \tag{22}$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_{i\in V} \delta_i^2 \leqslant d_2 \tag{23}$$

$$\delta_i^2 \leqslant 2\,, \forall i \in V \tag{24}$$

$$\delta_i^2 \geqslant 0\,, \forall i \in V \tag{25}$$

2.4 Condition optimale

Une solution du problème maître (x_{ij}^*, y_i^*, z^*) est optimale, si $\sum_{ij\in A} d_{ij}^{1*} x_{ij}^* \leqslant z^*$ et $\sum_{i\in V} p_i^{2*} y_i^* \leqslant S$ avec $d_{ij}^{1*} = d_{ij}(1 + \delta_{ij}^{1*})$, et $p_i^{2*} = p_i + \delta_i^{2*} \hat{p}_i$ où δ_{ij}^{1*} est la solution donnée par la résolution (18) et δ_i^{2*} donnée par la résolution (22). Dans ce cas l'algorithme coupant s'arrête et la solution obtenue est optimale. Sinon, on ajoute les contraintes violées par les sénarios touvées aux ensembles de contraintes $\mathcal{U}^{1*}$ ou/et $\mathcal{U}^{2*}$ du problème maître (voir subsection 2.5).

2.5 Ajouter les coupes

Sous-problème lié à $\mathcal{U}^1$: Soit δ_{ij}^{1*} la solution du sous-problème (SP_1). Si $z^* < \sum_{ij\in A} x_{ij}^* d_{ij}(1 + \delta_{ij}^{1*})$, alors on ajoute la contrainte ci-dessous dans (MP) :

$$\sum_{ij\in A} x_{ij} d_{ij}(1 + \delta_{ij}^{1*}) \leqslant z$$

Sous-problème lié à $\mathcal{U}^2$: Soit δ_i^{2*} la solution du sous-problème (SP_2). Si $\sum_{i\in V} y_i^* (p_i + \delta_i^{2*} \hat{p}_i) > S$, alors on ajoute la contrainte ci-dessous dans (MP) :

$$\sum_{i\in V} y_i (p_i + \delta_i^{2*} \hat{p}_i) \leqslant S$$

3 Résolution par dualisation

3.1 Reforumlation de l'objectif du problème robuste

Premièrement, on reécrit l'objectif du problème robuste (PR) afin d'isoler la variable δ^1_{ij} :

$$\begin{aligned}
\min_{x_{ij}} \max_{\delta^1_{ij}} \quad \sum_{ij\in A} d_{ij}(1+\delta^1_{ij})x_{ij} &= \min_{x_{ij}} \sum_{ij\in A}(d_{ij}x_{ij}) + \max_{\delta^1_{ij}} \sum_{ij\in A} d_{ij}\delta^1_{ij}x_{ij} && (26)\\
\text{s.c.} \quad \sum_{ij\in A} \delta^1_{ij} &\leqslant d_1 && (27)\\
\delta^1_{ij} &\leqslant D_{ij}, \forall ij \in A && (28)\\
\delta^1_{ij} &\geqslant 0, \forall ij \in A && (29)\\
\text{contrainte du poids : } &(12)\\
\text{contraintes du chemin } s \text{ à } t : &(3)-(8)\\
\text{variables : } &(9)-(10)
\end{aligned}$$

3.2 Problème interne lié aux variables δ^1_{ij}

Prenons le problème interne dans la reformulation précédente :

$$\begin{aligned}
\max_{\delta^1_{ij}} \sum_{ij\in A} d_{ij}\delta^1_{ij}x_{ij}\\
\text{s.c.} \quad \sum_{ij\in A} \delta_{ij} \leqslant d_1\\
\delta^1_{ij} \leqslant D_{ij}, \forall ij \in A\\
\delta^1_{ij} \geqslant 0, \forall ij \in A
\end{aligned}$$

3.3 Dualisation du problème interne

Maintenant, on dualise le problème interne lié aux variables δ^1_{ij} :

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda_{ij},\, \alpha} d_1\alpha + \sum_{ij\in A} D_{ij}\lambda_{ij} & && (30)\\
\text{s.c} \quad \alpha + \lambda_{ij} \geqslant d_{ij}x_{ij}, \forall ij \in A & && (31)\\
\lambda_{ij} \geqslant 0, \forall ij \in A & && (32)\\
\alpha \geqslant 0 & && (33)
\end{aligned}$$

3.4 Reformulation de la contrainte robuste

La contrainte robuste (12) peut s'écrire sous la forme ci-dessous en isolant les variables δ_i^2 :

$$\sum_{i \in V} p_i y_i + \max_{\delta_i^2} \sum_{i \in V} \delta_i^2 \hat{p}_i y_i \leqslant S \tag{34}$$
$$\text{t.q} \quad \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leqslant d_2 \tag{35}$$
$$\delta_i^2 \leqslant 2, \forall i \in V \tag{36}$$
$$\delta_i^2 \geqslant 0, \forall i \in V \tag{37}$$

3.5 Problème interne lié aux variables δ_i^2

Prenons le problème interne lié aux variables δ_i^2 dans la reformulation de la contrainte robuste précédente :

$$\begin{aligned} & \max_{\delta_i^2} \sum_{i \in V} \delta_i^2 \hat{p}_i y_i \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leqslant d_2 \\ & \delta_i^2 \leqslant 2, \forall i \in V \\ & \delta_i^2 \geqslant 0, \forall i \in V \end{aligned}$$

3.6 Dualisation du problème interne

De même, on dualise le problème interne précédente :

$$\min_{\beta, \omega_i} d_2 \beta + \sum_{i \in V} 2\omega_i \tag{38}$$
$$\text{s.c.} \quad \beta + \omega_i \geqslant \hat{p}_i y_i, \forall i \in V \tag{39}$$
$$\omega_i \geqslant 0, \forall i \in V \tag{40}$$
$$\beta \geqslant 0 \tag{41}$$

3.7 Le problème robuste sous forme PLNE

Par la forte dualité, on peut reexprimer le problème robuste en intégrant les deux dualisations de problèmes internes précédentes sous forme PLNE :

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\mathrm{PR}}) \quad & \min_{x_{ij},\, \alpha,\, \lambda_{ij}} \sum_{ij \in A} d_{ij} x_{ij} + d_1 \alpha + \sum_{ij \in A} D_{ij} \lambda_{ij} && (42)\\
& \text{s.c.} \quad \alpha + \lambda_{ij} \geqslant x_{ij} d_{ij}, \forall ij \in A && (43)\\
& \sum_{i \in V} p_i y_i + d_2 \beta + \sum_{i \in V} 2\omega_i \leqslant S && (44)\\
& \beta + \omega_i \geqslant \hat{p}_i y_i, \forall i \in V && (45)\\
& \lambda_{ij} \geqslant 0, \forall ij \in A && (46)\\
& \omega_i \geqslant 0, \forall i \in V && (47)\\
& \alpha \geqslant 0 && (48)\\
& \beta \geqslant 0 && (49)\\
& \text{contraintes du chemin } s \text{ à } t : (3) - (8)\\
& \text{variables : } (9) - (10)
\end{aligned}
$$