Klausur A WS2324

Analysis für Informatiker und Statistiker (Ludwig-Maximilians-Universität München)

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Dr. Oliver Cooley

Wintersemester 2023/2024
10. Februar 2024

Analysis für Informatik und Statistik

Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf.

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ____________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) 0^1

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: i^4

(c) (2 Punkte) $|-3i|^2$

(d) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{3} k$

(e) (2 Punkte) $\binom{4}{2}$

(f) (2 Punkte) $\sup\{\sin x : x \in \mathbb{R}\}$

(g) (2 Punkte) $\bigcap\limits_{x \in \mathbb{R}^+}]0, x[$

(h) (2 Punkte) $\lim_{n\to\infty}(-n^2)$

(i) (2 Punkte) $\int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x$

(j) (2 Punkte) $\int_0^2 x \,\mathrm{d}x$

Name: ______________________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie das Ergebnis jeweils soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

Geben Sie in (a) – (e) jeweils die Ableitung $f'(x)$ der angegebenen Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ an:

(a) (2 Punkte) $f(x) = e^{-x}$.

(b) (2 Punkte) $f(x) = x^3 - x$.

(c) (2 Punkte) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

(d) (2 Punkte) $f(x) = 17$.

(e) (2 Punkte) $f(x) = \sqrt{2x}$.

Schreiben Sie in (f) – (j) jeweils die Menge ohne f:

(f) (2 Punkte) $f(\mathbb{Z})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$:

(g) (2 Punkte) $f(\{i, -i\})$ für $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = x^2$:

(h) (2 Punkte) $f^{-1}(\{0\})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$:

(i) (2 Punkte) $f^{-1}(\{0\})$ für $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$:

(j) (2 Punkte) $f^{-1}(\{1\})$ für $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = x^4$:

Name: ____

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $\xi \in M$.

(b) (14 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x \sin\big(\exp(x^{-1})\big) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(i) (7 Punkte) Zeigen Sie durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung, dass f in jedem $x > 0$ stetig ist.

(ii) (7 Punkte) Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium, dass die Funktion auch in $x = 0$ stetig ist (begründen Sie Ihre Argumentation durch Ergebnisse der Vorlesung).

Geben Sie in (b) Ihre Rechnungen und Argumente mit Zwischenschritten an.

Name: ______________________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

Die Fibonaccizahlen sind rekursiv definiert durch

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} F_{n+1} := F_n + F_{n-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

(schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

Name: ____

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Betrachten Sie eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$.

(i) (5 Punkte) Geben Sie die Definition gemäß Vorlesung des Konvergenzradius der Potenzreihe an.

(ii) (5 Punkte) Geben Sie eine aus der Vorlesung bekannte Formel an, die den Konvergenzradius mit Hilfe der Quotienten der Koeffizienten ausdrückt (inklusive der Bedingungen der Gültigkeit der Formel).

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die folgende Potenzreihe den Konvergenzradius R mit der Formel aus (a)(ii), unter Benutzung von Grenzwertsätzen aus der Vorlesung (geben Sie Ihre Rechnungen und Argumente mit Zwischenschritten an):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \right)^2 z^n.$$

Name: ______________________________

Name: ____