Analyse

Negation $\neg A$

Konjunktion $A \wedge B$

Disjunktion $A \vee B$

Implikation $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

Aussage alle Wahrheitswert bekannt

Aussageformen Variable erhalten, deren WW unbekannt

Tautologie jede Belegung der Var. mit WW wahr sind

Kontraposition $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

$P(x)$ Aussage über Element x von B $A := \{x \in B : P(x)\}$ gleichzeitig

als die Teilmenge von B, bestehend aus allen $x \in B$ für die $P(x)$ wahr ist

Durchschnitt $A \cap B$

Vereinigung $A \cup B$

Differenz $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$

Komplement $B^C := A \setminus B$ $(B \subseteq A)$

Potenzmenge Menge aller Teilmenge $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}\}$

universelle Aussage $\forall_{x \in A} P(x)$ ($\bigwedge_{x \in A}$ großes Und)

existentielle Aussage $\exists_{x \in A} P(x)$ ($\bigvee_{x \in A}$ großes Oder)

eindeutige Existenz $\exists!_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \exists_{x \in A} (P(x) \wedge \forall_{y \in A} (P(y) \Rightarrow x = y))$

Negation $\neg \forall_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \exists_{x \in A} \neg P(x)$ $\neg \exists_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \forall_{x \in A} \neg P(x)$

$\neg \exists!_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \forall_{x \in A} (P(x) \Rightarrow \exists_{y \in A} (P(y) \wedge x \neq y))$

für jedes $i \in I$ sei A_i eine Menge ($I \neq \emptyset$ Indexmenge) $\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall_{i \in I} x \in A_i\}$

$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists_{i \in I} x \in A_i\}$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\} = \{1\}$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\} = \mathbb{N}$

disjunkt g.d.w. $\forall_{i,j \in I} i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

kartesisches Produkt $A\times B := \{(x,y) : x\in A \wedge y\in B\}$

$\{1,2\}\times\{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

$f : A\to B,\ x\mapsto f(x)$ $\quad$ $\mathrm{graph}(f) := \{(x,y)\in A\times B : y=f(x)\}$

$F(A,B) := B^A := \{(f:A\to B) : (A=D(f)) \wedge (B=R(f))\}$

Menge der Fkt von A nach B $\quad |F(A,B)| = |B|^{|A|}$

$f(T) := \{f(x)\in B : x\in T\}$ Bild von T unter f

$f^{-1}(V) := \{x\in A : f(x)\in V\}$ Urbild $(f:A\to B,\ T\subseteq A,\ V\subseteq B)$

f injektiv $\Leftrightarrow \forall_{y\in B} (f^{-1}\{y\}=\phi \vee \exists!_{x\in A} f(x)=y)$ $\quad$ jedes $y\in B$ hat

$\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2\in A} (x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))$ $\quad$ höchstens ein Urbild

f surjektiv $\Leftrightarrow \forall_{y\in B}\exists_{x\in A}\ y=f(x)$ $\quad$ jedes $y\in B$ hat

$\Leftrightarrow \forall_{y\in B} f^{-1}\{y\}\neq\phi$ $\quad$ mindestens ein Urbild

f bijektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv $\wedge$ f surjektiv

Id bij.

Identität auf A $\quad Id_A : A\to A,\ Id_A(x)=x \quad \{1,2,3\}\to\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

Konstante Abbildung $f : A\to B,\ \exists_{c\in B}\forall_{x\in A} f(x)=c \Leftrightarrow f\equiv c$ identisch gleich

$\phi\neq T\subseteq A$
$V\subseteq B$ $\quad f(T)=c,\ f^{-1}(V)=\begin{cases} A & \text{für } c\in V\\ \phi & \text{für } c\notin V\end{cases}$ $\quad$ f inj $\Leftrightarrow A=\{x\}$, f surj $\Leftrightarrow B=\{c\}$

Inklusion $\iota : A\to X\ (A\subseteq X),\ \iota(x) := x$ $\quad \iota$ inj.

$A=\{1,2\}\ X=\{1,2,3\}$ $\quad \iota$ surj $\Leftrightarrow A=X$

$\iota(x)=\{(1,1),(2,2)\}\ (x\in A)$ $\quad \Leftrightarrow \iota=Id_A$

Einschränkung $\quad$ g Einschränkung von f auf A $\quad A\subseteq X,\ f:X\to B,\ g:A\to B$

Fortsetzung $\quad$ f Fortsetzung von g auf X $\quad \forall_{x\in A} g(x)=f(x)$

Komposition/Hintereinanderausführung von $f:A\to B,\ g:C\to D,\ f(A)\subseteq C$

g nach f $\quad g\circ f : A\to D,\quad (g\circ f)(x) := g(f(x))$

2

$g: B \to A$ $\quad f: A \to B$ $\quad A, B \neq \emptyset$

rechtsinverse $\quad f \circ g = Id_B$ (g rechtsinv. zu f) $\Leftrightarrow$ f surj

Linksinverse $\quad g \circ f = Id_A$ $\Leftrightarrow$ f inj

Inverse $\quad f^{-1} = g$ $\Leftrightarrow$ f bij.

Familie $\quad f = (a_i)_{i \in I}$ mit $a_i := f(i)$ $\quad (f: I \to A)$

Folge $\quad$ Familie mit $I = \mathbb{N}$, bij $\phi: I \to B \subseteq \mathbb{N}$

Kartesisches Produkt für Familien von Mengen $(A_i)_{i \in I}$

$$\prod_{i \in I} A_i := \{(f: I \to \bigcup_{j \in I} A_j) : \forall_{i \in I}\, f(i) \in A_i\} \qquad (F(A,B) := B^A)$$

Charakterische Funktion (von B) ($B \subseteq A$)

$$\chi_B: A \to \{0,1\}, \quad \chi_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \notin B \end{cases}$$

$\mathcal{P}(A) = 2^A$ $\quad \chi: \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$, $\chi(B) := \chi_B$ (A sei Menge) bij.

$A = \{a,b\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ $\quad \{0,1\}^A = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$

Relation $\quad aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$ eine Teilmenge R von $A \times B$

Funktion als Relation $\quad f_R: A \to \mathcal{P}(B)$, $f_R(x) = \{y \in B : xRy\}$ $\quad R \subseteq A \times B$ $\quad B \neq \emptyset$

$A = \{1,2\}$ $\quad B = \{a,b,c\}$ $\quad R = \{(1,a), (1,b), (2,c)\}$ $\quad f_R: A \to \mathcal{P}(B)$

$f_R(1) = \{a,b\}$ $\quad f_R(2) = \{c\}$

R reflexiv g.d.w $\forall_{x \in A}\, xRx$

R symmetrisch g.d.w $\forall_{x,y \in A}\, (xRy \Rightarrow yRx)$

R antisym. g.d.w $\forall_{x,y \in A}\, ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$

R transitiv g.d.w $\forall_{x,y,z \in A}\, ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$

Äquivalenzrel. $\Leftrightarrow$ R ref., sym., trans. $(x \sim y)$

Äquivalenzklasse (von $x \in A$) $\quad [x] := \{y \in A : x \sim y\}$

Repräsentaten (von $[x]$) $\quad$ El. von $[x]$

Quotientenmenge (von A nach $\sim$) $\quad A/\sim := \{[x] : x \in A\}$

Partialordnung (PO) $\Leftrightarrow$ R ref. asym. trans. $(x \leq y)$

Totale Ordnung (TO) $\Leftrightarrow$ PO mit $\underset{x,y \in A}{\forall} (x \leq y \vee y \leq x)$ vergleichbar

$A = \{1,2\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ $\Rightarrow$ $A \leq \mathcal{P}(A)$ (ref. asym. trans.)

Relation: $\subseteq$ aber nicht TO, $\{1\} \subseteq \{2\}$ x, $\{2\} \subseteq \{1\}$ x

($\leq$ sei PO auf $A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq A$)

$x \in A$ untere Schranke von B $\Leftrightarrow \underset{b \in B}{\forall}$ $x \leq b$

obere $\Leftrightarrow$ $\geq$

B nach unten beschränkt $\Leftrightarrow$ es gibt untere Schr. von B

oben obere

$x \in B$ heißt Minimum von B ($x = \min B$) $\Leftrightarrow$ x untere Schr.

Maximum max $\Leftrightarrow$ obere

$\inf B$ (Infimum) $:= \max\{x \in A : x$ untere Schr. für $B\}$

$\sup B$ (Supremum) $:= \min\{x \in A : x$ obere Schr. für $B\}$

($A, B \neq \emptyset$ seien Mengen mit PO $\leq$ $f: A \to B$)

isoton / wachsend / ordnungserhaltend g.d.w

$\underset{x,y \in A}{\forall} (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ ($f(x) < f(y)$ für streng)

antiton / fallend / ordnungsumkehrend g.d.w

$\underset{x,y \in A}{\forall} (x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$ $>$

monoton $\Leftrightarrow$ isoton oder antiton

TO + f str. monoton $\to$ f inj

TO + f inv.bar + str. isoton $\to f^{-1}$ str isoton

Induktion Ind. verankerung ($n=1$) ($\phi(1)$ ist wahr)

Ind. voraussetzung ($\phi(n)$ ist wahr)

Ind. schritt ($\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)$)

Rekursionssatz (Sei $A \neq \emptyset$, $x \in A$ $f_n: A^n \to A$ $\to$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit

$x_1 = x$, $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} x_{n+1} = f_n(x_1, \dots x_n)$)

eine rekursive Zahlenfolge um n und n+1

Fakultätsfkt $F: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$

$0! := 1$, $1! := 1$ $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n+1)! := (n+1) \cdot n!$

Rekursion $g_n : A \to A$, $\forall_{n \in \mathbb{N}} (f_n : A^n \to A, f_n(a_1, \dots a_n) := g_n(a_n))$

also $A = \mathbb{N}$, $g_n(x) := (n+1)x$

$x_1 = 1 \to g_0(x) = x = 1$

$g_1(g_0(x)) = 2 \times 1 = 2$

$g_2(g_1(g_0(x))) = 3 \times 2 = 6$

$g_3(g_2(g_1(g_0(x)))) = 4 \times 6 = 24$

Summationssymbol $\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1$, $\sum_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i$ für $n \geq 1$

$f_n : A^n \to A$, $f_n(x_1 \dots x_n) := x_n + a_{n+1}$

Produktsymbol $\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1$, $\prod_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$ für $n \geq 1$

$f_n : A^n \to A$, $f_n(x_1 \dots x_n) := x_n \cdot a_{n+1}$

✓ $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$ $\qquad a_n = a_1 q^{n-1}$

✓ $S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$ $\qquad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q \neq 1)$

✓ A, B heißen gleichmächtig g.d.w. $\exists_{\varphi : A \to B} \varphi$ bij

✓ Kardinalität / Mächtigkeit $\#A = n$ g.d.w $\exists_{\varphi : A \to \{1, \dots n\}} \varphi$ bij

A endlich g.d.w. $\exists_{n \in \mathbb{N}_0} \#A = n$

A unendlich g.d.w $\#A = \infty$

✓ A abzählbar g.d.w A endl. ($\#A < \infty$) oder A gleichmächtig zu $\mathbb{N}$

$A = \{2, 4, 6\} \to \#A = 3$ bij zu $\{1, 2, 3\} \to$ endl. $\qquad A \subseteq \mathbb{N} \to A$ abzählbar

$\mathbb{N} \to \#\mathbb{N} = \infty$ aber bij $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to$ unendl. abzählbar

$\#A = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 2^n$

$A_1 \dots A_n$ abzählbar $\to \prod_{i=1}^{n} A_i$ abzählbar

$(A_i)_{i \in I}$ abzählbare Familie abzählb. Mengen $\to \bigcup_{i \in I} A_i$ abzählb.

(I abz.b und alle A_i abz.b.)

✓Vollständig (TO ≤ auf $A \neq \emptyset$) jede Teilmenge $\emptyset \neq B \subseteq A$, die nach oben (unten) beschr. ist, ein Sup (Inf) hat

$$\forall_{B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}} \left(\left(\exists_{x \in A} \forall_{b \in B} b \leq x \right) \Rightarrow \exists_{s \in A} s = \sup B \right)$$

✓Gruppe Assoziativität $\forall_{x,y,z \in A} \; x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

ein neutrales Element $e \in A \; \forall_{x \in A} \; x \circ e = x$

Inverses Element $\forall_{x \in A} \exists_{\tilde{x} \in A} \; x \circ \tilde{x} = e$

kommutativ / abelsch $\forall_{x,y \in A} \; x \circ y = y \circ x$

✓Körper A kommutative Gruppe bez. + (neutr. El. + → 0)

$A \setminus \{0\}$ kommutative Gruppe bez. · (neutr. El. · → 1)

Distributivgesetz: $\forall_{x,y,z \in A} \; x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

total geordneter Körper (Körper A mit TO ≤ mit + und · verträglich

$\forall_{x,y,z \in A} (x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z)$

$\forall_{x,y \in A} (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$

Vollst. tot. geord. Körper $\mathbb{R}$

$x < y \wedge 0 < \lambda < 1 \Rightarrow x < \lambda x + (1-\lambda) y < y$

$x = \lambda x + (1-\lambda) x < \lambda x + (1-\lambda) y < \lambda y + (1-\lambda) y < y$

$\mathbb{Q}^+ := \{ m/n : m, n \in \mathbb{N} \}$ $\quad \mathbb{Q}^- := \{ -q : q \in \mathbb{Q}^+ \}$

$\mathbb{Z}^- := \{ -n : n \in \mathbb{N} \}$ $\quad \mathbb{Z} := \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}_0$

$[a,b]$ beschr. abg. Int.

$]a,b]$ b. halboffenes Int.

$]-\infty, b[$ unbeschr. offenes Int.

$[a, \infty[$ unbeschr. abg. Int.

✓archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$: Seien $\epsilon, x \in \mathbb{R}$

6 $\quad \epsilon > 0 \wedge x > 0 \Rightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} n\epsilon > x$

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$	neutr. El.	invers	
Addition	$(0,0)$	$(-x,-y)$	
Mult.	$(1,0)$	$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$	$((x,y) \neq (0,0))$

$z = (x,y) = x + iy$ $\quad \operatorname{Re} z = x \quad \operatorname{Im} z = y$

$\bar{z} = x - iy$ (die komplex konjugierte Zahl zu z)

Quadratwurzel $y = \sqrt{x}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}_0^+$

Vorzeichenfkt / Signumfkt $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ nur für $\mathbb{R}$ def

Betragsfkt $\operatorname{abs}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad z = x + iy \mapsto |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$

Umgekehrte Dreiecksungl. $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$

Δ-Ungl. $\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ für $z_1 \cdots z_n \in \mathbb{C}$

Pascalschen Dreieck $\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \text{ für } k \in \mathbb{N} \right)$

Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{0} := 1$ $\quad \binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha + 1 - j}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$

Binomischer Lehrsatz $\forall_{z,w \in \mathbb{C}} \forall_{n \in \mathbb{N}_0}$ $(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$

$= z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} w + \cdots + w^n$

$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ $\quad (z = w = 1)$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ $\quad (z = 1, w = -1)$

$\forall_{\alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}_0} \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha + j}{j} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + \cdots \binom{\alpha + k}{k} = \binom{\alpha + k + 1}{k}$

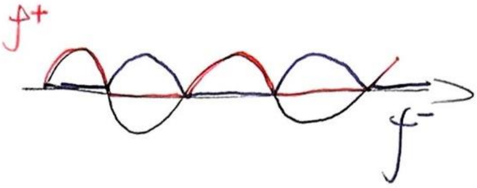
$\mathbb{K} = \mathbb{C} \cup \mathbb{R}$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ $\quad (fg)(x) := f(x)\, g(x)$ $\quad \max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$

$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ $\quad (\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re}(f(x))$ $\quad |f|(x) := |f(x)|$

Pos. Anteil $f^+ := \max(f, 0)$

neg. $f^- := \max(-f, 0)$



$|f| = f^+ + f^-$ $\quad f = f^+ - f^-$

Monom $n \in \mathbb{N}_0$ $\mu : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\mu(x) := x^n$

Polynom $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Grad (von $p \not\equiv 0$: $\deg(p) := \max\{j \in \mathbb{N}_0 : a_j \neq 0\}$

$p \equiv 0$ (alle $a_j = 0$) $\deg(p) := -1$

Nullstelle / Wurzel (von p) $p(\xi) = 0$ $\xi \in \mathbb{K}$ heißt Nullstelle

$\deg(p) = n \geq 0$ $\deg(Q) = m \geq 0$ $\to \deg(p+Q) \leq \max\{m, n\}$

$\deg(p \cdot Q) = m + n$

Folge (in $\mathbb{K}$ Fkt) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $f = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n := f(n)$

konvergent (mit Grenzwert / Limes) $\lim_{n \to \infty} z_n = z$

$\forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} |z_n - z| < \epsilon \iff \lim_{n \to \infty} z_n = z$

$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (divergent) nicht konvergent

Bernoullische Ungl. $\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \forall_{x \in [-1, \infty[}$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$

$>$ $(n > 1 \wedge x \neq 0)$

ϵ-Umgebung / Kugel (um z)

sei $z \in \mathbb{K}$, $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(z) := \{w \in \mathbb{K} : |w - z| < \epsilon\}$

$U \subseteq \mathbb{K}$ heißt Umgebung von z g.d.w $\exists_{\epsilon > 0} B_\epsilon(z) \subseteq U$

$[z - \epsilon, \infty[$ Umgebung von z in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{C}$

$\{z\}$, $[z, -\epsilon, z+\epsilon]$, $\{1,2,3\}$ keine Umg. von z

$\phi(n)$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$ g.d.w $\exists_{A \subseteq \mathbb{N}}$ A endlich und $\forall_{n \in \mathbb{N} \setminus A} \phi(n)$ wahr

beschränkt Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ beschr. $\iff$ $\{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$ beschr.

$\forall_{z, w \in \mathbb{K}} (\lim z_n = z \wedge \lim z_n = w \Rightarrow z = w)$

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschr.

Grenzwertsätze $\lim z_n = z$ $\lim w_n = w$ $z, w \in \mathbb{C}$

$\forall_{\lambda \in \mathbb{C}}$ $\lim(\lambda z_n) = \lambda z$ $\lim |z_n| = |z|$

$\lim(z_n + w_n) = z + w$ $\lim \overline{z_n} = \overline{z}$

$\lim(z_n w_n) = zw$ $\forall_{p \in \mathbb{N}}$ $\lim z_n^p = z^p$

Einschachtelungssatz seien $(x_n), (y_n), (a_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$, $x_n \le a_n \le y_n$ für fast alle n

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = x$

bestimmt divergent (x_n in $\mathbb{R}$) g.d.w

$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall_{K \in \mathbb{R}} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} \; x_n > K$

$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall_{K \in \mathbb{R}} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} \; x_n < K$

unbestimmt divergent $x_n = (-1)^n$ oszilliert zwischen -1 und 1)

($A \neq \emptyset$, $\sigma: \mathbb{N} \to A$ Folge in A, $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to (\sigma \circ \phi): \mathbb{N} \to A$)

Teilfolge von σ g.d.w ϕ streng steigend

Umordnung von σ g.d.w. ϕ bij.

$\lim z_n = z \to$ TF und jede Umordnung von z_n $\lim z_n = z$

Häufungspunkt $z \in \mathbb{K}$, z_n in $\mathbb{K}$ g.d.w

$\forall_{\epsilon > 0} \# \{n \in \mathbb{N} : z_n \in B_\epsilon(z)\} = \infty$ jede Umgebung von z unendlich viele Folgenglieder enthält

z ist HP von (z_n) g.d.w. (z_n) hat TF (w_n) mit $\lim w_n = z$

Bolzano-Weierstraß: jede beschr. Folge $S := (x_n)$ in $\mathbb{K}$ hat mindestens einen HP in $\mathbb{K}$

$A := \{x \in \mathbb{R} : x$ ist HP von $S\}$ $x_* := \min A$ $x^* := \max A$

S hat einen kleinsten und einen größten HP und auch

$\forall_{\epsilon > 0} (x_* - \epsilon < x_n < x^* + \epsilon$ gilt für fast alle n)

Cauchyfolge (z_n) Folge in $\mathbb{K}$ g.d.w

$\forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n,m > N} \; |z_n - z_m| < \epsilon$

(z_n) ist Cauchyfolge g.d.w (z_n) ist konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \infty$ (nicht konvergent und steigend)

Stetig: sei $M\subseteq\mathbb{C}$, $\xi\in M$, $f:M\to\mathbb{K}$ stetig in ξ g.d.w

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{z\in M}\ (|z-\xi|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(\xi)|<\varepsilon)$$

f stetig $\Leftrightarrow \forall_{\xi\in M}$ f stetig in ξ

$C(M,\mathbb{K})$:= Menge der stetigen Fkt $f:M\to\mathbb{K}$ $\quad C(M) = C(M,\mathbb{R})$

konstant, affine Fkt, abs, Polynom, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ (isol. Pkt), P,Q Polynom $A:=Q^{-1}\{0\}$ $\frac{P}{Q}:\mathbb{K}\setminus A\to\mathbb{K}$ → stetig

$\forall_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ sgn stetig in ξ $\quad$ sin, cos

Häufungspunkt $z\in\mathbb{C}$ heißt HP von M g.d.w

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \#(M\cap B_\varepsilon(z)) = \infty$$

0, 1 sind HP von $]0,1[$

isolierter Punkt $z\in\mathbb{C}$ heißt isol. Pkt von M g.d.w

$$\exists_{\varepsilon>0}\ B_\varepsilon(z)\cap M = \{z\}$$

z isol. Pkt. von $M \Rightarrow z\in M$

$\forall_{\xi\in M}$ (ξ isol. Pkt $\Rightarrow f$ stetig in ξ) (sei $M\subseteq\mathbb{C}$, $f:M\to\mathbb{K}$)

Folgenkriterium: $M\subseteq\mathbb{C}$, $f:M\to\mathbb{K}$, $\xi\in M$

f stetig in $\xi \Leftrightarrow \forall_{(z_n)\text{ in }M}\ (\lim_{n\to\infty} z_n = \xi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\xi))$

f,g st. in ξ ($M\subseteq\mathbb{C}$, $M\to\mathbb{K}$) $\Rightarrow \lambda f, f+g, fg, f/g\ (g\neq 0), |f|, \mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f$ st. in ξ

$\mathbb{R}$: $\max(f,g), \min(f,g), f^+, f^-$ st in ξ

f st. in $\xi\in D_f \wedge g$ st. in $f(\xi)\in D_g \Rightarrow (g\circ f): D_f\to\mathbb{K}$ st in ξ

beschränkt g.d.w $A=\emptyset \vee \{|z| : z\in A\}$ beschr. in $\mathbb{R}$

$$\exists_{M\in\mathbb{R}^+}\ A\subseteq B_M(0)$$

abgeschlossen g.d.w Grenzwert jeder Folge (z_n) in A, die in $\mathbb{C}$ konvergent, $z_n \to z$, in A liegt $z \in A$

beschränkt kompakt — unbeschränkt

offen ⇐ halb offen ⇒ abgeschlossen — offen — abgeschlossen

(a,b), $B_\varepsilon(z)$ — $(a,b]$ — $[a,b]$ $\{z\}$ $\emptyset$ — (a,∞) — $(-\infty,b]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$ unendl. Vereinigung komp. Mengen → unbeschränkt, abg

$]0,1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ unendl. Vereinigung komp. Mengen → beschr. offen

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{K}$ stetig und $A \subseteq \mathbb{K}$ abg. $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{C}$ abg.

$\forall_{z\in\mathbb{C}} \forall_{r>0}$ $\overline{B_r}(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \leq r\} = f^{-1}[0,r]$ → kompakt

$\forall_{z\in\mathbb{C}} \forall_{r>0}$ $S_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| = r\} = f^{-1}\{r\}$ → kompakt

$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge in $\mathbb{K}$ hat Teilfolge mit Limes $z \in \mathbb{K}$

$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ komp. $\wedge$ $f: \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow$ $f(\mathbb{K})$ komp.

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f: M \to \mathbb{R}$

f hat globales Min in $z \in M$ g.d.w $\forall_{w\in M\setminus\{z\}}$ $f(z) \leq f(w)$
streng $<$
Max $\geq$

f hat in z (str) globalen Extremwert g.d.w f hat in z (str) globales Min oder Max
lokalen — lok

f hat lokales Min in $z \in M$ g.d.w $\exists_{\varepsilon>0} \forall_{w\in(B_\varepsilon(z)\cap M)\setminus\{z\}}$ $f(z) \leq f(w)$
$f''(x) > 0$ ∪
streng $<$
Max $f''(x) < 0$ ∩ $\geq$

$\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ komp. $\Rightarrow \exists_{m,M\in K} \forall_{x\in K}$ $m \leq x \leq M$
kleinstes El. — größtes El.

$\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{C}$ komp., $f: K \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f hat global. Max und Min
$\exists_{z_m, z_M \in K}$ f hat gl. Min in z_m und gl. Max in z_M

Nullstellensatz von Bolzano $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig
$f(a)>0 \land f(b)<0$, so hat f mindestens eine Nullstelle in $]a,b[$

Zwischenwertsatz sei $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

$$[\min\{f(a),f(b)\}, \max\{f(a),f(b)\}] \subseteq f([a,b])$$

sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton steigend $\to$
$f^{-1}:J\to I$ $J:=f(I)$, f^{-1} stetig und str steigend, f stetig J intervall

AGM-Ungleichung: $\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}_0^+}$ $\underbrace{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}_{\text{geom. Mittel}} \leqslant \underbrace{\frac{x_1+\dots x_n}{n}}_{\text{arithm. Mittel}}$ ("=" $x_1=x_2=\dots x_n$)

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p\prod_{j=1}^{n-p}1} < \frac{\overbrace{a+a+\dots a}^{p}+\overbrace{1+1+1\dots 1}^{n-p}}{n} = \frac{pa+n-p}{n} = 1+\frac{p}{n}(a-1)$$

$x=\frac{p}{n}$ $a^x<1+x(a-1)$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ $\forall_{n\geqslant 1}$ $(\sqrt[n]{n})^n=n>1 \Rightarrow \sqrt[n]{n}\geqslant 1$

$$\forall_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-2}1} \leqslant \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \quad 1\leq\sqrt[n]{n}\leq 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

dicht $A\subseteq\mathbb{R}$ heißt dicht g.d.w $\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} A\cap B_\varepsilon(x)\neq\emptyset$
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}\to$ überall
$\mathbb{N}$ ist nicht dicht in $\mathbb{R}\to$ zwischen $(0,1)$ gibt es kein $\mathbb{N}$

(Abschätzung für $a>0$ und $x,y\in\mathbb{Q}$)
$a>1 \land x>0 \Rightarrow a^x-1 < x\,a^{x+1}$ (Wachstum der Potenzfkt)
$\forall_{m\in\mathbb{N}} (x,y\in[-m,m] \Rightarrow |a^x-a^y|\leq L|x-y|$, $L:=\max\{a^{m+1},(\frac{1}{a})^{m+1}\})$
(obere Schrank für Differenz von a^x und a^y)

Potenzfkt $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^a$, $a \in \mathbb{R}$

Exponentialfkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) := a^x$, $a > 0$ $(\exp(x) = e^x)$ $\Big\}$ stetig

Logarithmus $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log_a(x) = f^{-1}(a^x)$

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \log_{a^b}(x^n) = \frac{n}{b}\log_a x \quad e^{\alpha \ln x} = e^{\ln x^a} = x^a$$

Reihe Folge$\underbrace{(S_n)}_{\text{Partialsummen}}{}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ S_n := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_j}_{\text{Summanden}}$ $\quad \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} a_j}$ Rest von S_n

S_n konvergent g.d.w $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{K}$ $\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s\right)$

Geometrische Reihe $\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \text{ für } |q| < 1\right)$

$$\forall_{|q|<1} \sum_{q=0}^{\infty} q^j = \lim S_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

(seien $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent)

$$\forall_{\lambda,\mu\in\mathbb{C}} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} b_j \ , \quad \sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j} = \overline{\sum_{j=1}^{\infty} a_j}$$

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} (a_j, b_j \in \mathbb{R} \land a_j \leq b_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

$\lim a_n = 0$, $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ konvergent $S := \sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $r_n := \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} S = S_n + r_n \ , \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

$\left(\exists_{k\in\mathbb{N}} \forall_{j\geq k} |a_j| \leq |b_j|\right)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \text{ konv.} \quad \left|\sum_{j=k}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |b_j|$$

$$\sum a_j \text{ diver.} \Rightarrow \sum |b_j| \text{ diver.}$$

alternierend $\forall_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{sgn}(a_{j+1}) = -\operatorname{sgn}(a_j) \neq 0$ $\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ mit } a_j \in \mathbb{R}\right)$

Leibnizkriterium ① $\sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ alternierend

② $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend

③ $\lim a_n = 0$

$\Bigg\} \Rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ konvergent.

$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{0\leq\theta_n\leq 1}{\exists}\ \underbrace{r_n := \sum_{j\geq n+1}^{\infty} a_j}_{\sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j - s_n \text{ "Abbruchfehler"}} = \theta_n a_{n+1}$ $|a_n|$ streng fallend $\theta_n \in (0,1)$

$\sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ heißt absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} |a_j|$ konv.

$\sum_{j\geq 1}^{\infty} |a_j|$ konv. $\Rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ konv. $\left|\sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j\geq 1}^{\infty} |a_j|$

$\sum_{j\geq 1}^{\infty} c_j$ konv. $\wedge \underset{j\in\mathbb{N}}{\forall} |a_j| \leq c_j \Rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ abs. konv

Wurzelkriterium: $\underset{0<q<1}{\exists}\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ abs. konv.

$\#\{n\in\mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1\} = \infty \Rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ div.

Quotientenkriterium: Seien alle $a_n \neq 0$

$\underset{0<q<1}{\exists} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für fast alle $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ abs. konv.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ div.

b_n eine Umordnung von a_n und $\sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j$ abs. konv. $\rightarrow \sum_{j\geq 1}^{\infty} b_j$ abs. konv $\sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j = \sum_{j\geq 1}^{\infty} b_j$

großer Umordnungssatz (Sei I abzählbar mit $\#I = \#\mathbb{N}$ und $I = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} I_n$ eine disjunkte Zerlegung von I

ist $\sum_{j\in I} a_j$ abs. konv. $\rightarrow \sum_{j\in I} a_j = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \sum_{\alpha\in I_n} a_\alpha$

$\sum_{j\in I} a_j$ abs. konv. $\Leftrightarrow \underset{C\geq 0}{\exists} \sum_{j\in J} |a_j| \leq C$ für jede endliche Teilmenge $J\subseteq I$

$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} \sum_{\alpha\in I_n} a_\alpha$

Doppelreihen $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} := \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a(m,n) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m+n=k} a_{mn} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,k-m}$$

Cauchyprodukt ($\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ abs. konv.)

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n = \sum_{k=2}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{m=1}^{k-1} a_m b_{k-m}\right)}_{\text{koeffizient}}$$

$a_1 b_{k-1} + \cdots a_{k-1} b_1$

b-adisch Reihe $N \in \mathbb{Z}$ und $(d_N, d_{N-1} \dots)$ Folge in $\{0, \dots, b-1\}$

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{d_{N-\nu}}_{\text{Ziffern}} b^{N-\nu} \leftarrow \text{Basis}$$

$x \in \mathbb{R}_0^+$ die Summe der Reihe
↓
b-adische Darstellung von x

$X = 123.45 = 1\times10^2 + 2\times10^1 + 3\times10^0 + 4\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$ $d_\nu = \{1,2,3,4,5\}$ $b=10$

$X_{10} = 5.375 = 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 + 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 1\times2^{-3}$ $d_\nu = \{1,0,1,0,1,1\}$ $b=2$

$b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ hat eine b-adische Darstellung

$x>0, d_N \neq 0$ gibt es genau eine oder zwei solche Darstellung

$\exists_{n_0<N} \forall_{n\leq n_0} d_n = 0$, $\exists_{n_0\leq N} \forall_{n\leq n_0} d_n = b-1$

$2 = 2.\overline{0} = 1.\overline{9} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 9\cdot10^{-n} = 1 + 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 1 + 9\times\frac{1}{9}$

((f_n) sei Funktionenfolge, $f_n : M \to \mathbb{K}$, $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$)

(f_n) konvergiert punktweise (p.w.) gegen $f: M \to \mathbb{K}$ g.d.w. $\forall_{z\in M} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$

$\forall_{z\in M} \forall_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ (N hängt i.A von z und ϵ ab)

(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f: M \to \mathbb{K}$ g.d.w.

$\forall_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \forall_{z\in M} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ (N hängt nicht von z ab, aber i.A noch von ϵ ab)

glm. konv $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ p.w konv

$f_n(x) = x^n$ $M = [0,1]$ $x\in[0,1), n\to\infty, f_n(x)\to 0$; $x=1$, $f_n(x) = 1$ $\times$ Glm $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases}$

$f_n(x) = \frac{x}{n}$, $M = [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \to$ p.w., $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{x}{n}$

$\forall\, x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \le \frac{1}{n}$. $N > \frac{1}{\epsilon}$ glm.

(sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{K}$) alle f_n stetig in $\xi \in M$ und f_n konv. glm gegen $f : M \to \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ f stetig in ξ

Fkt.reihe $\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} f_j := (S_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, S_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$ ($\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{K}$)

Potenzreihe (mit Koeffizienten a_j) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j := \sum_{j=0}^{\infty} f_j$ ($f_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $f_n(z) = a_n z^n$)

Reihenentwicklung von f $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ g.d.w. (S_n) p.w. gegen $f : M \to \mathbb{K}$ konv.

(sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_j : M \to \mathbb{K}$)

$\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konv. glm. gegen f g.d.w. alle $\sum_{j \ge n+1}^{\infty} f_j(z)$ kon. gegen $r_n(z) \in \mathbb{K}$ und

$\forall_{\epsilon\in\mathbb{R}^+}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{z\in M}\ |r_n(z)| < \epsilon$

$a_j \in \mathbb{R}_0^+$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. in $\mathbb{R}$ und $\forall_{z\in M}\ \forall_{j\in\mathbb{N}}\ |f_j(z)| \le a_j \Rightarrow$ kon. $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ glm.

alle f_j stetig (in $\xi \in M$) und $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \xrightarrow{glm} f \Rightarrow f$ stetig (in ξ)

✓Konvergenzradius (KR) (der Reihe) für jede Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ gibt es $r \in [0,\infty] := \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$

$(z \in \mathbb{K} \wedge |z| < r) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konv. abs in $\mathbb{K}$

$(z \in \mathbb{K} \wedge |z| > r) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ divergent in $\mathbb{K}$ ($\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konv. p.w. auf $B_r(0)$)

$\forall_{0<r_0<r}\ \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konv glm. auf $\overline{B_{r_0}(0)}$ abgeschlossen

✓$r = \frac{1}{L}$, mit $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ größter HP, falls $\sqrt[n]{|a_n|}$ beschr.

✓$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ falls alle $a_n \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existiert in $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ KR $r > 0 \to f : B_r(0) \to \mathbb{K}$, $f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ stetig

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$ $\quad \forall_{\alpha \in \mathbb{R}}$ $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha}{n}} = 1 = L = \frac{1}{r}$ $\quad r = 1$

$(a_n = n^{\alpha})$ $\quad \alpha = 0 \quad |z| = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ div $\quad |z| < 1$ konv.

$\alpha = -1 \quad z = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ div $\quad z = -1$ konv. $\quad |z| < 1$ konv.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\quad r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

$(a_n = \frac{1}{n!})$ $\quad (a_n = \frac{1}{n^n})$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ $\quad L = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{n}}} = 0 \quad r = \frac{1}{L} = \infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ $\quad r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

($\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konv. i.A. nicht glm auf $B_r(0)$)

Cauchyprodukt (von $p := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $q := \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$)

$\underline{p * q} := \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \quad \forall_{j \in \mathbb{N}_0} \; c_j := \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \dots + a_j b_0$

Faltung von p und q $\quad f: B_r(0) \to \mathbb{K},\ f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$

$g: B_r(0) \to \mathbb{K},\ g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$

$p = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$, $q = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$, $f(z) g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, $\underline{c_j = \sum_{k=0}^{j} 1 \cdot 1} = \frac{(1+j)(1+1)}{2} \underline{= 1 + j}$

$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) z^j = \frac{1}{(1-z)^2}$

$p = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$, $q = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^z$, $f(z) g(z) = \frac{e^z}{1-z}$, $c_j = \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!}$

$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} \right) z^j = \frac{e^z}{1-z}$

Exponentialfkt $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$

$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1)$ $\quad n \to \infty \quad = 1$

$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $a := E(1) > 0$, $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \underline{E(x+y) = E(x)E(y)}$

so folgt $\forall_{x \in \mathbb{R}} E(x) = a^x$ Cauchy Fkt

$x = n \in \mathbb{N}$ $E(n) = E(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n}) = E(1)^n = a^n$

$E(x+0) = E(x) \cdot E(0) \Rightarrow E(0) = 1$

$x = -n$ $E(0) = E(n + (-n)) = E(n) \cdot E(-n) \Rightarrow E(-n) = \frac{1}{E(n)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $E(\frac{p}{q})^q = E(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots \frac{p}{q}}_{q}) = E(p) = a^p \Rightarrow E(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$

sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und ξ sei HP von M. $f: M \to \mathbb{K}$ hat <u>Limes $\eta \in \mathbb{K}$ für $z \to \xi$</u> g.d.w.

$\forall_{\text{Folge}(z_k) \text{ in } M \setminus \{\xi\}} (\lim_{k\to\infty} z_k = \xi \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \eta)$ $\lim_{z \to \xi} f(z) = \eta$

f braucht in ξ nicht def sein

$f(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$ $M = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $z_k = 1 + \frac{1}{k}$, $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = 2$, also $\lim_{z\to 1} f(z) = 2$

$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ $(z \in M := \mathbb{C} \setminus \{0\})$ $\left(e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \quad \frac{e^z-1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} \dots \right)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $(x \in M :=]-1, \infty[\setminus \{0\})$ $\left(\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \dots \right)$

$\forall_{\xi \in \mathbb{R}} \lim_{x\to 0} \ln(1+\xi x)^{\frac{1}{x}} = \xi$ $\left(\text{sei } y = \xi x \quad \frac{\ln(1+\xi x)}{x} = \frac{\ln(1+y)}{y} \xi = \xi\right)$

$(x \in M := \{x \in \mathbb{R} : 1 + \xi x > 0\} \setminus \{0\})$

$\forall_{\xi \in \mathbb{R}} \lim_{x\to 0} (1+\xi x)^{\frac{1}{x}} = e^{\xi}$ $\left(\lim_{x\to 0} \ln(1+\xi x)^{\frac{1}{x}} = \xi \Downarrow \lim_{x\to 0} (1+\xi x)^{\frac{1}{x}} = e^{\xi} \right)$

$(x \in M := \{x \in \mathbb{R} : 1 + \xi x > 0\} \setminus \{0\})$

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

komplexe Exponenten für $a \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}$ setze $a^z := \exp(z \ln a)$

L $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots$

L $\cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots$

$\forall_{z\in\mathbb{C}} \ |\sin z|, |\cos z| \le \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} < \infty \to$ beide Reihen abs konv $\to$ stetig

$\pi := 2\min\{x\in\mathbb{R}^+ : \cos x = 0\}$ (① cos stetig ② Min existiert ③ Zwischenwertsatz)

$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ ($\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \cdots$, $\frac{\sin z}{z} = \underset{\sim}{1} - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \cdots$)

$\lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}$ ($\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - + \cdots$, $\frac{\cos z - 1}{z^2} = \underset{\sim}{-\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{24} + \cdots$)

$\forall_{z\in\mathbb{C}} \ e^{iz} = \cos z + i\sin z$ (Eulerformel)

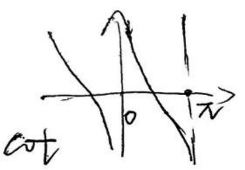
$\forall_{z\in\mathbb{C}} \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\qquad \forall_{z\in\mathbb{C}} \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\underset{\sim\sim\sim}{\exp^{-1}\{1\}} = \{2k\pi i : k\in\mathbb{Z}\}$ $\quad e^{x+iy} = \underset{>0}{e^x}\cdot e^{iy}$ $\quad e^{iy} = 1$

z von $e^z = 1$ $\quad z = x+iy$ $\quad e^x = 1 \quad x = 0$ $\quad \cos y + i\sin x = 1$

$\cos y = 1 \quad y = 2k\pi$

$z = 2k\pi i$



$\forall_{k\in\mathbb{Z}}$ cot str. fallend auf $]k\pi, (k+1)\pi[$

Polarkoordinaten komplexer Zahlen $z = re^{i\varphi}$

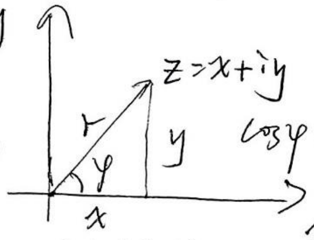
Betrag (r), Argument (φ)

(r,φ) Polarkoordinaten von $z\in\mathbb{C}$, (x,y) für $z = x+iy$ kartesische Koordinaten

(r,φ) eindeutig, falls $z\neq 0$ und $\varphi\in[0,2\pi[$

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ (Beträge mult. Argu add)



$\cos\varphi = \frac{x}{r}$

$\forall_{z\in\mathbb{C}} \ \exists_{r\in\mathbb{R}_0^+, \varphi\in\mathbb{R}} \ z = re^{i\varphi}$ ($r = |z|$, φ ist für $z\neq 0$ bis auf Add eines Vielfach von 2π bestimmt)

$\forall_{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \ z = re^{i\varphi_1} = re^{i\varphi_2} \wedge r\ge 0 \Rightarrow r = |z| \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}} \ \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$

$z = 1+i \to r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \Rightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$f: \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $f(\varphi) := e^{i\varphi}$, f surj. und $f(\varphi_1) = f(\varphi_2) \Leftrightarrow \underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$

Einheitswurzeln Gleichung $z^n = 1$ hat genau die n verschiedenen Lösungen $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ mit $\underset{k=1,\dots,n \atop 0,\dots,n-1}{\forall}\ \underbrace{\zeta_k}_{\text{die } n.\text{ Einheitswurzeln}} := e^{\frac{k 2\pi i}{n}} = \cos\frac{k2\pi}{n} + i\sin\frac{k2\pi}{n} = \zeta_1^k$

$z^8 = 1$ $\zeta_k = e^{\frac{k}{4}i\pi}$ $\zeta_0 = 1$ $\zeta_1 = e^{\frac{1}{4}i\pi} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

(den 8-teilig gleichmäßigen Winkeln auf dem Einheitskreis entsprechen) $\zeta_2 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ $\zeta_3 = e^{\frac{3}{4}\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\zeta_4 = -1$ $\zeta_5 = e^{\frac{5}{4}\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\zeta_6 = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$ $\zeta_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ von Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle.

$P(z) = z^3 - 1$

$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z = 1,\ z = e^{\frac{2}{3}\pi i},\ z = e^{\frac{4}{3}\pi i}$

$\forall\ P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, P Pol. $\deg(P) = n \geq 1$ $\exists\ c, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ $P(z) = c(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n)$

$P(z) = 2z^3 - 6z = 2z(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})$ $\zeta_1 = 0$ $\zeta_2 = \sqrt{3}$ $\zeta_3 = -\sqrt{3}$

differenzierbar Sei $a < b$, $f:]a,b[\to \mathbb{K}$ ($a = -\infty$, $b = \infty$ erlaubt), $\xi \in]a,b[$

f heißt differenzierbar in ξ g.d.w. folgender Limes im Sinn existiert

$$\underbrace{f'(\xi)}_{\text{Ableitung von } f \text{ in } \xi} := \partial_x f(\xi) := \frac{df(\xi)}{dx} := \lim_{x \to \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\text{Differenzenquotient}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

$h = x - \xi$

f heißt differenzierbar g.d.w. $f'(\xi)$ existiert für alle $\xi \in]a,b[$

$f':]a,b[\to \mathbb{K}$, $x \mapsto f'(x)$ ist die Ableitung von f

$f'(\xi) = (\mathrm{Re} f)'(\xi) + i(\mathrm{Im} f)'(\xi)$ $f(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$f'(x) = -\sin x + i\cos x$

Tangente ($f:]a,b[\to \mathbb{R}$ dif.bar in ξ, so heißt die Graph von L, die Tangente an den Graph von f in ξ

$L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x) := f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$

ist $f:]a,b[\to \mathbb{K}$ dif.bar in ξ $\Rightarrow$ f stetig in ξ

$f(x)=e^{cx}$ $f'(x)=ce^{cx}$ $c=\ln a$ $f(x)=e^{\ln a\, x}=a^x$ $f'(x)=(\ln a)a^x$

$c\neq 0$, $\lim h_k=0$, $h_k\neq 0$ $\Rightarrow \lim \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}=\lim\frac{e^{cx+ch_k}-e^{cx}}{h_k}=ce^{cx}\lim\frac{e^{ch_k}-1}{ch_k}$ $\underset{=1}{}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ ist nicht dif.bar in $\xi=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0+\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim 1=1\neq -1=\lim\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(0-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}}$$

$f(x)=\sin x$, $f'(x)=\lim\frac{f(x+h_x)-f(x)}{h_x}=\lim\frac{\sin(x+h_k)-\sin x}{h_k}$

$=\lim\frac{\sin x\cos h_x+\cos x\sin h_k-\sin x}{h_k}=\sin x\lim_{k\to\infty}\frac{h_k(\cos h_k-1)}{h_k^2}+\cos x\lim_{x\to\infty}\frac{\sin h_k}{h_k}$

$=\sin x\cdot 0\cdot(-\frac{1}{2})+\cos x\cdot 1=\cos x$

Seien $f,g:]a,b[\to\mathbb{K}$ dif.bar in $\xi\in]a,b[$

Produktregel: fg dif.bar in ξ und $(fg)'(\xi)=f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)$

Quotientenregel: $g(\xi)\neq 0\Rightarrow f/g$ dif.bar in ξ und $(f/g)'(\xi)=\frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}$

$\tan':\mathbb{R}\setminus\cos^{-1}\{0\}\to\mathbb{R}$, $\tan'x=\frac{1}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2$

$\cot':\mathbb{R}\setminus\sin^{-1}\{0\}\to\mathbb{R}$, $\cot'x=-\frac{1}{(\sin x)^2}=-(1+(\cot x)^2)$

Ableitung der Umkehrfkt sei $I:=]a,b[$, $f:I\to\mathbb{R}$ dif.bar und str. steigend $J:=f(I)$ dann existiert $f^{-1}:J\to I$ stetig und str steigend und

$$\forall_{\xi\in I}\left(f'(\xi)\neq 0\Rightarrow f^{-1}\text{ dif.bar in }\eta:=f(\xi)\text{ und }(f^{-1})'(\eta)=\frac{1}{f'(\xi)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}\right)$$

$f(x)=e^x$ $f^{-1}(x)=\ln x$ $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(\ln x)}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}=(\ln x)'$

$\forall_{x\in]-1,1[}$ $\arcsin'x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\forall_{x\in]-1,1[}$ $\arccos'x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall_{x\in\mathbb{R}}$ $\arctan'x=\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ $\operatorname{arccot}'x=-\frac{1}{1+x^2}$

Kettenregel $f:]a,b[\to\mathbb{R}$, $g:]c,d[\to\mathbb{K}$, $f(]a,b[)\subseteq]c,d[$

~~g~~ f dif.bar in $\xi\in]a,b[\wedge g$ dif.bar in $f(\xi)\in]c,d[$

$\Rightarrow g\circ f:]a,b[\to\mathbb{K}$ dif.bar in ξ und $(g\circ f)'(\xi)=f'(\xi)g'(f(\xi))$

$h(x):=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ $h'(x)=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}=\alpha x^{\alpha-1}$

Ableitung höherer Ordnung: die Menge C^k

sei $I :=]a,b[$, $f: I \to \mathbb{K}$ rekursive def. der k-ten Ableitung $f^{(k)}$ von f für $k \in \mathbb{N}_0$

$f^{(0)} := f$, $f^{(k+1)}(\xi) := (f^{(k)})'(\xi)$, $f' := f^{(1)}$, $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$

$\forall_{k\in\mathbb{N}_0}\ C^k(I,\mathbb{K}) := \{ f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) : f^{(k)}$ existiert und ist stetig $\}$

$C^\infty(I,\mathbb{K}) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(I,\mathbb{K})$ $\quad (C^0(I,\mathbb{K}) = C(I,\mathbb{K}) \supseteq C^1(I,\mathbb{K}) \supseteq C^2(I,\mathbb{K}) \dots)$

strenger Glattheit

sei $a<b$, $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ dif. bar in $\xi \in]a,b[$ und ξ ein lok. Min oder lok. Max für f $\Rightarrow f'(\xi) = 0$ $\quad \begin{cases} f''(x) < 0 & \xi \text{ ein lok. Max } \cap \\ f''(x) > 0 & \text{Min } \cup \end{cases}$

$\not\Leftarrow$ kritische oder stationäre Pkt für f

$f(x) = x^3$

(Fermat's Theorem)

Satz von Rolle

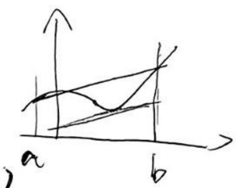
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und dif. bar auf $]a,b[$

$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists_{\xi \in]a,b[}\ f'(\xi) = 0$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und dif. bar auf $]a,b[$, $\forall_{x\in]a,b[}\ g'(x) \neq 0$

$\exists_{\xi \in]a,b[}\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ $\qquad g(x) = x$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$



sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ dif.bar in $\xi \in]a,b[$

$f'(\xi) > 0 \Rightarrow \exists_{\epsilon > 0}\ \forall_{a_1 \in]\xi-\epsilon,\xi[}\ \forall_{b_1 \in]\xi,\xi+\epsilon[}\ f(a_1) < f(\xi) < f(b_1)$

$>$ $\qquad\qquad >$ $\quad >$

Hinreichende Bedingung für Extrema

sei $f:]c,d[\to \mathbb{R}$ dif. bar, $f'(\xi) = 0$ für $\xi \in]c,d[$, $c<d$

$$\left.\begin{array}{l} (\forall_{x\in]c,\xi[}\ f'(x) > 0) \wedge (\forall_{x \in]\xi,d[}\ f'(x) < 0) \\ f''(\xi) \text{ ex. mit } f''(\xi) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ hat str. Max in } \xi$$

Regel von de L'Hôpital

sei $a < \xi < b$, $I :=]a,\xi[$ oder $I :=]\xi, b[$, seien $f,g: I \to \mathbb{R}$ dif. bar, $\forall_{x\in I}\ g'(x) \neq 0$ $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to\xi} g(x) = \pm\infty$

dann gilt $\lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \Rightarrow \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)} = \eta$ (erlauben $\xi = \pm\infty$, $\eta = \pm\infty$)

$f(x)=\tan x,\ g(x)=e^x-1 \quad \xi=0$ $\qquad$ $f(x)=e^{\alpha x},\ g(x)=x^n,\ \xi=\infty$

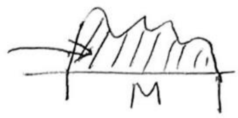
$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1+\tan^2 x}{e^x}=1$ $\qquad$ $\forall_{\alpha>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^n}=\lim\frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!}=\infty$

$f(x)=e^x,\ g(x)=x^n\ \ \xi=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim\frac{e^x}{n(n-1)\underbrace{x^{n-2}}_{\to x^0}}=\infty$

das Riemannintegral auf reellen Intervallen

$f:M\to\mathbb{R}_0^+,\ M\subseteq\mathbb{R}$ $\quad$ ($M=[a,b]$ und f beschr.)

$\int_M f$ = Flächeninhalt von $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\in M, 0\le y\le f(x)\}$



$\int_M f=\int_M f^+-\int_M f^-$

beschränkt sei $\emptyset\neq M\subseteq\mathbb{R},\ f:M\to\mathbb{R}$, f heißt beschränkt g.d.w. $\{|f(x)|\in\mathbb{R}_0^+: x\in M\}$ beschränkt

$\|f\|_{sup}:=\sup\{|f(x)|: x\in M\}\in\mathbb{R}_0^+$

die Länge von I $\ |I|:=b-a=|a-b|$ (für $I:=[a,b],\ a\le b$)

$I=\bigcup_{j=1}^{n} I_j$, $\int_I f:=\lim_{|I_j|\to0}\sum_{j=1}^{n} f(t_j)|I_j|$ ($t_j\in I_j$ und falls Limes existiert)

Zerlegung von $I=[a,b]$ $\quad \Delta:=(x_0,\dots x_N)\in\mathbb{R}^{N+1},\ N\in\mathbb{N}$ g.d.w $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$

Knoten: x_j $\qquad$ Knotenmenge: $V(\Delta):=\{x_0,\dots x_N\}$

Zwischenpunkte $\forall_{j\in 1..N}\ t_j\in[x_{j-1},x_j]=:I_j$

Feinheitsmaß der Zerlegung Δ $\quad |\Delta|:=\max\{|I_j|: j=1,\dots,N\}$

$a=b,\ I_0=I,\ \Delta=x_0=a,\ |\Delta|=0$

$I=[0,1]$ $\quad \Delta=(0,0.5,1)$

$V(\Delta)=\{0,0.5,1\}$ $\quad I_1=[0,0.5]$ $\quad I_2=[0.5,1]$ $\quad |I_1|=|I_2|=|\Delta|=0.5$

sei Δ Zel. von $I=[a,b]$, $f:I\to\mathbb{R}$ beschr.

$m_j:=m_j(f):=\inf\{f(x): x\in I_j\}$ $\qquad M_j:=M_j(f):=\sup\{f(x): x\in I_j\}$

$r(\Delta,f):=\sum_{j=1}^{N} m_j|I_j|=\sum_{j=1}^{N} m_j(x_j-x_{j-1})$ Riemannsche Untersumme

$R(\Delta,f):=\sum_{j=1}^{N} M_j|I_j|=\sum_{j=1}^{N} M_j(x_j-x_{j-1})$ $\qquad$ Ober

$P(\Delta,f):=\sum_{j=1}^{N} f(t_j)|I_j|=\sum_{j=1}^{N} f(t_j)(x_j-x_{j-1})$ $\qquad$ Zwischen

$t_1=0.25$ $\quad t_2=0.75$ $\quad P(\Delta,f)=0.5(0.25+0.75)=0.5$

$m_1=0$ $\ m_2=0.5$ $\ M_1=0.5$ $\ M_2=1$ $\quad r(\Delta,f)=0.5(m_1+m_2)=0.25$ $\quad R(\Delta,f)=0.5(M_1+M_2)=0.75$

$I = [a,b]$, $f: I \to \mathbb{R}$ beschr.

$J_*(f,I) := \sup\{r(\Delta,f) : \Delta \text{ Zerl von } f\}$ unteres Riemannintegral

$J^*(f,I) := \inf\{R(\Delta,f) : \Delta \text{ Zerl. von } f\}$ ob

f riemannintegrierbar (r. int. bar) g.d.w $J_*(f,I) = J^*(f,I)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = J_*(f,I) = J^*(f,I) = \int_I f(x)\,dx = \int_a^b f = \int_I f$$

$I = [0,1]$ $f(x) = x$ $\Delta = (x_0, x_1 \cdots x_N)$ $x_j = \frac{j}{N}$ $|I_j| = \frac{1}{N}$

① $m_j = \inf\{f(x) : x \in I_j\} = x_{j-1} = \frac{j-1}{N}$, $r(\Delta,f) = \sum_{j=1}^N m_j |I_j| = \sum_{j=1}^N \frac{j-1}{N}\frac{1}{N}$

$N \to \infty$ $J_*(f,[0,1]) = \lim_{N\to\infty} r(\Delta,f) = \frac{1}{2}$ $\quad = \frac{1}{N^2}(0+1+\cdots+(N-1)) = \frac{(N-1)N}{2} \frac{}{N^2}$

② $M_j = \sup\{f(x) : x \in I_j\} = x_j = \frac{j}{N}$ $R(\Delta,f) = \sum_{j=1}^N M_j |I_j| = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^N j = \frac{N(N+1)}{2N^2}$

$N \to \infty$ $J^*(f,[0,1]) = \lim_{N\to\infty} R(\Delta,f) = \frac{1}{2}$

③ $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

$m_j(f) = -M_j(-f) \Rightarrow r(\Delta,f) = -R(\Delta,-f) \Rightarrow J_*(f,I) = -J^*(-f,I)$

Dirichletfkt $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nicht r. int. bar. $J_*(f,I) = 0 \neq b-a = J^*(f,I)$

$\forall_{f,g \in R(I)} \forall_{\lambda,\mu \in \mathbb{R}} \left(\lambda f + \mu g \in R(I)\right) \wedge \int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g)$

$$\int_a^b f = \int_I f = \sum_{k=1}^M \int_{J_k} f = \sum_{k=1}^M \int_{y_{k-1}}^{y_k} f \quad (\Delta = (y_0 \cdots y_M) \; J_k = [y_{k-1}, y_k] \; f \in R(I))$$

$f(x) = 2x$ $I = [0,2]$ $\Delta = (0,1,2)$

$$\int_0^2 2x\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2x\,dx = 1 + 3 = 4$$

f,g beschr. und $f \le g \Rightarrow J_*(f,I) \le J_*(g,I)$ $J^*(f,I) \le J^*(g,I)$ $\int_I f \le \int_I g$ $(f,g \in R(I))$

$f \in R(I) \Rightarrow \left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$

$f \in R(I)$, $m \le f \le M \Rightarrow m(b-a) = m|I| \le \int_a^b f = \int_I f \le M|I| = M(b-a)$

für $a<b$ heißt $\frac{\int_I f}{b-a}$ der Mittelwert von f auf I

sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschr. dann $\underbrace{f \in R(I)}_{\text{r. int. bar. auf } I} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\Delta \text{ von } I} R(\Delta, f) - r(\Delta, f) < \varepsilon$

f stetig $\Rightarrow f \in R(I)$ $\quad$ f steigend oder fallend $\Rightarrow f \in R(I)$

Lipschitzstetig $= \exists_{L \in \mathbb{R}_0^+} \forall_{x,y \in M} |f(x) - f(y)| \leq \underline{L}|x-y|$ $\quad$ $f: M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$
Lipschitzkonstante

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad |f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y} \to 0}$ $\quad x, y \to 0$ $\quad \sqrt{x} + \sqrt{y} \to 0$

$f(x) = |x|$ $\quad |f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$ $\quad L = 1$

$f \in R(I) \wedge \phi : f(I) \to \mathbb{R}$ lip.st. $\Rightarrow \phi \circ f \in R(I)$

$f \in R(I) \Rightarrow |f|, f^2, f^+, f^-, fg, \max(f,g), \min(f,g) \in R(I)$
$g \in R(I)$
$(f, g \in R(I) \wedge \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in I} g(x) \geq \delta > 0) \Rightarrow \frac{f}{g} \in R(I)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

sei $\xi \in I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in R(I)$, f stetig in ξ, $\forall c \in I$ $F_c : I \to \mathbb{R}$ $F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$
ist dif. bar in ξ mit $F_c'(\xi) = f(\xi)$ $\quad f \in C(I) \Rightarrow F_c \in C^1(I)$ mit $F_c' = f$

$F \in C^1(I)$ oder F dif. bar mit $\underline{F' \in R(I)}$ $\Rightarrow F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b = \int_a^b F'(t)\,dt$
und $\forall_{c, x \in I}$ $F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,dt$ $\quad$ F' auf I Riemann integrierbar

$\int_a^b f := \int_I f = -\int_b^a f$ $\quad [f(t)]_a^b = [f]_a^b = f(b) - f(a)$

$f(x) = 2x$ $\quad F_c(x) = \int_c^x 2t\,dt = [t^2]_c^x = x^2 - c^2$ $\quad F'_c(x) = 2x = f(x)$

Stammfkt $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfkt zu $f: I \to \mathbb{R}$ g.d.w. F dif. bar mit $F' = f$

$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln(1) = 1$

Partielle Integration: sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ st. dif. bar, so gilt $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$

$\cancel{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \cancel{2}\pi$

Substitutionsformel: sei $\phi \in C^1(I)$, $f \in C(J)$, $\phi(I) \subseteq J$, dann gilt

$$\forall_{a,b\in I} \quad \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt} = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'$$

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,dt \qquad x = \phi(t) = 1-t \qquad \phi'(t) = -1 \qquad t = x-1$$

$$= \int_{1-0}^{1-1} -(x-1)^2\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x})\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{105}$$