Mathematisches Institut der LMU München

Wintersemester 2008/2009

P. Garcia, A. Sachs

Klausur Analysis I (für Informatiker und Statistiker)

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
zu erreichende Punktzahl	9	15	9	9	8	50
erreichte Punktzahl						

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt leserlich Ihren Vor- und Zunamen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte).

a) Man formuliere das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Man beweise durch vollständige Induktion:

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$, wobei $f_k = k$-te Fibonacci-Zahl,

d.h. $f_1 := 1,\ f_2 := 1,\ f_{k+2} := f_k + f_{k+1}$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 Punkte).

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen.

a) Man formuliere die Definition für die Konvergenz $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}$.

Man untersuche auf Konvergenz (und bestimme den Grenzwert, falls er existiert) durch Anwendung geeigneter Regeln für (konvergente) Folgen

b) $a_n := 1 + \frac{1}{n}$ (hier ist a) nachzuprüfen).

c) $a_n := \frac{n^2}{n^3 + n^2 - 2}$

d) $a_n := (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ z.z. $a_{2n} \to 0$ und $a_{2n+1} \to 0$

e) $a_n := \left(\frac{n^4-1}{n^3+n-2}\right)$

Aufgabe 3 (3+3+3 Punkte). Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Man formuliere das Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

b) Man formuliere das Newton-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$. $\Rightarrow x^2-2$

c) Man berechne (in b)) ausgehend von $x_0 := 2$, den Wert x_1.

Aufgabe 4 (3+3+3 Punkte).

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen.

a) Man formuliere die Definition der Konvergenz der unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

Man beweise, ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht:

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5 (4+4 Punkte).

Man zeige

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ ist in $x = 0$ nicht stetig.

b) Wenn $g\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion ist, dann $\exists x \in [0,1] : g(x) = x$