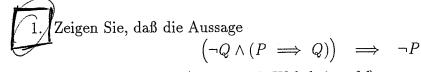
(1)

D. Rost

1. Klausur zur Vorlesung MIA für Informatiker und Statistiker

Bitte schreiben Sie die Lösung zu jeder Aufgabe auf ein gesondertes Blatt und vergewissern Sie sich, daß auf jedem Blatt Ihr Name vermerkt ist!! Hilfsmittel sind keine zugelassen. Bitte legen Sie auch Ihren Personalausweis sichtbar aus!



allgemeingültig ist (Beweis mit Wahrheitstafel).

2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (formaler Beweis! Zeichnung genügt nicht!):

Zeichnung genügt meht:).

(a)
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^2$$
 $(\text{mit } \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\})$
(b) $g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^2 + 1$ (3)

- 3. Seien $\emptyset \neq A, B$ Mengen. Man zeige:
 - a) Ist $A \subset B$, B überabzählbar und A abzählbar, so ist $B \setminus A$ überabzählbar.

4. Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}, 0 \notin M$ sei

$$M^{-1} := \{ \frac{1}{m} \mid m \in M \}.$$

Veranschaulichen Sie M^{-1} auf der Zahlengeraden für M:=[2,3).

Sei nun $\varnothing \neq M \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und M nach oben beschränkt. Zeigen Sie

$$\inf M^{-1} = \frac{1}{\sup M} . \tag{4}$$

5. ja) Sei $x_1 := 0$, $x_2 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sei $x_{n+1} := 4x_n - 3x_{n-1}$. Zeigen Sie (durch vollständige Induktion), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n := \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$.

(b) Seien $n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k < n$. Zeigen Sie (durch Nachrechnen):

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \tag{3}$$

6. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Schreiben Sie die Aussage " $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent" mit Hilfe von Quantoren aus.

Geben Sie eine <u>konvergente</u> Folge (*mit Beweis!*) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit $x_n > 1$ für n gerade und $x_n < 1$ für n ungerade. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit $x_n > 1$ für n gerade und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x_n)_$