studocu

2023 ws nach a - Hauptklausur

Analysis für Informatiker und Statistiker (Ludwig-Maximilians-Universität München)

Scanne, um auf Studocu zu öffnen

Studocu wird von keiner Universität gesponsert oder unterstützt.
Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Dr. Oliver Cooley

Wintersemester 2023/2024
20. März 2024

Analysis für Informatik und Statistik

Nachholklausur

Nachname: __________ Vorname: __________

Matrikelnr.: __________ Fachsemester: __________

Abschluss: Bachelor

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): __________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf.

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

This document is available on studocu

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

Name: ____________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) $\ln e$

(b) (2 Punkte) $\mathrm{Re}(3-2i)$

(c) (2 Punkte) $|e^{5i}|$

(d) (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{3} k^2$

(e) (2 Punkte) $\binom{5}{3}$

(f) (2 Punkte) $\sup\{\frac{x}{1+x} : x \in \mathbb{R}^+\}$

(g) (2 Punkte) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cos \frac{1}{n})$

(h) (2 Punkte) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2n^2}$

(i) (2 Punkte) $\big(\{1,2\} \cup \{2,3\}\big) \setminus \{2\}$

(j) (2 Punkte) $\int_1^2 x^{-2}\,\mathrm{d}x$

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

Name: ____________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie das Ergebnis jeweils soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

Geben Sie in (a) – (e) jeweils die Ableitung $f'(x)$ der angegebenen Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ an:

(a) (2 Punkte) $f(x) = -3$.

(b) (2 Punkte) $f(x) = \ln(3x)$.

(c) (2 Punkte) $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

(d) (2 Punkte) $f(x) = x \, \cos x$.

(e) (2 Punkte) $f(x) = x^{1/2}$.

Schreiben Sie in (f) – (j) jeweils die Menge ohne f:

(f) (2 Punkte) $f(\{-1, 2\})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2$:

(g) (2 Punkte) $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$:

(h) (2 Punkte) $f(\{0, \pi\})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = e^{i\,x}$:

(i) (2 Punkte) $f^{-1}(\{0\})$ für $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = n!$:

(j) (2 Punkte) $f^{-1}([1, 4])$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$:

This document is available on studocu

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

Name: ____

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

In (a) und (b) schreibe man die komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich; geben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten an:

(a) (5 Punkte) $(i-2)^2$

(b) (5 Punkte) $\frac{i}{2-i}$

Zeichnen Sie in (c) und (d) die angegebenen Mengen in der komplexen Ebene:

(c) (5 Punkte) $A := \{-1+i\}$,

(d) (5 Punkte) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

Name: ____________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

Geben Sie in (a) – (c) Ihre Rechnungen und Argumente mit Zwischenschritten an; vereinfachen Sie, wo möglich.

(a) (7 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^{-1} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

nicht stetig ist.

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t$$

(c) (7 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $g :]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1-\cos x}{x\cos x+\sin x}$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen).

This document is available on studocu

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

Name: ____________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (8 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

(b) (12 Punkte) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Funktion

$$\begin{aligned} & g :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) \\ \big(\text{bzw.} \quad & h : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x)\big) \end{aligned}$$

stetig in a ist. Zeigen Sie unter Benutzung der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit aus (a), dass f in a stetig ist, falls f in a linksseitig und rechtsseitig stetig ist. Geben Sie Ihre Rechnungen und Argumente mit Zwischenschritten an.

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

Name: ____________________

This document is available on studocu

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)

Name: ____________________

Heruntergeladen durch Nan An (annan031210@gmail.com)