MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost

WS 1999/00

2. Klausur zur Vorlesung M I A für Informatiker und Statistiker

Bitte **schreiben Sie die Lösung zu jeder Aufgabe auf ein gesondertes Blatt und vergewissern Sie sich, daß auf jedem Blatt Ihr Name vermerkt ist!!** Hilfsmittel sind keine zugelassen. Bitte legen Sie auch Ihren Personalausweis sichtbar aus!

1. Geben Sie jeweils Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_n \longrightarrow \infty$, $y_n \longrightarrow 0$ an, so daß für die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n := x_n \cdot y_n$ gilt:
   i) $z_n \longrightarrow 1$
   ii) $z_n \longrightarrow 0$
   iii) $z_n \longrightarrow \infty$
   iv) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent. (5)

2. Zeigen Sie, daß die folgenden Reihen konvergent sind:
   i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$. (6)

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k$ und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten für $x = r$ und $x = -r$. (4)

4. Sei $x \in \mathbb{R}$.
   a) Geben Sie die Definition von e^x (in der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$) an.
   b) Geben Sie (unter Verwendung des Symbols ln) die Definition von 2^x an.
   c) Schreiben Sie 2^x als Potenzreihe, also in der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. (4)

5. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$.
   a) Schreiben Sie die Definition von *f stetig in a* an.
   b) Es gelte $f(a) > 0$, und f sei stetig in a. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition von *f stetig in a*, daß ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $f(x) > 0$. Skizze! (6)

6. Sei $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie f' anhand der Definition der Ableitung. (4)

7. Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + \sqrt{x} - 1$. Begründen Sie, warum f stetig ist und zeigen Sie, daß f eine Nullstelle besitzt (d.h. es gibt ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = 0$). (4)

Viel Erfolg !