LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Nannan Hao, Kajetan Söhnen, Jakob Stern

Wintersemester 2021/2022
10. Februar 2022

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf.

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ____________________

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis die angegebene Punktezahl, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $e^{i\pi} = -1$

(c) (3 Punkte) $|3-4i| = 5$

(d) (3 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{20})^k = \frac{20}{19}$

(e) (3 Punkte) $\prod_{k=1}^{3}(k+1) = 24$

(f) (3 Punkte) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{2}{n}, 1+\sin\frac{1}{n}[= [0,1]$

(g) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\{-1,0\})$ für $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) := 2x+1$, ohne f:
$f(\{-1,0\}) = \{-1,1\}$

(h) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, ohne f:
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ =]0,\infty[$
(es genügt natürlich, eine der beiden Schreibweisen anzugeben)

Name: ____________________

Aufgabe 2. [20 Punkte]

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass gilt:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}.$$

Geben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten an!
Lösung:

Induktionsverankerung ($n=1$): Für $n=1$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2\cdot 1-1)^2 = 1 = \frac{4\cdot 1-1}{3},$$

welche wahr ist.

Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$, rechnet man

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \big(2(n+1)-1\big)^2 + \frac{4n^3-n}{3} = \frac{12(n+1)^2-12(n+1)+3+4n^3-n}{3} \\ &= \frac{4n^3+12n^2+24n-12n-n+12-12+3}{3} = \frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3} \\ &= \frac{4(n^3+3n^2+3n+1)-n-1}{3} = \frac{4(n+1)^3-(n+1)}{3},\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____________________

Aufgabe 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich (geben Sie Ihre Rechnung mit Zwischenschritten an):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Schreiben Sie die folgende (falsche) Aussage als Formel (also nur mit Symbolen und ohne Worte, wobei die Bedeutung der Symbole jeweils die aus der Vorlesung sein soll) (7 Punkte), und zeigen Sie dann, dass die Aussage falsch ist (3 Punkte):

In jeder Teilmenge der Potenzmenge der rationalen Zahlen gibt es genau ein Element, das einen nichtleeren Durchschnitt mit der Menge der natürlichen Zahlen größer als fünf besitzt.

Zu (a): Man rechnet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2} + 5 - \frac{6}{n}}{10 - \frac{5}{n^3} + \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}}{\lim_{n\to\infty} 10 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{0 + 5 - 0}{10 - 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Zu (b): Die Aussage lässt sich wie folgt als Formel schreiben:

$$\underset{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{Q})}{\forall} \quad \underset{A\in\mathcal{A}}{\exists!} \quad A \cap \{n \in \mathbb{N} :\ n > 5\} \neq \emptyset.$$

Dass die Aussage falsch ist, zeigt zum Beispiel das Gegenbeispiel $\mathcal{A} := \emptyset$: Die leere Menge ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, die gar kein Element enthält, also auch keines, dass mit $\{n \in \mathbb{N} :\ n > 5\}$ einen nichtleeren Schnitt hat.

Name: ____________________

Aufgabe 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $\xi \in M$.

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium die Stetigkeit der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -x^2 \sin \ln \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

an der Stelle $\xi = 0$ (Begründen Sie Ihre Argumentation durch Ergebnisse der Vorlesung).

Zu (a): Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in M$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi). \tag{1}$$

Zu (b): Um zu zeigen, dass f in $\xi = 0$ stetig ist, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \Big(- x_k^2 \sin \ln \frac{1}{x_k} \Big) = 0, \tag{2}$$

da die Folge $(\sin \ln \frac{1}{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (nach unten durch -1 und nach oben durch 1) beschränkt ist (aus der Vorlesung wissen wir, dass das Produkt aus einer Folge, die gegen 0 konvergiert und einer beschränkten Folge, auch gegen Null konvergiert).
Nach (2) und dem Folgenkriterium ist f stetig in 0.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Seien A, B nichtleere Mengen. Geben Sie die Definition der Aussage "$f : A \longrightarrow B$ ist rechtsinvertierbar" an.

(b) (5 Punkte) Geben Sie zwei verschiedene rechtsinverse Abbildungen zu

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) := x^2,$$

an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

(c) (5 Punkte) Seien A, B nichtleere Mengen. Geben Sie die Definition der Aussage "$f : A \longrightarrow B$ ist linksinvertierbar" an.

(d) (5 Punkte) Geben Sie zwei verschiedene linksinverse Abbildungen zu

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x,$$

an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Zu (a): Nach Definition ist $f : A \longrightarrow B$ genau dann rechtsinvertierbar, wenn es eine Funktion $g : B \longrightarrow A$ so gibt, dass $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

Zu (b): Zwei verschiedene rechtsinverse Abbildungen zu f sind gegeben durch

$$g_1, g_2 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x) := \sqrt{x}, \quad g_2(x) := -\sqrt{x} :$$

Wegen $g_1(1) = 1 \neq -1 = g_2(1)$ sind g_1, g_2 verschieden. Wegen

$$\underset{x \in \mathbb{R}_0^+}{\forall} \quad (f \circ g_1)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$$

ist g_1 rechtsinvers zu f; wegen

$$\underset{x \in \mathbb{R}_0^+}{\forall} \quad (f \circ g_2)(x) = (-\sqrt{x})^2 = x$$

ist g_2 rechtsinvers zu f.

Zu (c): Nach Definition ist $f : A \longrightarrow B$ genau dann linksinvertierbar, wenn es eine Funktion $g : B \longrightarrow A$ so gibt, dass $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Zu (d): Zwei verschiedene linksinverse Abbildungen zu f sind gegeben durch

$$g_1, g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad g_1(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases} \quad g_2(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ 1 & \text{für } x < 0 : \end{cases}$$

Wegen $g_1(-1) = 0 \neq 1 = g_2(-1)$ sind g_1, g_2 verschieden. Wegen

$$\underset{x \in \mathbb{R}_0^+}{\forall} \quad (g_1 \circ f)(x) = g_1(x) = x$$

ist g_1 linksinvers zu f; wegen

$$\underset{x \in \mathbb{R}_0^+}{\forall} \quad (g_2 \circ f)(x) = g_2(x) = x$$

ist g_2 linksinvers zu f.