LMU | LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2018/2019
4. Februar 2019

# Analysis für Informatiker und Statistiker

## Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
**Erlaubte Hilfsmittel:** Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
**Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 |
| | | | | | | |

Name: ____________________

**Aufgabe A 1.** [20 Punkte]

**(a)** (10 Punkte) Formulieren Sie die Kettenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

**(b)** (10 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a$".

Zu (a):

Kettenregel: Sei $f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : ]c,d[ \longrightarrow \mathbb{K}$, $f(]a,b[) \subseteq ]c,d[$ ($a, c = -\infty$ sowie $b, d = \infty$ ist erlaubt). Ist $f$ differenzierbar in $\xi \in ]a,b[$ und $g$ differenzierbar in $f(\xi) \in ]c,d[$, so ist $g \circ f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar in $\xi$ und

$$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi) g'(f(\xi)).$$

Eine Variante ohne $\xi$ ist auch in Ordnung, sofern Sie $f, g$ überall auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen als differenzierbar voraussetzen.

Zu (b):

Nach Definition konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a$, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \; |a_n - a| < \epsilon.$$

Name: ______________________________

**Aufgabe A 2.** [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

**(a)** (2 Punkte) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+k} = 0$.

**(b)** (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $e^{i\pi} = -1$.

**(c)** (2 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl $z$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$: $z := \frac{1}{i+1}$. Es ist $z = \frac{i-1}{(i+1)(i-1)} = \frac{i-1}{i^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i$.

**(d)** (2 Punkte) $\ln e^3 = 3$.

**(e)** (2 Punkte) $\sin(3\pi/2) = -1$.

**(f)** (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

**(g)** (2 Punkte) $\inf\,]-3, \pi[ = -3$.

**(h)** (2 Punkte) $\inf \left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} = -1$.

**(i)** (2 Punkte) Berechnen Sie $f'(0)$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-3x}$. Es ist $f'(x) = -3e^{-3x}$, also $f'(0) = -3$.

**(j)** (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, ohne $f$. Es ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Name: ____________________________________________

**Aufgabe A 3.** [20 Punkte]

**(a)** (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha,$$

an.

**(b)** (15 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x^{-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad g^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, x^{-n-1}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung $n$. Ordnung von $g$ bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen. Die Fakultät $n!$ ist rekursiv definiert durch $1! := 1$, $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Die Ableitung ist

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) := \alpha \, x^{\alpha-1}.$$

(b) Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$g' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g'(x) = (-1)x^{-2} = (-1)^1 \cdot 1! \cdot x^{-1-1},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $g^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, x^{-n-1}$, erhält man

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big(g^{(n)}\big)'(x) &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \big((-1)^n \, n! \, x^{-n-1}\big)' = -(-1)^n \, n!(n+1) \, x^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1} \, (n+1)! \, x^{-(n+1)-1}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____________________

**Aufgabe A 4.** [20 Punkte]

**(a)** (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n}$$

**(b)** (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{10}$, wobei $L$ den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $L$.

Zu (a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{n^2} - 6}{\frac{-10n}{n^2} + 4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} - \lim_{n\to\infty} 6}{\lim_{n\to\infty} \frac{-10}{n} + \lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}}$$
$$= \frac{2 - 0 - 6}{0 + 4 + 0} = -1.$$

Zu (b):

Es ist $L = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und die Umformungen

$$\left|1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 10 < \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad 100 < n$$

zeigen, dass, für $N := 100$, $|a_n - L| < \frac{1}{10}$ für alle $n > N$ erfüllt ist.

Name: ________________________________

**Aufgabe A 5.** [20 Punkte]

**(a)** (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

**(b)** (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

**(c)** (5 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := x/k$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

**(d)** (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus (c) für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

Zu (a): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Definition genau dann punktweise gegen $f$, wenn

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Zu (b): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Definition genau dann gleichmäßig gegen $f$, wenn

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{k>N}{\forall} \quad |f_k(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Zu (c): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f$, da

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{x}{k} = 0.$$

Zu (d): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen $f$, da für $\epsilon = 1$ gilt:

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{x\geq N+1}{\forall} \quad |f_{N+1}(x) - 0| = \frac{x}{N+1} \geq 1.$$