2022 ws anis philip hao klausur a 8

Analysis für Informatiker und Statistiker (Ludwig-Maximilians-Universität München)

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Nannan Hao

Wintersemester 2022/2023
11. Februar 2023

Analysis für Informatik und Statistik

Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf.

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis die angegebene Punktezahl, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: i^3

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $e^{2\pi i}$

(c) (3 Punkte) $|-2+3i|^2$

(d) (3 Punkte) $\sum_{k=1}^{3}(10k)$

(e) (3 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{6})^k$

(f) (3 Punkte) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{2,4,\ldots,2n\}$

(g) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ ohne das Potenzmengensymbol:

(h) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f\big([1,\infty[\big)$ für $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x):=\ln x$, ohne f:

Name: ____________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}.$$

Geben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten an!

Name: ______________________________

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

(a) (7 Punkte) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $f:\, M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $\xi \in M$.

(b) (13 Punkte) Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium, dass die Funktion

$$g:\, [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} |x| \sin(\cot x) & \text{für } x \notin \{0, 1/42\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 10^{42} & \text{für } x = 1/42, \end{cases}$$

nicht stetig (7 Punkte), jedoch im Punkt $\xi = 0$ stetig ist (6 Punkte) (begründen Sie Ihre Argumentation durch Ergebnisse der Vorlesung; dabei dürfen Sie natürlich auf aus der Vorlesung bekannte Resultate über sin, cot und stetige Funktionen verweisen, ohne diese zu beweisen; geben Sie Ihre Rechnungen und Argumente mit Zwischenschritten an).

Name: ____________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (7 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich (geben Sie Ihre Rechnung mit Zwischenschritten an):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2}$$

(b) (7 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $B_1(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ in der komplexen Ebene.

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{1/x}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Ableitung der Exponentialfunktion sowie die der Funktion $x \mapsto 1/x$ ohne Beweis benutzen.

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (10 Punkte) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Nehmen Sie an, dass f ein strenges globales Maximum hat, d. h.,

$$\underset{\xi\in[a,b]}{\exists} \quad \underset{x\in[a,b]\setminus\{\xi\}}{\forall} \quad f(\xi) > f(x).$$

Beweisen Sie dann die folgende Aussage: Für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\xi) \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = \xi. \tag{1}$$

Tipp: Benutzen Sie die Definition der Konvergenz gemäß (a) sowie die aus der Vorlesung bekannte Tatsache, dass stetige Funktionen auf nichtleeren kompakten Mengen immer ein globales Maximum annehmen (diese Aussage sollen Sie hier nicht beweisen). Auch die folgende Aussage dürfen Sie ohne Beweis benutzen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad K_\epsilon := [a, b] \setminus B_\epsilon(\xi) \text{ ist kompakt.} \tag{2}$$

Geben Sie Ihre Rechnungen und Argumente mit Zwischenschritten an!

Name: ______________________________

Name: ______________________________