MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost

WS 1999/00

1. Klausur zur Vorlesung M I A für Informatiker und Statistiker

Bitte **schreiben Sie die Lösung zu jeder Aufgabe auf ein gesondertes Blatt und vergewissern Sie sich, daß auf jedem Blatt Ihr Name vermerkt ist!!** Hilfsmittel sind keine zugelassen. Bitte legen Sie auch Ihren Personalausweis sichtbar aus!

1. Zeigen Sie, daß die Aussage

$$\big(\neg Q \wedge (P \implies Q)\big) \implies \neg P$$

allgemeingültig ist (*Beweis mit Wahrheitstafel*). (1)

2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (*formaler Beweis! Zeichnung genügt nicht!*):
   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ , \quad x \longmapsto x^2$ (mit $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$)
   b) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ , \quad x \longmapsto x^2 + 1$ (3)

3. Seien $\varnothing \neq A, B$ Mengen. Man zeige:
   a) Ist $A \subset B$, B überabzählbar und A abzählbar, so ist $B \backslash A$ überabzählbar.
   b) Existiert eine surjektive Abbildung $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist A überabzählbar. (3)

4. Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$, $0 \notin M$ sei

$$M^{-1} := \{\frac{1}{m} \mid m \in M\}.$$

   a) Veranschaulichen Sie M^{-1} auf der Zahlengeraden für $M := [2, 3)$.
   b) Sei nun $\varnothing \neq M \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und M nach oben beschränkt. Zeigen Sie

$$\inf M^{-1} = \frac{1}{\sup M} .$$ (4)

5. a) Sei $x_1 := 0$, $x_2 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sei $x_{n+1} := 4x_n - 3x_{n-1}$. Zeigen Sie (*durch vollständige Induktion*), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n := \frac{1}{2}\,(3^{n-1} - 1)$.
   b) Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$. Zeigen Sie (*durch Nachrechnen*):

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} .$$ (3)

6. a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Schreiben Sie die Aussage "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent" mit Hilfe von Quantoren aus.
   b) Geben Sie eine konvergente Folge (*mit Beweis!*) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit $x_n > 1$ für n gerade und $x_n < 1$ für n ungerade. $\left(1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1$; (2)

Viel Erfolg !