LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
6. April 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

❏ Diplom ❏ Anderes: ____________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	25	25	20	15		100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \underset{q\in\mathbb{C}\setminus\{1\}}{\forall} \quad \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Lösung:

Induktionsverankerung ($n=0$): Für $n=0$ ergibt sich die Aussage

$$1 = q^0 = \sum_{j=0} q^j = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}, \tag{1}$$

welche wahr ist.

Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, rechnet man

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} q^j = q^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} q^j &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{q^{n+1}(1-q) + 1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q},\end{aligned} \tag{2}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____

Aufgabe B 2. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$; sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine notwendige Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte). Formulieren Sie weiterhin einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine hinreichende Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte).

(b) (15 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f :]0, 3\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := \sin t$, wobei Sie auch angeben sollen, ob es sich um Maxima oder Minima handelt (beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung mit Hilfe von Ergebnissen der Vorlesung – hier sollen Sie (a) benutzen und bekannte Eigenschaften von Sinus und Kosinus, aber Sie sollen natürlich *nicht* die Lage der Extrema schon als bekannt voraussetzen).

(a): Nach dem Satz aus der Vorlesung ist (unter den hier gegebenen Voraussetzungen) eine notwendige Bedingung dafür, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat, dass $f'(x) = 0$ gilt. Eine hinreichende Bedingung ist entsprechend, dass $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ (alternativ konnte man hier die hinreichende Bedingung nennen, dass f' in x einen Vorzeichenwechsel hat).

(b): Zunächst gilt nach Vorlesung $f'(t) = \cos t$ und $f''(t) = -\sin t$. Da $f'(t) = 0$ nach (a) für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f in t notwendig ist, und die Menge der Nullstellen von Kosinus in $]0, 3\pi[$ nach Vorlesung die Menge $L := \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$ ist, ist die Menge der lokalen Extrema von f eine Teilmenge von L. Da $f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$, hat f in $t = \frac{\pi}{2}$ nach Vorlesung ein lokales Maximum. Da $f''(\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$, hat f in $t = \frac{3\pi}{2}$ nach Vorlesung ein lokales Minimum. Da $f''(\frac{5\pi}{2}) = -\sin\frac{5\pi}{2} = -1 < 0$, hat f in $t = \frac{5\pi}{2}$ nach Vorlesung ein lokales Maximum. Insbesondere ist L genau die Menge der lokalen Extrema von f.

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [25 Punkte]

(a) (5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$. Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktion eine Stammfunktion einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(c) (5 Punkte) Formulieren Sie den aus der Vorlesung bekannten Satz zur Substitutionsformel.

(d) (10 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$ (Hinweis: substituiere $x := \phi(t) := 1 - t$; die Voraussetzungen zur Anwendbarkeit der Substitutionsformel sollen Sie hier NICHT überprüfen).

(a): Nach Definition ist die Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f genau dann, wenn gilt $F' = f$.

(b): Man rechnet

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

(c): Sei $\phi \in C^1(I)$, $f \in C(J)$, $\phi(I) \subseteq J$. Dann gilt

$$\underset{a,b\in I}{\forall} \quad \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f \circ \phi)\,\phi'.$$

(d): Substituiere $x := \phi(t) := 1 - t$ mit $\phi'(t) = -1$. Dann gilt $t = 1 - x$ und nach (c) ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t &= -\int_{1=\phi(0)}^{0=\phi(1)} (1-x)^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right]_0^1 = \frac{16}{105}.\end{aligned}$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$.

(a) (10 Punkte) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien differenzierbar. Formulieren Sie für f, g die Produktregel (5 Punkte) und die Quotientenregel (5 Punkte).

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := t \ln(t^2 + 1)$.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := \frac{\cos t}{e^t}$.

(a): Produktregel: fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + fg'$.
Quotientenregel: f/g ist differenzierbar mit $(fg)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

(b): Unter Benutzung von Produktregel und Kettenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = \ln(t^2 + 1) + \frac{t\,2t}{t^2 + 1} = \ln(t^2 + 1) + \frac{2t^2}{t^2 + 1},$$

wobei es nicht notwendig war, die Vereinfachung durchzuführen.

(c): Unter Benutzung der Quotientenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = \frac{-e^t \sin t - e^t \cos t}{e^{2t}} = \frac{-\sin t - \cos t}{e^t},$$

wobei es nicht notwendig war, die Vereinfachung durchzuführen.

Name: ____________________

Aufgabe B 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (10 Punkte) Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die beide gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \begin{cases} a_{(n+1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ b_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

gegen x konvergiert.

Lösung:

(a): Nach Definition konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |a_n - a| < \epsilon.$$

(b): Sei $\epsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \quad \Rightarrow \quad \underset{N_1\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N_1}{\forall} \quad |a_n - x| < \epsilon \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x \quad \Rightarrow \quad \underset{N_2\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N_2}{\forall} \quad |b_n - x| < \epsilon \tag{4}$$

Setze nun $N := \max\{2N_1 - 1, 2N_2\}$. Dann gilt für jedes $n \geq N$, dass

$$\frac{n+1}{2} \geq N_1 \ \wedge\ \frac{n}{2} \geq N_2, \tag{5}$$

also

$$\underset{n\geq N}{\forall} \quad |c_n - x| < \epsilon, \tag{6}$$

was $\lim_{n\to\infty} c_n = x$ beweist.