1 Konvergent
2 punktweise konv.
3 gleichmäßig konv.
4 absolut konv.
5 Konvergenzradius
6 Wurzelkriterium
7 Quotientenkriterium
(8) Leibnitzkriterium
9 Stetig
10 Folgenkriterium
11 Limes η für $z \to \xi$
12 Häufungspunkt
13 isolierter Punkt
(14) ϵ-Umgebung (Geometrische Bedeutung) zeichnen
15 Zwischenwertsatz
16 Mittelwertsatz
(17) archimedische Eigenschaft
(18) Einschachtelungssatz
19 partielle Integration
20 Kettenregel
21 Regel von de L'Hôpital
22 differenzierbar
23 Cauchyfolge
24 injektiv
25 surjektiv
26 Min
27 Supremum
28 isoton
29 streng antiton
30 Äquivalenzrelation
31 Totale Ordnung
32 eindeutige Existenz
(33) vollständig total geordneter Körper
34 Pascalschen Dreieck
35 Binomialkoeffizient
36 Binomischer Lehrsatz
37 Bernoullische Ungleichung
(38) Teilfolge
(39) Umordnung
(40) Bolzano-Weierstraß
41 abgeschlossen
42 globales Min
43 lokales Max
44 Eulerformel
45 Einheitswurzeln
(46) Fundamentalsatz der Algebra
(47) Riemannintegrierbar
(48) lipschitzstetig
(49) Substitutionsformel
50 Induktionsbeweis

1 konvergent

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ |z_n - z| < \epsilon \iff \lim_{n\to\infty} z_n = z$$

2 p.w. konv. ($f_n: M\to\mathbb{K}$, $\phi \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f: M\to\mathbb{K}$)

$$\forall_{z\in M}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \iff \forall_{z\in M} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

3 glm. konv. ($f_n: M\to\mathbb{K}$, $\phi \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f: M\to\mathbb{K}$)

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{z\in M}\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

4 abs. konv.

$(z\in\mathbb{K} \wedge |z|<r) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konv. abs. in $\mathbb{K}$

5 KR

$r = \frac{1}{L}$ $\quad L := \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$

$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

6 Wurzelkriterium

$\exists_{0<q<1}\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. abs.

$\#\{n\in\mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1\} = \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j$ div.

7 Quotientenkriterium

$\exists_{0<q<1} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für f. a. $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. abs.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für f. a. $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ div.

(8) Leibnitzkriterium

① $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ alternierend

② $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend

③ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Bigg\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv.

9 stetig

$M \subseteq \mathbb{C}$, $\xi \in M$, $f: M \to \mathbb{K}$.

f stetig in $\xi \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{z \in M}{\forall} \; |z-\xi| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$

10 Folgenkriterium

$M \subseteq \mathbb{C}$, $\xi \in M$, $f: M \to \mathbb{K}$

f stetig in $\xi \Leftrightarrow \underset{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } M}{\forall} \; \lim_{n\to\infty} z_n = \xi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\xi)$

11 $M \subseteq \mathbb{C}$, ξ HP von M, $f: M \to \mathbb{K}$ hat Limes $\eta \in \mathbb{K}$ für $z \to \xi$

$\underset{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } M \setminus \{\xi\}}{\forall} \; \lim_{n\to\infty} z_n = \xi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta$

12 HP ($z \in \mathbb{C}$ heißt HP von M)

$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \#(M \cap B_\varepsilon(z)) = \infty$

13 isol. Pkt

$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \; B_\varepsilon(z) \cap M = \{z\}$

(14) ε-Umgebung um z

$z \in \mathbb{K}$, $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{K} : |w-z| < \varepsilon\}$

15 Zwischenwertsatz

sei $a<b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

$[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] \subseteq f([a,b])$

16 Mittelwertsatz

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a,b[$, $\underset{x\in]a,b[}{\forall} g'(x) \neq 0$

$$\underset{\xi \in]a,b[}{\exists} \; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

($g(x) = x$)

(17) Archimedische Eigenschaft

seien $\varepsilon, x \in \mathbb{R}$ $\quad \varepsilon > 0 \wedge x > 0 \Rightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}}\, n\varepsilon > x$

(18) Einschachtelungssatz

seien $(x_n), (y_n), (a_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$, $x_n \le a_n \le y_n$ für fast alle n

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = x$

19 partielle Integration

sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ ~~stetig~~ und differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' g$$

20 ~~Kettenregel~~

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $g:]c,d[\to \mathbb{K}$, $f(]a,b[) \subseteq]c,d[$

f dif.bar in $\xi \in]a,b[$, g dif.bar in $f(\xi) \in]c,d[$

$g \circ f:]a,b[\to \mathbb{K}$ dif.bar in ξ

$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi)\, g'(f(\xi))$

21 Regel von de L'Hôpital

sei $a < \xi < b$, $I =]a, \xi[$ oder $I =]\xi, b[$

seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ dif.bar, $\forall_{x \in I}\, g'(x) \neq 0$

$\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \to \xi} g(x) = \pm\infty$

dann gilt $\lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \Rightarrow \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$

(erlauben $\xi = \pm\infty$, $\eta = \pm\infty$)

22 differenzierbar

sei $a<b$, $f:]a,b[\to \mathbb{K}$, $\xi \in]a,b[$

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \quad \text{existiert}$$

23 Cauchyfolge

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} \ \exists_{N \in \mathbb{N}} \ \forall_{n,m > N} \ |z_n - z_m| < \varepsilon$$

24 injektiv

$$\forall_{y \in B} \ f^{-1}\{y\} = \emptyset \vee \exists!_{x \in A} \ f(x) = y$$

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

25 surjektiv

$$\forall_{y \in B} \ \exists_{x \in A} \ y = f(x)$$

$$\forall_{y \in B} \ f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$$

26 Min

$$x = \min B \Leftrightarrow x \in B \ \forall_{b \in B} \ x \leq b$$

27 Supremum

$$\sup B = \min \{x \in A : x \text{ obere Schr. für } B\}$$

28 isoton

$$\forall_{x,y \in A} \ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

29 streng antiton

$$\forall_{x,y \in A} \ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

30 Äquivalenzrel. $\Leftrightarrow$ ref, sym, trans. $(\sim)$

ref: $\forall_{x \in A} \ xRx$

sym: $\forall_{x,y \in A} \ xRy \Rightarrow yRx$

trans: $\forall_{x,y,z \in A} \ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

31 Total Ordnung $\Leftrightarrow$ ref, asym, trans mit $\forall_{x,y \in A} (x \leq y \vee y \leq x)$

asym: $\forall_{x,y \in A} \ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

32 eindeutige Existenz

$\exists!_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \exists_{x \in A} P(x) \wedge \forall_{y \in A} P(y) \Rightarrow x = y$

$\neg \exists!_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \forall_{x \in A} P(x) \Rightarrow \exists_{y \in A} P(y) \wedge x \neq y$

(33) vollständig

$\forall_{B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}} \ \exists_{x \in A} \forall_{b \in B} \ b \leq x \Rightarrow \exists_{s \in A} \ s = \sup B$

Gruppe ① $\forall_{x,y,z \in A} \ x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

② $e \in A \ \forall_{x \in A} \ x \circ e = x$

③ $\forall_{x \in A} \ \exists_{\bar{x} \in A} \ x \circ \bar{x} = e$

(kommutativ) ④ $\forall_{x,y \in A} \ x \circ y = y \circ x$

Körper A kom. Gr $+$ / $A \setminus \{0\}$ kom. Gr $\cdot$

$\forall_{x,y,z \in A} \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(total geordnete) $\forall_{x,y,z \in A} \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

$\forall_{x,y \in A} \ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

34 Pascalschen Dreieck

$\forall_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1, \binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$ für $k\in\mathbb{N}$

35 Binomialkoeffizient

$\binom{\alpha}{0}=1 \quad \binom{\alpha}{k}=\prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha+1-j}{j}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\times 2\cdots k}$

36 Binomischer Lehrsatz

$\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \forall_{n\in\mathbb{N}_0} (z+w)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}w^k=z^n+\binom{n}{1}z^{n-1}w+\cdots w^n$

37 Bernoullische Ungl.

$\forall_{n\in\mathbb{N}_0} \forall_{x\in[-1,\infty[} (1+x)^n \geq 1+nx$

(38) Teilfolge

$6:\mathbb{N}\to A$ Folge in A, $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

ϕ streng steigend $\Leftrightarrow$ Teilfolge von 6

(39) Umordnung

ϕ bij $\Leftrightarrow$ Umordnung von 6

(40) Bolzano-Weierstraß

jede beschr. Folge $S=(x_n)$ in $\mathbb{K}$ hat mindestens einen HP in $\mathbb{K}$

41 abgeschlossen

Grenzwert jeder Folge in A, die in $\mathbb{C}$ konv., in A liegt

42 globales Min

$\forall_{w\in M\setminus\{z\}} f(z)\leq f(w) \Leftrightarrow f$ hat glo. Min in $z\in M$

43 lokales Max

$\underset{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}{\exists} \ \underset{w \in (B_\varepsilon(z) \cap M) \setminus \{z\}}{\forall} \ f(z) \geq f(w) \Leftrightarrow f$ hat lok. Max in $z \in M$

$(f''(z) < 0)$

44 Eulerformel

$\underset{z \in \mathbb{C}}{\forall} \ e^{iz} = \cos z + i \sin z$

45 Einheitswurzeln

$z^n = 1$ hat genau die n verschiedenen Lösungen $\zeta_1, \dots \zeta_n \in \mathbb{C}$

mit $\underset{k \in \mathbb{N}}{\forall} \ \zeta_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$

(46) Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ von Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle

47 Riemannintegrierbar

$\underline{J_*(f, I) = J^*(f, I)} = \int_a^b f(x)\,dx$

$\sup \{ r(\Delta, f) : \Delta$ Zerl. von $f \}$

$\sum_{j=1}^{N} m_j |I_j|$

$\inf \{ f(x) : x \in I_j \}$ $\quad x_j - x_{j-1}$

48 lipschitzstetig

$\underset{L \in \mathbb{R}_0^+}{\exists} \ \underset{x, y \in M}{\forall} \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ $\qquad f: M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$

Lipschitzkonstante

(49) Substitutionsformel

sei $\phi \in C^1(I)$, $f \in C(J)$, $\phi(I) \subseteq J$, dann gilt

$$\forall_{a,b \in I} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_a^b (f \circ \phi)\,\phi'$$

50 Induktionsbeweis

① Ind. verankerung $(n=1)$ ~ oder Anfang

② Ind. voraussetzung

③ Ind. schritt $(n=n+1)$

von Yuechen :~