LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
6. April 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	25	15	25	20	15		100

Name: ____________________

Aufgabe A 1. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$; sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine notwendige Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte). Formulieren Sie weiterhin einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine hinreichende Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte).

(b) (15 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f :]-10, 10[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := t^3 - 12t$, wobei Sie auch angeben sollen, ob es sich um Maxima oder Minima handelt (beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung mit Hilfe von Ergebnissen der Vorlesung).

(a): Nach dem Satz aus der Vorlesung ist (unter den hier gegebenen Voraussetzungen) eine notwendige Bedingung dafür, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat, dass $f'(x) = 0$ gilt. Eine hinreichende Bedingung ist entsprechend, dass $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ (alternativ konnte man hier die hinreichende Bedingung nennen, dass f' in x einen Vorzeichenwechsel hat).

(b): Zunächst berechnet man $f'(t) = 3t^2 - 12$ und $f''(t) = 6t$. Da $f'(t) = 0$ nach (a) für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f in t notwendig ist, bestimmt man nun die Nullstellen von f'. Es gilt

$$f'(t) = 3t^2 - 12 = 3\,(t+2)\,(t-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \{-2, 2\}.$$

Also ist die Menge der lokalen Extrema von f eine Teilmenge der Menge $L := \{-2, 2\}$. Da $f''(2) = 12 > 0$, hat f in $t = 2$ nach Vorlesung ein lokales Minimum. Da $f''(-2) = -12 < 0$, hat f in $t = -2$ nach Vorlesung ein lokales Maximum. Insbesondere ist L genau die Menge der lokalen Extrema von f.

Name: ______________________________

Aufgabe A 2. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \underset{z,w\in\mathbb{C}}{\forall} \quad (w-z)\sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n-k} = w^{n+1} - z^{n+1}.$$

Lösung:

Induktionsverankerung ($n = 0$): Für $n = 0$ ergibt sich die Aussage

$$w^{0+1} - z^{0+1} = w - z = (w-z)z^0\, w^{0-0}, \tag{1}$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $(w-z)\sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n-k} = w^{n+1} - z^{n+1}$, rechnet man

$$\begin{aligned}
(w-z)\sum_{k=0}^{n+1} z^k\, w^{n+1-k} \quad &= \quad (w-z)\left(z^{n+1}w^0 + \sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n+1-k}\right) \\
&= \quad (w-z)z^{n+1} + (w-z)\, w \sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n-k} \\
&\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \quad (w-z)\, z^{n+1} + w(w^{n+1} - z^{n+1}) = w^{n+2} - z^{n+2},
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____________________

Aufgabe A 3. [25 Punkte]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$.

(a) (5 Punkte) Sei $x \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Wie lautet die Definition dafür, dass f in x differenzierbar ist (es genügt, eine der aus der Vorlesung bekannten äquivalenten Definitionen anzugeben).

(b) (10 Punkte) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien differenzierbar. Formulieren Sie für f, g die Produktregel (5 Punkte) und die Quotientenregel (5 Punkte).

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := e^{t^2} \sin(2t)$.

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := t/(t^2 + 1)$.

(a): Nach Definition ist f in x differenzierbar genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Dazu ist äquivalent, dass der Grenzwert

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

existiert.

(b): Produktregel: fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + fg'$.
Quotientenregel: f/g ist differenzierbar mit $(fg)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

(c): Unter Benutzung von Produktregel und Kettenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = 2t\, e^{t^2} \sin(2t) + 2e^{t^2} \cos(2t).$$

(d): Unter Benutzung der Quotientenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1 - t^2}{(t^2+1)^2},$$

wobei es nicht notwendig war, die Vereinfachung durchzuführen.

Name: ____

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_0^1 (x^5 - 3x)\,\mathrm{d}x$.

(b) (5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$. Formulieren Sie für $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar die Formel der partiellen Integration für Riemannintegrale über I.

(c) (10 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

(a): Nach rechnet

$$\int_0^1 (x^5 - 3x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}.$$

(b): Laut Vorlesung lautet die Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b f g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' g,$$

wobei man auch schreiben konnte

$$\int_a^b f g = [Fg]_a^b - \int_a^b F g',$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist.

(c): Unter Benutzung der Formel aus (b) berechnet man

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = [-\sin t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\,.$$

Addidiert man auf beiden Seiten der Gleichung $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$ und benutzt $\sin^2 + \cos^2 = 1$, so folgt

$$2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = 2\pi,$$

also

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

Name: ____

Aufgabe A 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

(b) (10 Punkte) Wir nennen eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Funktion

$$\begin{aligned} & g :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) \\ \big(\text{bzw.} \quad & h : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x)\big) \end{aligned}$$

stetig in a ist. Zeigen Sie unter Benutzung der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit aus (a), dass f in a stetig ist, falls f in a linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

Lösung:

(a): Nach Definition ist f genau dann stetig in a, wenn

$$\underset{\epsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \ \underset{\delta \in \mathbb{R}^+}{\exists} \ \underset{z \in M}{\forall} \big(|z-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(a)| < \epsilon\big).$$

(b): Sei f in a linksseitig und rechtseitig stetig. Sei $\epsilon > 0$. Zu ϵ gibt es, da g in a stetig ist, ein $\delta_1 > 0$ so, dass

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \quad \Big(a - \delta_1 < x \leq a \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon\Big).$$

Da auch h in a stetig ist, gibt es auch ein $\delta_2 > 0$ so, dass

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \quad \Big(a \leq x < a + \delta_2 \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| = |h(x) - h(a)| < \epsilon\Big).$$

Sei nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ist dann $|a - x| < \delta$, so folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Somit ist f stetig in a.