LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2020/2021
11. Februar 2021

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussprüfung (Online-Hausarbeit)

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏ Anderes ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Es ist nicht notwendig, dass Sie die Angabe ausdrucken. Achten Sie dann allerdings darauf, dass Ihre Abgabe die obigen Informationen über Sie trotzdem enthält, da diese vom Prüfungsamt benötigt werden. Stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe völlig klar ist, welche Antworten sich auf welche Aufgabe beziehen.

Damit Ihre Abgabe korrigiert werden kann, ist es **zwingend erforderlich**, dass Sie die folgende Erklärung unterschreiben und mit einreichen (wenn Sie die Erklärung per Hand abschreiben, achten Sie unbedingt darauf, dass Sie den Wortlaut nicht ändern). Die Erklärung mit Unterschrift muss zusammen mit der Abgabe gemäß der Regeln auf der folgenden Seite bis **Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ** eingereicht sein, sonst wird die Abgabe unkorrigiert als nicht bestanden gewertet; ein Nachreichen der Erklärung und/oder Unterschrift ist aus Gründen der Fairness und Organisation **nicht möglich**.

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Abgabe zur Prüfung selbständig und ohne Hilfe durch andere Personen verfasst habe.

Unterschrift Datum

Bevor Sie anfangen, die Aufgaben zu bearbeiten, **lesen Sie bitte sorgfältig die Informationen und Anweisungen auf der folgenden Seite**.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Die Prüfung besteht aus **5 Aufgaben**.

Das Verstehen und korrekte Befolgen der folgenden Regeln sowie der Regeln auf dem Deckblatt ist als Teil der Prüfung zu betrachten. Fehler beim Verstehen und/oder Umsetzen der Regeln (z. B. das Vergessen der Unterschrift in der Abgabe oder ein Uploadversuch um 15:30 Uhr, der dann wegen Stromausfall im Wohngebiet nicht mehr möglich ist) führen genauso zum Nichtbestehen der Prüfung wie zu viele inhaltliche Fehler bei der Bearbeitung der Aufgaben.

Schreiben Sie Ihre Antworten in **Ihrer eigenen Handschrift**. Schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll. Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Wenn Sie die Bearbeitung beendet haben, müssen Sie Ihre Bearbeitung scannen und als PDF-Datei bei Uni2work hochladen. Wie vorab mitgeteilt, werden nur **gut lesbare** Abgaben korrigiert. Um technische Probleme beim Upload und bei der Korrektur zu vermeiden, achten Sie darauf, dass die Dateigröße 1MB pro geschriebener Seite nicht übersteigt.

Schlecht lesbare Abgaben werden automatisch unkorrigiert als nichtbestanden gewertet. Auch wird die Form der Bearbeitung durchaus mitbewertet: Die logische Abfolge Ihrer Rechnungen und Argumente muss klar dargelegt sein; unklare oder gar chaotische oder geschmierte Abgaben führen zu Punktabzug und können insbesondere der Grund für ein Nichtbestehen der Prüfung sein.

Die Aufgaben sind darauf ausgelegt, dass Studierende, die den Vorlesungsstoff im Rahmen des Lernzieles beherrschen und vorbereitet sind, die Aufgaben innerhalb von ca. **2 Stunden** vollständig bearbeiten können. Aus Kulanzgründen haben Sie ingesamt 8 Stunden zeit (also bis Do, 11. Februar, 16:00 Uhr deutscher Zeit (MEZ)), um Ihre Lösungen bei Uni2work hochzuladen. Dabei sollten Sie nur im absoluten Notfall Ihre Lösungen nach Do, 11. Februar, 12 Uhr, hochladen. In diesem Sinn **ist der Termin Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ, absolut scharf** und auch eine um nur eine Minute verspätete Abgabe wird auf keinen Fall mehr gewertet.

Nur im Fall von unvorhersehbaren Notfällen dürfen Sie Ihre Abgabe auch via PDF-Anhang per E-Mail an `philip@math.lmu.de` einreichen. Solche Abgaben werden nur gewertet, wenn sie vor Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ verschickt wurden und wenn Ihnen eine unterschriebene Erklärung beigefügt ist, warum Ihnen, trotz gewissenhafter Planung, ein Hochladen bei Uni2work nicht möglich war. Reichen Sie Ihre Abgabe also **nicht** per E-Mail ein, außer wenn es wirklich gar nicht anders geht, da solche Abgaben technische Probleme verursachen und die Korrektur verzögern können.

Hilfsmittel: Sie dürfen bei der Hausarbeit Hilfsmittel Ihrer Wahl benutzen, solange Sie die Hausarbeit selbständig bearbeiten. Sie müssen im Falle einer Kontrolle insbesondere in der Lage sein, Ihre abgegebene Lösung zu erklären – Sie müssen damit rechnen, dass wir solche Kontrollen stichprobenartig durchführen werden. Es ist nicht gestattet, Hilfe von anderen Personen zum Lösen der Aufgaben anzunehmen, und es ist auch niemandem gestattet, solche Hilfe zu leisten (weder persönlich noch via Telefon oder Internet oder auf anderem Weg). Zuwiderhandlungen sind strafbar und können sowohl strafrechtliche als auch hochschulrechtliche Konsequenzen (z. B. Exmatrikulation) nach sich ziehen. Rein technische Hilfe, die nichts mit dem Lösen der Aufgaben zu tun hat (z. B. beim Download, beim Scannen oder beim Upload) ist hingegen natürlich gestattet.

Name: ____________________

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a) – (d) soweit wie möglich (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf):

(a) (5 Punkte)

$$\left|\frac{3+i}{2-i}\right|$$

(i bezeichnet die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$)

(b) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende Menge ohne das Potenzmengensymbol:

$$\mathcal{P}\Big(\{2,3\} \setminus \{0,3\}\Big)$$

(c) (5 Punkte)

$$\sum_{j=1}^{4} \prod_{k=1}^{j} k$$

(d) (5 Punkte) $f'(x)$ für $f :]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x^2}{\ln x} + \exp\Big(2x\, \sin(x^2)\Big)$:

$$f'(x) =$$

Zu (a): Man rechnet

$$\left|\frac{3+i}{2-i}\right| = \frac{|3+i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{3^2+|i|^2}}{\sqrt{2^2+|i|^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

Zu (b): Man rechnet

$$\mathcal{P}\Big(\{2,3\} \setminus \{0,3\}\Big) = \mathcal{P}(\{2\}) = \Big\{\emptyset, \{2\}\Big\}.$$

Zu (c): Man rechnet

$$\sum_{j=1}^{4} \prod_{k=1}^{j} k = \prod_{k=1}^{1} k + \prod_{k=1}^{2} k + \prod_{k=1}^{3} k + \prod_{k=1}^{4} k = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$$
$$= 1 + 2 + 6 + 24 = 33.$$

Zu (d): Es gilt für alle $x \in]1,\infty[$, nach der Quotientenregel

$$\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)' = \frac{2x\ln x - \frac{x^2}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x\ln x - x}{(\ln x)^2}$$

sowie nach Produkt- und Kettenregel

$$\Big(\exp\Big(2x\,\sin(x^2)\Big)\Big)' = \Big(2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2)\Big)\,\exp\Big(2x\,\sin(x^2)\Big),$$

also zusammen

$$f'(x) = \frac{2x\ln x - x}{(\ln x)^2} + \Big(2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2)\Big)\,\exp\Big(2x\,\sin(x^2)\Big).$$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie durch eine Wahrheitstafel, dass die folgende Aussageform **keine** Tautologie ist:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (B \wedge A)$$

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := (x+1)\,x\,(x-1).$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass f injektiv ist.

(c) (9 Punkte) Die Menge

$$R := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1\Big\}$$

stellt eine Relation auf $\mathbb{R}$ dar. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) (3 Punkte) R ist symmetrisch.

(ii) (2 Punkte) R ist reflexiv.

(iii) (2 Punkte) R ist antisymmetrisch.

(iv) (2 Punkte) R ist transitiv.

Zu (a): Nach der Wahrheitstafel

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$B \wedge A$	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (B \wedge A)$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	W	F	F	F	F
F	W	F	W	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

hat die Aussageform $(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (B \wedge A)$ für die Belegung von A mit W und B mit F den Wahrheitswert F, und ist damit keine Tautologie (für den Beweis genügt es, diese eine Zeile der Tafel anzugeben).

Zu (b): f ist nicht injektiv, z. B., da $f(1) = f(-1) = 0$.

Zu (c): (i) R ist symmetrisch, da

$$(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R.$$

(ii) R ist nicht reflexiv, da z. B. $(5,5) \notin R$.

(iii) R ist nicht antisymmetrisch, da z. B. $(0,1) \in R$ und $(1,0) \in R$, aber $0 \neq 1$.

(iv) R ist transitiv, da

$$(x,y) \in R \ \wedge \ (y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Die Fibonaccizahlen sind rekursiv definiert durch

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} F_{n+1} := F_n + F_{n-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

(schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

(b) (10 Punkte) Beweisen Sie die Aussage

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$$

mit einem Induktionsbeweis (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

Zu (a): Bewertungsschema: 3 Punkte für den Induktionsanfang, 2 Punkte für die korrekte Stuktur des Induktionsbeweises, 5 Punkte für den Induktionsschritt (davon 2 Punkte auf die korrekte Verwendung der Induktionsvoraussetzung – wenn diese korrekt verwendet wird, muss die Formel der Voraussetzung nicht explizit dastehen, aber es muss klar sein, wo sie verwendet wird; Abzug gibt es, wenn die Voraussetzung falsch dasteht).

Induktionsverankerung ($n = 0$): Für $n = 0$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1.$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ erhält man

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} F_i \overset{\text{Ind. vor.}}{=} F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1,$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Zu (b) auf der folgenden Seite.

Zu (b): Bewertungsschema: 3 Punkte für den Induktionsanfang, 2 Punkte für die korrekte Stuktur des Induktionsbeweises, 5 Punkte für den Induktionsschritt (davon 2 Punkte auf die korrekte Verwendung der Induktionsvoraussetzung – wenn diese korrekt verwendet wird, muss die Formel der Voraussetzung nicht explizit dastehen, aber es muss klar sein, wo sie verwendet wird; Abzug gibt es, wenn die Voraussetzung falsch dasteht).

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k^2 = -1 \cdot 1^2 = -1 \cdot 1 = (-1)^1 \binom{1+1}{2},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$ erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 &= (-1)^{n+1}(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 \overset{\text{Ind. vor.}}{=} (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \binom{n+1}{2} \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \frac{(n+1)!}{2\,(n-1)!} = (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2}(2n+2-n) = (-1)^{n+1} \frac{(n+2)!}{2\,n!} = (-1)^{n+1}\binom{n+2}{2},\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie folgenden Folgengrenzwert in $\mathbb{C}$ (i bezeichnet die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$) unter Benutzung von Grenzwertsätzen aus der Vorlesung (und **nicht** unter Benutzung der Regel von de l'Hôpital); vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{i+1})^n - n - 17i\,n^5 + 2 + 3n^3}{\arctan(\frac{1}{n}) + i\,n + 2n^2 + 17n^5}$$

(b) (10 Punkte) Betrachten Sie die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^n (\frac{1}{10})^k$. Geben Sie den Grenzwert s der Folge für $n \to \infty$ an (2 Punkte) und bestimmen Sie $N \in \mathbb{N}$ so, dass, für alle $n > N$ gilt $|s_n - s| < \frac{1}{9} \cdot 10^{-99}$ (Ihr Argument muss insbesondere die Korrektheit Ihres Ergebnisses beweisen) (8 Punkte). Vereinfachen Sie gegebenenfalls Ihre Ausdrücke für s und N soweit wie möglich.

Schreiben Sie in (a) und (b) Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf.

Zu (a): Man rechnet

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{i+1})^n - n - 17i\,n^5 + 2 + 3n^3}{\arctan(\frac{1}{n}) + i\,n + 2n^2 + 17n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^5}(\frac{1}{i+1})^n - \frac{1}{n^4} - 17i + \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^5}\arctan(\frac{1}{n}) + \frac{i}{n^4} + \frac{2}{n^3} + 17} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5} \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{i+1})^n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} - \lim_{n\to\infty} 17i + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^5} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^5}\arctan(\frac{1}{n})\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{i}{n^4} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} + \lim_{n\to\infty} 17} \\
&= \frac{0\cdot 0 - 0 - 17i + 0 + 0}{0 + 0 + 0 + 17} = -i \quad \text{(6 Punkte auf die Rechnung)},
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $(\arctan(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $0 < \arctan(\frac{1}{n}) < \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist (2 Punkte) und dass $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{i+1})^n = 0$, da $|\frac{1}{i+1}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ (2 Punkte).

Zu (b): Nach der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{10})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Nach der Formel für die geometrische Summe gilt $s_n = \frac{1-(\frac{1}{10})^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}(1-(\frac{1}{10})^{n+1})$. Somit gilt

$$|s_n - s| < \frac{1}{9}\cdot 10^{-99} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} < \frac{1}{9}\cdot 10^{-99} \quad\Leftrightarrow\quad 10^{-n} < 10^{-99} \quad\Leftrightarrow\quad n > 99.$$

Somit gilt für $N := 99$, dass $|s_n - s| < \frac{1}{9}\cdot 10^{-99}$ für alle $n > N$.

Name: ____________________

Aufgabe 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 3 & \text{für } x \neq 1, \\ 0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

nicht stetig ist.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie mit Ergebnissen der Vorlesung, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \exp\left(\frac{x \ln(|x|+1)}{3x^4 + 3 - \cos(3x)}\right),$$

stetig ist.

(c) (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h in $\xi = 0$ stetig ist (5 Punkte), jedoch in jedem $\xi \neq 0$ unstetig ist (5 Punkte).

Schreiben Sie Ihre Rechnungen und Beweise mit Zwischenschritten auf.

Zu (a): Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := 1 + \frac{1}{n}$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, jedoch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3 \neq 0 = f(1)$, so dass f an der Stelle $\xi = 1$ nicht stetig ist. Da es somit eine Stelle gibt, an der f nicht stetig ist, ist f nicht stetig.

Zu (b): Mit $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{Id}(x) := x$, gilt

$$f = \exp \circ \left(\frac{\mathrm{Id} \cdot (\ln \circ (|\,\mathrm{Id}\,| + 1))}{3(\mathrm{Id})^4 + 3 - \cos \circ (3\,\mathrm{Id})}\right).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass konstante Funktionen, Id, cos, $x \mapsto |x|$ und exp auf $\mathbb{R}$ stetig sind. Da ln auf $\mathbb{R}^+$ stetig ist und $|\,\mathrm{Id}\,| + 1 \geq 1 > 0$, ist auch $\ln \circ (|\,\mathrm{Id}\,| + 1)$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Wegen $-1 \leq \cos \leq 1$ ist $3(\mathrm{Id})^4 + 3 - \cos \circ (3\,\mathrm{Id}) \geq 2 > 0$, so dass wir f aus stetigen Funktionen durch Verkettung, Addition, Multiplikation und Division mit nichtverschwindender Nennerfunktion zusammengesetzt haben. Aus einem Satz der Vorlesung wissen wir, dass all diese Operationen die Stetigkeit erhalten, so dass auch f stetig ist.

Zu (c): h ist stetig in 0: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = 0$. Dann folgt $\lim_{n\to\infty} |h(x_n)| = |x_n| = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 0$, so dass h nach dem Folgenkriterium in 0 stetig ist. Alternativer Beweis: Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \epsilon$. Aus $|x - 0| = |x| < \delta = \epsilon$ folgt dann $|h(x) - 0| = |h(x)| = |x| < \epsilon$, was ebenfalls zeigt, dass h in 0 stetig ist.

Sei $\xi \neq 0$. Dann ist h nicht stetig in ξ: Für $\xi \in \mathbb{Q}$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = \xi$. Dann folgt $\lim_{n\to\mathbb{N}} h(x_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}}(-x_n) = -\xi \neq \xi = h(\xi)$, so dass h nach dem Folgenkriterium in ξ nicht stetig ist. Für $\xi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = \xi$. Dann folgt $\lim_{n\to\mathbb{N}} h(x_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = \xi \neq -\xi = h(\xi)$, so dass h nach dem Folgenkriterium in ξ nicht stetig ist.