	Klausuren																	Summe
Themen	**20NK**	**20K**	**19NK**	**19KA**	**19KB**	**18KA**	**18KB**	**17NKA**	**17NKB**	**17KA**	**17KB**	**14KA**	**14KB**	**12NKA**	**12NKB**	**12KA**	**12KB**	**17**
Vereinfachen	x	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x			x	x	13
Logik		x			x													2
Eigenschaften von Funktionen	x	x									x	x	x	x	x	x	x	9
Relationen		x																1
Induktion	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	17
Zeichnen (komplexe Zahlen)												x	x	x		x	x	5
Binomialscheisse		x	x	x	x							x		x	x		x	8
Konvergenzkritierien und -definition für Folgen		x		x	x	x	x		x		x			x	x			9
Stetigkeit definieren/beweisen/widerlegen	(x)	x			x		x	x		x		x	x			x	x	9
Mengeneigenschaften (offen, abgeschlossen, kompakt, HPs)			x											x	x	x	x	5
Zwischenwertsatz	x														x			3
Konvergenzkriterien für Reihen			x	x						x	x	x	x					6
Funktionenfolgen-konvergenz						x	x									x		3
Differenzierbarkeit beweisen/widerlegen oder Ableitungsregeln aufschreiben	x					x	x	x	x	x						x	x	8
Ableitung berechnen	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x	x		13
Extremwerte	x		x					x	x									4
Mittelwertsatz der Differentialrechnung														x	x			2
L'Hopital	x		x											x	x			4
Einfache Integralrechnung			x					x	x					x	x			5
Schwierigere Integralrechnung			x					x	x					x	x			5
Schwierigstes Thema	Extremwertberechnung	Stetigkeit	Extremwertberechnung	Quotientenkrietrium und Reihenkonvergenz	Induktion	Funktionenfolgenkonvergenz	Funktionenfolgenkonvergenz	Alles nicht leicht	Integralrechnung und Extremwertberechnung	Quotientenkriterium	Quotientenkriterium	Stetigkeit	Stetigkeit	Alles einigermaßen machbar	Integralrechnung	Stetigkeit	Ableitung	

Sehr oft
Oft
Immer mal wieder
Vernachlässigbar

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
8. Februar 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ________________ Vorname: ________________

Matrikelnr.: ________________ Fachsemester: ________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	20	25	25	15		100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [15 Punkte]

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt, dass $2n + 1 < n^2$.

Lösung:

Induktionsverankerung ($n = 3$): Für $n = 3$ ergibt sich die Aussage

$$3 \cdot 2 + 1 = 7 < 3^2 = 9,$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $2n + 1 < n^2$, erhält man

$$2(n + 1) + 1 = 2n + 2 + 1 \overset{\text{Ind. vor.}}{<} n^2 + 2 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben):

Lösung:

(a) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} -\frac{7}{k} = 0$.

(b) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} -k^3 = -\infty$.

(c) (1 Punkt) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $i^5 = i$.

(d) (1 Punkt) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $e^{i\pi} = -1$.

(e) (1 Punkt) $\{-2,0,5\} \cap [-1,10[= \{0,5\}$.

(f) (1 Punkt) $\{-2,0,5\} \setminus [-1,10[= \{-2\}$.

(g) (1 Punkt) $\{0,-1,0,3\} \cup \{0,5,3\} = \{0,-1,3,5\}$.

(h) (2 Punkte) $\bigcap\limits_{r\in[2,\infty[} [\frac{1}{r}, 2-\frac{1}{r}[= [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

(i) (2 Punkte) $\bigcup\limits_{r\in[2,\infty[} [\frac{1}{r}, 2-\frac{1}{r}[=]0,2[$.

(j) (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2}{12} = \frac{11}{12}$.

(k) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{5} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$.

(l) (2 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1/(\frac{1}{2}) = 2$.

(m) (1 Punkt) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = \infty$.

(n) (1 Punkt) $\inf]-3,\pi[= -3$.

(o) (1 Punkt) $\inf \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\} = -1$.

Name: ____________________

Aufgabe A 3. [25 Punkte]

Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq M$, $a \in M$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie in (a) – (d) die Definition der jeweiligen Aussage an.

(a) (5 Punkte) $B = f(A)$.

(b) (5 Punkte) $A = f^{-1}(B)$.

(c) (4 Punkte) f hat in a ein globales Maximum.

(d) (3 Punkte) f hat in a ein strenges globales Maximum.

Bearbeiten Sie nun (e) – (h) unter der Annahme, dass $M := [0, 1]$ und $f(x) = 2$ für alle $x \neq 1$.

(e) (2 Punkte) Schreiben Sie für $A := [0, \frac{1}{2}]$ die Menge $f(A)$ ohne Benutzung von f.

(f) (2 Punkte) Schreiben Sie für $B := \mathbb{R}^+ \setminus \{f(1)\}$ die Menge $f^{-1}(B)$ ohne Benutzung von f.

(g) (2 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) $f(1)$ so an, dass f in 1 ein strenges globales Maximum hat.

(h) (2 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) $f(1)$ so an, dass f in 1 ein globales Maximum, aber kein strenges globales Maximum hat.

Lösung:

(a): $B = f(A)$ gilt nach Definition genau dann, wenn $B = \{f(a) \in \mathbb{R} : a \in A\}$.

(b): $A = f^{-1}(B)$ gilt nach Definition genau dann, wenn $A = \{x \in M : f(x) \in B\}$.

(c): f hat in a ein globales Maximum nach Definition genau dann, wenn

$$\underset{x \in M}{\forall} \quad f(x) \leq f(a).$$

(d): f hat in a ein strenges globales Maximum nach Definition genau dann, wenn

$$\underset{x \in M \setminus \{a\}}{\forall} \quad f(x) < f(a).$$

(e): Es ist $f(A) = \{2\}$.

(f): Es ist $f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } f(1) = 2, \\ [0, 1[& \text{für } f(1) \neq 2. \end{cases}$

(g): Eine mögliche Lösung ist $f(1) = 3$.

(h): Hier ist $f(1) = 2$ die einzige richtige Lösung.

Name: ____________________

Aufgabe A 4. [25 Punkte]

(a) (5 Punkte) Formulieren Sie das Quotientenkriterium für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) (10 Punkte) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Größe von $|z|$, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n\, n!}{n^n}$ konvergiert ($n! = 1 \cdot 2 \cdots n$), absolut konvergiert oder divergiert (hier reicht es nicht, darauf zu verweisen, dass das Beispiel in der Vorlesung behandelt wurde, sondern die Bestimmung soll im Detail ausgeführt werden). Hinweis: Benutzen Sie, dass $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsend gegen e konvergiert.

(c) (5 Punkte) Wie lautet die Definition dafür, dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist?

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(\sin(x^3))$.

Lösung:

(a): Quotientenkriterium:

$$\left(\underset{0<q<1}{\exists} \left(\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq q < 1 \text{ für fast alle } n\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ absolut konvergent,}$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \geq 1 \text{ für fast alle } n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ divergent.}$$

(b): Für $z = 0$ ist die absolute Konvergenz der Reihe klar. Für $z \neq 0$ wenden wir das Quotientenkriterium an mit $c_n := \frac{z^n\, n!}{n^n}$. Es ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|z|^{n+1}\,(n+1)!\, n^n\, n!}{(n+1)^{n+1}\,|z|^n\, n!} = |z| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{|z|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Mit dem Hinweis folgt also $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|z|}{e}$. Für $|z| < e$ ist also $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$ und das Quotientenkriterium liefert (nach Vorlesung) absolute Konvergenz der Reihe. Für $|z| > e$ ist $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$ und das Quotientenkriterium liefert (nach Vorlesung) Divergenz der Reihe. Für $|z| = e$ konvergiert $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ nach dem Hinweis monoton fallend gegen 1, so dass $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$ für alle n gilt und das Quotientenkriterium erneut Divergenz der Reihe liefert.

(c): f heißt nach Definition differenzierbar in x_0 genau dann, wenn der Limes $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Dazu äquivalent ist die Existenz des Limes $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (es genügte eine der Äquivalenzen anzugeben).

(d): Anwendung der Kettenregel liefert $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = \exp(\sin(x^3)) \cdot 3x^2 \cdot \cos(x^3)$ (wobei bei der Berechnung der Ableitung von $\sin(x^3)$ erneut die Kettenregel benutzt wurde).

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

(b) (10 Punkte) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Funktion

$$\begin{array}{lll} & g :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}, & g(x) := f(x) \\ \big(\text{bzw.} & h : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, & h(x) := f(x)\big) \end{array}$$

stetig in a ist. Zeigen Sie unter Benutzung der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit aus (a), dass f in a stetig ist, falls f in a linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

Lösung:

(a): Nach Definition ist f genau dann stetig in a, wenn

$$\underset{\epsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \ \underset{\delta \in \mathbb{R}^+}{\exists} \ \underset{z \in M}{\forall} \big(|z - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(a)| < \epsilon\big).$$

(b): Sei f in a linksseitig und rechtseitig stetig. Sei $\epsilon > 0$. Zu ϵ gibt es, da g in a stetig ist, ein $\delta_1 > 0$ so, dass

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \Big(a - \delta_1 < x \leq a \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon\Big).$$

Da auch h in a stetig ist, gibt es auch ein $\delta_2 > 0$ so, dass

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \Big(a \leq x < a + \delta_2 \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| = |h(x) - h(a)| < \epsilon\Big).$$

Sei nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ist dann $|a - x| < \delta$, so folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Somit ist f stetig in a.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2018/2019
4. Februar 2019

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ __________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ __________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ____

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Kettenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (10 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

Name: ______________________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+k}$

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $e^{i\pi}$

(c) (2 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl z in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$: $z := \frac{1}{i+1}$

(d) (2 Punkte) $\ln e^3$

(e) (2 Punkte) $\sin(3\pi/2)$

(f) (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{5} k$

(g) (2 Punkte) $\inf\,]-3, \pi[$

(h) (2 Punkte) $\inf \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

(i) (2 Punkte) Berechnen Sie $f'(0)$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-3x}$

(j) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, ohne f.

Name: ____

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha,$$

an.

(b) (15 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x^{-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad g^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-n-1}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen. Die Fakultät $n!$ ist rekursiv definiert durch $1! := 1$, $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Name: ______________________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{10}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Name: ____________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) (5 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := x/k$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

(d) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus (c) für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

Name: ______________________________

Name: ____________________

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2018/2019
4. Februar 2019

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

$\forall$ $\exists$

Name: $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\, g'(x)$

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Kettenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (10 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

Zu (a):

Kettenregel: Sei $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g :]c,d[\longrightarrow \mathbb{K}$, $f(]a,b[) \subseteq]c,d[$ ($a,c = -\infty$ sowie $b,d = \infty$ ist erlaubt). Ist f differenzierbar in $\xi \in]a,b[$ und g differenzierbar in $f(\xi) \in]c,d[$, so ist $g \circ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar in ξ und

$$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi) g'(f(\xi)).$$

Eine Variante ohne ξ ist auch in Ordnung, sofern Sie f, g überall auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen als differenzierbar voraussetzen.

Zu (b):

Nach Definition konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a, wenn

$$\forall_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} \ \exists_{N\in\mathbb{N}} \ \forall_{n>N} \ |a_n - a| < \epsilon.$$

$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \ \exists_{N\in\mathbb{N}} \ \forall_{n>N} \ |a_n - a| < \varepsilon$

导

收敛

20

Name: ____

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

限 **(a)** (2 Punkte) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+k} = \cancel{0}$.

i **(b)** (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $e^{i\pi} = -1$.

复 **(c)** (2 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl z in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$: $z := \frac{1}{i+1}$. Es ist $z = \boxed{\frac{i-1}{(i+1)(i-1)}} = \frac{i-1}{i^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

(d) (2 Punkte) $\ln e^3 = 3$.

(e) (2 Punkte) $\sin(3\pi/2) = -1$.

(f) (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

(g) (2 Punkte) $\inf\,]-3, \pi[= -3$. inf sup

(h) (2 Punkte) $\inf \left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} = -1$.

导 **(i)** (2 Punkte) Berechnen Sie $f'(0)$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-3x}$. Es ist $f'(x) = -3e^{-3x}$, also $f'(0) = -3$.

集 **(j)** (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, ohne f. Es ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

域

Name: ______________________________

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha,$$

an.

(b) (15 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x^{-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad g^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-n-1}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen. Die Fakultät $n!$ ist rekursiv definiert durch $1! := 1$, $(n+1)! := (n+1)\cdot n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Die Ableitung ist

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) := \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

(b) Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$g' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g'(x) = (-1)x^{-2} = (-1)^1 \cdot 1! \cdot x^{-1-1},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-n-1}$, erhält man

$$g^{(n+1)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(g^{(n)}\right)'(x) \overset{\text{Ind. vor.}}{=} \left((-1)^n\, n!\, x^{-n-1}\right)' = -(-1)^n\, n!(n+1)\, x^{-(n+1)-1}$$
$$= (-1)^{n+1}\,(n+1)!\, x^{-(n+1)-1},$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

极限 **(a)** (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n}$$

n^2

收敛 **(b)** (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{10}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Zu (a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{n^2} - 6}{\frac{-10n}{n^2} + 4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} - \lim_{n\to\infty} 6}{\lim_{n\to\infty} \frac{-10}{n} + \lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}}$$

$$= \frac{2 - 0 - 6}{0 + 4 + 0} = -1.$$

-1

Zu (b):

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Es ist $L = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und die Umformungen

$$\left|1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 10 < \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad 100 < n$$

zeigen, dass, für $N := 100$, $|a_n - L| < \frac{1}{10}$ für alle $n > N$ erfüllt ist.

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. 1.

(b) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. 2.

趋近 **(c)** (5 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := x/k$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert. $\frac{x}{k}$

(d) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus (c) für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

ydw x/k

Zu (a): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Definition genau dann punktweise gegen f, wenn

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Zu (b): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Definition genau dann gleichmäßig gegen f, wenn

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{k>N}{\forall} \quad |f_k(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Zu (c): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, da

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{x}{k} = 0.$$

Zu (d): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen f, da für $\epsilon = 1$ gilt:

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{x\geq N+1}{\forall} \quad |f_{N+1}(x) - 0| = \frac{x}{N+1} \geq 1.$$

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2018/2019
4. Februar 2019

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Quotientenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (10 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{cx},$$

an.

(b) (15 Punkte) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := e^{-kx}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad g^{(n)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n\, k^n\, e^{-kx}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen.

Name: ____

Aufgabe B 3. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $(i+1)^2$

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $|3+4i|$

(c) (2 Punkte) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[$

(d) (2 Punkte) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[$

(e) (2 Punkte) $e^{\ln 17}$

(f) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{3} k^{-1}$

(g) (2 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k$

(h) (2 Punkte) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sin k$

(i) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{N})$ für $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{C}$, $f(n):=e^{i\pi n}$, ohne f.

(j) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f^{-1}(B_1(0))$ für $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$, $f(x)=x$, ohne f.

Name: ____________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{2n^2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{200}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Name: ____________________

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) (5 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := (\sin x)/k$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

(d) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus (c) für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

Name: ______________________________

Name: ____

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2018/2019
4. Februar 2019

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

❏ Diplom ❏ Anderes: ____________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ____________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Quotientenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (10 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

Zu (a):

Quotientenregel: Sind $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $I =]a, b[$, $a < b$, $g \neq 0$, differenzierbar in $\xi \in I$, so ist auch f/g differenzierbar in ξ, und es gilt

$$(fg)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

Eine Variante ohne ξ ist auch in Ordnung, sofern Sie f, g überall auf I als differenzierbar voraussetzen.

Zu (b):

Nach Definition ist f genau dann stetig in a, wenn

$$\underset{\epsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \ \underset{\delta \in \mathbb{R}^+}{\exists} \ \underset{z \in M}{\forall} \Big(|z - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(a)| < \epsilon \Big).$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{cx},$$

an.

(b) (15 Punkte) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := e^{-kx}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad g^{(n)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n\, k^n\, e^{-kx}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen.

Lösung:

(a) Die Ableitung ist

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) := c\, e^{cx}.$$

(b) Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g'(x) = -k\, e^{-kx} = (-1)\, k\, e^{-kx}$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $g^{(n)}(x) = (-1)^n\, k^n\, e^{-kx}$, erhält man

$$g^{(n+1)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big(g^{(n)}\big)'(x) \overset{\text{Ind. vor.}}{=} \big((-1)^n\, k^n\, e^{-kx}\big)' = (-1)^{n+1}\, k^{n+1}\, e^{-kx},$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $(i+1)^2 = i^2 + 2i + 1 = 2i$.

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

(c) (2 Punkte) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[= \mathbb{R}$.

(d) (2 Punkte) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[=]-1,1[$.

(e) (2 Punkte) $e^{\ln 17} = 17$.

(f) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{3} k^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

(g) (2 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

(h) (2 Punkte) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sin k = 0$.

(i) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{N})$ für $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(n) := e^{i\pi n}$, ohne f. Es ist $f(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$.

(j) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f^{-1}(B_1(0))$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = x$, ohne f. Es ist $f^{-1}(B_1(0)) =]-1,1[= B_1(0)$ (beide Antworten sind okay).

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{2n^2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{200}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Zu (a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n^3} + 5 - \frac{6n^2}{n^3}}{10 - \frac{5}{n^3} + \frac{3n}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^3} + \lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 10 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^3}}$$
$$= \frac{0 + 5 - 0}{10 - 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Zu (b):

Es ist $L = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und die Umformungen

$$\left| \frac{1}{2n^2} - 0 \right| < \frac{1}{200} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{200} \quad \Leftrightarrow \quad 200 < 2n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 10 < n$$

zeigen, dass, für $N := 10$, $|a_n - L| < \frac{1}{200}$ für alle $n > N$ erfüllt ist.

Name: ____

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) (5 Punkte) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) (5 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := (\sin x)/k$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ punktweise gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

(d) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus (c) für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, konvergiert.

Zu (a): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Definition genau dann punktweise gegen f, wenn

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Zu (b): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Definition genau dann gleichmäßig gegen f, wenn

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{k>N}{\forall} \quad |f_k(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Zu (c): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, da

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\sin x}{k} = 0.$$

Zu (d): Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, da wegen $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ gilt:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{k>N}{\forall} \quad \left| \frac{\sin x}{k} - 0 \right| \leq \frac{1}{k} < \epsilon.$$

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2019/2020
28. August 2020

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachholprüfung (Online-Hausarbeit)

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏ Anderes ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Es ist nicht notwendig, dass Sie die Angabe ausdrucken. Achten Sie dann allerdings darauf, dass Ihre Abgabe die obigen Informationen über Sie trotzdem enthält, da diese vom Prüfungsamt benötigt werden. Stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe völlig klar ist, welche Antworten sich auf welche Aufgabe beziehen.

Damit Ihre Abgabe korrigiert werden kann, ist es **zwingend erforderlich**, dass Sie die folgende Erklärung unterschreiben und mit einreichen (wenn Sie die Erklärung per Hand abschreiben, achten Sie unbedingt darauf, dass Sie den Wortlaut nicht ändern).

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Abgabe zur Prüfung selbständig und ohne Hilfe durch andere Personen verfasst habe.

Name Datum

Bevor Sie anfangen, die Aufgaben zu bearbeiten, **lesen Sie bitte sorgfältig die Informationen und Anweisungen auf der folgenden Seite**.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
max. Punkte	10	15	10	10	20	15	10	10	100

Die Prüfung besteht aus **8 Aufgaben**.

Schreiben Sie Ihre Antworten in **Ihrer eigenen Handschrift**. Schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll. Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Wenn Sie die Bearbeitung beendet haben, müssen Sie Ihre Bearbeitung scannen und als PDF-Datei bei Uni2work hochladen. Wie vorab mitgeteilt, werden nur **gut lesbare** Abgaben korrigiert. Um technische Probleme beim Upload und bei der Korrektur zu vermeiden, achten Sie darauf, dass die Dateigröße 1MB pro geschriebener Seite nicht übersteigt.

Schlecht lesbare Abgaben werden automatisch unkorrigiert als nichtbestanden gewertet. Auch wird die Form der Bearbeitung durchaus mitbewertet: Die logische Abfolge Ihrer Rechnungen und Argumente muss klar dargelegt sein; unklare oder gar chaotische oder geschmierte Abgaben führen zu Punktabzug und können insbesondere der Grund für ein Nichtbestehen der Prüfung sein.

Die Aufgaben sind darauf ausgelegt, dass Studierende, die den Vorlesungsstoff im Rahmen des Lernzieles beherrschen und vorbereitet sind, die Aufgaben innerhalb von ca. **4 Stunden** vollständig bearbeiten können. Aus Kulanzgründen haben Sie ingesamt 24 Stunden zeit (also bis Sa, 29. August, 8:00 Uhr deutscher Zeit (MESZ)), um Ihre Lösungen bei Uni2work hochzuladen. Dabei sollten Sie nur im absoluten Notfall Ihre Lösungen nach Fr, 28. August, 16 Uhr, hochladen. In diesem Sinn **ist der Termin Sa, 29. August, 8:00 Uhr MESZ, absolut scharf** und auch eine um nur eine Minute verspätete Abgabe wird auf keinen Fall mehr gewertet.

Nur im Fall von unvorhersehbaren Notfällen dürfen Sie Ihre Abgabe auch via PDF-Anhang per E-Mail an `philip@math.lmu.de` einreichen. Solche Abgaben werden nur gewertet, wenn sie vor Sa, 29. August, 8:00 Uhr MESZ verschickt wurden und wenn Ihnen eine unterschriebene Erklärung beigefügt ist, warum Ihnen, trotz gewissenhafter Planung, ein Hochladen bei Uni2work nicht möglich war. Reichen Sie Ihre Abgabe also **nicht** per E-Mail ein, außer wenn es wirklich gar nicht anders geht, da solche Abgaben technische Probleme verursachen und die Korrektur verzögern können.

Hilfsmittel: Sie dürfen bei der Hausarbeit Hilfsmittel Ihrer Wahl benutzen, solange Sie die Hausarbeit selbständig bearbeiten. Sie müssen im Falle einer Kontrolle insbesondere in der Lage sein, Ihre abgegebene Lösung zu erklären – Sie müssen damit rechnen, dass wir solche Kontrollen stichprobenartig durchführen werden. Es ist nicht gestattet, Hilfe von anderen Personen zum Lösen der Aufgaben anzunehmen, und es ist auch niemandem gestattet, solche Hilfe zu leisten (weder persönlich noch via Telefon oder Internet oder auf anderem Weg). Zuwiderhandlungen sind strafbar und können sowohl strafrechtliche als auch hochschulrechtliche Konsequenzen (z.B. Exmatrikulation) nach sich ziehen. Rein technische Hilfe, die nichts mit dem Lösen der Aufgaben zu tun hat (z.B. beim Download, beim Scannen oder beim Upload) ist hingegen natürlich gestattet.

Name: ____________________

Aufgabe 1. [10 Punkte]

Vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf):

(a) (2 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{5}}$$

(b) (2 Punkte)

$$\prod_{k=-7}^{7} k$$

(c) (2 Punkte) $f'(x)$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := (\sin x)(\cos x)$:

$$f'(x) =$$

(d) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{Q})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 42$, ohne f:

(e) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f^{-1}(\mathbb{Q})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 42$, ohne f:

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$$

(b)

$$\prod_{k=-7}^{7} k = (-7)\cdots(-1)\cdot 0 \cdot 1 \cdots 7 = 0.$$

(c)

$$f'(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1 - 2(\sin x)^2$$

(es gibt auch 2 Punkte, wenn man den zweiten Schritt nicht macht).

(d) $f(\mathbb{Q}) = \{42\}$.

(e) $f^{-1}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, da $42 \in \mathbb{Q}$ (auch ohne die Begründung gibt es 2 Punkte).

Name: ______________________________

Aufgabe 2. [15 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a), (c), (d), (e) soweit wie möglich, und schreiben Sie die Zahl in (b) in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (aus der Vorlesung bekannte Formeln und Grenzwerte dürfen Sie ohne Beweis benutzen; schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf):

(a) (3 Punkte)

$$|e^{-17i}(5-3i)|^2 \quad = |e^{-17i}|^2 \, |5-3i|^2$$

$$1 \qquad 34$$

(b) (3 Punkte)

$$\frac{\binom{i+1}{2}}{2-2i} \quad = \frac{\frac{(i+1)\,i}{2}}{2(1-i)} = \frac{(i+1)^2\, i}{4\cdot 2} = \frac{2i^2}{4\cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

(c) (3 Punkte)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp(\frac{1}{k}\sin k) - 1}{\frac{1}{k}\sin k}$$

(d) (3 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2}$$

(e) (3 Punkte) $f'(x)$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := e^{-x^2+x} + \frac{\cos x}{2+\sin x}$:

$$f'(x) =$$

Lösung:

(a)

$$|e^{-17i}(5-3i)|^2 = |e^{-17i}|^2 \cdot |5-3i|^2 = 1 \cdot (25+9) = 34.$$

(b)

$$\frac{\binom{i+1}{2}}{2-2i} = \frac{\frac{(i+1)\cdot i}{2}}{2-2i} = \frac{-1+i}{4-4i} = -\frac{1}{4}.$$

(c) Es ist $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sin k = 0$, da $\sin k$ beschränkt ist: $-1 \le \sin k \le 1$. Also

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp(\frac{1}{k}\sin k) - 1}{\frac{1}{k}\sin k} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}(-\frac{1}{2})^n + 3 - \frac{15}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\sin n + \frac{1}{n} + 2} = \frac{0+3-0}{0+0+2} = \frac{3}{2}.$$

(e) Mit Kettenregel und Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x+1)\, e^{-x^2+x} + \frac{-\sin x(2+\sin x) - (\cos x)^2}{(2+\sin x)^2} \\ &= (-2x+1)\, e^{-x^2+x} + \frac{-2\sin x - (\sin x)^2 - (\cos x)^2}{(2+\sin x)^2} \\ &= (-2x+1)\, e^{-x^2+x} - \frac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}. \end{aligned}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [10 Punkte]

Beweisen Sie die Aussage

$$\forall_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \quad \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k} = \frac{n^n}{(n-1)!}$$

mit einem Induktionsbeweis.

Lösung:

Bewertungsschema: 3 Punkte für den Induktionsanfang, 2 Punkte für die korrekte Stuktur des Induktionsbeweises, 5 Punkte für den Induktionsschritt (davon 2 Punkte auf die korrekte Verwendung der Induktionsvoraussetzung – wenn diese korrekt verwendet wird, muss die Formel der Voraussetzung nicht explizit dastehen, aber es muss klar sein, wo sie verwendet wird; Abzug gibt es, wenn die Voraussetzung falsch dasteht).

Wenn man die Formel korrekt auf den Fall $n = 1$ ausdehnt und den Induktionsanfang für $n = 1$ macht, ist es auch in Ordnung, aber man muss dann klar machen, dass man weiß, was man tut, sonst gibt es einen Punkt Abzug.

Induktionsverankerung ($n = 2$): Für $n = 2$ ergibt sich die Aussage

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k} = (1+1)^2 = 4 = \frac{2^2}{(2-1)!},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k} = \frac{n^n}{(n-1)!}$ erhält man

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k} &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \frac{n^n}{(n-1)!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n^n}{(n-1)!}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!},\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____

Aufgabe 4. [10 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \ln x$. Finden Sie eine Formel für die n-te Ableitung von f, $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie sie mit einem Induktionsbeweis (aus der Vorlesung bekannte Ableitungen dürfen Sie dabei natürlich ohne Beweis benutzen).

Lösung:

Bewertungsschema: 2 Punkte für das Aufstellen der Vermutung, 2 Punkte für den Induktionsanfang, 2 Punkte für die korrekte Stuktur des Induktionsbeweises, 4 Punkte für den Induktionsschritt (davon 2 Punkte auf die korrekte Verwendung der Induktionsvoraussetzung – wenn diese korrekt verwendet wird, muss die Formel der Voraussetzung nicht explizit dastehen, aber es muss klar sein, wo sie verwendet wird; Abzug gibt es, wenn die Voraussetzung falsch dasteht).

Man berechnet

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3},$$

und erhält daraus die Vermutung

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad f^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n}.$$

Beweis der Vermutung mit Induktion:

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2 \cdot 0! \cdot x^{-1},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n}$, erhält man

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big(f^{(n)}\big)'(x) &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \big((-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n}\big)' = -(-1)^{n+1}\,n \cdot (n-1)!\,x^{-n-1} \\ &= (-1)^{n+2}\,n!\,x^{-(n+1)}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [20 Punkte]

Über die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei bekannt, dass $f(1) = -1$ und

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = (x+1)^2(x-2)(x^2-x-2).$$

(a) (9 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

(b) (7 Punkte) Bestimmen Sie den Funktionswert $f(0)$.

(c) (4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass f ein globales Minimum hat; beweisen oder widerlegen Sie auch, dass f ein globales Maximum hat.

Achtung: In jeder Teilaufgabe müssen Ihre Ausführungen (durch Bezugnahme auf Ergebnisse der Vorlesung) insbesondere die Korrektheit Ihrer Ergebnisse beweisen.

Lösung:

(a): Notwendig für ein lokales Extremum von f in x ist nach Vorlesung $f'(x) = 0$ (1 Punkt). Dies ist hier äquivalent zu

$$x+1=0 \ \vee \ x-2=0 \ \vee \ x^2-x-2=0. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, \quad \text{(1 Punkt)}$$

also $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Dies sind somit die einzigen Stellen, wo f ein lokales Extremum haben kann. Auch wissen wir nun $f'(x) = (x+1)^3(x-2)^2$ (1 Punkt), also (1 Punkt)

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -1, \\ > 0 & \text{für } x > -1,\, x \neq 2. \end{cases}$$

Somit hat f' in $x = -1$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, was nach Vorlesung hinreichend für ein Minimum bei $x = -1$ ist (1 Punkt). Weiter wissen wir nach Vorlesung nun auch, dass f streng monoton steigt auf $]-1, 2[$ und auf $]2, \infty[$ (1 Punkt). Somit gilt für jedes $\epsilon \in]0,1[$, dass $f(2-2\epsilon) < f(2-\epsilon) \leq f(2) \leq f(2+\epsilon) < f(2+2\epsilon)$, d. h., es gibt in jeder Umgebung von 2 Punkte x, wo $f(x) < f(2)$ und auch Punkte y, wo $f(2) < f(y)$ (1 Punkt). Somit ist $x = -1$ das einzige lokale Extremum von f (1 Punkt).

(b): Wir bestimmen die Zuordnungsvorschrift von f durch Integration (1 Punkt für den Ansatz): Um eine Stammfunktion von f' zu finden, rechnen wir zunächst

$$f'(x) = (x+1)^3(x-2)^2 = (x^3+3x^2+3x+1)(x^2-2x+4) = x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4. \quad \text{(2 Punkte)}$$

Nach dem Hauptsatz gilt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 4x + c \quad \text{(1 Punkt)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(1) = -1$ folgt

$$-1 = f(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} - \frac{5}{4} + \frac{1}{3} + 4 + 4 + c = \frac{10}{60} - \frac{12}{60} - \frac{75}{60} + \frac{20}{60} + 8 + c = \frac{423}{60} + c = \frac{141}{20} + c. \quad \text{(2 Punkte)}$$

Somit bekommen wir $c = f(0) = -1 - \frac{141}{20} = -\frac{161}{20}$ (1 Punkt).

(c): Da jedes globale Extremum auch ein lokales Extremum ist, kann f nach (a) kein globales Maximum haben (1 Punkt). Bleibt zu untersuchen, ob bei $x = -1$ ein globales Minimum vorliegt (1 Punkt). Dies ist der Fall, da wir wegen der in (a) bestimmten Vorzeichen von f' wissen, dass f auf $]-\infty, -1]$ monoton fällt und auf $[-1, \infty[$ monoton steigt (2 Punkte).

Name: ______________________________

Aufgabe 6. [15 Punkte]

In jedem der folgenden Aufgabenteile geben Sie bitte geeignete Teilmengen von $\mathbb{C}$ an und beweisen die Korrektheit Ihrer Angaben (am besten unter Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung). Hinweis: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist auch eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. In jeder Teilaufgabe gibt es einen Punkt auf die Angabe einer korrekten Menge (bzw. zweier korrekter Megen in (b)); die restlichen Punkte gibt es für den Beweis.

(a) (3 Punkte) Eine Menge, die nicht abgeschlossen ist.

(b) (4 Punkte) Zwei kompakte Mengen, davon eine endlich und eine unendlich.

(c) (4 Punkte) Eine beschränkte Menge mit unendlich vielen Häufungspunkten.

(d) (4 Punkte) Eine unbeschränkte abgeschlossenene Menge ohne Häufungspunkte.

Lösung:

Es war in Ordnung, wenn man in (b) und/oder (c) ohne Beweis benutzt hat, dass nichttriviale Intervalle (oder Kreisscheiben) unendlich viele Punkte enthalten.

(a) $M :=]0,1]$ ist nicht abgeschlossen, da $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M ist, deren Grenzwert (in $\mathbb{C}$) 0 ist, jedoch $0 \notin A$.

(b) Die Menge $\{0\}$ ist nach Bsp. 7.43(a) eine endliche kompakte Menge. Die Menge $C := [0,1]$ ist eine uendliche kompakte Menge (kompakt nach Bsp. 7.43(b)). Es ist wie gesagt in Ordnung, hier als bekannt anzunehmen, dass $[0,1]$ unendlich ist; aber z. B. zeigt dies auch die Injektivität der Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow C$, $f(n) := \frac{1}{n}$ (mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass C gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist).

(c) Die Menge $B :=]0,1[$ ist beschränkt und hat unendlich viele Häufungspunkte: B ist beschränkt, da, für jedes $x \in B$ gilt, dass $0 < x < 1$. Weiter ist jedes $x \in B$ ein Häufungspunkt von B: Sei $x \in B$ und $\epsilon > 0$. Dann ist $B \cap B_\epsilon(x) =]\max\{0, x-\epsilon\}, \min\{1, x+\epsilon\}[$, welche als nichttriviales Intervall unendlich viele Punkte enthält.

(d) Die Menge $\mathbb{N}$ ist eine unbeschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ohne Häufungspunkte: $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt, da es zu jeder reellen Zahl M ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > M$ gibt; $\mathbb{N}$ hat keine Häufungspunkte, da

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{N} = \{n\}; \tag{1}$$

M ist abgeschlossen, da (z. B. wegen (1)) jede Folge in $\mathbb{N}$, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, ab einem Index konstant gleich einem $n \in \mathbb{N}$ sein muss, also dann gegen $n \in \mathbb{N}$ konvergieren muss.

Name: ______________________________

Aufgabe 7. [10 Punkte]

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital, und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen).

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{1/4}^{1/2} \frac{\cos(\pi x)}{(\sin(\pi x))^2}\, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Substitution $u := \sin(\pi x)$, und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich (auch hier müssen Sie in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen die Anwendbarkeit nicht überprüfen, beim Vereinfachen darf $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ohne Beweis benutzt werden).

Lösung:

(a) Mit der Regel von de l'Hopital ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x - x \sin x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0.$$

(b) Zur Benutzung der Substitutionsregel mit $u = u(x) = \sin(\pi x)$ berechnet man $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \pi\cos(\pi x)$, $u(\frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{2}$, $u(\frac{1}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$. Also

$$\int_{1/4}^{1/2} \frac{\cos(\pi x)}{(\sin(\pi x))^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\sin\frac{\pi}{4}}^{\sin\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi\, u^2}\, \mathrm{d}u \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \left[-\frac{1}{\pi u}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = -\frac{1}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 8. [10 Punkte]

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius R an (vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich), und beweisen Sie Ihr Ergebnis (am besten unter Benutzung einer aus der Vorlesung bekannten Formel für den Konvergenzradius; aus der Vorlesung bekannte Grenzwerte dürfen natürlich auch benutzt werden):

(a) (5 Punkte) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right)^2 z^n$.

(b) (5 Punkte) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$ ($a \in \mathbb{R}$, R hängt von a ab).

Lösung:

(a) Mit $a_n = \left(\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right)^2$ ist der Konvergenzradius nach der Formel aus der Vorlesung

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n!\cdot 3^2\cdots(2n+1)^2(2n+3)^2}{3^2\cdots(2n+1)^2\cdot(n+1)!(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+12n+9}{n^2+2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{1+0+0} = 4.$$

(b) Mit $a_n = a^{n^2}$ ist der Konvergenzradius nach der Formel aus der Vorlesung

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|^n} = \begin{cases} \infty & \text{für } |a|<1, \\ 1 & \text{für } |a|=1, \\ 0 & \text{für } |a|>1. \end{cases}$$

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2019/2020
6. Februar 2020

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie eine Wahrheitstafel an, die die Implikation $A \Rightarrow B$ definiert.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussageform

$$(A \vee B) \ \wedge \ B,$$

wenn A und B den Wahrheitswert W (wahr) haben.

Berechnen Sie in (c) – (e) jeweils die Ableitung $f'(x)$ der angegebenen Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$:

(c) (4 Punkte) $f(x) := e^{-x^2+x}$.

(d) (4 Punkte) $f(x) := \frac{\cos x}{2+\sin x}$.

(e) (4 Punkte) $f(x) := (\sin x)(\cos x)$.

Name: ____

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) $\cos \frac{\pi}{2}$

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $\frac{1}{i}$

(c) (2 Punkte) $\sup]-1, 1[$

(d) (2 Punkte) $\inf\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$

(e) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{3}(-k)$

(f) (2 Punkte) $\{1, 2, 3\} \setminus \{4, 5, 3\}$

(g) (2 Punkte) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \ldots, n\}$

(h) (2 Punkte) $\{-1, 2, -3, 4, 5\} \cap \{-10, -9, \ldots, -1\} \cap \{-1, 7, -3\}$

(i) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\{1, 2\})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + 1$, ohne f:

(j) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$, ohne f:

Name: ____________________

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{2n^2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{200}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Name: ____

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

(das sollen Sie nicht beweisen). Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass daraus folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z_j \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

(b) (10 Punkte) Laut Vorlesung sind die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \underset{k \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha + 1 - j}{j}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis und unter Benutzung des Additionstheorems

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(welches Sie nicht beweisen sollen), dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (5 Punkte) Formulieren Sie das Quotientenkriterium für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(c) (10 Punkte) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Größe von $|z|$, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n\, n!}{n^n}$ konvergiert, absolut konvergiert oder divergiert (hier reicht es nicht, darauf zu verweisen, dass das Beispiel in der Vorlesung behandelt wurde, sondern die Bestimmung soll im Detail ausgeführt werden). Hinweis: Benutzen Sie, dass $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsend gegen e konvergiert (diese Tatsache sollen Sie hier nicht beweisen).

Name: ______________________________

Name: ______________________________

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2019/2020
6. Februar 2020

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ____________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie eine Wahrheitstafel an, die die Implikation $A \Rightarrow B$ definiert.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussageform

$$(A \vee B) \ \wedge \ B,$$

wenn A und B den Wahrheitswert W (wahr) haben.

Berechnen Sie in (c) – (e) jeweils die Ableitung $f'(x)$ der angegebenen Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$:

(c) (4 Punkte) $f(x) := e^{-x^2+x}$.

(d) (4 Punkte) $f(x) := \frac{\cos x}{2+\sin x}$.

(e) (4 Punkte) $f(x) := (\sin x)(\cos x)$.

Zu (a):

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Zu (b):

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B) \ \wedge \ B$
W	W	W	W

Zu (c): $f'(x) = (-2x+1)\, e^{-x^2+x}$

Zu (d):

$$f'(x) = \frac{-\sin x(2+\sin x) - \cos x \cos x}{(2+\sin x)^2} = \frac{-1-2\sin x}{(2+\sin x)^2}$$

(die Vereinfachung war nicht verlangt).

Zu (e): $f'(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$

Name: ______________________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

(c) (2 Punkte) $\sup]-1,1[= 1$

(d) (2 Punkte) $\inf\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = 0$

(e) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{3}(-k) = (-1)(-2)(-3) = -6$

(f) (2 Punkte) $\{1,2,3\} \setminus \{4,5,3\} = \{1,2\}$

(g) (2 Punkte) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \{1,2,\dots,n\} = \{1\}$

(h) (2 Punkte) $\{-1,2,-3,4,5\} \cap \{-10,-9,\dots,-1\} \cap \{-1,7,-3\} = \{-1,-3\}$

(i) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\{1,2\})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 2x+1$, ohne f:
$f(\{1,2\}) = \{3,5\}$

(j) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$, ohne f:
$f(\mathbb{R}) = [-1,1]$

Name: ______________________________

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{2n^2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{200}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Zu (a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 5n^3 - 6n^2}{10n^3 - 5 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n^3} + 5 - \frac{6n^2}{n^3}}{10 - \frac{5}{n^3} + \frac{3n}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^3} + \lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 10 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^3}}$$
$$= \frac{0 + 5 - 0}{10 - 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Zu (b):

Es ist $L = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und die Umformungen

$$\left|\frac{1}{2n^2} - 0\right| < \frac{1}{200} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{200} \quad\Leftrightarrow\quad 200 < 2n^2 \quad\Leftrightarrow\quad 10 < n$$

zeigen, dass, für $N := 10$, $|a_n - L| < \frac{1}{200}$ für alle $n > N$ erfüllt ist.

Name: ______________________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w| \tag{1}$$

(das sollen Sie nicht beweisen). Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass daraus folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z_j \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

(b) (10 Punkte) Laut Vorlesung sind die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \underset{k \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha + 1 - j}{j}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis und unter Benutzung des Additionstheorems

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(welches Sie nicht beweisen sollen), dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Zu (a):

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$|z_1| \leq |z_1|,$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

erhält man

$$\left|\sum_{j=1}^{n+1} z_j\right| = \left|z_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} z_j\right| \overset{(1)}{\leq} |z_{n+1}| + \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \overset{\text{Ind. vor.}}{\leq} |z_{n+1}| + \sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Lösung zu (b) auf der nächsten Seite:

Zu (b):

Induktionsverankerung ($n = 0$): Für $n = 0$ ergibt sich die Aussage

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!(0-0)!},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zunächst gilt

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!}. \tag{2}$$

Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung

$$\underset{0 \leq k \leq n}{\forall} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

erhält man für alle $1 \leq k \leq n+1$:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \overset{\text{Ind. vor.}}{=} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!k + n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (5 Punkte) Formulieren Sie das Quotientenkriterium für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(c) (10 Punkte) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Größe von $|z|$, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n\, n!}{n^n}$ konvergiert, absolut konvergiert oder divergiert (hier reicht es nicht, darauf zu verweisen, dass das Beispiel in der Vorlesung behandelt wurde, sondern die Bestimmung soll im Detail ausgeführt werden). Hinweis: Benutzen Sie, dass $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsend gegen e konvergiert (diese Tatsache sollen Sie hier nicht beweisen).

Zu (a):
Nach Definition konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |a_n - a| < \epsilon.$$

Zu (b):
Quotientenkriterium:

$$\left(\underset{0<q<1}{\exists}\left(\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \le q < 1 \text{ für fast alle } n\right)\right) \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ absolut konvergent,}$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \ge 1 \text{ für fast alle } n \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ divergent.}$$

Zu (c):
Für $z = 0$ ist die absolute Konvergenz der Reihe klar. Für $z \neq 0$ wenden wir das Quotientenkriterium an mit $c_n := \frac{z^n\, n!}{n^n}$. Es ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|z|^{n+1}\,(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,|z|^n\,n!} = |z|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{|z|}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Mit dem Hinweis folgt also $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|z|}{e}$. Für $|z| < e$ ist also $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$ und das Quotientenkriterium liefert (nach Vorlesung) absolute Konvergenz der Reihe. Für $|z| > e$ ist $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$ und das Quotientenkriterium liefert (nach Vorlesung) Divergenz der Reihe. Für $|z| = e$ konvergiert $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ nach dem Hinweis monoton fallend gegen 1, so dass $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$ für alle n gilt und das Quotientenkriterium erneut Divergenz der Reihe liefert.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2019/2020
6. Februar 2020

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: __________ Vorname: __________

Matrikelnr.: __________ Fachsemester: __________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): __________

❑ Diplom ❑ Anderes: __________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ _____

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ _____

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: i^3

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $|3-4i|$

(c) (2 Punkte) $\{1,2,3\} \cap \{4,5,3\}$

(d) (2 Punkte) $\{1,2,1\} \cup \{3,1\} \cup \{5\}$

(e) (2 Punkte) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{1,2,\ldots,n\}$

(f) (2 Punkte) $\inf \mathbb{R}^+$

(g) (2 Punkte) $\sup\{\sin x : x \in \mathbb{R}\}$

(h) (2 Punkte) Schreiben Sie ohne das Potenzmengensymbol:
$\mathcal{P}(\{\emptyset, 3\})$

(i) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, ohne f:

(j) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f^{-1}[-4,4]$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ohne f:

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie eine Wahrheitstafel an, die die logische Disjunktion $A \vee B$ definiert.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussageform

$$(A \wedge B) \;\Rightarrow\; \neg B,$$

wenn A den Wahrheitswert W (wahr) und B den Wahrheitswert F (falsch) hat.

Berechnen Sie in (c) – (e) jeweils die Ableitung $f'(x)$ der angegebenen Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$:

(c) (4 Punkte) $f(x) := x^3\, e^x$.

(d) (4 Punkte) $f(x) := \sin(\cos x)$.

(e) (4 Punkte) $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda, \mu, z_j, w_j \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\, z_j + \mu\, w_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j + \mu \sum_{j=1}^{n} w_j.$$

(b) (10 Punkte) Laut Vorlesung sind die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \qquad \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha + 1 - j}{j}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis und unter Benutzung des Additionstheorems

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(welches Sie nicht beweisen sollen), dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{10}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Name: ______________________________

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (5 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

(c) (10 Punkte) Zeigen Sie mit einem ϵ-δ-Argument, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 2 & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

in $\xi = 0$ nicht stetig ist.

Name: ______________________________

Name: ______________________________

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2019/2020
6. Februar 2020

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis mit Lichtbild oder Personalausweis sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

Wenn nicht anders angegeben, vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben; bei jeder Teilaufgabe gibt es für das korrekte Ergebnis 2 Punkte, sonst 0 Punkte):

(a) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $i^3 = -i$

(b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $|3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

(c) (2 Punkte) $\{1,2,3\} \cap \{4,5,3\} = \{3\}$

(d) (2 Punkte) $\{1,2,1\} \cup \{3,1\} \cup \{5\} = \{1,2,3,5\}$

(e) (2 Punkte) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{1,2,\ldots,n\} = \{1\}$

(f) (2 Punkte) $\inf \mathbb{R}^+ = 0$

(g) (2 Punkte) $\sup\{\sin x :\ x \in \mathbb{R}\} = 1$

(h) (2 Punkte) Schreiben Sie ohne das Potenzmengensymbol:
$\mathcal{P}(\{\emptyset, 3\}) = \big\{\emptyset,\ \{3\},\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, 3\}\big\}$

(i) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, ohne f:
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$

(j) (2 Punkte) Schreiben Sie die Menge $f^{-1}[-4,4]$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ohne f:
$f^{-1}[-4,4] = [-2,2]$

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Geben Sie eine Wahrheitstafel an, die die logische Disjunktion $A \vee B$ definiert.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussageform

$$(A \wedge B) \;\Rightarrow\; \neg B,$$

wenn A den Wahrheitswert W (wahr) und B den Wahrheitswert F (falsch) hat.

Berechnen Sie in (c) – (e) jeweils die Ableitung $f'(x)$ der angegebenen Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$:

(c) (4 Punkte) $f(x) := x^3\, e^x$.

(d) (4 Punkte) $f(x) := \sin(\cos x)$.

(e) (4 Punkte) $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Zu (a):

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Zu (b):

A	B	$A \wedge B$	$\neg B$	$(A \wedge B) \Rightarrow \neg B$
W	F	F	W	W

Zu (c): $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$

Zu (d): $f'(x) = -\sin x\, \cos(\cos x)$

Zu (e):

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

(die Vereinfachung war nicht verlangt).

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda, \mu, z_j, w_j \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\, z_j + \mu\, w_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j + \mu \sum_{j=1}^{n} w_j.$$

(b) (10 Punkte) Laut Vorlesung sind die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha + 1 - j}{j}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis und unter Benutzung des Additionstheorems

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(welches Sie nicht beweisen sollen), dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Zu (a):

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\lambda z_1 + \mu w_1 = \lambda z_1 + \mu w_1,$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\, z_j + \mu\, w_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j + \mu \sum_{j=1}^{n} w_j$$

erhält man

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n+1} (\lambda\, z_j + \mu\, w_j) = \lambda z_{n+1} + \mu w_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} (\lambda\, z_j + \mu\, w_j) \\
&\overset{\text{Ind. vor.}}{\le} \lambda z_{n+1} + \mu w_{n+1} + \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j + \mu \sum_{j=1}^{n} w_j = \lambda \left(z_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} z_j \right) + \mu \left(w_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} w_j \right) \\
&= \lambda \sum_{j=1}^{n+1} z_j + \mu \sum_{j=1}^{n+1} w_j,
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Lösung zu (b) auf der nächsten Seite:

Zu (b):

Induktionsverankerung ($n = 0$): Für $n = 0$ ergibt sich die Aussage

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!(0-0)!},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zunächst gilt

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!}. \tag{1}$$

Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung

$$\underset{0 \le k \le n}{\forall} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

erhält man für alle $1 \le k \le n+1$:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \overset{\text{Ind. vor.}}{=} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!k + n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!},\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n}$$

(b) (10 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - L| < \frac{1}{10}$, wobei L den Grenzwert der Folge bezeichnet (aus Ihrem Argument muss sich insbesondere die Korrektheit Ihrer Lösung ergeben). Hinweis: Bestimmen Sie zunächst L.

Zu (a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2 - 6n^2}{-10n + 4n^2 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{n^2} - 6}{\frac{-10n}{n^2} + 4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} - \lim_{n\to\infty} 6}{\lim_{n\to\infty} \frac{-10}{n} + \lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}}$$
$$= \frac{2 - 0 - 6}{0 + 4 + 0} = -1.$$

Zu (b):

Es ist $L = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und die Umformungen

$$\left|1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 10 < \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad 100 < n$$

zeigen, dass, für $N := 100$, $|a_n - L| < \frac{1}{10}$ für alle $n > N$ erfüllt ist.

Name: ____

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (5 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

(c) (10 Punkte) Zeigen Sie mit einem ϵ-δ-Argument, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 2 & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

in $\xi = 0$ nicht stetig ist.

Zu (a):
Nach Definition konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \; |a_n - a| < \epsilon.$$

Zu (b):
Nach Definition ist f genau dann stetig in a, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \; \underset{\delta\in\mathbb{R}^+}{\exists} \; \underset{z\in M}{\forall} \; \big(|z - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(a)| < \epsilon\big).$$

Zu (c):
Für $\epsilon := 1$ gilt

$$\underset{\delta>0}{\forall} \; \big|f(0) - f(-\delta/2)\big| = 2 > 1 = \epsilon,$$

was nach (b) zeigt, dass f in 0 nicht stetig ist.

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2020/2021
11. Februar 2021

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussprüfung (Online-Hausarbeit)

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑ Anderes ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Es ist nicht notwendig, dass Sie die Angabe ausdrucken. Achten Sie dann allerdings darauf, dass Ihre Abgabe die obigen Informationen über Sie trotzdem enthält, da diese vom Prüfungsamt benötigt werden. Stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe völlig klar ist, welche Antworten sich auf welche Aufgabe beziehen.
Damit Ihre Abgabe korrigiert werden kann, ist es **zwingend erforderlich**, dass Sie die folgende Erklärung unterschreiben und mit einreichen (wenn Sie die Erklärung per Hand abschreiben, achten Sie unbedingt darauf, dass Sie den Wortlaut nicht ändern). Die Erklärung mit Unterschrift muss zusammen mit der Abgabe gemäß der Regeln auf der folgenden Seite bis **Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ** eingereicht sein, sonst wird die Abgabe unkorrigiert als nicht bestanden gewertet; ein Nachreichen der Erklärung und/oder Unterschrift ist aus Gründen der Fairness und Organisation **nicht möglich**.

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Abgabe zur Prüfung selbständig und ohne Hilfe durch andere Personen verfasst habe.

Unterschrift Datum

Bevor Sie anfangen, die Aufgaben zu bearbeiten, **lesen Sie bitte sorgfältig die Informationen und Anweisungen auf der folgenden Seite**.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Die Prüfung besteht aus **5 Aufgaben**.

Das Verstehen und korrekte Befolgen der folgenden Regeln sowie der Regeln auf dem Deckblatt ist als Teil der Prüfung zu betrachten. Fehler beim Verstehen und/oder Umsetzen der Regeln (z. B. das Vergessen der Unterschrift in der Abgabe oder ein Uploadversuch um 15:30 Uhr, der dann wegen Stromausfall im Wohngebiet nicht mehr möglich ist) führen genauso zum Nichtbestehen der Prüfung wie zu viele inhaltliche Fehler bei der Bearbeitung der Aufgaben.

Schreiben Sie Ihre Antworten in **Ihrer eigenen Handschrift**. Schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll. Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Wenn Sie die Bearbeitung beendet haben, müssen Sie Ihre Bearbeitung scannen und als PDF-Datei bei Uni2work hochladen. Wie vorab mitgeteilt, werden nur **gut lesbare** Abgaben korrigiert. Um technische Probleme beim Upload und bei der Korrektur zu vermeiden, achten Sie darauf, dass die Dateigröße 1MB pro geschriebener Seite nicht übersteigt.

Schlecht lesbare Abgaben werden automatisch unkorrigiert als nichtbestanden gewertet. Auch wird die Form der Bearbeitung durchaus mitbewertet: Die logische Abfolge Ihrer Rechnungen und Argumente muss klar dargelegt sein; unklare oder gar chaotische oder geschmierte Abgaben führen zu Punktabzug und können insbesondere der Grund für ein Nichtbestehen der Prüfung sein.

Die Aufgaben sind darauf ausgelegt, dass Studierende, die den Vorlesungsstoff im Rahmen des Lernzieles beherrschen und vorbereitet sind, die Aufgaben innerhalb von ca. **2 Stunden** vollständig bearbeiten können. Aus Kulanzgründen haben Sie ingesamt 8 Stunden zeit (also bis Do, 11. Februar, 16:00 Uhr deutscher Zeit (MEZ)), um Ihre Lösungen bei Uni2work hochzuladen. Dabei sollten Sie nur im absoluten Notfall Ihre Lösungen nach Do, 11. Februar, 12 Uhr, hochladen. In diesem Sinn **ist der Termin Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ, absolut scharf** und auch eine um nur eine Minute verspätete Abgabe wird auf keinen Fall mehr gewertet.

Nur im Fall von unvorhersehbaren Notfällen dürfen Sie Ihre Abgabe auch via PDF-Anhang per E-Mail an `philip@math.lmu.de` einreichen. Solche Abgaben werden nur gewertet, wenn sie vor Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ verschickt wurden und wenn Ihnen eine unterschriebene Erklärung beigefügt ist, warum Ihnen, trotz gewissenhafter Planung, ein Hochladen bei Uni2work nicht möglich war. Reichen Sie Ihre Abgabe also **nicht** per E-Mail ein, außer wenn es wirklich gar nicht anders geht, da solche Abgaben technische Probleme verursachen und die Korrektur verzögern können.

Hilfsmittel: Sie dürfen bei der Hausarbeit Hilfsmittel Ihrer Wahl benutzen, solange Sie die Hausarbeit selbständig bearbeiten. Sie müssen im Falle einer Kontrolle insbesondere in der Lage sein, Ihre abgegebene Lösung zu erklären – Sie müssen damit rechnen, dass wir solche Kontrollen stichprobenartig durchführen werden. Es ist nicht gestattet, Hilfe von anderen Personen zum Lösen der Aufgaben anzunehmen, und es ist auch niemandem gestattet, solche Hilfe zu leisten (weder persönlich noch via Telefon oder Internet oder auf anderem Weg). Zuwiderhandlungen sind strafbar und können sowohl strafrechtliche als auch hochschulrechtliche Konsequenzen (z. B. Exmatrikulation) nach sich ziehen. Rein technische Hilfe, die nichts mit dem Lösen der Aufgaben zu tun hat (z. B. beim Download, beim Scannen oder beim Upload) ist hingegen natürlich gestattet.

Name: ______________________________

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a) – (d) soweit wie möglich (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf):

(a) (5 Punkte)

$$\left|\frac{3+i}{2-i}\right| \qquad \sqrt{2}$$

(i bezeichnet die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$)

(b) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende Menge ohne das Potenzmengensymbol:

$$\mathcal{P}\Big(\{2,3\} \setminus \{0,3\}\Big)$$

$\{\emptyset, \{2\}\}$

(c) (5 Punkte)

$$\sum_{j=1}^{4} \prod_{k=1}^{j} k \quad = 33$$

(d) (5 Punkte) $f'(x)$ für $f :]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x^2}{\ln x} + \exp\Big(2x \sin(x^2)\Big)$:

$$f'(x) =$$

Name: ____________________

Aufgabe 2. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie durch eine Wahrheitstafel, dass die folgende Aussageform **keine** Tautologie ist:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (B \wedge A)$$

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := (x+1)\,x\,(x-1).$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass f injektiv ist.

(c) (9 Punkte) Die Menge

$$R := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1\Big\}$$ $xRy \Rightarrow yRx$

stellt eine Relation auf $\mathbb{R}$ dar. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) (3 Punkte) R ist symmetrisch. $0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1$

(ii) (2 Punkte) R ist reflexiv. $(2,2)$

(iii) (2 Punkte) R ist antisymmetrisch. $(0,1)$ $(1,0)$

(iv) (2 Punkte) R ist transitiv.

Name: ____________________

Aufgabe 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Die Fibonaccizahlen sind rekursiv definiert durch

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} F_{n+1} := F_n + F_{n-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

(schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

(b) (10 Punkte) Beweisen Sie die Aussage

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$$

mit einem Induktionsbeweis (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie folgenden Folgengrenzwert in $\mathbb{C}$ (i bezeichnet die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$) unter Benutzung von Grenzwertsätzen aus der Vorlesung (und **nicht** unter Benutzung der Regel von de l'Hôpital); vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{i+1})^n - n - 17i\,n^5 + 2 + 3n^3}{\arctan(\frac{1}{n}) + i\,n + 2n^2 + 17n^5}$$

(b) (10 Punkte) Betrachten Sie die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{10})^k$. Geben Sie den Grenzwert s der Folge für $n \to \infty$ an (2 Punkte) und bestimmen Sie $N \in \mathbb{N}$ so, dass, für alle $n > N$ gilt $|s_n - s| < \frac{1}{9} \cdot 10^{-99}$ (Ihr Argument muss insbesondere die Korrektheit Ihres Ergebnisses beweisen) (8 Punkte). Vereinfachen Sie gegebenenfalls Ihre Ausdrücke für s und N soweit wie möglich.

Schreiben Sie in (a) und (b) Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 3 & \text{für } x \neq 1, \\ 0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

nicht stetig ist.

设 Sei $x_k = 1 + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$\lim_{k\to\infty} x_k = 1$

$f(\lim_{k\to\infty} x_k) = 3$

$f(1) = 0$

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie mit Ergebnissen der Vorlesung, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \exp\left(\frac{x \ln(|x| + 1)}{3x^4 + 3 - \cos(3x)}\right),$$

stetig ist.

$\neq 0.$

$3 \cdot Id^4 + 3$

$-\cos(3Id)$

$Id : x \longrightarrow x$

$+1$

$Id \cdot \ln(|Id| + 1) \geq 1$

$3Id^4 \geq 0$

$\cos(3Id) \in [-1, 1]$

(c) (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h in $\xi = 0$ stetig ist (5 Punkte), jedoch in jedem $\xi \neq 0$ unstetig ist (5 Punkte).

Schreiben Sie Ihre Rechnungen und Beweise mit Zwischenschritten auf.

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2020/2021
11. Februar 2021

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussprüfung (Online-Hausarbeit)

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏ Anderes ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Es ist nicht notwendig, dass Sie die Angabe ausdrucken. Achten Sie dann allerdings darauf, dass Ihre Abgabe die obigen Informationen über Sie trotzdem enthält, da diese vom Prüfungsamt benötigt werden. Stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe völlig klar ist, welche Antworten sich auf welche Aufgabe beziehen.

Damit Ihre Abgabe korrigiert werden kann, ist es **zwingend erforderlich**, dass Sie die folgende Erklärung unterschreiben und mit einreichen (wenn Sie die Erklärung per Hand abschreiben, achten Sie unbedingt darauf, dass Sie den Wortlaut nicht ändern). Die Erklärung mit Unterschrift muss zusammen mit der Abgabe gemäß der Regeln auf der folgenden Seite bis **Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ** eingereicht sein, sonst wird die Abgabe unkorrigiert als nicht bestanden gewertet; ein Nachreichen der Erklärung und/oder Unterschrift ist aus Gründen der Fairness und Organisation **nicht möglich**.

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Abgabe zur Prüfung selbständig und ohne Hilfe durch andere Personen verfasst habe.

Unterschrift Datum

Bevor Sie anfangen, die Aufgaben zu bearbeiten, **lesen Sie bitte sorgfältig die Informationen und Anweisungen auf der folgenden Seite**.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Die Prüfung besteht aus **5 Aufgaben**.

Das Verstehen und korrekte Befolgen der folgenden Regeln sowie der Regeln auf dem Deckblatt ist als Teil der Prüfung zu betrachten. Fehler beim Verstehen und/oder Umsetzen der Regeln (z. B. das Vergessen der Unterschrift in der Abgabe oder ein Uploadversuch um 15:30 Uhr, der dann wegen Stromausfall im Wohngebiet nicht mehr möglich ist) führen genauso zum Nichtbestehen der Prüfung wie zu viele inhaltliche Fehler bei der Bearbeitung der Aufgaben.

Schreiben Sie Ihre Antworten in **Ihrer eigenen Handschrift**. Schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll. Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Wenn Sie die Bearbeitung beendet haben, müssen Sie Ihre Bearbeitung scannen und als PDF-Datei bei Uni2work hochladen. Wie vorab mitgeteilt, werden nur **gut lesbare** Abgaben korrigiert. Um technische Probleme beim Upload und bei der Korrektur zu vermeiden, achten Sie darauf, dass die Dateigröße 1MB pro geschriebener Seite nicht übersteigt.

Schlecht lesbare Abgaben werden automatisch unkorrigiert als nichtbestanden gewertet. Auch wird die Form der Bearbeitung durchaus mitbewertet: Die logische Abfolge Ihrer Rechnungen und Argumente muss klar dargelegt sein; unklare oder gar chaotische oder geschmierte Abgaben führen zu Punktabzug und können insbesondere der Grund für ein Nichtbestehen der Prüfung sein.

Die Aufgaben sind darauf ausgelegt, dass Studierende, die den Vorlesungsstoff im Rahmen des Lernzieles beherrschen und vorbereitet sind, die Aufgaben innerhalb von ca. **2 Stunden** vollständig bearbeiten können. Aus Kulanzgründen haben Sie ingesamt 8 Stunden zeit (also bis Do, 11. Februar, 16:00 Uhr deutscher Zeit (MEZ)), um Ihre Lösungen bei Uni2work hochzuladen. Dabei sollten Sie nur im absoluten Notfall Ihre Lösungen nach Do, 11. Februar, 12 Uhr, hochladen. In diesem Sinn **ist der Termin Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ, absolut scharf** und auch eine um nur eine Minute verspätete Abgabe wird auf keinen Fall mehr gewertet.

Nur im Fall von unvorhersehbaren Notfällen dürfen Sie Ihre Abgabe auch via PDF-Anhang per E-Mail an `philip@math.lmu.de` einreichen. Solche Abgaben werden nur gewertet, wenn sie vor Do, 11. Februar, 16:00 Uhr MEZ verschickt wurden und wenn Ihnen eine unterschriebene Erklärung beigefügt ist, warum Ihnen, trotz gewissenhafter Planung, ein Hochladen bei Uni2work nicht möglich war. Reichen Sie Ihre Abgabe also **nicht** per E-Mail ein, außer wenn es wirklich gar nicht anders geht, da solche Abgaben technische Probleme verursachen und die Korrektur verzögern können.

Hilfsmittel: Sie dürfen bei der Hausarbeit Hilfsmittel Ihrer Wahl benutzen, solange Sie die Hausarbeit selbständig bearbeiten. Sie müssen im Falle einer Kontrolle insbesondere in der Lage sein, Ihre abgegebene Lösung zu erklären – Sie müssen damit rechnen, dass wir solche Kontrollen stichprobenartig durchführen werden. Es ist nicht gestattet, Hilfe von anderen Personen zum Lösen der Aufgaben anzunehmen, und es ist auch niemandem gestattet, solche Hilfe zu leisten (weder persönlich noch via Telefon oder Internet oder auf anderem Weg). Zuwiderhandlungen sind strafbar und können sowohl strafrechtliche als auch hochschulrechtliche Konsequenzen (z. B. Exmatrikulation) nach sich ziehen. Rein technische Hilfe, die nichts mit dem Lösen der Aufgaben zu tun hat (z. B. beim Download, beim Scannen oder beim Upload) ist hingegen natürlich gestattet.

Name: ______________________________

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a) – (d) soweit wie möglich (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf):

(a) (5 Punkte)

$$\left|\frac{3+i}{2-i}\right|$$

(i bezeichnet die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$)

(b) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende Menge ohne das Potenzmengensymbol:

$$\mathcal{P}\Big(\{2,3\} \setminus \{0,3\}\Big)$$

(c) (5 Punkte)

$$\sum_{j=1}^{4} \prod_{k=1}^{j} k$$

(d) (5 Punkte) $f'(x)$ für $f :]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x^2}{\ln x} + \exp\Big(2x\,\sin(x^2)\Big)$:

$$f'(x) =$$

Zu (a): Man rechnet

$$\left|\frac{3+i}{2-i}\right| = \frac{|3+i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{3^2+|i|^2}}{\sqrt{2^2+|i|^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

Zu (b): Man rechnet

$$\mathcal{P}\Big(\{2,3\} \setminus \{0,3\}\Big) = \mathcal{P}(\{2\}) = \Big\{\emptyset, \{2\}\Big\}.$$

Zu (c): Man rechnet

$$\sum_{j=1}^{4} \prod_{k=1}^{j} k = \prod_{k=1}^{1} k + \prod_{k=1}^{2} k + \prod_{k=1}^{3} k + \prod_{k=1}^{4} k = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$$

$$= 1 + 2 + 6 + 24 = 33.$$

Zu (d): Es gilt für alle $x \in]1,\infty[$, nach der Quotientenregel

$$\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)' = \frac{2x\ln x - \frac{x^2}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x\ln x - x}{(\ln x)^2}$$

sowie nach Produkt- und Kettenregel

$$\Big(\exp\Big(2x\,\sin(x^2)\Big)\Big)' = \Big(2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2)\Big)\,\exp\Big(2x\,\sin(x^2)\Big),$$

also zusammen

$$f'(x) = \frac{2x\ln x - x}{(\ln x)^2} + \Big(2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2)\Big)\,\exp\Big(2x\,\sin(x^2)\Big).$$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie durch eine Wahrheitstafel, dass die folgende Aussageform **keine** Tautologie ist:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (B \wedge A)$$

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := (x+1)\,x\,(x-1).$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass f injektiv ist.

(c) (9 Punkte) Die Menge

$$R := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le 1\Big\}$$

stellt eine Relation auf $\mathbb{R}$ dar. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) (3 Punkte) R ist symmetrisch.

(ii) (2 Punkte) R ist reflexiv.

(iii) (2 Punkte) R ist antisymmetrisch.

(iv) (2 Punkte) R ist transitiv.

Zu (a): Nach der Wahrheitstafel

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$B \wedge A$	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (B \wedge A)$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	W	F	F	F	F
F	W	F	W	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

hat die Aussageform $(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (B \wedge A)$ für die Belegung von A mit W und B mit F den Wahrheitswert F, und ist damit keine Tautologie (für den Beweis genügt es, diese eine Zeile der Tafel anzugeben).

Zu (b): f ist nicht injektiv, z. B., da $f(1) = f(-1) = 0$.

Zu (c): (i) R ist symmetrisch, da

$$(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le y \le 1 \ \wedge\ 0 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R.$$

(ii) R ist nicht reflexiv, da z. B. $(5,5) \notin R$.

(iii) R ist nicht antisymmetrisch, da z. B. $(0,1) \in R$ und $(1,0) \in R$, aber $0 \neq 1$.

(iv) R ist transitiv, da

$$(x,y) \in R \ \wedge\ (y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le 1 \ \wedge\ 0 \le z \le 1 \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Die Fibonaccizahlen sind rekursiv definiert durch

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} F_{n+1} := F_n + F_{n-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

(schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

(b) (10 Punkte) Beweisen Sie die Aussage

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$$

mit einem Induktionsbeweis (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

Zu (a): Bewertungsschema: 3 Punkte für den Induktionsanfang, 2 Punkte für die korrekte Stuktur des Induktionsbeweises, 5 Punkte für den Induktionsschritt (davon 2 Punkte auf die korrekte Verwendung der Induktionsvoraussetzung – wenn diese korrekt verwendet wird, muss die Formel der Voraussetzung nicht explizit dastehen, aber es muss klar sein, wo sie verwendet wird; Abzug gibt es, wenn die Voraussetzung falsch dasteht).

Induktionsverankerung ($n = 0$): Für $n = 0$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1.$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ erhält man

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} F_i \overset{\text{Ind. vor.}}{=} F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1,$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Zu (b) auf der folgenden Seite.

Zu (b): Bewertungsschema: 3 Punkte für den Induktionsanfang, 2 Punkte für die korrekte Stuktur des Induktionsbeweises, 5 Punkte für den Induktionsschritt (davon 2 Punkte auf die korrekte Verwendung der Induktionsvoraussetzung – wenn diese korrekt verwendet wird, muss die Formel der Voraussetzung nicht explizit dastehen, aber es muss klar sein, wo sie verwendet wird; Abzug gibt es, wenn die Voraussetzung falsch dasteht).

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1 \cdot 1^2 = -1 \cdot 1 = (-1)^1 \binom{1+1}{2},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$ erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= (-1)^{n+1}(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \overset{\text{Ind. vor.}}{=} (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \binom{n+1}{2} \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \frac{(n+1)!}{2\,(n-1)!} = (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2}(2n+2-n) = (-1)^{n+1} \frac{(n+2)!}{2\,n!} = (-1)^{n+1} \binom{n+2}{2},\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie folgenden Folgengrenzwert in $\mathbb{C}$ (i bezeichnet die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$) unter Benutzung von Grenzwertsätzen aus der Vorlesung (und **nicht** unter Benutzung der Regel von de l'Hôpital); vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{i+1})^n - n - 17i\,n^5 + 2 + 3n^3}{\arctan(\frac{1}{n}) + i\,n + 2n^2 + 17n^5}$$

(b) (10 Punkte) Betrachten Sie die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{10})^k$. Geben Sie den Grenzwert s der Folge für $n \to \infty$ an (2 Punkte) und bestimmen Sie $N \in \mathbb{N}$ so, dass, für alle $n > N$ gilt $|s_n - s| < \frac{1}{9} \cdot 10^{-99}$ (Ihr Argument muss insbesondere die Korrektheit Ihres Ergebnisses beweisen) (8 Punkte). Vereinfachen Sie gegebenenfalls Ihre Ausdrücke für s und N soweit wie möglich.

Schreiben Sie in (a) und (b) Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf.

Zu (a): Man rechnet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{i+1})^n - n - 17i\,n^5 + 2 + 3n^3}{\arctan(\frac{1}{n}) + i\,n + 2n^2 + 17n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^5}(\frac{1}{i+1})^n - \frac{1}{n^4} - 17i + \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^5}\arctan(\frac{1}{n}) + \frac{i}{n^4} + \frac{2}{n^3} + 17}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{i+1})^n - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} - \lim_{n\to\infty}17i + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^5} + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^5}\arctan(\frac{1}{n})\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{i}{n^4} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3} + \lim_{n\to\infty}17}$$

$$= \frac{0\cdot 0 - 0 - 17i + 0 + 0}{0 + 0 + 0 + 17} = -i \quad \text{(6 Punkte auf die Rechnung)},$$

wobei wir benutzt haben, dass $(\arctan(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $0 < \arctan(\frac{1}{n}) < \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist (2 Punkte) und dass $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{i+1})^n = 0$, da $|\frac{1}{i+1}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ (2 Punkte).

Zu (b): Nach der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{10})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{10})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Nach der Formel für die geometrische Summe gilt $s_n = \frac{1-(\frac{1}{10})^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}(1-(\frac{1}{10})^{n+1})$. Somit gilt

$$|s_n - s| < \frac{1}{9}\cdot 10^{-99} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} < \frac{1}{9}\cdot 10^{-99} \quad\Leftrightarrow\quad 10^{-n} < 10^{-99} \quad\Leftrightarrow\quad n > 99.$$

Somit gilt für $N := 99$, dass $|s_n - s| < \frac{1}{9}\cdot 10^{-99}$ für alle $n > N$.

Name: ____________________

Aufgabe 5. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 3 & \text{für } x \neq 1, \\ 0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

nicht stetig ist.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie mit Ergebnissen der Vorlesung, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \exp\left(\frac{x\ln(|x|+1)}{3x^4+3-\cos(3x)}\right),$$

stetig ist.

(c) (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h in $\xi = 0$ stetig ist (5 Punkte), jedoch in jedem $\xi \neq 0$ unstetig ist (5 Punkte).

Schreiben Sie Ihre Rechnungen und Beweise mit Zwischenschritten auf.

Zu (a): Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := 1 + \frac{1}{n}$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, jedoch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3 \neq 0 = f(1)$, so dass f an der Stelle $\xi = 1$ nicht stetig ist. Da es somit eine Stelle gibt, an der f nicht stetig ist, ist f nicht stetig.

Zu (b): Mit $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{Id}(x) := x$, gilt

$$f = \exp\circ\left(\frac{\mathrm{Id}\cdot(\ln\circ(|\mathrm{Id}|+1))}{3(\mathrm{Id})^4+3-\cos\circ(3\,\mathrm{Id})}\right).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass konstante Funktionen, Id, cos, $x \mapsto |x|$ und exp auf $\mathbb{R}$ stetig sind. Da ln auf $\mathbb{R}^+$ stetig ist und $|\mathrm{Id}|+1 \geq 1 > 0$, ist auch $\ln\circ(|\mathrm{Id}|+1)$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Wegen $-1 \leq \cos \leq 1$ ist $3(\mathrm{Id})^4+3-\cos\circ(3\,\mathrm{Id}) \geq 2 > 0$, so dass wir f aus stetigen Funktionen durch Verkettung, Addition, Multiplikation und Division mit nichtverschwindender Nennerfunktion zusammengesetzt haben. Aus einem Satz der Vorlesung wissen wir, dass all diese Operationen die Stetigkeit erhalten, so dass auch f stetig ist.

Zu (c): h ist stetig in 0: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = 0$. Dann folgt $\lim_{n\to\infty} |h(x_n)| = |x_n| = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 0$, so dass h nach dem Folgenkriterium in 0 stetig ist. Alternativer Beweis: Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \epsilon$. Aus $|x-0| = |x| < \delta = \epsilon$ folgt dann $|h(x)-0| = |h(x)| = |x| < \epsilon$, was ebenfalls zeigt, dass h in 0 stetig ist.

Sei $\xi \neq 0$. Dann ist h nicht stetig in ξ: Für $\xi \in \mathbb{Q}$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = \xi$. Dann folgt $\lim_{n\to\mathbb{N}} h(x_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}}(-x_n) = -\xi \neq \xi = h(\xi)$, so dass h nach dem Folgenkriterium in ξ nicht stetig ist. Für $\xi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = \xi$. Dann folgt $\lim_{n\to\mathbb{N}} h(x_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}} x_n = \xi \neq -\xi = h(\xi)$, so dass h nach dem Folgenkriterium in ξ nicht stetig ist.

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2020/2021
9. April 2021

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachholprüfung (Online-Hausarbeit)

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏ Anderes ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Es ist nicht notwendig, dass Sie die Angabe ausdrucken. Achten Sie dann allerdings darauf, dass Ihre Abgabe die obigen Informationen über Sie trotzdem enthält, da diese vom Prüfungsamt benötigt werden. Stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe völlig klar ist, welche Antworten sich auf welche Aufgabe beziehen. Damit Ihre Abgabe korrigiert werden kann, ist es **zwingend erforderlich**, dass Sie die folgende Erklärung unterschreiben und mit einreichen (wenn Sie die Erklärung per Hand abschreiben, achten Sie unbedingt darauf, dass Sie den Wortlaut nicht ändern). Die Erklärung mit Unterschrift muss zusammen mit der Abgabe gemäß der Regeln auf der folgenden Seite bis **Fr, 9. April, 16:00 Uhr MESZ** eingereicht sein, **sonst wird die Abgabe unkorrigiert als nicht bestanden gewertet**; ein Nachreichen der Erklärung und/oder Unterschrift ist aus Gründen der Fairness und Organisation **nicht möglich**.

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Abgabe zur Prüfung selbständig und ohne Hilfe durch andere Personen verfasst habe.

Unterschrift Datum

Bevor Sie anfangen, die Aufgaben zu bearbeiten, **lesen Sie bitte sorgfältig die Informationen und Anweisungen auf der folgenden Seite**.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Die Prüfung besteht aus **5 Aufgaben**.

Das Verstehen und korrekte Befolgen der folgenden Regeln sowie der Regeln auf dem Deckblatt ist als Teil der Prüfung zu betrachten. Fehler beim Verstehen und/oder Umsetzen der Regeln (z. B. das Vergessen der Unterschrift in der Abgabe oder ein Uploadversuch um 15:30 Uhr, der dann wegen Stromausfall im Wohngebiet nicht mehr möglich ist) **führen genauso zum Nichtbestehen der Prüfung** wie zu viele inhaltliche Fehler bei der Bearbeitung der Aufgaben.

Schreiben Sie Ihre Antworten in **Ihrer eigenen Handschrift**. Schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll. Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Wenn Sie die Bearbeitung beendet haben, müssen Sie Ihre Bearbeitung scannen und als PDF-Datei bei Uni2work hochladen. Wie vorab mitgeteilt, werden nur **gut lesbare** Abgaben korrigiert. Um technische Probleme beim Upload und bei der Korrektur zu vermeiden, achten Sie darauf, dass die Dateigröße 1MB pro geschriebener Seite nicht übersteigt.

Schlecht lesbare Abgaben werden automatisch unkorrigiert als nichtbestanden gewertet. Auch wird die Form der Bearbeitung durchaus mitbewertet: Die logische Abfolge Ihrer Rechnungen und Argumente muss klar dargelegt sein; unklare oder gar chaotische oder geschmierte Abgaben führen zu Punktabzug und können insbesondere der Grund für ein Nichtbestehen der Prüfung sein.

Die Aufgaben sind darauf ausgelegt, dass Studierende, die den Vorlesungsstoff im Rahmen des Lernzieles beherrschen und vorbereitet sind, die Aufgaben innerhalb von ca. **2 Stunden** vollständig bearbeiten können. Aus Kulanzgründen haben Sie ingesamt 8 Stunden zeit (also bis Fr, 9. April, 16:00 Uhr deutscher Zeit (MESZ)), um Ihre Lösungen bei Uni2work hochzuladen. Dabei sollten Sie nur im absoluten Notfall Ihre Lösungen nach Fr, 9. April, 12 Uhr, hochladen. In diesem Sinn **ist der Termin Fr, 9. April, 16:00 Uhr MESZ, absolut scharf** und auch eine um nur eine Minute verspätete Abgabe wird auf keinen Fall mehr gewertet.

Nur im Fall von unvorhersehbaren Notfällen dürfen Sie Ihre Abgabe auch via PDF-Anhang per E-Mail an `philip@math.lmu.de` einreichen. Solche Abgaben werden nur gewertet, wenn sie vor Fr, 9. April, 16:00 Uhr MESZ verschickt wurden und wenn Ihnen eine unterschriebene Erklärung beigefügt ist, warum Ihnen, trotz gewissenhafter Planung, ein Hochladen bei Uni2work nicht möglich war. Reichen Sie Ihre Abgabe also **nicht** per E-Mail ein, außer wenn es wirklich gar nicht anders geht, da solche Abgaben technische Probleme verursachen und die Korrektur verzögern können.

Hilfsmittel: Sie dürfen bei der Hausarbeit Hilfsmittel Ihrer Wahl benutzen, solange Sie die Hausarbeit selbständig bearbeiten. Sie müssen im Falle einer Kontrolle insbesondere in der Lage sein, Ihre abgegebene Lösung zu erklären – Sie müssen damit rechnen, dass wir solche Kontrollen stichprobenartig durchführen werden. Es ist nicht gestattet, Hilfe von anderen Personen zum Lösen der Aufgaben anzunehmen, und es ist auch niemandem gestattet, solche Hilfe zu leisten (weder persönlich noch via Telefon oder Internet oder auf anderem Weg). Zuwiderhandlungen sind strafbar und können sowohl strafrechtliche als auch hochschulrechtliche Konsequenzen (z. B. Exmatrikulation) nach sich ziehen. Rein technische Hilfe, die nichts mit dem Lösen der Aufgaben zu tun hat (z. B. beim Download, beim Scannen oder beim Upload) ist hingegen natürlich gestattet.

Name: ____________________

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Berechnen Sie in (a) und (b) jeweils den Ausdruck und vereinfachen Sie soweit wie möglich (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf):

(a) (5 Punkte)

$$\binom{7}{5}$$

(b) (5 Punkte)

$$\int_1^3 6\,x^2 \,\ln x \,\mathrm{d}x$$

(c) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad f(n) := n(n-1).$$

(i) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie: $\{1,2\} \cap f(\{1,2\}) = \emptyset$.

(ii) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist surjektiv.

Zu (a):

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21.$$

Zu (b): Mit partieller Integration berechnet man:

$$\int_1^3 6\,x^2 \,\ln x \,\mathrm{d}x = [2\,x^3 \,\ln x]_1^3 - \int_1^3 2\,x^3\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 54\ln 3 - \left[\frac{2}{3}x^3\right]_1^3$$

$$= 54\ln 3 - 18 + \frac{2}{3} = 54\ln 3 - \frac{52}{3}.$$

Zu (c)(i): Es ist $f(1) = 1\cdot 0 = 0$, $f(2) = 2\cdot 1 = 2$. Also ist $f(\{1,2\}) = \{0,2\}$ und

$$\{1,2\} \cap f(\{1,2\}) = \{1,2\} \cap \{0,2\} = \{2\} \neq \emptyset.$$

Zu (c)(ii): f ist nicht surjektiv: Da bei zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer eine gerade ist, ist $f(n) = n(n-1)$ immer gerade, so dass die ungeraden Zahlen nicht im Bild von f liegen.

Alternativ kann man z.B. auf verschiedene Weisen zeigen, dass $1 \notin f(\mathbb{N})$: Die Äquivalenzen

$$f(n) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad n^2 - n - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} \quad\Leftrightarrow\quad n \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

zeigen, dass $f(n) \neq 1$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass f nicht surjektiv ist. Alternativ kann man z.B. f als Einschränkung der differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := x^2 - x$, erkennen, welche wegen $g'(x) = 2x - 1 > 0$ für $x > \frac{1}{2}$, auf $]\frac{1}{2}, \infty[$ streng monoton steigt, was wegen $f(1) = g(1) = 0$ und $f(2) = g(2) = 2$ auch zeigt, dass $1 \notin f(\mathbb{N})$, also, dass f nicht surjektiv ist.

Alternativ folgt auch direkt die strenge Isotonie von f, da für alle $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m > n \quad\Rightarrow\quad f(m) = m(m-1) > n(n-1) = f(n).$$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. [20 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln x - x^2 + 1.$$

(a) (15 Punkte) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}^+$ so, dass f in x_0 einen lokalen Extremwert hat. Zeigen Sie durch Bezugnahme auf Ergebnisse der Vorlesung, dass x_0 die einzige Stelle ist, wo f einen lokalen Extremwert hat, sowie, dass f auf $]0, x_0[$ steng monoton ist und dass f auf $]x_0, \infty[$ streng monoton ist. Geben Sie jeweils die Art der Monotonie an (wachsend oder fallend) und begründen Sie. Geben Sie an, ob f in x_0 ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum hat und begründen Sie.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie durch Benutzung von (a) und Ergebnissen der Vorlesung, dass f genau zwei Nullstellen hat.

Schreiben Sie in (a) und (b) Ihre Rechnungen und Beweise mit Zwischenschritten auf.

Zu (a): Nach Vorlesung ist für die differenzierbare Funktion f eine notwendige Bedingung dafür, dass f in $x_0 \in \mathbb{R}^+$ einen lokalen Extremwert hat, dass $f'(x_0) = 0$ (1 Punkt). Man berechnet

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 2x. \quad \text{(3 Punkte)}$$

Somit ist für $x_0 \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2x_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{(3 Punkte)}$$

Somit kann f höchstens in $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ einen lokalen Extremwert haben (1 Punkt). Entsprechend folgt

$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ 1 > 2x^2 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{\sqrt{2}} > x \quad \text{(1.5 Punkte)}$$

sowie $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < x$ (1.5 Punkte). Also ist nach Vorlesung f auf $]0, x_0[$ streng monoton wachsend und auf $]x_0, \infty[$ streng monoton fallend (2 Punkte). Auch hat $f'(x)$ in x_0 einen Vorzeichenwechsel von positiv nach negativ, was laut Vorlesung hinreichend dafür ist, dass f in x_0 ein lokales Maximum hat (2 Punkte).

Zu (b): Da f auf $]x_0, \infty[$ streng monoton fällt, ist es dort nach Vorlesung injektiv und kann dort also höchstens eine Nullstelle $\eta \in]x_0, \infty[$ haben (1 Punkt). Wegen $f(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$ ist $\eta = 1$ (1 Punkt). Wegen $x_0 < 1$ und der strengen Antitonie auf $]x_0, \infty[$ folgt $f(x_0) > 0$ (0.5 Punkte). Weiter ist

$$f(e^{-1}) = \ln e^{-1} - e^{-2} + 1 = -1 - e^{-2} + 1 = -e^{-2} < 0. \quad \text{(0.5 Punkte)}$$

Somit hat f nach dem Zwischenwertsatz in $]0, x_0[$ mindestens eine Nullstelle (1 Punkt). Wegen der strengen Monotonie und Injektivität von f auf $]0, x_0[$ hat f in $]0, x_0[$ genau eine Nullstelle (1 Punkt).

Somit ist gezeigt, dass f insgesamt genau zwei Nullstellen hat.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [20 Punkte]

Die Folge der Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $P_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sei rekursiv definiert durch

$$P_0(x) := 1, \quad P_1(x) := x, \quad \underset{n\geq 2}{\forall}\; P_n(x) := 2x\,P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie $P_2(x), P_3(x), P_4(x)$. Schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf, vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(b) (14 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\alpha_n \in \mathbb{R}$ der Koeffizient von x^n in P_n. Zeigen Sie durch Induktion, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\; \Big(\deg P_n = n \;\wedge\; \alpha_n = 2^{n-1}\Big)$$

(schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

Zu (a): Man berechnet

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 2x\,P_1(x) - P_0(x) = 2x^2 - 1, \quad \text{(2 Punkte)}\\
P_3(x) &= 2x\,P_2(x) - P_1(x) = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x, \quad \text{(2 Punkte)}\\
P_4(x) &= 2x\,P_3(x) - P_2(x) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1. \quad \text{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

Zu (b): Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\deg P_1 = 1 \;\wedge\; \alpha_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1,$$

welche wegen $P_1(x) = 1\cdot x$ wahr ist (3 Punkte). Da wir für $n = 0$ keine Induktionsvoraussetzung haben, betrachten wir auch den Fall $n = 2$ noch separat: Für $n = 2$ ergibt sich die Aussage

$$\deg P_2 = 2 \;\wedge\; \alpha_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2,$$

welche wegen $P_2(x) = 2x^2 - 1$ auch wahr ist (1 Punkt). Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Wir möchten die Induktionsvoraussetzung

$$\underset{m\in\mathbb{N},\, m\leq n}{\forall}\; \Big(\deg P_m = m \;\wedge\; \alpha_m = 2^{m-1}\Big)$$

und $P_{n+1}(x) = 2x\,P_n(x) - P_{n-1}(x)$ benutzen (wir brauchen die Induktionsvoraussetzung eigentlich nur für $m = n$ und $m = n-1$) (3 Punkte für die Induktionsvoraussetzung). Nach Induktionsvoraussetzung hat P_n die Form

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,x^k = 2^{n-1}x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,x^k$$

und P_{n-1} hat die Form

$$P_{n-1}(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} b_k\,x^k = 2^{n-2}x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} b_k\,x^k$$

mit geeigneten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Somit folgt

$$P_{n+1}(x) = 2x\,P_n(x) - P_{n-1}(x) = 2\cdot 2^{n-1}x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2\cdot a_k\,x^{k+1} - 2^{n-2}x^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} b_k\,x^k.$$

Da alle Summanden außer dem ersten eine Potenz von x mit Exponent kleiner $n+1$ enthalten, folgt, dass $\deg P_{n+1} = n+1$ mit $\alpha_{n+1} = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n = 2^{n+1-1}$, was zeigt, dass die gewünschte Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt (7 Punkte für den Induktionsschritt).

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [20 Punkte]

Berechnen Sie in (a) und (b) jeweils den Grenzwert der $\mathbb{R}$-wertigen Funktion mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital, und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen). Schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf. Nachdem Sie die Regel von de l'Hôpital hinreichend oft angewendet haben, soll der Ausdruck weiter vereinfacht werden, wobei Sie dabei darauf verzichten dürfen, die Zulässigkeit der Umformungen durch Stetigkeits- und Folgenargumente zu rechtfertigen.

(a) (10 Punkte)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

(b) (10 Punkte)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{\frac{1}{x^2}}$$

Zu (a): Mit der Regel von de l'Hopital ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-\cos 0}{2} = -\frac{1}{2}$$

(man kann auf die zweite Anwendung von de l'Hopital verzichten, wenn man aus der Vorlesung $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ benutzt).

Zu (b): Mit der Regel von de l'Hopital ergibt sich:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^{-3} \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{1}{2}.$$

In (a) wurde dabei die Stetigkeit der Cosinusfunktion benutzt; in (b) wurde $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ und die Stetigkeit der Wurzelfunktion benutzt, aber dies brauchte, wie gesagt, in der Lösung nicht erwähnt werden.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [20 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) (10 Punkte) Es sei $x \neq 0$. Dann ist f in x differenzierbar (das sollen Sie hier nicht beweisen). Berechnen Sie $f'(x)$. Führen Sie Ihre Berechnung ausführlich mit Zwischenschritten vor und geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie dabei benutzen. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie, dass f auch in $x = 0$ differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$. Schreiben Sie Ihren Beweis mit Zwischenschritten auf.

Zu (a): Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $f = gh$ mit $g, h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := x^4$, $h(x) := \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann $g'(x) = 4x^3$ (2 Punkte) und, nach Kettenregel (1 Punkt),

$$h'(x) = -(-2x^{-3}) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}. \quad \text{(3 Punkte)}$$

Somit folgt mit der Produktregel (1 Punkt), dass, für $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 4x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^4 \frac{2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} \\ &= 4x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad \text{(3 Punkte)} \end{aligned}$$

Zu (b): Zu zeigen ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^4 \cos\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0.$$

Sei dazu $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$. Dann folgt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{h_k^4 \cos\left(\frac{1}{h_k^2}\right)}{h_k} = \lim_{k \to \infty} h_k^3 \cos\left(\frac{1}{h_k^2}\right) = 0,$$

wie gewünscht, da $\lim_{k\to\infty} h_k^3 = 0$ und $\cos\left(\frac{1}{h_k^2}\right)$ wegen $-1 \leq \cos \leq 1$ beschränkt ist.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Siddhant Das

Wintersemester 2020/2021
9. April 2021

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachholprüfung (Online-Hausarbeit)

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏ Anderes ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Es ist nicht notwendig, dass Sie die Angabe ausdrucken. Achten Sie dann allerdings darauf, dass Ihre Abgabe die obigen Informationen über Sie trotzdem enthält, da diese vom Prüfungsamt benötigt werden. Stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe völlig klar ist, welche Antworten sich auf welche Aufgabe beziehen. Damit Ihre Abgabe korrigiert werden kann, ist es **zwingend erforderlich**, dass Sie die folgende Erklärung unterschreiben und mit einreichen (wenn Sie die Erklärung per Hand abschreiben, achten Sie unbedingt darauf, dass Sie den Wortlaut nicht ändern). Die Erklärung mit Unterschrift muss zusammen mit der Abgabe gemäß der Regeln auf der folgenden Seite bis **Fr, 9. April, 16:00 Uhr MESZ** eingereicht sein, **sonst wird die Abgabe unkorrigiert als nicht bestanden gewertet**; ein Nachreichen der Erklärung und/oder Unterschrift ist aus Gründen der Fairness und Organisation **nicht möglich**.

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Abgabe zur Prüfung selbständig und ohne Hilfe durch andere Personen verfasst habe.

Unterschrift Datum

Bevor Sie anfangen, die Aufgaben zu bearbeiten, **lesen Sie bitte sorgfältig die Informationen und Anweisungen auf der folgenden Seite**.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20	100

Die Prüfung besteht aus **5 Aufgaben**.

Das Verstehen und korrekte Befolgen der folgenden Regeln sowie der Regeln auf dem Deckblatt ist als Teil der Prüfung zu betrachten. Fehler beim Verstehen und/oder Umsetzen der Regeln (z. B. das Vergessen der Unterschrift in der Abgabe oder ein Uploadversuch um 15:30 Uhr, der dann wegen Stromausfall im Wohngebiet nicht mehr möglich ist) **führen genauso zum Nichtbestehen der Prüfung** wie zu viele inhaltliche Fehler bei der Bearbeitung der Aufgaben.

Schreiben Sie Ihre Antworten in **Ihrer eigenen Handschrift**. Schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll. Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Wenn Sie die Bearbeitung beendet haben, müssen Sie Ihre Bearbeitung scannen und als PDF-Datei bei Uni2work hochladen. Wie vorab mitgeteilt, werden nur **gut lesbare** Abgaben korrigiert. Um technische Probleme beim Upload und bei der Korrektur zu vermeiden, achten Sie darauf, dass die Dateigröße 1MB pro geschriebener Seite nicht übersteigt.

Schlecht lesbare Abgaben werden automatisch unkorrigiert als nichtbestanden gewertet. Auch wird die Form der Bearbeitung durchaus mitbewertet: Die logische Abfolge Ihrer Rechnungen und Argumente muss klar dargelegt sein; unklare oder gar chaotische oder geschmierte Abgaben führen zu Punktabzug und können insbesondere der Grund für ein Nichtbestehen der Prüfung sein.

Die Aufgaben sind darauf ausgelegt, dass Studierende, die den Vorlesungsstoff im Rahmen des Lernzieles beherrschen und vorbereitet sind, die Aufgaben innerhalb von ca. **2 Stunden** vollständig bearbeiten können. Aus Kulanzgründen haben Sie ingesamt 8 Stunden zeit (also bis Fr, 9. April, 16:00 Uhr deutscher Zeit (MESZ)), um Ihre Lösungen bei Uni2work hochzuladen. Dabei sollten Sie nur im absoluten Notfall Ihre Lösungen nach Fr, 9. April, 12 Uhr, hochladen. In diesem Sinn **ist der Termin Fr, 9. April, 16:00 Uhr MESZ, absolut scharf** und auch eine um nur eine Minute verspätete Abgabe wird auf keinen Fall mehr gewertet.

Nur im Fall von unvorhersehbaren Notfällen dürfen Sie Ihre Abgabe auch via PDF-Anhang per E-Mail an `philip@math.lmu.de` einreichen. Solche Abgaben werden nur gewertet, wenn sie vor Fr, 9. April, 16:00 Uhr MESZ verschickt wurden und wenn Ihnen eine unterschriebene Erklärung beigefügt ist, warum Ihnen, trotz gewissenhafter Planung, ein Hochladen bei Uni2work nicht möglich war. Reichen Sie Ihre Abgabe also **nicht** per E-Mail ein, außer wenn es wirklich gar nicht anders geht, da solche Abgaben technische Probleme verursachen und die Korrektur verzögern können.

Hilfsmittel: Sie dürfen bei der Hausarbeit Hilfsmittel Ihrer Wahl benutzen, solange Sie die Hausarbeit selbständig bearbeiten. Sie müssen im Falle einer Kontrolle insbesondere in der Lage sein, Ihre abgegebene Lösung zu erklären – Sie müssen damit rechnen, dass wir solche Kontrollen stichprobenartig durchführen werden. Es ist nicht gestattet, Hilfe von anderen Personen zum Lösen der Aufgaben anzunehmen, und es ist auch niemandem gestattet, solche Hilfe zu leisten (weder persönlich noch via Telefon oder Internet oder auf anderem Weg). Zuwiderhandlungen sind strafbar und können sowohl strafrechtliche als auch hochschulrechtliche Konsequenzen (z. B. Exmatrikulation) nach sich ziehen. Rein technische Hilfe, die nichts mit dem Lösen der Aufgaben zu tun hat (z. B. beim Download, beim Scannen oder beim Upload) ist hingegen natürlich gestattet.

Name: ____________________

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Berechnen Sie in (a) und (b) jeweils den Ausdruck und vereinfachen Sie soweit wie möglich (schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf):

(a) (5 Punkte)

$$\binom{7}{5}$$

(b) (5 Punkte)

$$\int_1^3 6\,x^2\,\ln x\,\mathrm{d}x$$

(c) Betrachten Sie die Funktion

$$f:\,\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}_0,\quad f(n):=n(n-1).$$

(i) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie: $\{1,2\}\cap f(\{1,2\})=\emptyset$.

(ii) (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist surjektiv.

Name: ____________________

Aufgabe 2. [20 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln x - x^2 + 1.$$

(a) (15 Punkte) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}^+$ so, dass f in x_0 einen lokalen Extremwert hat. Zeigen Sie durch Bezugnahme auf Ergebnisse der Vorlesung, dass x_0 die einzige Stelle ist, wo f einen lokalen Extremwert hat, sowie, dass f auf $]0, x_0[$ steng monoton ist und dass f auf $]x_0, \infty[$ streng monoton ist. Geben Sie jeweils die Art der Monotonie an (wachsend oder fallend) und begründen Sie. Geben Sie an, ob f in x_0 ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum hat und begründen Sie.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie durch Benutzung von (a) und Ergebnissen der Vorlesung, dass f genau zwei Nullstellen hat.

Schreiben Sie in (a) und (b) Ihre Rechnungen und Beweise mit Zwischenschritten auf.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [20 Punkte]

Die Folge der Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $P_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sei rekursiv definiert durch

$$P_0(x) := 1, \quad P_1(x) := x, \quad \underset{n\geq 2}{\forall} P_n(x) := 2x\, P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie $P_2(x), P_3(x), P_4(x)$. Schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf, vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(b) (14 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\alpha_n \in \mathbb{R}$ der Koeffizient von x^n in P_n. Zeigen Sie durch Induktion, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \Big(\deg P_n = n \ \wedge \ \alpha_n = 2^{n-1} \Big)$$

(schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf).

Name: ____________________

Aufgabe 4. [20 Punkte]

Berechnen Sie in (a) und (b) jeweils den Grenzwert der $\mathbb{R}$-wertigen Funktion mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital, und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen). Schreiben Sie Ihre Rechnungen mit Zwischenschritten auf. Nachdem Sie die Regel von de l'Hôpital hinreichend oft angewendet haben, soll der Ausdruck weiter vereinfacht werden, wobei Sie dabei darauf verzichten dürfen, die Zulässigkeit der Umformungen durch Stetigkeits- und Folgenargumente zu rechtfertigen.

(a) (10 Punkte)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

(b) (10 Punkte)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{\frac{1}{x^2}}$$

Name: ____________________

Aufgabe 5. [20 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) (10 Punkte) Es sei $x \neq 0$. Dann ist f in x differenzierbar (das sollen Sie hier nicht beweisen). Berechnen Sie $f'(x)$. Führen Sie Ihre Berechnung ausführlich mit Zwischenschritten vor und geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie dabei benutzen. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie, dass f auch in $x = 0$ differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$. Schreiben Sie Ihren Beweis mit Zwischenschritten auf.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
5. Februar 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	10	15	25	10		100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Kettenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{1/x}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Ableitung der Exponentialfunktion sowie die der Funktion $x \mapsto 1/x$ ohne Beweis benutzen.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin\big(\ln\big(1 + \sqrt{x}\big)\big).$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ableitungen vom Sinus, vom Logarithmus und von der Wurzelfunktion ohne Beweis benutzen. Sie brauchen nicht versuchen, das Ergebnis zu vereinfachen.

Name: ____________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2i)^{-k}.$$

(b) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$2i\, e^{i\pi} + i^3.$$

(c) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $B_1(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ in der komplexen Ebene.

(d) (5 Punkte) Definieren Sie (ohne Beweis) eine Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Geben Sie dazu eine geeignete nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{C}$ an und eine geeignete Abbildungsvorschrift für f.

Name: ______________________________

Aufgabe A 3. [10 Punkte]

Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Wie lautet die Definition (mit Hilfe von Folgen) dafür, dass die Menge M abgeschlossen ist?

Name: ____________________

Aufgabe A 4. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis (Sie dürfen aus der Vorlesung bekannte Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ohne Beweis benutzen):

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die ϵ-δ-Definition für die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $\xi \in M$.

(b) Zeigen Sie (mit einer Methode Ihrer Wahl), dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} |x| \arctan(1/x) & \text{für } x \notin \{0, 42\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 10^{42} & \text{für } x = 42, \end{cases}$$

nicht stetig (8 Punkte), jedoch im Punkt $\xi = 0$ stetig ist (7 Punkte). Dabei dürfen Sie natürlich auf aus der Vorlesung bekannte Resultate über arctan und stetige Funktionen verweisen, ohne diese zu beweisen.

Name: ______________________________

Aufgabe A 6. [10 Punkte]

Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist. Bei wahren Aussagen schreiben Sie (ohne Beweis) nur das Wort **wahr**, bei falschen Aussagen geben Sie (ohne Beweis) ein Gegenbeispiel an. Dabei gibt bei jeder Teilaufgabe die korrekte Antwort 2 Punkte (nur 1 Punkt bei fehlendem oder falschem Gegenbeispiel), keine Antwort gibt 0 Punkte, eine inkorrekte Antwort gibt -2 Punkte.

(a) Jede nichtleere nach unten durch 0 beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Minimum.

(b) Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(d) Ist $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ stetig mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, so ist f surjektiv.

(e) Jede Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \equiv 0$, konvergiert, konvergiert auch gleichmäßig gegen f.

Name: ____________________

Name: ______________________________

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
5. Februar 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	10	15	25	10		100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Kettenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{1/x}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Ableitung der Exponentialfunktion sowie die der Funktion $x \mapsto 1/x$ ohne Beweis benutzen.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin\big(\ln\big(1+\sqrt{x}\big)\big).$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ableitungen vom Sinus, vom Logarithmus und von der Wurzelfunktion ohne Beweis benutzen. Sie brauchen nicht versuchen, das Ergebnis zu vereinfachen.

Zu (a): Sei $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g :]c,d[\longrightarrow \mathbb{K}$, $f(]a,b[) \subseteq]c,d[$. Ist f differenzierbar in $\xi \in]a,b[$ und g is differenzierbar in $f(\xi) \in]c,d[$, so ist $g \circ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ, und es gilt

$$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi) g'(f(\xi)). \tag{1}$$

Zu (b): Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(x \mapsto 1/x)' = (x \mapsto -1/x^2)$ für $x > 0$ und $\exp' x = \exp x$. Also gilt nach der Kettenregel

$$\underset{x\in\mathbb{R}^+}{\forall} \quad f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}. \tag{2}$$

Zu (c): Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(x \mapsto \sqrt{x})' = (x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$ für $x > 0$, $\ln' x = 1/x$ und $\sin' x = \cos x$. Also gilt nach der Kettenregel

$$\underset{x\in\mathbb{R}^+}{\forall} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cos\big(\ln\big(1+\sqrt{x}\big)\big). \tag{3}$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2i)^{-k}.$$

(b) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$2i\, e^{i\pi} + i^3.$$

(c) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $B_1(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ in der komplexen Ebene.

(d) (5 Punkte) Definieren Sie (ohne Beweis) eine Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Geben Sie dazu eine geeignete nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{C}$ an und eine geeignete Abbildungsvorschrift für f.

Zu (a): Man erkennt, dass es sich um eine geometrische Reihe handelt und erhält

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2i)^{-k} = \frac{1}{1 - 1/(2i)} = \frac{2i}{2i - 1} = \frac{2i(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{-4 + 2i}{-4 - 1} = \frac{4}{5} + i\left(-\frac{2}{5}\right).$$

Zu (b): Es ist

$$2i\, e^{i\pi} + i^3 = -2i - i = -3i = 0 + i(-3).$$

Zu (c):

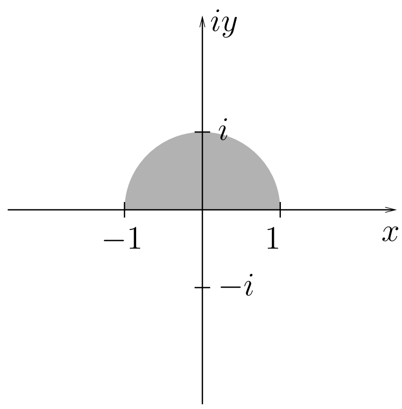


Abbildung 1: Skizze von $B_1(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (der obere Teil des Randes des Halbkreises mit Radius 1 um 0 gehört nicht zu der Menge).

Zu (d): Die Funktion $f : \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(1) := 1$, ist injektiv, aber nicht surjectiv (hier ist also $M := \{1\}$ gewählt).

Name: ____________________

Aufgabe A 3. [10 Punkte]

Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Wie lautet die Definition (mit Hilfe von Folgen) dafür, dass die Menge M abgeschlossen ist?

Die Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge in M, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, ihren Grenzwert in M hat.

Name: ______________________________

Aufgabe A 4. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis (Sie dürfen aus der Vorlesung bekannte Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ohne Beweis benutzen):

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{1} = 1 = 2^1 - 1,$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$, rechnet man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} \\
&\overset{\text{Ind. vor.}}{=} 1 + 2(2^n - 1) + 0 = 2^{n+1} - 1,
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____________________

Aufgabe A 5. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die ϵ-δ-Definition für die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $\xi \in M$.

(b) Zeigen Sie (mit einer Methode Ihrer Wahl), dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} |x| \arctan(1/x) & \text{für } x \notin \{0, 42\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 10^{42} & \text{für } x = 42, \end{cases}$$

nicht stetig (8 Punkte), jedoch im Punkt $\xi = 0$ stetig ist (7 Punkte). Dabei dürfen Sie natürlich auf aus der Vorlesung bekannte Resultate über arctan und stetige Funktionen verweisen, ohne diese zu beweisen.

Zu (a): Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in M$, wenn

$$\underset{\epsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \quad \underset{\delta \in \mathbb{R}^+}{\exists} \quad \underset{x \in M}{\forall} \quad \Big(|x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \Big). \tag{4}$$

Zu (b): Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \quad -\pi/2 < \arctan x < \pi/2. \tag{5}$$

Um zu zeigen, dass g nicht stetig ist, genügt es zu zeigen, dass g im Punkt $\xi = 42$ nicht stetig ist. Um zu zeigen, dass g in $\xi = 42$ nicht stetig ist, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{42\}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 42$ (zum Beispiel bekommt man durch $x_n := 42 + \frac{1}{n}$ so eine Folge).

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktionen arctan und $x \mapsto |x|$ stetig sind sowie die Verkettung und das Produkt stetiger Funktionen stetig ist und ebenso der Quotient stetiger Funktionen stetig, wenn die Funktion im Nenner nicht Null wird. Also ist die Funktion $x \mapsto |x| \arctan(1/x)$ im Punkt $\xi = 42$ stetig und es folgt

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{n \to \infty} \Big(|x_n| \arctan(1/x_n) \Big) = 42 \cdot \arctan(1/42) \overset{(5)}{<} 42 \cdot \frac{\pi}{2} < 10^{42} = g(42), \tag{6}$$

was nach dem Folgenkriterium zeigt, dass g in $\xi = 42$ nicht stetig ist.

Um zu zeigen, dass g in $\xi = 0$ stetig ist, sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$, wobei wir annehmen dürfen, dass alle $x_k \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} g(x_k) = \lim_{k \to \infty} \Big(|x_k| \arctan(1/x_k) \Big) = 0, \tag{7}$$

da die Folge $(\arctan(1/x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ wegen (5) beschränkt ist (aus der Vorlesung wissen wir, dass das Produkt aus einer Folge, die gegen 0 konvergiert und einer beschränkten Folge, auch gegen Null konvergiert) – alternativ folgt (7) auch aus $0 \leq |x_k| \cdot |\arctan(1/x_k)| \leq |x_k| \cdot \frac{\pi}{2}$ und dem Einschachtelungssatz.

Nach (7) und dem Folgenkriterium ist g stetig in 0.

Name: ______________________________

Aufgabe A 6. [10 Punkte]

Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist. Bei wahren Aussagen schreiben Sie (ohne Beweis) nur das Wort **wahr**, bei falschen Aussagen geben Sie (ohne Beweis) ein Gegenbeispiel an. Dabei gibt bei jeder Teilaufgabe die korrekte Antwort 2 Punkte (nur 1 Punkt bei fehlendem oder falschem Gegenbeispiel), keine Antwort gibt 0 Punkte, eine inkorrekte Antwort gibt -2 Punkte.

(a) Jede nichtleere nach unten durch 0 beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Minimum.

(b) Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(d) Ist $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ stetig mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, so ist f surjektiv.

(e) Jede Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \equiv 0$, konvergiert, konvergiert auch gleichmäßig gegen f.

Im Folgenden werden alle Antworten kurz bergründet, was in der Klausur für die wahren Aussagen nicht verlangt war.

(a) falsch, z. B. hat $]0,1]$ kein Minimum.

(b) wahr, die die kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ genau die sind, die abgeschlossen und beschränkt sind.

(c) falsch, da z. B. die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergiert.

(d) wahr nach dem Zwischenwertsatz.

(e) falsch, da z. B. die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1/n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

punktweise gegen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \equiv 0$, konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
5. Februar 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	10	15	25	10		100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Kettenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-\sqrt{x}}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ableitungen der Exponentialfunktion und der Wurzelfunktion ohne Beweis benutzen.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \arctan\big(1 + \tan x\big).$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ableitungen vom Tangens und vom Arcustangens ohne Beweis benutzen. Sie brauchen nicht versuchen, das Ergebnis zu vereinfachen.

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck (für eine komplexe Zahl) soweit wie möglich:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \, 3^{k-n}.$$

(b) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{i\pi/2} - 2}.$$

(c) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $B_{\frac{1}{2}}(i)$ in der komplexen Ebene.

(d) (5 Punkte) Definieren Sie (ohne Beweis) eine Abbildung $f : \mathbb{C} \longrightarrow M$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist. Geben Sie dazu eine geeignete nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{C}$ an und eine geeignete Abbildungsvorschrift für f.

Name: ____________________

Aufgabe B 3. [10 Punkte]

Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Wie lautet die Definition dafür, dass z ein Häufungspunkt von A ist?

Name: ____________________

Aufgabe B 4. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\,(n+1)}{2\,(2n+1)}.$$

Name: ____________________

Aufgabe B 5. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $\xi \in M$.

(b) Zeigen Sie (mit einer Methode Ihrer Wahl), dass die Funktion

$$g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} |x| \sin(\cot x) & \text{für } x \notin \{0, 1/42\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 10^{42} & \text{für } x = 1/42, \end{cases}$$

nicht stetig (8 Punkte), jedoch im Punkt $\xi = 0$ stetig ist (7 Punkte). Dabei dürfen Sie natürlich auf aus der Vorlesung bekannte Resultate über sin, cot und stetige Funktionen verweisen, ohne diese zu beweisen.

Name: ______________________________

Aufgabe B 6. [10 Punkte]

Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist. Bei wahren Aussagen schreiben Sie (ohne Beweis) nur das Wort **wahr**, bei falschen Aussagen geben Sie (ohne Beweis) ein Gegenbeispiel an. Dabei gibt bei jeder Teilaufgabe die korrekte Antwort 2 Punkte (nur 1 Punkt bei fehlendem oder falschem Gegenbeispiel), keine Antwort gibt 0 Punkte, eine inkorrekte Antwort gibt -2 Punkte.

(a) Jede Folge in $\mathbb{R}$, die genau zwei Häufungspunkte hat, ist divergent.

(b) Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist kompakt.

(c) Jede nichtleere nach unten durch 0 beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.

(d) Jede stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist streng monoton steigend.

(e) Ist $\emptyset \neq A$ eine echte Teilmenge von B und $f : B \longrightarrow A$, so ist f nicht bijektiv.

Name: ______________________________

Name: ____________________

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
5. Februar 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ __________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ __________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	10	15	25	10		100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Formulieren Sie die Kettenregel für Ableitungen (natürlich inklusive ihrer Voraussetzungen).

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-\sqrt{x}}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ableitungen der Exponentialfunktion und der Wurzelfunktion ohne Beweis benutzen.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \arctan\big(1 + \tan x\big).$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ableitungen vom Tangens und vom Arcustangens ohne Beweis benutzen. Sie brauchen nicht versuchen, das Ergebnis zu vereinfachen.

Zu (a): Sei $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g :]c,d[\longrightarrow \mathbb{K}$, $f(]a,b[) \subseteq]c,d[$. Ist f differenzierbar in $\xi \in]a,b[$ und g is differenzierbar in $f(\xi) \in]c,d[$, so ist $g \circ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ, und es gilt

$$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi) g'(f(\xi)). \tag{1}$$

Zu (b): Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(x \mapsto \sqrt{x})' = (x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$ für $x > 0$ und $\exp' x = \exp x$. Also gilt nach der Kettenregel

$$\underset{x \in \mathbb{R}^+}{\forall} \quad f'(x) = -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \tag{2}$$

Zu (c): Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\ln' x = 1/x$ und $\arctan' x = 1/(1 + x^2)$. Also gilt nach der Kettenregel

$$\underset{x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}{\forall} \quad f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + (1 + \tan x)^2}. \tag{3}$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck (für eine komplexe Zahl) soweit wie möglich:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \, 3^{k-n}.$$

(b) (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{i\pi/2} - 2}.$$

(c) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $B_{\frac{1}{2}}(i)$ in der komplexen Ebene.

(d) (5 Punkte) Definieren Sie (ohne Beweis) eine Abbildung $f : \mathbb{C} \longrightarrow M$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist. Geben Sie dazu eine geeignete nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{C}$ an und eine geeignete Abbildungsvorschrift für f.

Zu (a): Unter Benutzung des binomischen Satzes erhält man

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \, 3^{k-n} = \left(i + \frac{1}{3}\right)^n.$$

Zu (b): Es ist

$$\frac{1}{e^{i\pi/2} - 2} = \frac{1}{i-2} = \frac{i+2}{(i-2)(i+2)} = \frac{i+2}{-1-4} = -\frac{2}{5} + i\left(-\frac{1}{5}\right).$$

Zu (c):

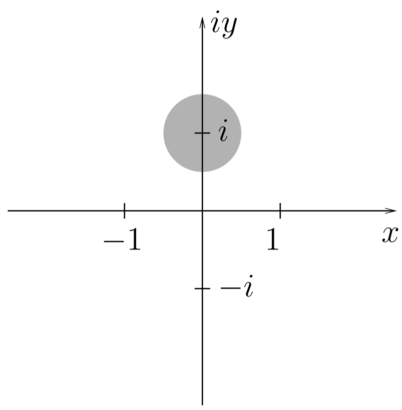


Abbildung 1: Skizze von $B_{\frac{1}{2}}(i)$ (der Rand des Kreises mit Radius $1/2$ um i gehört nicht zu der Menge).

Zu (d): Die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \{1\}$, $f(z) := 1$, ist surjektiv, aber nicht injektiv (hier ist also $M := \{1\}$ gewählt).

Name: ____

Aufgabe B 3. [10 Punkte]

Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Wie lautet die Definition dafür, dass z ein Häufungspunkt von A ist?

$z \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{C}$, wenn gilt, dass

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \#\big(B_\epsilon(z) \cap A\big) = \infty.$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\,(n+1)}{2\,(2n+1)}.$$

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\,(n+1)}{2\,(2n+1)}$, rechnet man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \frac{n\,(n+1)}{2\,(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{\big(2(n+1)-1\big)\big(2(n+1)+1\big)} \\
&= \frac{n(n+1)\big(2(n+1)+1\big) + 2(n+1)^2}{2\,(2n+1)\big(2(n+1)+1\big)} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+3)+2(n+1)\big)}{2\,(2n+1)\big(2(n+1)+1\big)} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2\,(2n+1)\big(2(n+1)+1\big)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{2\,(2n+1)\big(2(n+1)+1\big)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2\,\big(2(n+1)+1\big)},
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 5. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $\xi \in M$.

(b) Zeigen Sie (mit einer Methode Ihrer Wahl), dass die Funktion

$$g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} |x| \sin(\cot x) & \text{für } x \notin \{0, 1/42\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 10^{42} & \text{für } x = 1/42, \end{cases}$$

nicht stetig (8 Punkte), jedoch im Punkt $\xi = 0$ stetig ist (7 Punkte). Dabei dürfen Sie natürlich auf aus der Vorlesung bekannte Resultate über sin, cot und stetige Funktionen verweisen, ohne diese zu beweisen.

Zu (a): Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in M$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi). \tag{4}$$

Zu (b): Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad -1 \leq \sin x \leq 1. \tag{5}$$

Um zu zeigen, dass g nicht stetig ist, genügt es zu zeigen, dass g im Punkt $\xi = 1/42$ nicht stetig ist. Um zu zeigen, dass g in $\xi = 1/42$ nicht stetig ist, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-1,1] \setminus \{1/42\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/42$ (zum Beispiel bekommt man durch $x_n := \frac{1}{42} - \frac{1}{n}$ so eine Folge).

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktionen sin, cot, und $x \mapsto |x|$ (auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen) stetig sind sowie die Verkettung und das Produkt stetiger Funktionen stetig ist. Also ist die Funktion $x \mapsto |x| \sin(\cot x)$ im Punkt $\xi = 1/42$ stetig und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(|x_n| \sin(\cot x_n)\Big) = (1/42) \cdot \sin(\cot(1/42)) \overset{(5)}{\leq} (1/42) < 10^{42} = g(1/42), \tag{6}$$

was nach dem Folgenkriterium zeigt, dass g in $\xi = 1/42$ nicht stetig ist.

Um zu zeigen, dass g in $\xi = 0$ stetig ist, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, wobei wir annehmen dürfen, dass alle $x_k \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k) = \lim_{k\to\infty} \Big(|x_k| \sin(\cot x_k)\Big) = 0, \tag{7}$$

da die Folge $(\sin(\cot x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ wegen (5) beschränkt ist (aus der Vorlesung wissen wir, dass das Produkt aus einer Folge, die gegen 0 konvergiert und einer beschränkten Folge, auch gegen Null konvergiert) – alternativ folgt (7) auch aus $0 \leq |x_k| \cdot |\sin(\cot x_k)| \leq |x_k|$ und dem Einschachtelungssatz.

Nach (7) und dem Folgenkriterium ist g stetig in 0.

Name: ______________________________

Aufgabe B 6. [10 Punkte]

Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist. Bei wahren Aussagen schreiben Sie (ohne Beweis) nur das Wort **wahr**, bei falschen Aussagen geben Sie (ohne Beweis) ein Gegenbeispiel an. Dabei gibt bei jeder Teilaufgabe die korrekte Antwort 2 Punkte (nur 1 Punkt bei fehlendem oder falschem Gegenbeispiel), keine Antwort gibt 0 Punkte, eine inkorrekte Antwort gibt -2 Punkte.

(a) Jede Folge in $\mathbb{R}$, die genau zwei Häufungspunkte hat, ist divergent.

(b) Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist kompakt.

(c) Jede nichtleere nach unten durch 0 beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.

(d) Jede stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist streng monoton steigend.

(e) Ist $\emptyset \neq A$ eine echte Teilmenge von B und $f : B \longrightarrow A$, so ist f nicht bijektiv.

Im Folgenden werden alle Antworten kurz bergründet, was in der Klausur für die wahren Aussagen nicht verlangt war.

(a) wahr, da eine konvergente Folge nur genau einen Häufungspunkt (nämlich den Grenzwert) hat.

(b) falsch, da z. B. die beschränkte Teilmenge $]0,1]$ von $\mathbb{C}$ nicht abgeschlossen und somit nicht kompakt ist.

(c) wahr, da sogar jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum hat.

(d) falsch, da z. B. die konstante Funktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f \equiv 0$, stetig, aber nicht streng monoton steigend ist.

(e) falsch, da z. B. die Funktion

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}, \quad f(n) := 2n,$$

bijektiv ist (hier ist $B := \mathbb{N}$, $A := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}$ und $\emptyset \neq A \subsetneq B$).

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
4. April 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	20	15	20	20	10		100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Formulieren Sie die Formel der partiellen Integration für bestimmte Integrale reellwertiger Funktionen inklusive ihrer Voraussetzungen.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_1^e (2x^3 - x^{-1})\,\mathrm{d}x\,.$$

Name: ________________________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die folgende komplexe Zahl, und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\binom{2+i}{2}.$$

(b) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} :\ 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} :\ -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ in der komplexen Ebene.

(c) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) eine Teilmenge M der komplexen Zahlen an, die alle drei folgende Eigenschaften gleichzeitig besitzt: (i) M ist kompakt, (ii) $\#M = \infty$, (iii) M ist keine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(d) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) zwei Polynome $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $\{\deg(P), \deg(Q)\} \subseteq \{2, 3\}$ und so, dass P bijektiv und Q weder injektiv noch surjektiv ist.

Name: ____________________

Aufgabe A 3. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $g :]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1-\cos x}{x \cos x + \sin x}$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} g(x)$$

mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen).

(b) (10 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln \frac{1}{x^2}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Ableitung von ln sowie die der Funktion $x \mapsto 1/x^2$ ohne Beweis benutzen.

Name: ____________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Es sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wie lautet die ϵ-N-Definition dafür, dass $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = z$ mit $z \in \mathbb{C}$?

(b) (7 Punkte) Zeigen Sie (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung), dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

(c) (7 Punkte) Berechnen Sie folgenden Grenzwert (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(3n + \frac{2}{n}\right)^2}{2 + n^2}.$$

Name: ____________________

Aufgabe A 6. [10 Punkte]

Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (natürlich inklusive seiner Voraussetzungen).

Name: ____________________

Name: ______________________________

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
4. April 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	20	15	20	20	10		100

Name: ____

Aufgabe A 1. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Formulieren Sie die Formel der partiellen Integration für bestimmte Integrale reellwertiger Funktionen inklusive ihrer Voraussetzungen.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_1^e (2x^3 - x^{-1})\,\mathrm{d}x\,.$$

Zu (a): Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$. Sind die Funktionen $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beide auf I stetig differenzierbar (also $f, g \in C^1(I)$), so gilt die folgende Formel der partiellen Integration:

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g. \tag{1}$$

Zu (b): Unter Benutzung der obigen Formel der partiellen Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t &\overset{(1)}{=} \left[\frac{t}{2}\,e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\,e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,e^2 - \left[\frac{1}{4}\,e^{2t}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\,e^2 - \frac{1}{4}\,e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,(e^2+1).\end{aligned} \tag{2}$$

Zu (c): Man rechnet

$$\int_1^e (2x^3 - x^{-1})\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,x^4 - \ln x\right]_1^e = \frac{1}{2}\,e^4 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,(e^4 - 3). \tag{3}$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die folgende komplexe Zahl, und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\binom{2+i}{2}.$$

(b) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ in der komplexen Ebene.

(c) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) eine Teilmenge M der komplexen Zahlen an, die alle drei folgende Eigenschaften gleichzeitig besitzt: (i) M ist kompakt, (ii) $\#M = \infty$, (iii) M ist keine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(d) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) zwei Polynome $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $\{\deg(P), \deg(Q)\} \subseteq \{2, 3\}$ und so, dass P bijektiv und Q weder injektiv noch surjektiv ist.

Zu (a): Es ist

$$\binom{2+i}{2} = \frac{(2+i)(1+i)}{2 \cdot 1} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i. \tag{4}$$

Zu (b):

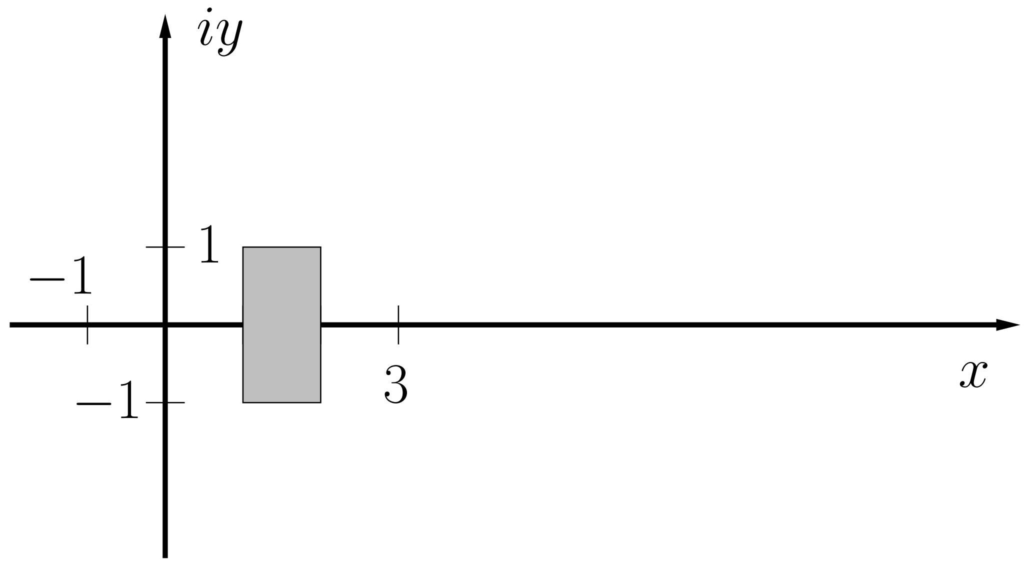


Abbildung 1: Skizze der Menge $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$.

Zu (c): Es gibt ganz viele verschiedene einfache Lösungen. Eine ist

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}. \tag{5}$$

Zu (d): Auch hier gibt es ganz viele verschiedene Lösungen, aber naheliegend sind vermutlich das bijektive Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $P(x) := x^3$, vom Grad 3 und das weder injektive noch surjektive Polynom $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) := x^2$, vom Grad 2.

Name: ____________________

Aufgabe A 3. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}.$$

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{4k}{3^k} = \frac{4}{3} = 3 - \frac{2+3}{3} = \frac{9}{3} - \frac{5}{3},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}$, rechnet man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} + \frac{4(n+1)}{3^{n+1}} \overset{\text{Ind. vor.}}{=} 3 - \frac{2n+3}{3^n} + \frac{4(n+1)}{3^{n+1}} \\
&= 3 - \frac{6n+9-4n-4}{3^{n+1}} = 3 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+1}},
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $g :]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1-\cos x}{x \cos x + \sin x}$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} g(x)$$

mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen).

(b) (10 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln \frac{1}{x^2}.$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Ableitung von ln sowie die der Funktion $x \mapsto 1/x^2$ ohne Beweis benutzen.

Zu (a): Man rechnet

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\cos x + \sin x} &\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x - x\sin x + \cos x} \\ &= \frac{\sin 0}{2\cos 0 - 0} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Zu (b): Die Ableitung kann man zum Beispiel unter Benutzung der Kettenregel wie folgt berechnen:

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2\,\frac{1}{x^3}\,\frac{1}{\frac{1}{x^2}} = -2\,\frac{x^2}{x^3} = -\frac{2}{x}. \tag{7}$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Es sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wie lautet die ϵ-N-Definition dafür, dass $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = z$ mit $z \in \mathbb{C}$?

(b) (7 Punkte) Zeigen Sie (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung), dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

(c) (7 Punkte) Berechnen Sie folgenden Grenzwert (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(3n + \frac{2}{n}\right)^2}{2 + n^2}.$$

Zu (a): Es gilt $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = z$ per Definition genau dann, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad |\alpha_n - z| < \epsilon. \tag{8}$$

Zu (b): Zunächst gilt

$$\underset{n\geq 4}{\forall} \quad 0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdots 2}^{n\text{-mal}}}{1\cdot 2\cdots n} < 4\,\frac{1}{n}. \tag{9}$$

Da $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} 4\,\frac{1}{n} = 0$ gilt, folgt nun $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ aus dem Einschachtelungssatz.

Zu (c): Unter Benutzung der aus der Vorlesung bekannten Grenzwertsätze rechnet man

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\left(3n + \frac{2}{n}\right)^2}{2 + n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2 + 12 + \frac{4}{n^2}}{2 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9 + \frac{12}{n^2} + \frac{4}{n^4}}{\frac{2}{n^2} + 1} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 9 + \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^4}}{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 1} = \frac{9+0+0}{0+1} = 9.\end{aligned} \tag{10}$$

Name: ____________________

Aufgabe A 6. [10 Punkte]

Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (natürlich inklusive seiner Voraussetzungen).

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gilt:

$$\underset{\xi]a,b[}{\exists} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{11}$$

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
4. April 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	20	15	10	20	20		100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Name: ____________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq -1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ in der komplexen Ebene.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die folgende komplexe Zahl, und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\binom{-i}{2}.$$

(c) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) eine Teilmenge M der komplexen Zahlen an, die alle drei folgende Eigenschaften gleichzeitig besitzt: (i) M ist unbeschränkt, (ii) M ist nicht abgeschlossen, (iii) M ist keine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(d) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) zwei Polynome $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $\{\deg(P), \deg(Q)\} \subseteq \{0, 1\}$ und so, dass P bijektiv und Q weder injektiv noch surjektiv ist.

Name: ____________________

Aufgabe B 3. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Formulieren Sie die Formel der partiellen Integration für bestimmte Integrale reellwertiger Funktionen inklusive ihrer Voraussetzungen.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_0^\pi 2t \sin(-t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Name: ____________________

Aufgabe B 4. [10 Punkte]

Formulieren Sie den Zwischenwertsatz (natürlich inklusive seiner Voraussetzungen).

Name: ____________________

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Es sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wie lautet die ϵ-N-Definition dafür, dass $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = a$ mit $a \in \mathbb{C}$?

(b) (7 Punkte) Zeigen Sie (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung), dass gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(2n)!} = 0.$$

(c) (7 Punkte) Berechnen Sie folgenden Grenzwert (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{2}{n^2}}{(3n+2)^2}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 6. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \ln x$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen).

(b) (10 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin(\sin(x^2)).$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Ableitung der Sinusfunktion sowie die der Funktion $x \mapsto x^2$ ohne Beweis benutzen. Sie brauchen nicht versuchen, das Ergebnis zu vereinfachen.

Name: ______________________________

Name: ______________________________

LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Andreas Groh, Verena von Conta

Wintersemester 2012/2013
4. April 2013

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **6 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen oder Wurzeln ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	20	15	10	20	20		100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, rechnet man

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{\text{Ind. vor.}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq -1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ in der komplexen Ebene.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die folgende komplexe Zahl, und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\binom{-i}{2}.$$

(c) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) eine Teilmenge M der komplexen Zahlen an, die alle drei folgende Eigenschaften gleichzeitig besitzt: (i) M ist unbeschränkt, (ii) M ist nicht abgeschlossen, (iii) M ist keine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(d) (5 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) zwei Polynome $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $\{\deg(P), \deg(Q)\} \subseteq \{0, 1\}$ und so, dass P bijektiv und Q weder injektiv noch surjektiv ist.

Zu (a):

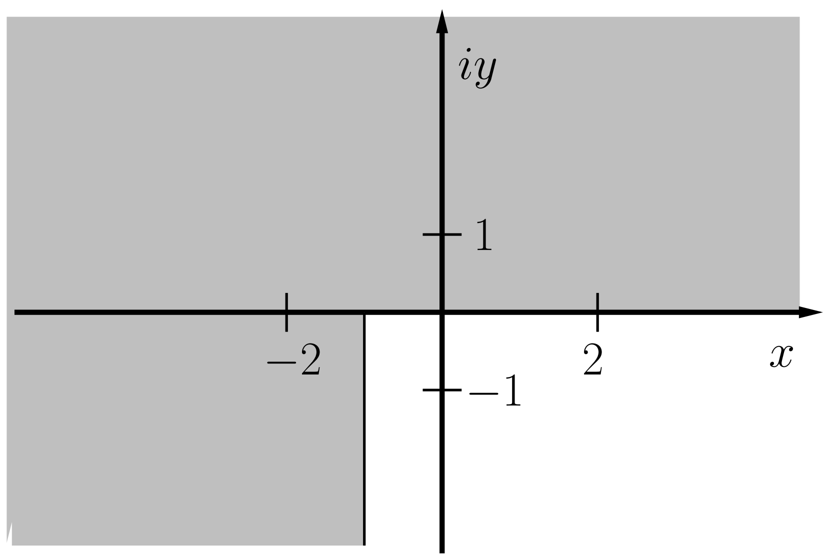


Abbildung 1: Skizze der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq -1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Zu (b): Es ist

$$\binom{-i}{2} = \frac{(-i)(-i-1)}{2 \cdot 1} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i. \tag{1}$$

Zu (c): Es gibt ganz viele verschiedene einfache Lösungen. Eine ist

$$M := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zu (d): Auch hier gibt es ganz viele verschiedene Lösungen, aber naheliegend sind vermutlich das bijektive Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $P(x) := x$, vom Grad 1 und das weder injektive noch surjektive Polynom $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) := 1$, vom Grad 0.

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Formulieren Sie die Formel der partiellen Integration für bestimmte Integrale reellwertiger Funktionen inklusive ihrer Voraussetzungen.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_0^\pi 2t \sin(-t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie folgendes Integral (vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich):

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zu (a): Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$. Sind die Funktionen $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beide auf I stetig differenzierbar (also $f, g \in C^1(I)$), so gilt die folgende Formel der partiellen Integration:

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g. \tag{3}$$

Zu (b): Unter Benutzung der obigen Formel der partiellen Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 2t \sin(-t)\,\mathrm{d}t &\overset{(3)}{=} \big[2t\, \cos(-t)\big]_0^\pi - \int_0^\pi 2\cos(-t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2\pi - \big[-2\, \sin(-t)\big]_0^\pi = -2\pi.\end{aligned} \tag{4}$$

Zu (c): Man rechnet

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \big[-(1+x)^{-1}\big]_0^1 = \left[\frac{1}{1+x}\right]_1^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [10 Punkte]

Formulieren Sie den Zwischenwertsatz (natürlich inklusive seiner Voraussetzungen).

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ist die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt sie jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert an, das heißt,

$$\Big[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}\Big] \subseteq f\big([a, b]\big). \tag{6}$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

(a) (6 Punkte) Es sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wie lautet die ϵ-N-Definition dafür, dass $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = a$ mit $a \in \mathbb{C}$?

(b) (7 Punkte) Zeigen Sie (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung), dass gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(2n)!} = 0.$$

(c) (7 Punkte) Berechnen Sie folgenden Grenzwert (z. B. durch Benutzung von Ergebnissen der Vorlesung):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{2}{n^2}}{(3n+2)^2}.$$

Zu (a): Es gilt $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = a$ per Definition genau dann, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\quad\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\quad\underset{n>N}{\forall}\quad |\zeta_n - a| < \epsilon. \tag{7}$$

Zu (b): Zunächst gilt

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\quad 0 < \frac{n!}{(2n)!} = \frac{1\cdots n}{1\cdots n\cdots 2n} = \frac{1}{(n+1)\cdots 2n} \leq \frac{1}{2n}. \tag{8}$$

Da $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$ gilt, folgt nun $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(2n)!} = 0$ aus dem Einschachtelungssatz.

Zu (c): Unter Benutzung der aus der Vorlesung bekannten Grenzwertsätze rechnet man

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{2}{n^2}}{(3n+2)^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{2}{n^2}}{9n^2+12n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^4}}{9+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^4}}{\lim_{n\to\infty}9+\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}} = \frac{1+0}{9+0+0} = \frac{1}{9}.\end{aligned} \tag{9}$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 6. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \ln x$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital (Sie müssen in Ihrer Rechnung erkennen lassen, dass Sie die Regel korrekt anwenden, aber Sie brauchen hier die Anwendbarkeit nicht überprüfen).

(b) (10 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin(\sin(x^2)).$$

Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Ableitung der Sinusfunktion sowie die der Funktion $x \mapsto x^2$ ohne Beweis benutzen. Sie brauchen nicht versuchen, das Ergebnis zu vereinfachen.

Zu (a): Man rechnet

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \big(x \ln x\big) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to 0} (-x) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Zu (b): Die Ableitung ergibt sich unter Benutzung der Kettenregel zu

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos\Big(\sin(x^2)\Big) \cos(x^2) \cdot 2x. \tag{11}$$

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Dr. Jan Swoboda

Wintersemester 2014/2015
27. Januar 2015

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine gebundene abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20		100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha,$$

an.

(b) (15 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x^{-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad g^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, x^{-n-1}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen.

Name: ______________________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

(a) (5 Punkte) $\{2 - 3i\}$,

(b) (5 Punkte) $\{t + i : t \in [1, 2]\}$,

(c) (5 Punkte) $\{e^{i\phi} : \phi \in \mathbb{R}\}$,

(d) (5 Punkte) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Name: ______________________________

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie soweit wie möglich (aus der Vorlesung bekannte Formeln und Grenzwerte dürfen Sie ohne Beweis benutzen):

(a) (5 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}$$

(b) (5 Punkte)

$$\binom{\frac{3}{2}}{3}$$

(c) (10 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2}$$

Name: ____

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

Beachten Sie, dass Sie bei Funktionsdefinitionen immer Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift der Funktion angeben.

(a) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, injektiv ist und nicht monoton.

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, surjektiv ist und monoton steigend.

(c) (10 Punkte) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n$$

an, und beweisen Sie Ihr Ergebnis (am besten unter Benutzung einer aus der Vorlesung bekannten Formel für den Konvergenzradius).

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Zeigen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktion f:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion g:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Name: ______________________________

Name: ______________________________

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Dr. Jan Swoboda

Wintersemester 2014/2015
27. Januar 2015

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine gebundene abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier.

Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20		100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha,$$

an.

(b) (15 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x^{-1}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad g^{(n)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, x^{-n-1}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen.

Lösung:

(a) Die Ableitung ist

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) := \alpha \, x^{\alpha-1}.$$

(b) Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$g' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g'(x) = (-1)x^{-2} = (-1)^1 \cdot 1! \cdot x^{-1-1},$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $g^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, x^{-n-1}$, erhält man

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big(g^{(n)}\big)'(x) &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} \big((-1)^n \, n! \, x^{-n-1}\big)' = -(-1)^n \, n!(n+1) \, x^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1} \, (n+1)! \, x^{-(n+1)-1}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

54
57
5 min

Name: ____

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

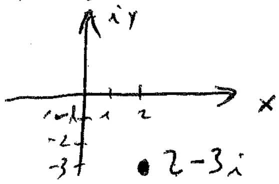
(a) (5 Punkte) $\{2 - 3i\}$,

(b) (5 Punkte) $\{t + i : t \in [1, 2]\}$,

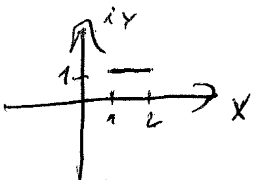
(c) (5 Punkte) $\{e^{i\phi} : \phi \in \mathbb{R}\}$,

(d) (5 Punkte) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

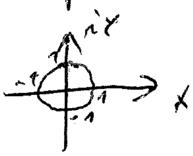
(a)



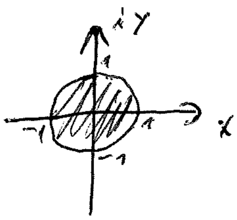
(b)



(c)



(d)



Name: ____

Aufgabe A 3. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie soweit wie möglich (aus der Vorlesung bekannte Formeln und Grenzwerte dürfen Sie ohne Beweis benutzen):

(a) (5 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}$$

(b) (5 Punkte)

$$\binom{\frac{3}{2}}{3}$$

(c) (10 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2}$$

Lösung:

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}.$$

(b)

$$\binom{\frac{3}{2}}{3} = \prod_{j=1}^{3} \frac{\frac{3}{2}+1-j}{j} = \frac{3/2}{1} \cdot \frac{1/2}{2} \cdot \frac{(-1/2)}{3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{16}.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n + 3n^2 - 15}{\sin n + n + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-\frac{1}{2})^n}{n^2} + 3 - \frac{15}{n^2}}{\frac{\sin n}{n^2} + \frac{1}{n} + 2} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{15}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 2}$$

$$= \frac{0 \cdot 0 + 3 - 0}{0 + 0 + 2} = \frac{3}{2}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

Beachten Sie, dass Sie bei Funktionsdefinitionen immer Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift der Funktion angeben.

(a) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, injektiv ist und nicht monoton.

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, surjektiv ist und monoton steigend.

(c) (10 Punkte) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n$$

an, und beweisen Sie Ihr Ergebnis (am besten unter Benutzung einer aus der Vorlesung bekannten Formel für den Konvergenzradius).

Lösung:

(a) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

ist injektiv, setzt f fort und ist nicht monoton.

(b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0, \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ x-1 & \text{für } x \geq 1, \end{cases} \tag{3}$$

ist surjektiv, setzt f fort und ist monoton steigend.

(c) Mit $a_n = n$ ist der Konvergenzradius nach der Formel aus der Vorlesung

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1. \tag{4}$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Zeigen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktion f:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x \ \arctan \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion g:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Lösung:

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto \arctan x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Da auch Produkte und Verkettungen stetiger Funktionen stetig sind, sowie Quotienten sofern die Funktion im Nenner nicht Null wird, ist f in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Bleibt zu zeigen, dass f in $x = 0$ stetig ist. Sei dazu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \left(x_k \arctan \frac{1}{x_k} \right) = 0, \tag{5}$$

da $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ und die Folge $\left(\arctan \frac{1}{x_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Nach dem Folgenkriterium zeigt (5) die Stetigkeit von f in $x = 0$. Da f also in jedem $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, ist f stetig.

(b) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = \frac{1}{k}$ konvergiert gegen 0, jedoch

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k) = \lim_{k\to\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) = 1 \neq 0 = f(0), \tag{6}$$

das heißt, nach dem Folgenkriterium ist g nicht stetig in 0, also ist g nicht stetig.

Dr. Peter Philip
Dr. Jan Swoboda

Wintersemester 2014/2015
27. Januar 2015

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine gebundene abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier. **Lösungen:** Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20		100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{cx},$$

an.

(b) (15 Punkte) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := e^{-kx}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad g^{(n)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \, k^n \, e^{-kx}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen.

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a) und (c) soweit wie möglich und schreiben Sie die Zahl in (b) in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (aus der Vorlesung bekannte Formeln und Grenzwerte dürfen Sie ohne Beweis benutzen):

(a) (5 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$$

(b) (5 Punkte)

$$e^{i\pi} + \frac{3}{1+i}$$

(c) (10 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \sin\frac{1}{n} + \frac{3n}{2+2n} \right)$$

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [20 Punkte]

Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

(a) (5 Punkte) $\{-1+i\}$,

(b) (5 Punkte) $\{1+ti : t \in [0,1]\}$,

(c) (5 Punkte) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1\}$,

(d) (5 Punkte) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

Name: ______________________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Zeigen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktion f:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^3\, e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion g:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ -2 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Name: ____________________

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

Beachten Sie, dass Sie bei Funktionsdefinitionen immer Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift der Funktion angeben.

(a) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, surjektiv ist sowie monoton, aber nicht streng monoton.

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, bijektiv ist sowie stetig und nicht differenzierbar.

(c) (10 Punkte) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

an, und beweisen Sie Ihr Ergebnis (am besten unter Benutzung einer aus der Vorlesung bekannten Formel für den Konvergenzradius).

Name: ______________________________

Name: ______________________________

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Dr. Jan Swoboda

Wintersemester 2014/2015
27. Januar 2015

Analysis I für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: __________ Vorname: __________

Matrikelnr.: __________ Fachsemester: __________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): __________

❑ Diplom ❑ Anderes: __________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ______

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Spickzettel (maximal Größe DIN A4), eine gebundene abiturzugelassene Formelsammlung, in die keine Zusätze hineingeschrieben wurden. Schreibstift, Radiergummi, kein eigenes Papier.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	20	20	20	20		100

Name: ______________________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie (ohne Beweis) die (aus der Vorlesung bekannte) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{cx},$$

an.

(b) (15 Punkte) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := e^{-kx}.$$

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad g^{(n)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n\, k^n\, e^{-kx}, \tag{1}$$

wobei $g^{(n)}$ die Ableitung n. Ordnung von g bezeichnet, und Sie (a) benutzen dürfen.

Lösung:

(a) Die Ableitung ist

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) := c\, e^{cx}.$$

(b) Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage

$$g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g'(x) = -k\, e^{-kx} = (-1)\, k\, e^{-kx}$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $g^{(n)}(x) = (-1)^n\, k^n\, e^{-kx}$, erhält man

$$g^{(n+1)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big(g^{(n)}\big)'(x) \overset{\text{Ind. vor.}}{=} \big((-1)^n\, k^n\, e^{-kx}\big)' = (-1)^{n+1}\, k^{n+1}\, e^{-kx},$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie in (a) und (c) soweit wie möglich und schreiben Sie die Zahl in (b) in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (aus der Vorlesung bekannte Formeln und Grenzwerte dürfen Sie ohne Beweis benutzen):

(a) (5 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$$

(b) (5 Punkte)

$$e^{i\pi} + \frac{3}{1+i}$$

(c) (10 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} + \frac{3n}{2+2n} \right)$$

Lösung:

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

(b)

$$e^{i\pi} + \frac{3}{1+i} = \cos\pi + i\,\sin\pi + \frac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -1 + \frac{3-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,i.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} + \frac{3n}{2+2n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \frac{3}{\frac{2}{n}+2} \right) = 1 + \frac{3}{0+2} = \frac{5}{2}.$$

12
15

3 min

Name: ______

Aufgabe B 3. [~~15~~ 20 Punkte] done

Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

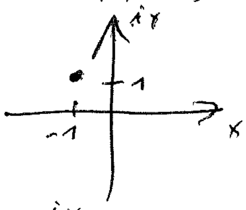
(a) (5 Punkte) $\{-1+i\}$,

(b) (5 Punkte) $\{1+ti : t \in [0,1]\}$,

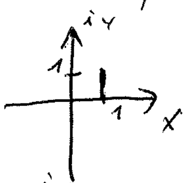
(c) (5 Punkte) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1\}$,

(d) (5 Punkte) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

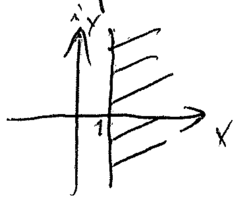
(a)



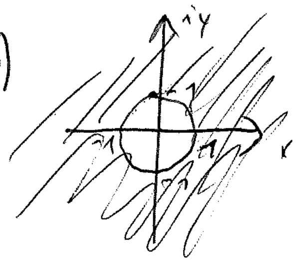
(b)



(c)



(d)



Name: ____________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

(a) (10 Punkte) Zeigen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktion f:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^3\, e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion g:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ -2 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Lösung:

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto e^x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Da auch Produkte und Verkettungen stetiger Funktionen stetig sind, sowie Quotienten sofern die Funktion im Nenner nicht Null wird, ist f in jedem $x \in \mathbb{R}^+$ stetig. Bleibt zu zeigen, dass f in $x = 0$ stetig ist. Sei dazu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \left(x_k^3 e^{-\frac{1}{x_k}} \right) = 0, \tag{2}$$

da $\lim_{k\to\infty} x_k^3 = 0$ und die Folge $\left(e^{-\frac{1}{x_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Nach dem Folgenkriterium zeigt (2) die Stetigkeit von f in $x = 0$. Da f also in jedem $x \in \mathbb{R}_0^+$ stetig ist, ist f stetig.

(b) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = \frac{1}{k}$ konvergiert gegen 0, jedoch

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k) = \lim_{k\to\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \neq -2 = f(0), \tag{3}$$

das heißt, nach dem Folgenkriterium ist g nicht stetig in 0, also ist g nicht stetig.

Name: ___

Aufgabe B 5. [20 Punkte]

Beachten Sie, dass Sie bei Funktionsdefinitionen immer Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift der Funktion angeben.

(a) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, surjektiv ist sowie monoton, aber nicht streng monoton.

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Definieren Sie (ohne Beweis) eine Funktion auf $\mathbb{R}$, die f fortsetzt, bijektiv ist sowie stetig und nicht differenzierbar.

(c) (10 Punkte) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

an, und beweisen Sie Ihr Ergebnis (am besten unter Benutzung einer aus der Vorlesung bekannten Formel für den Konvergenzradius).

Lösung:

(a) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq -1, \\ 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ x & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

ist surjektiv, setzt f fort, ist monoton steigend, aber nicht streng monoton steigend.

(b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < 0, \\ e^x & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

ist bijektiv, setzt f fort, stetig und nicht differenzierbar.

Mit $a_n = \frac{1}{n+1}$ ist der Konvergenzradius nach der Formel aus der Vorlesung

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1. \tag{6}$$

Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Version vom:
11. 02. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Klausur

Aufgabe 1.

1. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \operatorname{Re}(\ln z) \in (0,1) \text{ und } |\operatorname{Im} z| > |\operatorname{Re} z|\}$.
2. Finden Sie $\sup\{|z| : z \in M\}$ und $\inf\{|\operatorname{Im} z| : z \in M\}$.

Lösung: Da $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln(|z|)$ die Werte 0 und 1 für $|z| = 0$ beziehungsweise $|z| = e$ annimmt, erhält man für den Bereich $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ die Darstellung im linken Teil von Bild 1; im rechten Teil von Bild 1 wird die

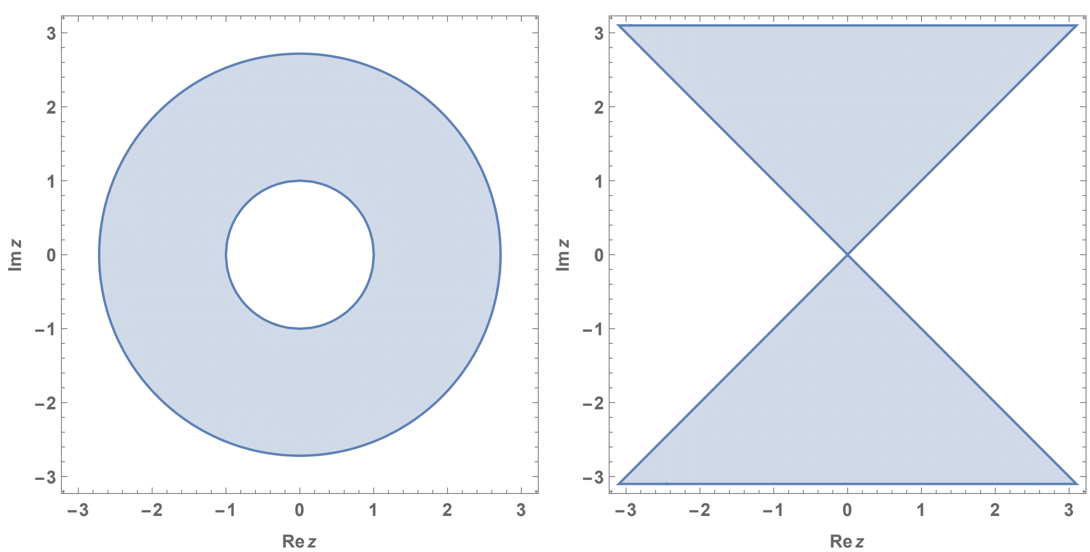


Bild 1. Die Mengen $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ (links) und $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid |\operatorname{Im} z| > |\operatorname{Re} z|\}$ (rechts).

Menge $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \,|\, |\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|\}$ gezeigt. Zusammen (als Schnittmenge) ergibt sich dann die Darstellung von M wie in Bild 2 gezeichnet, wobei (wie in Bild 1) die Ränder der markierten Gebiete nicht zu den jeweils dargestellten Mengen gehören.

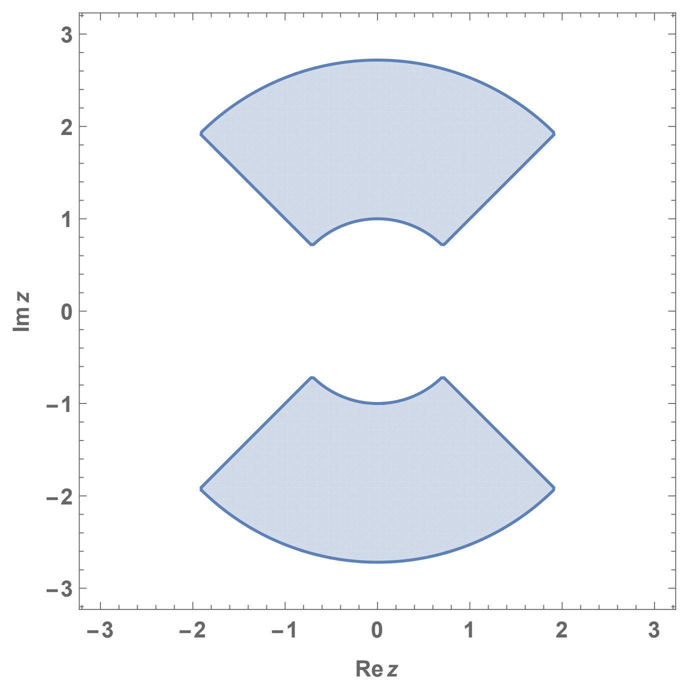


Bild 2. Die Menge $M = \{z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} : \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)$ und $|\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|\}$.

Da $e \geq |z|$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ gilt und damit e auch eine obere Schranke an $|z|$ aus der Schnittmenge $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)\} \cap \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \,|\, |\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|\}$ ist, während andererseits für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \mathrm{i}(e - 1/n)$ gilt, dass $a_n \in M$ liegt und $\lim_{n\to\infty} |a_n| = e$ ist, folgt $\sup\{|z| \,|\, z \in M\} = e$.
Um andererseits das Infimum von $\{|\mathrm{Im}\, z| \,|\, z \in M\}$ zu bestimmen, benutzen wir, dass $1 < |z|$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ und $|\mathrm{Im}\, z| = |\mathrm{Im}\,(z \exp(\mathrm{i}\phi))| = |z||\sin\phi| > |\sin\phi| > \sin(\pi/4)$ wegen der Bedingung $|\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|$ gilt (wobei die letzte Bedingung äquivalent zu $|\sin\phi| > |\cos\phi|$ ist). Folglich ist $\sin(\pi/4)$ eine untere Schranke für die Menge $\{|\mathrm{Im}\, z| \,|\, z \in M\}$ und auch das Infimum dieser Menge, da für beispielsweise die durch $a_n := (1 + 1/n)\exp(\mathrm{i}((\pi + 1/n)/4)$ definierte Folge gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ und

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Hierbei errechnet sich der angegebene Wert des Sinus durch Quadrieren von $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ und Benutzung von $\cos^2(\pi/4) + \sin^2(\pi/4) = 1$.

Aufgabe 2. (*12 Punkte*)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}, & x > 0; \\ 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

gegeben. Wievielmal ist f differenzierbar?

Lösung: Für $x > 0$ und $x \le 0$ sind die entsprechenden abschnittsweise definierten Teile von f als rationale Kombination von differenzierbaren Funk-

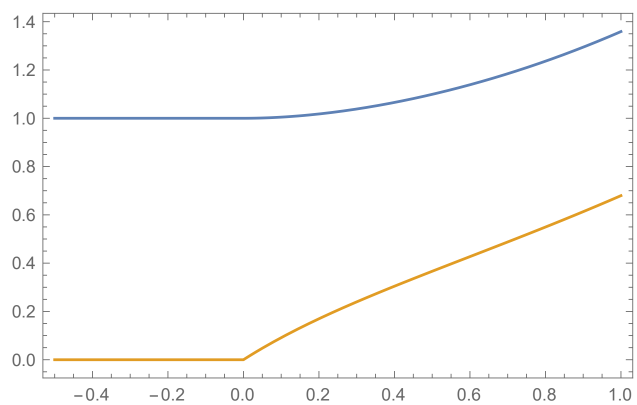


Bild 3. Die Funktion f (blaue Kurve) und die erste Ableitung f' (braune Kurve).

tionen differenzierbar. Für $x \le 0$ ergibt sich für die Ableitungen $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei die Ableitungen im Punkte $x_0 = 0$ als linksseitige Ableitungen zu verstehen sind. Im Falle $x > 0$ erhalten wir durch Anwendung der Produkt- und Kettenregeln

$$f'(x) = e^x\big((1+x)^{-1} - (1+x)^{-2}\big)$$

und

$$f''(x) = e^x\big((1+x)^{-1} - 2(1+x)^{-2} + 2(1+x)^{-3}\big).$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow 0} f''(x) = 1$$

so dass $\lim_{x\downarrow 0} f''(x) \neq \lim_{x\uparrow 0} f''(x)$ und damit f' nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$ ist. Da andererseits $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x\uparrow 0} f'(x)$ gilt, ist f genau einmal differenzierbar. Die Funktion f und die erste Ableitung von f sind in Bild 3 dargestellt, wobei sich die Nichtdifferenzierbarkeit von f' durch einen Knick bei $x_0 = 0$ bemerkbar macht.

Aufgabe 3. Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (2x - 1)\mathrm{e}^{-x^2}$. Berechnen Sie $\sup\big\{f(x) : \ x \in [0, \infty)\big\}$ und $\inf\big\{f(x) : \ x \in [0, \infty)\big\}$.

Lösung: Die Funktion f ist differenzierbar (da sie durch eine differenzierbare Kombination von differenzierbaren Funktionen gegeben ist), und die Ableitung errechnet sich mithilfe der Produkt- und Kettenregeln zu

$$f'(x) = -2(2x^2 - x - 1)\exp(-x^2).$$

Da die Gleichung $2x_\mathrm{e}^2 - x_\mathrm{e} - 1 = 0$ nur die eine positive Lösung $x_\mathrm{e} = 1$ besitzt, während für reelle x immer $\exp(-x^2) > 0$ gilt, hat f' ausser bei $x_e = 1$ keine weiteren Nullstellen. Da $f'(0) = 2$ und $f'(x) < 0$ für hinreichend grosses x ist, muss gelten $f'(x) > 0$ für $x < 1$ und $f'(x) < 0$ für $x > 1$ (f' kann ja nur bei $x_e = 1$ das Vorzeichen wechseln). Folglich ist f streng monoton steigend für $x < 1$ und streng monoton fallend für $x > 1$. Infolgedessen muss es sich bei $x_e = 1$ um ein Maximum von f handeln, wobei $f(1) = 1/e$ ist. Wir können zudem folgern, dass am linken Randpunkt, also bei $x = 0$, ein lokales Minimum vorliegt (da aufgrund des streng monotonen Anstiegs $f(x) > f(0)$ gilt für $0 < x < 1$), mit $f(0) = -1$. Wegen $0 < f(x) < 1/e$ für $x > x_e = 1$, ist dieses Minimum ein globales Minimum; des weiteren erhalten wir als Bildmenge von f

$$f([0, \infty)) = f\big([0, x_e]\big) \cup f\big([x_e, \infty)\big) = f\big([0, x_e]\big) = [-1,\ 1/e]$$

und damit $\sup\big\{f(x) \,|\, x \in [0, \infty)\big\} = 1/e$ und $\inf\big\{f(x) \,|\, x \in [0, \infty)\big\} = -1$, welche identisch mit dem berechneten Maxiumum beziehungsweise Minimum von f sind. (Siehe auch Bild 4.)

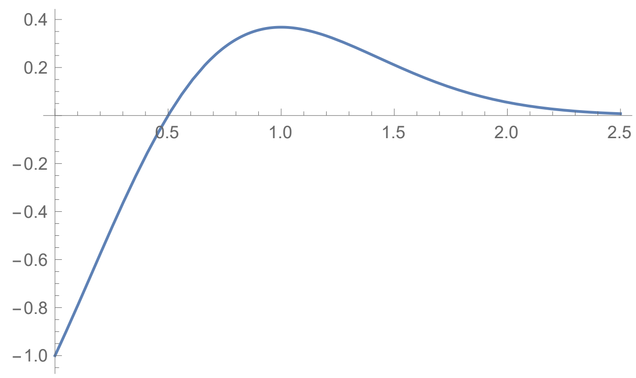


Bild 4. Die Funktion $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x^2}$ für $0 \le x \le 2.5$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Relation zwischen den Binomialkoeffizienten gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Lösung: Für $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt mit der Wahl des Hauptnenners $(n+1-k)!\,k!$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}\\ &= \frac{k\,(n!) + (n-k+1)(n!)}{(n+1-k)!\,k!}\\ &= \frac{n!\,(n+1)}{(n+1-k)!\,k!}\\ &= \binom{n+1}{k},\end{aligned}$$

während wir für $k = 0$ erhalten

$$\binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = 0 + 1 = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

1. Für welche a konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n)^n$?

2. Finden Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Lösung: Die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ impliziert $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$. Benutzen wir nun das Wurzelkriterium zur Untersuchung der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^n$, so erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(a_n)^n|} = \limsup_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|,$$

woraus ersichtlich ist, dass diese Reihe für $|a|<1$ konvergiert und für $|a|>1$ divergiert. Für $|a|=1$ sind sowohl Divergenz (Beispiel: $a_n := 1/\sqrt[n]{n}$) als auch Divergenz (Beispiel: $a_n := 1/\sqrt[n]{n^2}$) der Reihe möglich (und mithilfe des Wurzelkriteriums nicht zu entscheiden).

Um den Konvergenzradius r von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zu bestimmen, verwenden wir

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Hierbei haben wir die Stetigkeit der exp und log Funktion benutzt, um den Limes

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\exp\big(n^{-1}\ln(|a_n|)\big) = \exp\big(\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln(|a_n|)\big)\\ &= \exp\big((\lim_{n\to\infty} n^{-1})\ln(\lim_{n\to\infty}|a_n|)\big) = \exp\big(0\cdot\ln|a|\big) = 1\end{aligned}$$

zu berechnen, und dass damit gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Aufgabe 6. Beweisen Sie, dass die Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f: x\mapsto \cos x + \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{\pi^2}-1\Big)$ mindestens zwei Nullstellen hat.

Lösung: Als Summe von stetigen Funktionen ist f wieder eine stetige Funktion. Sie erfüllt $f(0) = 1 - 1/2 = 1/2$ und $f(\pi) = \cos\pi = -1$, während $f(2\pi) = \cos(2\pi) + 3/2 = 5/2$ ist. Damit können wir auf die Intervalle $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ den Nullstellensatz von Bolzano anwenden, aus welchem wir die Existenz von mindestens jeweils einer Nullstelle in diesen beiden Intervallen folgern können (für eine graphische Darstellung, vgl. Bild 5).

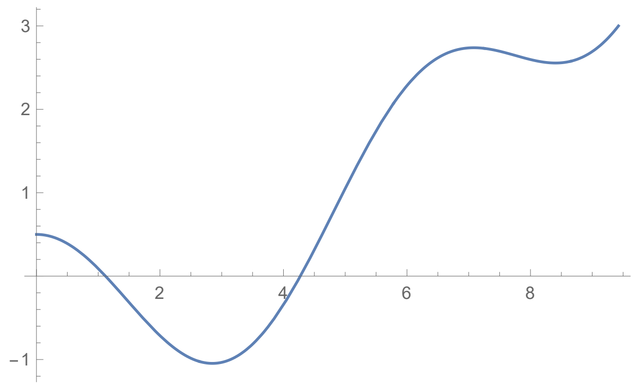


Bild 5. Die Funktion $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\pi^2} - 1\right)$ im Bereich $0 \leq x \leq 3\pi$.

LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
8. Februar 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ________________ Vorname: ________________

Matrikelnr.: ________________ Fachsemester: ________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	20	25	25	15		100

Name: ____________________

Aufgabe A 1. [15 Punkte]

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt, dass $2n + 1 < n^2$.

Name: ____________________

Aufgabe A 2. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben):

(a) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} -\frac{7}{k}$

(b) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} -k^3$

(c) (1 Punkt) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: i^5

(d) (1 Punkt) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $e^{i\pi}$

(e) (1 Punkt) $\{-2, 0, 5\} \cap [-1, 10[$

(f) (1 Punkt) $\{-2, 0, 5\} \setminus [-1, 10[$

(g) (1 Punkt) $\{0, -1, 0, 3\} \cup \{0, 5, 3\}$

(h) (2 Punkte) $\bigcap\limits_{r\in[2,\infty[} [\frac{1}{r}, 2 - \frac{1}{r}[$

(i) (2 Punkte) $\bigcup\limits_{r\in[2,\infty[} [\frac{1}{r}, 2 - \frac{1}{r}[$

(j) (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2k}$

(k) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{5} \frac{k}{2}$

(l) (2 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$

(m) (1 Punkt) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$

(n) (1 Punkt) $\inf]-3, \pi[$

(o) (1 Punkt) $\inf \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

Name: ____________________

Aufgabe A 3. [25 Punkte]

Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq M$, $a \in M$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie in (a) – (d) die Definition der jeweiligen Aussage an.

(a) (5 Punkte) $B = f(A)$.

(b) (5 Punkte) $A = f^{-1}(B)$.

(c) (4 Punkte) f hat in a ein globales Maximum.

(d) (3 Punkte) f hat in a ein strenges globales Maximum.

Bearbeiten Sie nun (e) – (h) unter der Annahme, dass $M := [0, 1]$ und $f(x) = 2$ für alle $x \neq 1$.

(e) (2 Punkte) Schreiben Sie für $A := [0, \frac{1}{2}]$ die Menge $f(A)$ ohne Benutzung von f.

(f) (2 Punkte) Schreiben Sie für $B := \mathbb{R}^+ \setminus \{f(1)\}$ die Menge $f^{-1}(B)$ ohne Benutzung von f.

(g) (2 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) $f(1)$ so an, dass f in 1 ein strenges globales Maximum hat.

(h) (2 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) $f(1)$ so an, dass f in 1 ein globales Maximum, aber kein strenges globales Maximum hat.

Name: ____________________

Aufgabe A 4. [25 Punkte]

(a) (5 Punkte) Formulieren Sie das Quotientenkriterium für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) (10 Punkte) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Größe von $|z|$, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n\, n!}{n^n}$ konvergiert ($n! = 1 \cdot 2 \cdots n$), absolut konvergiert oder divergiert (hier reicht es nicht, darauf zu verweisen, dass das Beispiel in der Vorlesung behandelt wurde, sondern die Bestimmung soll im Detail ausgeführt werden). Hinweis: Benutzen Sie, dass $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsend gegen e konvergiert.

(c) (5 Punkte) Wie lautet die Definition dafür, dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist?

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(\sin(x^3))$.

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

(b) (10 Punkte) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Funktion

$$\begin{aligned} & g :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) \\ \big(\text{bzw.} \quad & h : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x)\big) \end{aligned}$$

stetig in a ist. Zeigen Sie unter Benutzung der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit aus (a), dass f in a stetig ist, falls f in a linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

Name: ___

Name: ______________________________

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
8. Februar 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ __________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ __________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	15	25	25	15		100

Name: ____

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben):

(a) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k}$

(b) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1}$

(c) (1 Punkt) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $1/i$

(d) (1 Punkt) $\ln \sqrt{e}$

(e) (1 Punkt) $[-2, 10[\cap[0, \infty[$

(f) (1 Punkt) $\{-\pi, -2, 1, 7, \pi\} \setminus \mathbb{N}$

(g) (1 Punkt) $\mathbb{N} \cup] - \infty, 17[\cup] - 1, \infty[$

(h) (2 Punkte) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[-k, \frac{1}{k}[$

(i) (2 Punkte) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}[-k, \frac{1}{k}[$

(j) (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k$

(k) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{3} 2^k$

(l) (2 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^k$

(m) (1 Punkt) $\sum_{k=0}^{\infty} k$

(n) (1 Punkt) $\inf \mathbb{N}$

(o) (1 Punkt) $\sup\{\sin x : x \in \mathbb{R}\}$

Name: ____________________

Aufgabe B 2. [15 Punkte]

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt, dass $n^2 \leq 2^n$.

Name: ____

Aufgabe B 3. [25 Punkte]

Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie in (a) – (d) die Definition der jeweiligen Aussage an:

(a) (5 Punkte) f ist injektiv.

(b) (5 Punkte) f ist surjektiv.

(c) (4 Punkte) f ist monoton wachsend.

(d) (3 Punkte) f ist streng monoton wachsend.

In (e) – (h) sei nun $M := \mathbb{N}$ und $f(x) = x$ für alle $x \neq 1$. Geben Sie in (e) – (h) (ohne Beweis) jeweils einen Wert für $f(1)$ so an, dass f die jeweils verlangte Eigenschaft hat.

(e) (2 Punkte) f ist nicht injektiv.

(f) (2 Punkte) f ist streng monoton wachsend.

(g) (2 Punkte) f ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

(h) (2 Punkte) f ist nicht monoton wachsend.

Name: ____________________

Aufgabe B 4. [25 Punkte]

(a) (5 Punkte) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ und ζ sei Häufungspunkt von M. Formulieren Sie die Definition der Aussage "f hat Limes $\eta \in \mathbb{K}$ für $z \to \zeta$".

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^5 \sin(\exp(1/x))$. Zeigen Sie, dass f Limes 0 hat für $x \to 0$ (dass 0 Häufungspunkt von $]0, \infty[$ ist brauchen Sie nicht zeigen).

(c) (5 Punkte) Formulieren Sie das Quotientenkriterium für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(d) (10 Punkte) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Größe von $|z|$, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n\, n!}{n^n}$ konvergiert ($n! = 1 \cdot 2 \cdots n$), absolut konvergiert oder divergiert (hier reicht es nicht, darauf zu verweisen, dass das Beispiel in der Vorlesung behandelt wurde, sondern die Bestimmung soll im Detail ausgeführt werden). Hinweis: Benutzen Sie, dass $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ streng wachsend gegen e konvergiert.

Name: ____________________

Aufgabe B 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (10 Punkte) Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die beide gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \begin{cases} a_{(n+1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ b_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

gegen x konvergiert.

Name: ______________________________

Name: ________________________________

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
8. Februar 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Abschlussklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	20	15	25	25	15		100

Name: ____________________

Aufgabe B 1. [20 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (bei dieser Aufgabe genügt es, das Ergebnis ohne Begründung anzugeben):

Lösung:

(a) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k} = \infty$.

(b) (1 Punkt) $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0$.

(c) (1 Punkt) Vereinfachen Sie in $\mathbb{C}$: $1/i = -i$.

(d) (1 Punkt) $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

(e) (1 Punkt) $[-2, 10[\cap[0, \infty[= [0, 10[$.

(f) (1 Punkt) $\{-\pi, -2, 1, 7, \pi\} \setminus \mathbb{N} = \{-\pi, -2, \pi\}$.

(g) (1 Punkt) $\mathbb{N} \cup] - \infty, 17[\cup] - 1, \infty[= \mathbb{R}$.

(h) (2 Punkte) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[-k, \frac{1}{k}[=] - \infty, 1[$.

(i) (2 Punkte) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}[-k, \frac{1}{k}[= [-1, 0]$.

(j) (2 Punkte) $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

(k) (2 Punkte) $\prod_{k=1}^{3} 2^k = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$.

(l) (2 Punkte) $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1/(\frac{2}{3}) = \frac{3}{2}$.

(m) (1 Punkt) $\sum_{k=0}^{\infty} k = \infty$.

(n) (1 Punkt) $\inf \mathbb{N} = 1$.

(o) (1 Punkt) $\sup\{\sin x : x \in \mathbb{R}\} = 1$.

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [15 Punkte]

Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt, dass $n^2 \leq 2^n$.

Lösung:

Induktionsverankerung ($n = 4$): Für $n = 4$ ergibt sich die Aussage

$$4^2 = 16 \leq 16 = 2^4,$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $n^2 \leq 2^n$, erhält man

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{n \geq 4}{<} n^2 + 2n + n = n^2 + 3n \overset{n \geq 4}{<} n^2 + n \cdot n = 2n^2 \overset{\text{Ind. vor.}}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [25 Punkte]

Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie in (a) – (d) die Definition der jeweiligen Aussage an:

(a) (5 Punkte) f ist injektiv.

(b) (5 Punkte) f ist surjektiv.

(c) (4 Punkte) f ist monoton wachsend.

(d) (3 Punkte) f ist streng monoton wachsend.

In (e) – (h) sei nun $M := \mathbb{N}$ und $f(x) = x$ für alle $x \neq 1$. Geben Sie in (e) – (h) (ohne Beweis) jeweils einen Wert für $f(1)$ so an, dass f die jeweils verlangte Eigenschaft hat.

(e) (2 Punkte) f ist nicht injektiv.

(f) (2 Punkte) f ist streng monoton wachsend.

(g) (2 Punkte) f ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

(h) (2 Punkte) f ist nicht monoton wachsend.

Lösung:

(a): f ist injektiv nach Definition genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (es genügte, eine der Bedingungen anzugeben):

$$\underset{y \in \mathbb{R}}{\forall} \left(f^{-1}\{y\} = \emptyset \vee \underset{x \in M}{\exists!} \ f(x) = y \right) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{x_1, x_2 \in M}{\forall} \big(x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \big).$$

(b): f ist surjektiv nach Definition genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (wieder genügte es, eine der Bedingungen anzugeben):

$$\underset{y \in \mathbb{R}}{\forall} \ \underset{x \in M}{\exists} \ y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{y \in \mathbb{R}}{\forall} \ f^{-1}\{y\} \neq \emptyset.$$

(c): f ist monoton wachsend nach Definition genau dann, wenn

$$\underset{x_1, x_2 \in M}{\forall} \big(x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2) \big).$$

(d): f ist streng monoton wachsend nach Definition genau dann, wenn

$$\underset{x_1, x_2 \in M}{\forall} \big(x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \big).$$

(e): Eine mögliche Lösung ist $f(1) = 2$.

(f): Hier ist $f(1) = 1$ eine mögliche Lösung.

(g): Hier ist $f(1) = 2$ die einzige richtige Lösung.

(h): Hier ist $f(1) = 5$ eine mögliche Lösung.

Name: ____

Aufgabe B 4. [25 Punkte]

(a) (5 Punkte) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ und ζ sei Häufungspunkt von M. Formulieren Sie die Definition der Aussage "f hat Limes $\eta \in \mathbb{K}$ für $z \to \zeta$".

(b) (5 Punkte) Betrachten Sie $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^5 \sin(\exp(1/x))$. Zeigen Sie, dass f Limes 0 hat für $x \to 0$ (dass 0 Häufungspunkt von $]0, \infty[$ ist brauchen Sie nicht zeigen).

(c) (5 Punkte) Formulieren Sie das Quotientenkriterium für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(d) (10 Punkte) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Größe von $|z|$, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n\, n!}{n^n}$ konvergiert ($n! = 1 \cdot 2 \cdots n$), absolut konvergiert oder divergiert (hier reicht es nicht, darauf zu verweisen, dass das Beispiel in der Vorlesung behandelt wurde, sondern die Bestimmung soll im Detail ausgeführt werden). Hinweis: Benutzen Sie, dass $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ streng wachsend gegen e konvergiert.

Lösung:

(a): Es gilt f hat Limes $\eta \in \mathbb{K}$ für $z \to \zeta$ nach Definition genau dann, wenn

$$\underset{(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } M\setminus\{\zeta\}}{\forall} \left(\lim_{k\to\infty} z_k = \zeta \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \eta \right).$$

(b): Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Nach Grenzwertsatz (oder nach der Stetigkeit von $x \mapsto x^5$) gilt dann auch $\lim_{k\to\infty} x_k^5 = 0$. Weiterhin ist die Folge $(\sin(\exp(1/x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt (da sin nach unten durch -1 und nach oben durch 1 beschränkt ist). Da eine Nullfolge mal beschränkter Folge wieder eine Nullfolge ist, folgt
$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty}(x_k^5 \sin(\exp(1/x_k))) = 0$, was $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ beweist.

(c): Quotientenkriterium:

$$\left(\underset{0<q<1}{\exists} \left(\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \le q < 1 \text{ für fast alle } n \right) \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ absolut konvergent,}$$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \ge 1 \text{ für fast alle } n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ divergent.}$$

(d): Für $z = 0$ ist die absolute Konvergenz der Reihe klar. Für $z \neq 0$ wenden wir das Quotientenkriterium an mit $c_n := \frac{z^n\, n!}{n^n}$. Es ist

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{|z|^{n+1}\,(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,|z|^n\,n!} = |z| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{|z|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Mit dem Hinweis folgt also $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{|z|}{e}$. Für $|z| < e$ ist also $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$ und das Quotientenkriterium liefert (nach Vorlesung) absolute Konvergenz der Reihe. Für $|z| > e$ ist $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| > 1$ und das Quotientenkriterium liefert (nach Vorlesung) Divergenz der Reihe. Für $|z| = e$ konvergiert $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ nach dem Hinweis monoton fallend gegen 1, so dass $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| > 1$ für alle n gilt und das Quotientenkriterium erneut Divergenz der Reihe liefert.

Name: ______________________________

Aufgabe B 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (10 Punkte) Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die beide gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \begin{cases} a_{(n+1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ b_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

gegen x konvergiert.

Lösung:

(a): Nach Definition konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |a_n - a| < \epsilon.$$

(b): Sei $\epsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \quad \Rightarrow \quad \underset{N_1\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N_1}{\forall} \quad |a_n - x| < \epsilon \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x \quad \Rightarrow \quad \underset{N_2\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N_2}{\forall} \quad |b_n - x| < \epsilon \tag{2}$$

Setze nun $N := \max\{2N_1 - 1, 2N_2\}$. Dann gilt für jedes $n \geq N$, dass

$$\frac{n+1}{2} \geq N_1 \ \wedge\ \frac{n}{2} \geq N_2, \tag{3}$$

also

$$\underset{n\geq N}{\forall} \quad |c_n - x| < \epsilon, \tag{4}$$

was $\lim_{n\to\infty} c_n = x$ beweist.

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
6. April 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Master ❏

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ______________

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Statistik ❏ Informatik ❏ Medieninf. ❏ Bioinf. ❏ Phys. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	25	15	25	20	15		100

Name: ______________________________

Aufgabe A 1. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$; sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine notwendige Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte). Formulieren Sie weiterhin einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine hinreichende Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte).

(b) (15 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f :] - 10, 10[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := t^3 - 12t$, wobei Sie auch angeben sollen, ob es sich um Maxima oder Minima handelt (beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung mit Hilfe von Ergebnissen der Vorlesung).

(a): Nach dem Satz aus der Vorlesung ist (unter den hier gegebenen Voraussetzungen) eine notwendige Bedingung dafür, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat, dass $f'(x) = 0$ gilt. Eine hinreichende Bedingung ist entsprechend, dass $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ (alternativ konnte man hier die hinreichende Bedingung nennen, dass f' in x einen Vorzeichenwechsel hat).

(b): Zunächst berechnet man $f'(t) = 3t^2 - 12$ und $f''(t) = 6t$. Da $f'(t) = 0$ nach (a) für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f in t notwendig ist, bestimmt man nun die Nullstellen von f'. Es gilt

$$f'(t) = 3t^2 - 12 = 3\,(t + 2)\,(t - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \{-2, 2\}.$$

Also ist die Menge der lokalen Extrema von f eine Teilmenge der Menge $L := \{-2, 2\}$. Da $f''(2) = 12 > 0$, hat f in $t = 2$ nach Vorlesung ein lokales Minimum. Da $f''(-2) = -12 < 0$, hat f in $t = -2$ nach Vorlesung ein lokales Maximum. Insbesondere ist L genau die Menge der lokalen Extrema von f.

Name: ____________________

Aufgabe A 2. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \underset{z,w\in\mathbb{C}}{\forall} \quad (w-z)\sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n-k} = w^{n+1} - z^{n+1}.$$

Lösung:

Induktionsverankerung ($n = 0$): Für $n = 0$ ergibt sich die Aussage

$$w^{0+1} - z^{0+1} = w - z = (w-z)z^0\, w^{0-0}, \tag{1}$$

welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $(w-z)\sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n-k} = w^{n+1} - z^{n+1}$, rechnet man

$$\begin{aligned}
(w-z)\sum_{k=0}^{n+1} z^k\, w^{n+1-k} &= (w-z)\left(z^{n+1}w^0 + \sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n+1-k}\right)\\
&= (w-z)z^{n+1} + (w-z)\, w \sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n-k}\\
&\overset{\text{Ind. vor.}}{=} (w-z)\, z^{n+1} + w(w^{n+1} - z^{n+1}) = w^{n+2} - z^{n+2},
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ____

Aufgabe A 3. [25 Punkte]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$.

(a) (5 Punkte) Sei $x \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Wie lautet die Definition dafür, dass f in x differenzierbar ist (es genügt, eine der aus der Vorlesung bekannten äquivalenten Definitionen anzugeben).

(b) (10 Punkte) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien differenzierbar. Formulieren Sie für f, g die Produktregel (5 Punkte) und die Quotientenregel (5 Punkte).

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := e^{t^2} \sin(2t)$.

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := t/(t^2 + 1)$.

(a): Nach Definition ist f in x differenzierbar genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Dazu ist äquivalent, dass der Grenzwert

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

existiert.

(b): Produktregel: fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + fg'$.
Quotientenregel: f/g ist differenzierbar mit $(fg)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

(c): Unter Benutzung von Produktregel und Kettenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = 2t\, e^{t^2} \sin(2t) + 2e^{t^2} \cos(2t).$$

(d): Unter Benutzung der Quotientenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1 - t^2}{(t^2+1)^2},$$

wobei es nicht notwendig war, die Vereinfachung durchzuführen.

Name: ____________________

Aufgabe A 4. [20 Punkte]

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_0^1 (x^5 - 3x)\,\mathrm{d}x$.

(b) (5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$. Formulieren Sie für $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar die Formel der partiellen Integration für Riemannintegrale über I.

(c) (10 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

(a): Nach rechnet

$$\int_0^1 (x^5 - 3x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}.$$

(b): Laut Vorlesung lautet die Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g,$$

wobei man auch schreiben konnte

$$\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg',$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist.

(c): Unter Benutzung der Formel aus (b) berechnet man

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = [-\sin t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Addidiert man auf beiden Seiten der Gleichung $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$ und benutzt $\sin^2 + \cos^2 = 1$, so folgt

$$2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = 2\pi,$$

also

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

Name: ______________________________

Aufgabe A 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition (mit ϵ und δ) der Aussage "f ist stetig in a".

(b) (10 Punkte) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Funktion

$$\begin{aligned} & g :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) \\ \big(\text{bzw.} \quad & h : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x)\big) \end{aligned}$$

stetig in a ist. Zeigen Sie unter Benutzung der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit aus (a), dass f in a stetig ist, falls f in a linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

Lösung:

(a): Nach Definition ist f genau dann stetig in a, wenn

$$\underset{\epsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \ \underset{\delta \in \mathbb{R}^+}{\exists} \ \underset{z \in M}{\forall} \big(|z - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(a)| < \epsilon\big).$$

(b): Sei f in a linksseitig und rechtseitig stetig. Sei $\epsilon > 0$. Zu ϵ gibt es, da g in a stetig ist, ein $\delta_1 > 0$ so, dass

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \ \Big(a - \delta_1 < x \leq a \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon\Big).$$

Da auch h in a stetig ist, gibt es auch ein $\delta_2 > 0$ so, dass

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \ \Big(a \leq x < a + \delta_2 \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| = |h(x) - h(a)| < \epsilon\Big).$$

Sei nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ist dann $|a - x| < \delta$, so folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Somit ist f stetig in a.

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Peter Philip
Lukas Emmert, Tobias König

Wintersemester 2017/2018
6. April 2018

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________ Fachsemester: ____________________

Abschluss: Bachelor ❑ Master ❑

Version der Prüfungsordnung (Jahreszahl): ____________________

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________________

Hauptfach: ❑ Statistik ❑ Informatik ❑ Medieninf. ❑ Bioinf. ❑ Phys. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Personalausweis oder Reisepass sichtbar auf den Tisch. Bitte überprüfen Sie, ob Sie **5 Aufgaben** erhalten haben. Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.
Erlaubte Hilfsmittel: Schreibstifte und Radierer, **sonst keine**.
Lösungen: Rechnungen und Beweise sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne hinreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert (wenn in der Aufgabenstellung nicht anders angegeben). Falls sich Ergebnisse in Form von Brüchen, Wurzeln oder Ähnlichem ergeben, so lassen Sie sie in dieser Form, und versuchen Sie nicht, sie als gerundete Dezimalzahlen zu schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	B1	B2	B3	B4	B5	Ueb. bonus	Σ
max. Punkte	15	25	25	20	15		100

Name: ____

Aufgabe B 1. [15 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage mit einem Induktionsbeweis:

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \underset{q\in\mathbb{C}\setminus\{1\}}{\forall} \quad \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Lösung:

Induktionsverankerung ($n=0$): Für $n=0$ ergibt sich die Aussage

$$1 = q^0 = \sum_{j=0} q^j = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}, \tag{1}$$

welche wahr ist.

Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}_0$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, rechnet man

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} q^j = q^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} q^j &\overset{\text{Ind. vor.}}{=} q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{q^{n+1}(1-q) + 1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q},\end{aligned} \tag{2}$$

was zeigt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

Name: ______________________________

Aufgabe B 2. [25 Punkte]

(a) (10 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$; sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine notwendige Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte). Formulieren Sie weiterhin einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der eine hinreichende Bedingung dafür liefert, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat (5 Punkte).

(b) (15 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f :]0, 3\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := \sin t$, wobei Sie auch angeben sollen, ob es sich um Maxima oder Minima handelt (beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung mit Hilfe von Ergebnissen der Vorlesung – hier sollen Sie (a) benutzen und bekannte Eigenschaften von Sinus und Kosinus, aber Sie sollen natürlich *nicht* die Lage der Extrema schon als bekannt voraussetzen).

(a): Nach dem Satz aus der Vorlesung ist (unter den hier gegebenen Voraussetzungen) eine notwendige Bedingung dafür, dass f in $x \in I$ ein lokales Extremum hat, dass $f'(x) = 0$ gilt. Eine hinreichende Bedingung ist entsprechend, dass $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ (alternativ konnte man hier die hinreichende Bedingung nennen, dass f' in x einen Vorzeichenwechsel hat).

(b): Zunächst gilt nach Vorlesung $f'(t) = \cos t$ und $f''(t) = -\sin t$. Da $f'(t) = 0$ nach (a) für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f in t notwendig ist, und die Menge der Nullstellen von Kosinus in $]0, 3\pi[$ nach Vorlesung die Menge $L := \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$ ist, ist die Menge der lokalen Extrema von f eine Teilmenge von L. Da $f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$, hat f in $t = \frac{\pi}{2}$ nach Vorlesung ein lokales Maximum. Da $f''(\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$, hat f in $t = \frac{3\pi}{2}$ nach Vorlesung ein lokales Minimum. Da $f''(\frac{5\pi}{2}) = -\sin\frac{5\pi}{2} = -1 < 0$, hat f in $t = \frac{5\pi}{2}$ nach Vorlesung ein lokales Maximum. Insbesondere ist L genau die Menge der lokalen Extrema von f.

Name: ______________________________

Aufgabe B 3. [25 Punkte]

(a) (5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$. Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Funktion eine Stammfunktion einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(c) (5 Punkte) Formulieren Sie den aus der Vorlesung bekannten Satz zur Substitutionsformel.

(d) (10 Punkte) Berechnen Sie das folgende Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich: $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$ (Hinweis: substituiere $x := \phi(t) := 1 - t$; die Voraussetzungen zur Anwendbarkeit der Substitutionsformel sollen Sie hier NICHT überprüfen).

(a): Nach Definition ist die Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f genau dann, wenn gilt $F' = f$.

(b): Man rechnet

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

(c): Sei $\phi \in C^1(I)$, $f \in C(J)$, $\phi(I) \subseteq J$. Dann gilt

$$\underset{a,b\in I}{\forall} \quad \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'.$$

(d): Substituiere $x := \phi(t) := 1 - t$ mit $\phi'(t) = -1$. Dann gilt $t = 1 - x$ und nach (c) ist

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = -\int_{1=\phi(0)}^{0=\phi(1)} (1-x)^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right]_0^1 = \frac{16}{105}.$$

Name: ____________________

Aufgabe B 4. [20 Punkte]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a, b[$.

(a) (10 Punkte) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien differenzierbar. Formulieren Sie für f, g die Produktregel (5 Punkte) und die Quotientenregel (5 Punkte).

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := t\,\ln(t^2 + 1)$.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(t) := \frac{\cos t}{e^t}$.

(a): Produktregel: fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + fg'$.
Quotientenregel: f/g ist differenzierbar mit $(fg)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

(b): Unter Benutzung von Produktregel und Kettenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = \ln(t^2 + 1) + \frac{t\,2t}{t^2 + 1} = \ln(t^2 + 1) + \frac{2t^2}{t^2 + 1},$$

wobei es nicht notwendig war, die Vereinfachung durchzuführen.

(c): Unter Benutzung der Quotientenregel erhält man

$$h' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h'(t) = \frac{-e^t\,\sin t - e^t\,\cos t}{e^{2t}} = \frac{-\sin t - \cos t}{e^t},$$

wobei es nicht notwendig war, die Vereinfachung durchzuführen.

Name: ______________________________

Aufgabe B 5. [15 Punkte]

(a) (5 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a".

(b) (10 Punkte) Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die beide gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \begin{cases} a_{(n+1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ b_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

gegen x konvergiert.

Lösung:

(a): Nach Definition konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a, wenn

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |a_n - a| < \epsilon.$$

(b): Sei $\epsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \quad \Rightarrow \quad \underset{N_1\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N_1}{\forall} \quad |a_n - x| < \epsilon \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x \quad \Rightarrow \quad \underset{N_2\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N_2}{\forall} \quad |b_n - x| < \epsilon \tag{4}$$

Setze nun $N := \max\{2N_1 - 1,\, 2N_2\}$. Dann gilt für jedes $n \geq N$, dass

$$\frac{n+1}{2} \geq N_1 \ \wedge \ \frac{n}{2} \geq N_2, \tag{5}$$

also

$$\underset{n\geq N}{\forall} \quad |c_n - x| < \epsilon, \tag{6}$$

was $\lim_{n\to\infty} c_n = x$ beweist.