

东南大学
博士学位论文

非确定性网络系统的分布式自适应控制¹

专业名称: 控制科学与工程

研究生姓名: 岳冬冬

导师姓名: 李奇 教授
曹进德 教授

¹本论文得到国家自然科学基金(61833005,61876036),中国留学基金委(201906090134),江苏省重点研发计划(BE2017157),江苏省研究生科研创新计划(KYCX19_0086),和东南大学教育基金会资助。

DISTRIBUTED ADAPTIVE CONTROL OF UNCERTAIN NETWORK SYSTEMS

A Dissertation Submitted to
Southeast University
For the Academic Degree of Doctor of Engineering

By
YUE Dongdong

Supervised by
Professor LI Qi
and
Professor CAO Jinde

School of Automation
Southeast University
December 2020

东南大学学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东南大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名: 苏文文 日期: 2021.3.1

东南大学学位论文使用授权声明

东南大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆、《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司、万方数据电子出版社、北京万方数据股份有限公司有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括以电子信息形式刊登）论文的全部内容或中、英文摘要等内容。论文的公布（包括以电子信息形式刊登）授权东南大学研究生院办理。

研究生签名: 苏文文 导师签名: 李晓东 日期: 2021.3.3

非确定性网络系统的分布式自适应控制

摘要

网络系统的分布式控制理论是网络化时代的产物，并在智能交通、智能电网、工业互联网等领域得到了广泛的应用。通过将单个子系统（智能体）抽象为节点，子系统之间的通讯抽象为边，网络系统控制可以形象的理解为图上的控制理论。分布式控制方法通过充分利用子系统之间的通讯机制来达到控制目的，通常具有并行性高，扩展性强，和隐私保护等特点。另一方面，作为非确定性系统控制理论与应用的一个重要分支，自适应控制是指通过在控制器中引入自调节机制，使得控制器对系统的非确定性产生某种适应能力。考虑到现实世界的网络系统具有个体行为和全局通讯的双重非确定性，分布式自适应控制理论具有重要的研究价值和应用前景。本文首先研究了几类带有个体行为和（或）全局通讯非确定性的网络系统的分布式自适应控制问题，包括一致性控制，跟踪控制，包含控制，编队控制；然后从控制的角度出发，给出了带有结构非确定性的网络系统的分布式自适应优化算法和分布式自适应资源配置算法。主要结果包含以下几个方面：

(1) 一致、跟踪与包含问题中的分布式自适应控制方法研究。首先针对一类带有未建模动态和未知干扰的网络系统，提出了基于神经网络的完全分布式自适应控制方法，用于求解无领导者一致性，单领导者跟踪，以及多领导者包含问题。该方法通过同时引入自适应神经网络，自适应耦合权重和非光滑方法，有效避免了控制设计对网络系统代数连通度、领导者外部输入上界、未知干扰上界等全局信息的依赖性。紧接着，研究了带有未建模动态的网络系统的外部动态信号平均跟踪问题，分别给出了静态耦合反馈和动态耦合反馈设计方法，其中后者在一定程度上放宽了对全局信息的依赖性。最后，讨论了一类带有多源非确定性（未建模动态，未知干扰，时滞，高维领导者）的网络系统跟踪控制问题，通过设计分布式观测器和基于神经网络的反馈补偿，给出了跟随者的有界跟踪控制策略。

(2) 编队问题中的分布式自适应控制方法研究。首先考虑了无向通讯环境下一类带有未建模动态的非确定性网络系统，提出了两类分布式神经网络自适应时变编队控制方法。分别从节点和边的角度出发，给出了动态耦合反馈设计方法，其中基于节点

的设计方法不依赖于任何全局信息，具有完全分布式特性；另一方面，基于边的设计方法适用于具有切换通讯拓扑的网络系统。进而，针对有向通讯环境下的网络系统，提出了一种基于有向支撑树的时变编队控制方法，以及在有一个或多个领导者存在时基于广义有向支撑树的编队追踪控制方法。所提方法有效解决了当广义代数连通度未知时有向网络系统的分布式自适应编队控制问题。

(3) 优化与资源配置问题中的分布式自适应控制方法研究。首先从控制的角度考虑强连通有向拓扑图上的分布式优化问题，提出了一个基于有向支撑树的连续时间分布式自适应优化求解框架：对于权重平衡图，提出了一种基于有向支撑树的分布式自适应优化算法；对于权重非平衡图，提出了一种基于有向支撑树的有限时间权重调平算法。此框架放宽了现有分布式优化算法中局部函数为凸函数，步长衰减，权重平衡，通讯拓扑特征值和（或）特征向量已知的限制。另外，考虑了一类带有全局约束的分布式优化问题，即资源配置问题。从一个非确定性鞍点动力系统出发，分别提出了基于有向支撑树和基于点的分布式自适应资源配置算法。在合理的假设下，两类算法均实现了当全局 Laplacian 矩阵特征值信息未知时的自适应资源配置。

关键词： 分布式控制，自适应控制，网络动力学，多智能体系统，一致性，包含控制，编队控制，平均跟踪，分布式优化，资源配置

Distributed adaptive control of uncertain network systems

Abstract

Distributed control theory of network systems is a product of the era of internet, and has been widely used in several fields spanning from intelligent transport, smart grid, industrial internet, and so on. By treating the subsystems (agents) in a network system as nodes and treating the communications between different subsystems as edges, the control theory of network systems can be simply understood as the control theory over graphs. distributed control methods usually take good advantage of the communication mechanisms between subsystems so as to achieve the control goal. Thus, they usually enjoy the properties of high parallelism, powerful scalability, privacy protection, etc. On the other hand, as an important branch of control theory and applications of uncertain systems, adaptive control refers to the strategy of incorporating self-tune mechanisms in the controller, endowing the controller with certain adaptive capability to the system uncertainties. Considering that there are duplex uncertainties in both individual behaviors and global interactions in realistic network systems, the theory of distributed adaptive control has important research value and application prospect. This thesis starts with distributed adaptive control problems including consensus, tracking, containment, and formation, of several classes of network system with uncertainties in individual behaviors and/or global interactions. Then, from a control perspective, distributed adaptive optimization and resource allocation algorithms are proposed for network systems with structural uncertainties. The main results of this thesis are summarized as follows:

- (1) The study of distributed adaptive control methods for consensus, tracking and containment. Firstly, a class of network systems with unmodeled dynamics and unknown disturbances, and neural network based fully distributed adaptive control method is proposed for all leaderless consensus, consensus tracking with a single leader, and containment with multiple leaders. By introducing adaptive neural networks, adaptive coupling gains, and nonsmooth techniques simultaneously, the proposed method requires neither

the algebraic connectivity of the global network, nor the upper bounds of the leaders' inputs or the disturbances. Secondly, an average tracking of external time-varying signals for network systems with unmodeled dynamics is studied, and feedback designs with both static coupling strategy and dynamic coupling strategy are proposed, respectively, where the latter relaxes the dependence on the global information to some degree. Finally, a tracking problem with multiple uncertainties (unmodeled dynamics, unknown disturbances, time-delay, high-dimensional leader) is considered, and a control strategy with bounded tracking errors is proposed by designing distributed observers and neural network based feedback compensations.

(2) The study of distributed adaptive control methods for formation. First, a class of uncertain network systems is considered with unmodeled dynamics communicating over an undirected graph, and two classes of distributed neural network adaptive time-varying formation methods are proposed. Dynamic coupling feedback designs are analyzed from node and edge viewpoints, respectively, where the node-based design is fully distributed without any global information, while the edge-based design is applicable to the network system with switching communication topologies. Then, for network systems over directed graphs, a (generalized) directed-spanning-tree based time-varying formation (tracking) control solution is provided (in the presence of one or leaders). The proposed solution effectively solves the distributed adaptive formation control over a directed network without the knowledge of the generalized algebraic connectivity.

(3) The study of distributed adaptive control methods for optimization and resource allocation. Considered first is the distributed optimization problem over strongly connected digraphs. A novel framework based on a directed-spanning-tree is proposed for continuous-time distributed adaptive optimization: a distributed adaptive optimization algorithm is proposed for weight-balanced digraphs, and a finite time weight-balancing algorithm is proposed for weight-unbalanced digraphs, both based on a directed-spanning-tree. The proposed framework requires neither convexity of local function, nor vanishing step sizes, nor algebraic information (eigenvalues or eigenvectors) of the Laplacian matrix. Next, we consider a distributed optimization problem with global constraints, i.e., resource allocation. Starting from an uncertain saddle-point dynamics, two classes of

distributed adaptive resource allocation algorithms are proposed based on the directed-spanning-tree and the nodes, respectively. Under reasonable assumptions, the proposed algorithms both realize the adaptive resource allocation when the information of the global Laplacian eigenvalues is not available.

Keywords: Distributed Control, Adaptive Control, Network Dynamics, Multi-Agent System, Consensus, Containment Control, Formation Control, Average Tracking, Distributed Optimization, Resource Allocation

符 号

如不加特殊说明，本论文采用下列符号：

$\mathbb{R}(\mathbb{R}^+)$	实数域（正实数域）；
\mathbb{R}^n	n 维 Euclidean 空间；
\mathbb{R}_+^n	n 维正 Euclidean 子空间；
$\mathbb{R}^{m \times n}$	\mathbb{R} 上的 $m \times n$ 维矩阵；
\mathcal{I}_n	集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ ；
$\ x\ $	向量 x 的 Euclidean 范数， $\ x\ = \sqrt{x^T x}$ ；
$\ x\ _1$	向量 x 的 1-范数， $\ x\ _1 = \sum_{i \in \mathcal{I}_n} x_i $ ；
$\ x\ _p$	向量 x 的 p -范数， $\ x\ _p = (\sum_{i \in \mathcal{I}_n} x_i ^p)^{\frac{1}{p}}$ ；
$\ x\ _\infty$	向量 x 的无穷范数， $\ x\ _\infty = \max_{i \in \mathcal{I}_n} x_i $ ；
$\mathbf{1}_n(\mathbf{0}_n)$	所有元素均为 1 (0) 的 n 维列向量；
$\mathbf{I}_n(\mathbf{O}_n)$	n 阶单位矩阵（零矩阵）；
A^T	矩阵 A 的转置；
$\text{tr}(A)$	矩阵 A 的迹；
A^s	矩阵 A 的对称部分， $A^s = (A + A^T)/2$ ；
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵；
$\ A\ _F$	矩阵 A 的 Frobenius 范数， $\ A\ _F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ ；
$\lambda_{\min}(A)(\lambda_{\max}(A))$	对阵矩阵 A 的最小（最大）特征值；
$\lambda_2(A)$	半正定矩阵 A 的最小非零特征值；
$\text{rank}(A)$	矩阵 A 的秩；
$A > 0(A \geq 0)$	A 为对称正定（半正定）矩阵；

$\text{col}(x_1, \dots, x_n)$	多个向量的列叠加操作, $\text{col}(x_1, \dots, x_n) = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$;
$\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$	多个标量或矩阵的块对角化操作;
$\text{sgn}(x)$	向量 x 的按位取符号操作;
$\text{sig}^q(x)$	向量 x 的按位运算, $\text{sig}^q(x) = (\text{sgn}(x_1) x_1 ^q, \dots, \text{sgn}(x_n) x_n ^q)^T$;
$\mathcal{S}_1 \bigcap \mathcal{S}_2$	集合 \mathcal{S}_1 与 \mathcal{S}_2 的交运算;
$\mathcal{S}_1 \bigcup \mathcal{S}_2$	集合 \mathcal{S}_1 与 \mathcal{S}_2 的并运算;
$\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2$	集合 \mathcal{S}_1 与 \mathcal{S}_2 的差运算;
\otimes	Kronecker 积.

注: 矩阵的维数, 在没有特别说明时, 满足代数运算。

目录

第一章 绪论	1
1.1 非确定性网络系统控制背景及研究现状	1
1.1.1 多智能体系统的分布式控制	1
1.1.2 从分布式控制到分布式优化	4
1.1.3 走向完全分布式——自适应网络耦合调节	6
1.2 本文的主要内容和创新点	7
1.2.1 主要研究内容	7
1.2.2 主要创新点	10
第二章 理论基础	13
2.1 代数图论	13
2.2 神经网络自适应控制	17
2.3 非光滑分析初步	18
第三章 分布式自适应控制：一致、跟踪与包含	21
3.1 基于神经网络的完全分布式自适应控制	21
3.1.1 模型描述与预备知识	22
3.1.2 无领导者一致性	23
3.1.3 单领导者跟踪与多领导者包含	28
3.1.4 数值仿真	35
3.2 基于神经网络的分布式平均跟踪控制	40
3.2.1 模型描述与预备知识	41
3.2.2 分布式平均跟踪控制	42
3.2.3 自适应网络耦合调节	47
3.2.4 数值仿真	51

3.3	基于神经网络的高维领导者跟踪控制	57
3.3.1	模型描述与预备知识	58
3.3.2	分布式观测器设计	60
3.3.3	神经网络自适应跟踪控制	61
3.3.4	数值仿真	67
3.4	本章小结	71
第四章	分布式自适应控制：编队	73
4.1	基于神经网络的自适应时变编队控制	73
4.1.1	模型描述与预备知识	73
4.1.2	基于节点的完全分布式编队控制	75
4.1.3	切换拓扑下基于边的编队控制	79
4.1.4	数值仿真	83
4.2	基于有向支撑树的自适应时变编队控制	87
4.2.1	模型描述与预备知识	89
4.2.2	无领导者网络系统的编队控制	90
4.2.3	带有多个领导者的网络系统的编队跟踪控制	95
4.2.4	数值仿真	99
4.3	本章小结	105
第五章	分布式自适应控制：优化与资源配置	107
5.1	分布式自适应优化和权重调平	107
5.1.1	问题描述	108
5.1.2	平衡图下基于有向支撑树的分布式自适应优化	109
5.1.3	非平衡图下基于有向支撑树的分布式权重调平	115
5.1.4	数值仿真	119
5.2	基于一类非确定鞍点动力学的分布式自适应资源配置	121
5.2.1	问题描述与初步分析	123
5.2.2	基于有向支撑树的设计方法	125
5.2.3	基于节点的设计方法	130
5.2.4	数值仿真	134
5.3	本章小结	137

第六章 总结与展望	139
6.1 总结	139
6.2 展望	140
附录 A 博士期间撰写和发表的论文	155
附录 B 博士期间主持和参加的科研项目、学术会议和获得的荣誉	157
附录 C 致谢	159

第一章 絮论

1.1 非确定性网络系统控制背景及研究现状

自数学家 Euler 创立图论 (1736年) 和 Erdös 建立随机图论 (1960年) 以来，网络科学在世纪之交 (1998-1999年) 迎来了新的里程碑：小世界网络和无标度网络模型的建立。另一方面，自19世纪60年代初，以状态空间法、 Pontryagin 极大值原理、 Bellman 动态规划、 Kalman 滤波为基础的现代控制理论逐步确立，为复杂系统的控制设计提供了有力的支撑。网络与控制在各自发展的过程中逐渐交错融合[1]。在此背景下，网络系统控制主要关注如何控制一个网络系统(如电力网，互联网，交通网)，是综合了数学、物理学、系统科学、信息论等学科的一门强交叉科学，并在新世纪迎来了蓬勃的发展。通过将网络中的个体抽象为节点(如发电机，计算机，车辆)，将网络中个体之间的关系抽象为连边(如合作，竞争，博弈)，网络系统控制可以形象的理解为图上的控制理论。

现实网络系统中的不确定性是不可避免的，而且通常有多个来源，如系统建模的误差、外部噪声的干扰、网络通讯的时滞与丢包等。控制理论的一个核心内容在于如何有效的应对被控系统的多源不确定性，设计出更加稳定、灵活、高效的控制策略。自适应控制从上世纪五十年代萌芽[2]，在八十年代初迎来突破[3,4]，经过逾半个世纪的发展，已形成了一套丰富的算法、设计框架和解析理论，成为非确定性系统控制的一类代表性方法。

在网络化时代，对非确定性网络系统动态特性的分析以及控制方法的研究兼具理论指导意义和实践应用价值。

1.1.1 多智能体系统的分布式控制

多智能体系统 (Multi-agent System, MAS) 是指由多个具备感知、计算和决策等智能的个体组成的网络化系统，可用于刻画自然界和生产生活中的许多复杂对象或系统，如蜂拥的鸟群，团体运动中的运动员，编队飞行的无人机系统等等。多智能体系统的

一个显著特点在于信息的分布式存储、传输和处理：每个智能体从网络中获取到部分节点（通常称为邻居节点）的信息，通过对局部信息（自身信息和邻居信息）进行分析，做出相应的决策。多智能体的分布式控制是指基于实际问题背景，通过设计智能体处理局部信息进而执行决策的机制，使全局系统涌现出整体的某种现象或性质，如一致性[5]，蜂拥[6]，编队[7]等。下面我们从一致性控制问题和编队控制问题两方面简要回顾一下多智能体系统分布式控制的发展历程。

一致性控制

多智能体系统一致性一般指系统中所有个体的状态达到统一，这里的状态代表我们所关注的研究对象的某个或某些指标，如倒立摆的幅角[8]，Kuramoto 振子的相位[9]，二阶系统的位移和速度[10]等。一致性的研究可以追溯到1974年，美国统计学家 Morris H. DeGroot 在研究一个群体协作环境下的统计推断任务时，首次引入一致性的概念[11]：假设群体中的每个个体对于某个未知参数有自己主观猜测的概率分布，通过交换信息和协作可以使个体持有的概率分布趋于一致。1995年，匈牙利科学家 Tamás Vicsek 等提出了离散时间的多机器人运动模型，即著名的 Vicsek 模型[12]。Vicsek 模型中所有机器人具有相同的速度大小和不同的初始运动方向，每个机器人下一时刻的运动方向为自身和邻居运动方向的平均值，经过数次迭代后所有机器人的运动方向趋同。Vicsek 运动模型的提出极大地激发了科学家们对群体一致性行为的研究兴趣。

进入新世纪，许多具有深远影响的研究工作如雨后春笋般出现。2003年，宾夕法尼亚大学 Ali Jadbabaie 团队首次给出了 Vicsek 模型的理论解释，并给出了无领导者一致性和领导跟随一致性两种情形下的收敛性证明[13]。2004年，美国科学家 Reza Olfati-Saber 和 Richard M. Murray 研究了固定或切换有向通讯拓扑下多智能体系统的一致性，指出了一致性收敛和通讯拓扑代数连通度之间的关系，并分析了通讯时滞对一致性的影响[14]。2005年，美国加州大学河滨分校任伟团队揭示了有向生成树结构对于一致性的关键作用[15]。2010年，东南大学虞文武团队给出了二阶多智能体系统一致性的充分必要条件[10]，同年北京大学的李忠奎等提出了基于通讯拓扑代数连通度的线性多智能体系统一致性控制器设计思路[16]。

在研究发展初期，一致性问题可粗略的分为无领导者一致[17, 18]和领导跟随一致（也称一致跟踪）[19–21]：前者指网络中没有参考信号（领导者）的前提下，智能体自发地趋于一致；后者指网络中有一个领导者的前提下，所有其他的智能体（跟随者）通过协作一致地跟踪上领导者。随着研究工作的深入，许多一致性控制的延伸问题相

继涌现，多个领导者并存时的包含控制问题[22–28]是其中的一个代表。在包含控制问题中，跟随者一般不再刻意寻求一致，而是希望移动到多个领导者所构成的凸包中，这一生动的群体行为在某些特定场合具有重要的价值。比如考虑一个多机器人系统，通过为部分个体（领导者）配备必要的声纳装置来探测有危险性的障碍，同时对剩余个体（跟随者）施加包含控制器，即可实现整个系统的安全避障[22]。

平均跟踪问题是近年来的另一个研究热点[29–35]：假设每个智能体在本地获得一个外部参考信号；在隐私保护的前提下，研究如何通过设计分布式协议使智能体一致追踪到所有参考信号的平均值。当考虑平均跟踪问题和其他协同控制问题的关系时，它很自然地可以理解为一致和一致跟踪问题的延伸。另外，平均跟踪问题也可以认为是一类特殊的包含问题：领导者（外部参考信号）和跟随者数目相同；领导者和跟随者之间的通讯具有一对一的特殊结构（隐私保护）；跟随者最终的状态一致，并跟踪到领导者的凸包（外部参考信号的平均值）。当注意到平均跟踪问题中通常将智能体自身的动力学考虑在内，平均跟踪控制也可认为是动态平均一致算法[36–38]的一种推广：动态平均一致算法研究中假设智能体为理想的积分器系统。最后，平均跟踪问题也作为一个子环节，出现在随后要介绍的编队控制[39]以及分布式优化问题中[40]。

此外，注意到实际网络系统中个体通常存在异质性，具有较高维自由度以及决策空间的领导者也尤为常见，近年来高维领导者的输出一致跟踪控制问题[41–43]得到部分学者的关注。该问题指通过设计协作协议，使跟随者一致追踪到领导者的部分输出信息，具有一定的实际意义。

从一致到编队

编队控制是一类具有极强应用背景的网络系统控制问题，如无人机的编队飞行、舰艇的编队航行、智能交通系统、机器人的编队搜救等。编队控制可以直观地理解为驱使多个智能体的运动轨迹在相空间中形成或保持一定的几何形状。近年来，根据网络中个体运动特性及对网络通讯约束的不同，学者和工程师们对不同的编队问题展开了广泛的研究，相关的综述文献包含[44–46]等。

实现编队的方法较多，如基于一致性的方法[47]、变结构方法[48]、势能函数法[49]等。其中，伴随着一致性研究的发展和深入，基于一致性的编队控制方法因具有较好的可分布式特性而得到广泛的关注。在这个方向上，根据编队任务设定的不同，相关研究可以粗略地分为固定编队[47, 50]、时变编队(TVF)[51, 52]和时变编队跟踪(TVFT)[51, 53–56]，其中后两者可以认为是固定编队问题的推广。文献[51]通过引入

有限时间一致性控制方法，研究了一阶积分器多智能体系统的 TVF/TVFT 控制，其中假设目标编队偏移的速度信息为局部已知信息。文献[50]考虑了二阶积分器多智能体系统在存在网络通讯时滞时的编队控制方法，基于频域分析提出了一类依赖于时滞的渐近编队算法。近年来，针对高阶的时不变多智能体系统，北京航空航天大学董希旺教授团队在相关著作[52, 54]中分别给出了无领导者时 TVF 控制和带有多个领导者时 TVFT 控制的充分必要条件，并在文献[57]中给出了有向切换拓扑条件下实现编队的充分必要条件。此类充分必要条件的主要优势在于引入了编队可行性条件的概念，消除了对目标编队偏移的速度信息的依赖性，同时也为控制整个队形的动力学行为提供了额外的自由度。在此基础上，线性多智能体系统的时变编队控制方法逐步得到完善，如基于输出反馈的输出编队跟踪控制[56]，非周期采样和通讯时滞影响下的分群编队控制[58]等。

另一方面，对于非线性多智能体系统编队控制问题的研究尚不丰富，我们在这里简要综述下已有的相关成果。针对一阶非线性系统，文献[59]利用迭代学习控制理论研究了带有仿射控制输入时的编队控制方法。文献[60]通过结合模糊逻辑和强化学习理论，提出了一类最优编队控制方法。对于二阶非线性系统，文献[55, 61]分别研究了基于神经网络的自适应输出反馈编队控制和编队跟踪控制。当非线性函数满足局部 Lipschitz 条件时，文献[62]提出了一类非光滑的领导跟随渐近编队控制方法。对高阶非线性系统，文献[63]通过设计干扰观测器的方法，研究了同样带有 Lipschitz 非线性和未知干扰的多智能体系统的 TVFT 问题。最近，文献[64]考虑了带有匹配非线性和干扰的多智能体系统的鲁棒 TVFT 问题，其中假设非线性项满足有界条件。

1.1.2 从分布式控制到分布式优化

伴随着“互联网+”和人工智能的高速发展，人们在生产生活中所面临的许多优化问题逐渐呈现出大规模、多目标、强耦合等特点。传统的优化理论与集中式计算框架已无法满足现实生活的需求。分布式优化的目标在于通过网络系统中多个智能体之间的协作来求解一个全局层面的优化问题，换言之，将求解一个大规模优化问题的任务分配给多个智能个体来完成。与集中式优化相比，分布式优化通常展现出更好的可扩展性、鲁棒性、以及隐私保护、并行计算等特点[65]。在应用方面，分布式优化理论正逐步被应用于机器学习[66]、智能电网[67]等领域，拥有广阔的应用前景和重要的研究价值。

分布式优化理论研究的广泛开展普遍认为始于斯坦福大学 Stephen P. Boyd 等关

于交替方向乘子法在分布式优化和统计学习中的系统应用的著作[68]，以及亚利桑那州立大学 Angelia Nedić 团队在其著作[69, 70]中的突出贡献。文献[69]首次提出了基于次梯度和一致性的分布式优化算法，在通讯图权重平衡、次梯度有界等假设下，证明了智能体对全局最优解的渐近估计；随后文献[70]中提出了基于投影次梯度和一致性的方法，将前述框架推广到带有有界约束的情形。在这些前期工作的基础上，许多分布式优化问题及算法被相继提出。从方法论的角度，典型的分布式优化算法包含对偶分解[71]，交替方向乘子法[68]、多智能体或神经网络动力学[72, 73]、鞍点动力学[74, 75]，平均梯度跟踪[76, 77]等。从算法实现的角度，现有方法可粗略地分为连续时间算法和离散时间算法，其中连续时间算法可由电子电路等硬件实现；离散时间算法则更容易在计算机和数字化系统中应用。

伴随着网络系统控制理论的发展，从控制的角度思考分布式优化问题激发了国内外学者广泛的研究兴趣。以连续时间算法为代表，控制理论中针对连续动力系统的经典成果在分布式优化领域得到了广泛的应用，如 Lyapunov 稳定性[74, 78]、LaSalle 不变原理[66, 79]、有限/固定时间一致性[80–82]、抗干扰[80, 81]、奇异摄动[67, 83]等。与离散时间算法不同，连续时间的算法可以将优化问题从小步长的选取工作中解脱出来，同时保证优化算法的一些高阶特性，如适应性、鲁棒性、有限或固定时间收敛性等。反过来，连续时间分布式优化算法的研究和发展也为连续系统的控制和优化提供了有力的工具。如近期东南大学王翔宇团队在基于非光滑控制和干扰观测器理论，研究了噪声环境下积分链多智能体系统的有限时间分布式优化算法，并将该算法应用于多个液压机械臂的最佳校准任务中[81]。再如北京科技大学梁舒团队和加利福尼亚大学尔湾分校 Solmaz S. Kia 分别在文献[83]和文献[67]中将奇异摄动的思想引入一类带有全局约束的分布式优化（资源配置）问题中，为智能电网的优化调度问题提供了一定的指导。

实际上，分布式资源配置问题（也称为经济调度问题）与分布式优化问题既紧密联系，又相互独立，呈现出一些不同的特点。在资源配置问题中，网络系统中的每个个体有一定数量的本地资源和一个代价函数；所有个体不再以协同一致优化本地代价函数的和函数为目标，而是在保持网络内部资源总量不变的前提下，通过协作进行网络资源的内部流动与分配，从而使网络整体的累计代价达到一个最优值。早期关于最优资源配置的工作同样是集中式的，即基于一个中心节点来收集和处理网络中所有节点的数据[84]。集中式方法对于大型的网络系统来讲通常无法保证算法和通讯的效率，对于有隐私保护要求的应用场景也并不友好。与分布式控制和优化相似，分布式资源

配置方法强调局部通讯和全局的联动，允许网络个体仅与部分邻居进行交互来实现全局的最优资源配置。分布式框架下的资源配置方法更具灵活性和鲁棒性，在近年来得到了广泛的关注[67, 85–89]，也在诸多工程领域，如云计算、电力系统、交通系统等得到了一定的应用和推广。

尽管分布式优化和资源配置领域已涌现出许多深刻的成果，但需注意到仍然有许多问题亟待解决。比如，绝大多数工作假设智能体的通讯拓扑为无向连通[69, 85, 88, 90–99]，或有向平衡的[67, 74, 83, 86, 87, 89, 100]。而平衡图在现实生活中并不常见，对于更为一般的非平衡有向图，现有的方法和结论还比较少。再比如，在分布式优化问题中，每个个体并非要优化本地的代价函数，而是要优化网络全局的和函数。然而，绝大多数现有工作均假设局部代价函数为凸[69, 74–77, 90, 91, 100]。近年来，随着研究的深入，已有少数工作注意到在应用凸分析理论求解分布式优化问题时，只要全局代价函数满足凸性即可，而局部代价函数的凸性并非必要条件[66, 92]。在此方向上，对局部代价函数非凸、甚至全局函数非凸时的分布式优化问题的研究仍然有待进一步的深入和推广。

1.1.3 走向完全分布式——自适应网络耦合调节

分布式控制或分布式优化的一个核心话题在于如何消除控制器或优化算法对全局信息的依赖性。一类典型的全局信息是网络通讯拓扑图所对应的 Laplacian 矩阵的代数信息（特征值或特征向量等），而对此类信息的依赖性在相关领域中广泛存在，如一致性控制[16, 101, 102]，TVF/TVFT 控制[52–56]，分布式优化或资源配置[66, 67, 74, 76, 77]。需要注意的是在实际的网络系统中，尤其当网络规模较大时，Laplacian 矩阵特征值或特征向量的计算并不平凡。而对此类全局拓扑信息的依赖性显然制约了分布式算法的灵活性和高效性。

针对此类问题，东南大学虞文武及其合作者在文献[103]中研究了复杂网络的自适应同步控制问题。通过设计网络中节点之间耦合权重的时变调节机制，有效地实现了控制协议与网络通讯拓扑代数连通度之间的相互解耦，并在文献[104]中将所得结果进一步延拓至有向复杂网络中。同一时期，在一致性控制领域，北京大学李忠奎团队在文献[105]中面向线性多智能体系统，深入研究了基于点和基于边的分布式自适应权重调节方法。我们知道，节点和边是一个网络系统中相互依存的两类对象。从不同的角度设计，基于点或边的设计方法呈现出不同的特点和延伸性。如李忠奎团队在文献[105]的基础上进一步延拓，在文献[106]提出了一类基于边的 Lipschitz 非线性多智能

体自适应一致性控制策略，而在文献[107]提出了一类基于点的有向多智能体网络的自适应跟踪控制器。这一时期的一系列工作激发了学者对完全分布式设计的研究热情，如完全分布式事件驱动一致性[108]、包含控制[109]、TVF 控制[27, 110]、分布式优化[66]等。

如今，完全分布式系统的设计和分析正成为网络系统的一个研究热点。其中不难发现，自适应控制作为一个有力工具，在实现完全分布式这一目标中起到至关重要的作用：通过智能体之间有计划地、自发地强化彼此之间的耦合强度，达到消除分布式协议对通讯拓扑代数连通度等全局信息的依赖性的目的。在理想的分布式自适应系统框架下，只需验证被控网络系统满足某种特定的连通性条件，即可设计相应的协同任务和方案，显然比传统的静态分布式控制更加智能和高效。

1.2 本文的主要内容和创新点

1.2.1 主要研究内容

基于1.1小节中的讨论，本文主要研究了非确定性网络系统分布式自适应控制理论与方法。这里的非确定性主要是指网络中个体含有未建模动态和（或）网络通讯拓扑代数信息未知，同时部分研究内容考虑了网络中存在通讯时滞、通讯拓扑切换、智能体状态不可测、外部噪声干扰等非确定性因素时的控制策略。全文分为六个章节，其中前两章分别给出绪论和理论基础。第三章至第五章为本文主体部分，分别从一致性控制、编队控制、分布式优化三个层面展开，给出了分布式自适应控制与优化的求解思路和理论证明。同时，结合工程实践，以飞行器、智能电网、弹簧系统、带有周期性干扰的非线性系统等为背景给出了一系列仿真实验，验证了理论方法的有效性。第六章对本文进行了总结和展望。全文各章节具体内容如下：

第一章我们首先介绍了网络系统控制的背景，接着从分布式控制和分布式优化两个方面回顾了多智能体系统的发展历程和前沿热点问题，随后介绍了完全分布式的概念、研究意义和研究现状；进而阐述了本文的主要内容和创新点。紧接着，第二章介绍了本文的理论基础，包含代数图理论，神经网络自适应控制和非光滑分析初步。

第三章首先考虑了一类带有匹配未建模动态和未知干扰的非线性多智能体系统：

$$\dot{x}_i = Ax_i + B(u_i + f_i(x_i) + d_i(t)), \quad i \in \mathcal{I}_N,$$

$$\dot{x}_{N+l} = Ax_{N+l} + Bu_{N+l}, \quad l \in \mathcal{I}_M.$$

首先针对 $l = 0$ 时的无领导者一致性问题，融合神经网络自适应控制方法和自适应网络耦合调节方法，提出了一类新的分布式自适应控制框架：

$$u_i = \alpha_i(t)F\delta_i + \beta_i(t)\text{sgn}(F\delta_i) - \hat{W}_i^T(t)S_i(x_i),$$

其中反馈信号 δ_i 可初步理解为智能体 i 的局部信息。在不依赖于网络通讯拓扑代数连通度的情况下，通过设计控制器中各项时变系数的自适应调节方法，给出了该方法求解网络渐近一致性的严格证明。之后，我们将该方法延拓到 $l = 1$ 时的单领导者跟踪和 $l > 1$ 时的多领导者包含问题中，证明了所提框架具有一定的普适性。

更进一步，我们考虑了一类带有匹配未建模动态的网络系统的平均跟踪问题，其中网络节点动力学如下：

$$\dot{x}_i = Ax_i + B(f_i(x_i) + u_i). \quad (1.2.1)$$

我们希望所有的智能体能跟踪到一系列外部信号 r_i 的平均值，其中

$$\dot{r}_i = Ar_i + Bg_i.$$

在每个智能体只能获取一个外部信号的前提下，我们提出了一类具有隐私保护特点的分布式控制方法：

$$u_i = K(x_i - r_i) + c\text{sgn}(K(x_i - p_i)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{ij}\text{sgn}(K(p_i - p_j)) - \hat{W}_i^T S_i(x_i).$$

通过引入神经网络和一类具有对称性的耦合增益 c_{ij} ，建立了平均跟踪的充分性条件。接着，我们在耦合增益项进一步引入自适应调节机制，消除了该控制方法对如网络通讯拓扑代数连通度等全局信息的依赖性。

接下来，我们研究了一类带有高维领导者的一致跟踪控制问题，其中领导者的动力学刻画为：

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = \hat{A}x_0(t) + g(x_0(t), t), \\ y(t) = \hat{C}x_0(t). \end{cases}$$

而跟随者受到未建模动态、未知时变时滞和未知干扰等的影响：

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f_i(x_i(t)) + h_i(x_i(t - \tau_i(t))) + d_i(t) + u_i(t).$$

通过分布式观测器和神经自适应控制器的设计，我们提出了基于观测误差补偿和跟踪

误差反馈的控制方案: $u_i(t) = u_i^{\text{ot}}(t) + u_i^{\text{et}}(t)$ 。在合理的假设下, 建立了跟随者网络对领导者实现有界跟踪的充分性条件, 并验证了所提方法对系统非确定性的鲁棒性。

第四章首先考虑了带有匹配未建模动态的网络系统(1.2.1)的 TVF 控制问题, 在网络通讯拓扑为无向图的前提下, 提出了两类带有神经网络补偿的分布式自适应 TVF 控制器, 分别为基于点的完全分布式控制:

$$u_i = K_0 x_i + K_1 d_i + \alpha_i(t) K_2 \delta_i + \beta_i(t) \text{sgn}(K_2 \delta_i) - \hat{W}_i^T(t) S_i(x_i),$$

和切换拓扑下基于边的分布式控制:

$$u_i = K_0 x_i + K_1 d_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \alpha_{ij}(t) K_2 (d_i - d_j) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \beta_{ij}(t) \text{sgn}(K_2 (d_i - d_j)) - \hat{W}_i^T(t) S_i(x_i).$$

此部分内容是本文第二章和文献[111]中一致性问题的自然推广。

进一步, 我们研究了有向通讯拓扑下的分布式自适应 TVF/TVFT 控制问题。鉴于有向通讯的复杂性, 我们考虑经典的领导跟随线性多智能体系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= Ax_l, & l \in \mathcal{I}_M, \\ \dot{x}_i &= Ax_i + Bu_i, & i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M. \end{aligned}$$

我们首先从 $M = 0$ 时的 TVF 问题入手, 提出了一类基于有向支撑树的分布式自适应控制器:

$$\begin{aligned} u_i &= K_0 x_i + K_1 d_i + K_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} \alpha_{ij}(t) (d_i - d_j) \\ \alpha_{ij}(t) &= \begin{cases} a_{ij}, & \text{若 } e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}}, \\ \bar{a}_{k+1, i_k}(t), & \text{若 } e_{ji} \in \bar{\mathcal{E}}. \end{cases} \end{aligned}$$

通过设计适当的沿有向支撑树的权重更新率, 保证了 TVF 误差的渐近收敛。接着, 针对 $M \geq 1$ 时的 TVFT 问题, 提出了一类新的基于广义有向支撑树的控制方法, 通过引入一个辅助多智能体系统, 实现了对领导者任意凸组合进行编队跟踪的控制方案。

第五章首先研究了强连通图上的一类标准 (无约束) 的分布式优化问题:

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} F(z) \triangleq \sum_{i=1}^N f_i(z).$$

然而, 与大多数现有文献不同的是, 我们对局部函数 $f_i(\cdot)$ 的凸性不作要求。针对权重

平衡图，我们提出了一类基于有向支撑树的分布式自适应优化算法：

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -\gamma_1 \nabla f_i(x_i) - \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} \alpha_{ij}(t)(x_i - x_j) - \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} w_{ij}(y_i - y_j) \\ \dot{y}_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} \alpha_{ij}(t)(x_i - x_j) \\ \alpha_{ij}(t) &= \begin{cases} w_{ij}, & \text{若 } e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}}, \\ \bar{a}_{k+1,i_k}(t), & \text{若 } e_{ji} \in \bar{\mathcal{E}} \end{cases}\end{aligned}$$

通过设计适当的沿有向支撑树的权重更新率，保证了智能体对全局最优解的渐近估计。针对权重非平衡图，我们给出了一个基于有向支撑树的有限时间调平算法，使其在有限时间内转化为一个权重平衡图，进而可用前述分布式自适应优化算法进行求解。

接着，我们考虑了强连通权重平衡图上的分布式资源配置问题：

$$\min_{x \triangleq \text{col}(x_1, \dots, x_N)} f(x) \triangleq \sum_{i=1}^N f_i(x_i), \quad \text{s.t. } \sum_{i=1}^N x_i = d.$$

其中 d 为已知的待分配的资源总量。为了移除现有文献中全局 Laplacian 矩阵特征值的先验知识，我们发现一类非确定鞍点动力学具有重要的指导意义：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\kappa_1(\nabla f(x) + y) \\ \dot{y} &= x - D - (\Upsilon \otimes \mathbf{I}_n)y - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)z \\ \dot{z} &= (\Upsilon \otimes \mathbf{I}_n)y\end{aligned}$$

其中 Υ 为满足行和为零的先验未知的矩阵。从该非确定动力系统出发，我们分别提出了基于有向支撑树和基于点的两种分布式自适应资源配置方法，其核心思想是通过设计自适应变量来演化得到矩阵 Υ ，同时保证闭环系统的稳定性和资源配置的最优性。

1.2.2 主要创新点

本文主要研究了非确定性网络的分布式控制方法，考虑了一致性、跟踪、包含、编队、优化、资源配置等问题。本文的研究丰富了分布式自适应控制的理论与方法，另外将自适应控制的思想引入到分布式优化和资源配置问题中，提供了一些新思路。本文的主要创新点如下：

(1) 研究了一类带有匹配未建模动态和外部干扰的多智能体系统，首次提出了基于神经网络的完全分布式控制框架，优化了现有文献中的一致性、跟踪、包含控制方

法，进一步提升了控制设计的灵活性。并将该框架延拓至求解平均跟踪与时变编队问题，验证了所提框架的普适性。

如何在处理系统个体动力学行为的不确定性的同时，避免控制设计对系统全局信息的依赖性，是带有动力学非确定性的多智能体网络控制的一个重点，也是一个难点。基于这个问题，我们研究发现自适应网络耦合调节与神经网络自适应补偿可以同时进行，进而提出了一种基于神经网络的完全分布式自适应控制框架。该框架不依赖于系统通讯拓扑的特征值、领导者的未知输入上界等全局信息，优化了现有文献中的多智能体一致性、跟踪和包含控制方法，进一步提升了控制设计的灵活性。借助 Barbalat 引理和非光滑分析，我们严格证明了被控多智能体系统的一致性、跟踪和包含误差的渐近收敛。进而，我们将所提框架延拓至求解平均跟踪与时变编队问题，验证了所提框架的普适性：在平均跟踪问题中，通过引入神经网络的逼近能力，放宽了相关文献中未知非线性函数需满足特定的类 Lipachitz 条件的假设；在编队问题中，提出了基于神经网络的自适应时变编队控制策略，分别给出了基于节点和基于边的设计方法，提高了控制器的灵活性，且保证了编队误差的半全局渐近收敛。

(2) 研究了一类带有高维不可测领导者的非线性时滞多智能体的跟踪问题，针对更一般的时变时滞类型，提出了一种具有鲁棒性的神经自适应控制策略。

我们首次在带有高维领导者的跟踪控制问题中考虑了系统时滞的影响。考虑了一类异质非线性的多智能体系统，其中领导者的动力学模型为一个高维的 Lipschitz 型非线性系统，而跟随者的动力学同时受限于未建模动态和未知的时变状态时滞。首先基于相关文献，设计了对领导者状态的分布式观测协议，实现了各个跟随者之间的解耦和。之后通过设计合理的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，有效中和了系统未知时变时滞的影响。同时，利用径向基神经网络的逼近能力，对智能体的未建模动态进行了补偿，并简化了神经网络权重自适应更新率。最终保证了跟随者对高维领导者的有效跟踪，进而实验验证了所提的神经网络自适应控制策略对未知时滞和外部干扰的鲁棒性。

(3) 针对有向通讯拓扑的网络系统，在通讯拓扑特征值未知的前提下，提出了一类新的基于有向支撑树的分布式自适应时变编队方法，系统地求解了无领导者编队和带有多个领导者的编队跟踪问题。

相比于无向通讯的网络系统，有向网络的分布式自适应控制要复杂得多，在现有的编队问题中的应用也十分受限。在通讯拓扑特征值未知的前提下，我们将传统的有向支撑树自适应一致性方法推广到编队问题中，提出了一类新的编队可行性条件。与相关文献相比，从一个不同的角度给出了编队问题的充分必要条件，揭示了有向支撑

树在有向网络控制中的关键作用。

(4) 提出了一个基于有向支撑树的分布式自适应优化框架，所提算法不依赖于局部函数的凸性、通讯图的权重平衡性、衰减步长、或 Laplacian 矩阵的代数信息，具有完全分布式特性。进一步，通过研究一类非确定性的鞍点动力学，提出了两个分别基于有向支撑树和基于节点的分布式自适应资源配置算法。与本领域相关文献相比，所提方法不依赖于全局网络 Laplacian 矩阵的特征值信息。

权重非平衡图上的分布式优化问题一直是一个重难点。针对一般的强连通有向图，我们提出了带有权重调平机制的分布式自适应优化框架。对于平衡图，我们沿一个有向支撑树设计自适应耦合调节机制来推动智能体之间的一致性，进而提出了一个新的类鞍点动力学，放宽了经典鞍点算法对全局通讯拓扑特征值的依赖性；对于非平衡图，我们提出了一个有限时间的权重调平算法，在有限时间内得到一个平衡图，从而可由上述类鞍点算法进行分布式优化求解。我们发现可以沿一个有向支撑树来调平一个强连通图，这也使得所提的两个算法统一起来，构成了一个完整的基于有向支撑树的分布式自适应优化框架。同时，提出的权重调平算法实现了有限时间内实数域的权重调平，而相关文献只能在整数域实现有限时间的权重调平。另外注意到，即使针对无向通讯图，现有文献中几乎没有出现分布式自适应资源配置算法。我们从权重平衡图入手，通过研究一类非确定性鞍点动力学，将自适应耦合调节机制引入经典的资源配置算法中。通过辨识出两类网络层面的严格凸条件和多次使用 Peter-Pual 不等式，我们在 Lyapunov 框架下提出了基于有向支撑树和基于节点的两种自适应资源配置算法，并严格证明了其渐近收敛性。所提算法不需要充分小或单位步长，且不依赖于全局 Laplacian 矩阵的特征值信息。

本文部分结果发表在国际刊物 IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Asian Journal of Control, IET Control Theory & Applications, IEEE Transactions on Network Science and Engineering, IEEE Transactions on Control of Network Systems 等，部分结果已投稿 IEEE Transactions on Automatic Control, IEEE Transactions on Network Science and Engineering 等期刊。具体详见作者发表论文清单。

第二章 理论基础

2.1 代数图论

一个赋权有向图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 包含一个节点集合 $\mathcal{V} = \mathcal{I}_N$, 一个有向边的集合 $\mathcal{E} = \{e_{ij} | i \rightarrow j\}$ 其中 $i, j \in \mathcal{I}_N$ 且 $i \neq j$, 和一个元素非负的邻接矩阵 $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 其中 $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $e_{ji} \in \mathcal{E}$ 。如果 $e_{ij} \in \mathcal{E}$, 称节点 i 是节点 j 的一个入邻居, 记为 $i \in \mathcal{N}_{\text{in}}(j)$ (相应地, j 称为 i 的一个出邻居: $j \in \mathcal{N}_{\text{out}}(i)$)。图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵定义为 $\mathcal{L} = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 其中 $l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$, $l_{ii} = \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik}, i \in \mathcal{I}_N$ 。图 \mathcal{G} 的一条路径为连接图中一对节点的一系列边集。若对 \mathcal{G} 中任意一对节点 i 和 j , 总存在从 i 到 j 的一条有向路径, 则称 \mathcal{G} 是强连通的; 相应的, 若忽略边的方向, 总存在从 i 到 j 的一条路径, 则称 \mathcal{G} 是弱连通的。若 $\sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} a_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{out}}(i)} a_{ji}, \forall i \in \mathcal{V}$, 则称图 \mathcal{G} 是权重平衡 (或平衡) 的。特别的, 若 \mathcal{A} 为对称矩阵, 此时称 \mathcal{G} 为一个无向 (或双向) 图; 此时若任意一对不同节点间总存在一条路径, 则称 \mathcal{G} 是连通的。无向图中节点 i 的邻居集合可简记为 \mathcal{N}_i 。若 \mathcal{A} 中边权均为 1, 此时也称 \mathcal{G} 是一个无权图。在无向无权图 \mathcal{G} 中, 若为每一条边编号并指定一个方向, 可定义 \mathcal{G} 的一个关联矩阵 $E = (E_{ik}) \in \mathbb{R}^{N \times |\mathcal{E}|}$ 如下: $E_{ik} = 1$ 若 i 是第 k 条边的起点; $E_{ik} = -1$ 若 i 是第 k 条边的终点; 否则 $E_{ik} = 0$ 。易知, 对任一关联矩阵 E , 总有 $\mathcal{L} = EE^T$ 。

图 \mathcal{G} 包含一个有向支撑树, 若存在 \mathcal{G} 的一个子图 $\bar{\mathcal{G}}(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{A}})$ 满足: 存在一个根节点 (无入邻居); 从根节点出发到任一其他节点有且仅有一条有向路径。在 $\bar{\mathcal{G}}$ 中, 除根节点外的每个节点有且仅有一个入邻居。另外, 至少包含一个出邻居的节点称为蒂节点, 无出邻居的称为叶节点; 若根节点的所有出邻居均为叶节点, 也称根节点为中心节点。不失一般性, 总假设节点 1 为 $\bar{\mathcal{G}}$ 的根节点。记 i_k 为节点 $k+1$ 在 $\bar{\mathcal{G}}$ 中唯一的入邻居, $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。则有 $\bar{\mathcal{E}} = \{e_{i_k, k+1} | k \in \mathcal{I}_{N-1}\} \subseteq \mathcal{E}$ 。相应的, $\bar{\mathcal{L}}$ 是 $\bar{\mathcal{G}}$ 的 Laplacian 矩阵, $\bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(i)$ 表示 $\bar{\mathcal{G}}$ 中节点 i 的出邻居集合。需要注意, 任意无向图都包含有向支撑树。

本文仅考虑不含自环和多重边的图; 若无特别指出, “图”通常指赋权有向图。另

外，当我们谈论多智能体系统时，通讯图上的权重也表示智能体之间的耦合强度，二者没有本质区别。

引理 2.1.1 假设图 \mathcal{G} 包含一个有向支撑树 $\bar{\mathcal{G}}$ ，则以下结论成立：

- 1). 图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 有一个单重零特征值，对应的右特征向量为 $\mathbf{1}_N$ ；其余的特征值都具有正实部。
- 2). 定义 $\Xi \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ 如下：

$$\Xi_{kj} = \begin{cases} -1, & \text{若 } j = k + 1, \\ 1, & \text{若 } j = i_k, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

则存在唯一的矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 使得 $\Xi \mathcal{L} = Q \Xi$ 。

- 3). 矩阵 Q 的特征值恰为矩阵 \mathcal{L} 的非零特征值；进一步得 $Q^T Q > 0$, $Q^s > 0$, $\underline{\lambda}(Q^s) = \lambda_2(\mathcal{L}^s)$ 。
- 4). 矩阵 Q 的具体形式可由 $Q = \tilde{Q} + \bar{Q}$ 给出：

$$Q_{kj} = \underbrace{\sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}} (\tilde{\mathcal{L}}_{k+1,c} - \tilde{\mathcal{L}}_{i_k,c})}_{\tilde{Q}_{kj}} + \underbrace{\sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}} (\bar{\mathcal{L}}_{k+1,c} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,c})}_{\bar{Q}_{kj}}, \quad (2.1.2)$$

其中 $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \bar{\mathcal{L}}$, $\bar{\mathcal{V}}_{j+1}$ 表示以节点 $j+1$ 为根节点的 $\bar{\mathcal{G}}$ 的子树部分。另外，矩阵 \bar{Q} 通过如下形式与 $\bar{\mathcal{L}}$ 相关联：

$$\bar{Q}_{kj} = \begin{cases} \bar{\mathcal{L}}_{j+1,j+1}, & \text{若 } j = k, \\ -\bar{\mathcal{L}}_{j+1,j+1}, & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

证明. 命题1). 见[112, 引理2.4]；命题1). 是有向支撑树 $\bar{\mathcal{G}}$ 的存在性的充分必要条件。命题2). 中矩阵 Q 的存在性由[113, 引理9]保证；另由于 Ξ 行满秩，易得 Q 的唯一性。命题3). 是[113, 引理10]的一个特例。接下来，我们给出命题4). 的证明：

受文献[104, 114]的启发，我们引入一个辅助矩阵 J 。定义 $J \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ 如下：

$$J_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \in \bar{\mathcal{V}}_{k+1}, \\ 1, & \text{其他.} \end{cases}$$

命题4). 的证明分为三步：第一步证明 $\mathcal{L} = \mathcal{L} J \Xi$ ；第二步证明 $Q = \Xi \mathcal{L} J$ ；第三步证明 $\Xi \mathcal{L} = Q \Xi$ 和(2.1.3)。

第一步：记 $X = J\Xi$ 。则 $X_{ij} = \sum_{k=1}^{N-1} J_{ik}\Xi_{kj}$, $i, j \in \mathcal{I}_N$ 。我们通过对不同的 j 进行讨论来分析矩阵 X :

情形1: 节点 j 为根节点。则 $X_{i1} = \sum_{k=1, i_k=1}^{N-1} J_{ik}$ 。

由于 $J_{1k} = 1, \forall k$, 则有 $X_{11} = \bar{\mathcal{D}}_2(1)$, 即 $\bar{\mathcal{G}}$ 中根节点的出度; 对于 $i > 1$, 存在唯一的 $\bar{k} \in \mathcal{I}_{N-1}$ 满足 $i_{\bar{k}} = 1$, 使得 $i \in \bar{\mathcal{V}}_{\bar{k}+1}$, 即 $J_{i\bar{k}} = 0$ 。因此, $X_{i1} = \bar{\mathcal{D}}_2(1) - 1$ 。

$$\text{综之, } X_{i1} = \begin{cases} \bar{\mathcal{D}}_2(1), & i = 1, \\ \bar{\mathcal{D}}_2(1) - 1, & i > 1. \end{cases}$$

情形2: 节点 j 是一个蒂节点。则 $X_{ij} = \sum_{k=1, i_k=j}^{N-1} J_{ik} - J_{i,j-1}$ 。

- 当 $i \notin \bar{\mathcal{V}}_j$, $X_{ij} = \sum_{k=1, i_k=j}^{N-1} J_{ik} - 1$ 。则 $\forall k$ 满足 $i_k = j$, 有 $i \notin \bar{\mathcal{V}}_{k+1}$ 。因此, $X_{ij} = \bar{\mathcal{D}}_2(j) - 1$ 。
- 当 $i \in \bar{\mathcal{V}}_j$, $X_{ij} = \sum_{k=1, i_k=j}^{N-1} J_{ik}$ 。若 $i = j$, 则 $\forall k$ 满足 $i_k = j$, 有 $J_{ik} = 1$ 。因此 $X_{jj} = \bar{\mathcal{D}}_2(j)$ 。若 $i \neq j$, 存在唯一的 \bar{k} 满足 $i_{\bar{k}} = j$, 使得 $i \in \bar{\mathcal{V}}_{\bar{k}+1}$, 即 $J_{i\bar{k}} = 0$ 。则有 $X_{ij} = \bar{\mathcal{D}}_2(j) - 1$ 。

综之, 当 j 为蒂节点时, $X_{ij} = \begin{cases} \bar{\mathcal{D}}_2(j), & i = j, \\ \bar{\mathcal{D}}_2(j) - 1, & i \neq j \end{cases}$

情形3: 节点 j 为一个叶节点。则, $X_{ij} = -J_{i,j-1}$ 。

此时, $\bar{\mathcal{V}}_j = \{j\}$, 意味着 $J_{i,j-1} = 0$ 当且仅当 $i = j$ 。即有 $X_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -1, & i \neq j. \end{cases}$

综合上述情形, 矩阵 X 可以写成如下统一形式: $X_{ij} = \begin{cases} \bar{\mathcal{D}}_2(j), & i = j, \\ \bar{\mathcal{D}}_2(j) - 1, & i \neq j. \end{cases}$ 则有:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}X)_{ij} &= \sum_{k=1}^N \mathcal{L}_{ik} X_{kj} = \sum_{k \neq j} \mathcal{L}_{ik} (\bar{\mathcal{D}}_2(j) - 1) + \mathcal{L}_{ij} \bar{\mathcal{D}}_2(j) \\ &= (\bar{\mathcal{D}}_2(j) - 1) \sum_{k=1}^N \mathcal{L}_{ik} + \mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}_{ij}. \end{aligned}$$

因此, $\mathcal{L} = \mathcal{L}J\Xi$ 得证。

第二步: 记 $Y = \Xi\mathcal{L}J$ 。则有

$$\begin{aligned} Y_{kj} &= \sum_{i=1}^N (\Xi\mathcal{L})_{ki} J_{ij} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{s=1}^N \Xi_{ks} \mathcal{L}_{si} \right) J_{ij} = \sum_{s=1}^N \Xi_{ks} \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_{si} J_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_{i_k, i} J_{ij} - \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_{k+1, i} J_{ij} = \sum_{i=1, i \notin \bar{\mathcal{V}}_{k+1}}^N (\mathcal{L}_{i_k, i} - \mathcal{L}_{k+1, i}) \end{aligned}$$

其中我们分别使用了 Ξ 和 J 的定义得出最后两个等式。由于 \mathcal{L} 行和为零，我们有

$$\begin{aligned} Y_{kj} &= \sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{k+1}} (\mathcal{L}_{k+1,c} - \mathcal{L}_{i_k,c}) = \sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}} (\tilde{\mathcal{L}}_{k+1,c} - \tilde{\mathcal{L}}_{i_k,c}) + \sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}} (\bar{\mathcal{L}}_{k+1,c} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,c}) \\ &= \tilde{Q}_{kj} + \bar{Q}_{kj} = Q_{kj}. \end{aligned}$$

即 $Q = \Xi \mathcal{L} J$ 得证。

第三步：令等式 $Q = \Xi \mathcal{L} J$ 两侧同时右乘 Ξ ，得 $Q\Xi = \Xi \mathcal{L} J \Xi = \Xi \mathcal{L}$ ，则 $\Xi \mathcal{L} = Q\Xi$ 得证。为了证明等式(2.1.3)，我们按照边 $e_{i_k, k+1}$ 与子树 $\bar{\mathcal{V}}_{j+1}$ 的关系分三类讨论：

情形1： $k+1 \notin \bar{\mathcal{V}}_{j+1}$ 。则显然有 $\bar{Q}_{kj} = 0$ 。

情形2： $k+1 \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}$ 且 $i_k \notin \bar{\mathcal{V}}_{j+1}$ 。此时， k 的取值只有一种可能即 $k = j$ 。则有：

$$\bar{Q}_{kj} = \sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}} (\bar{\mathcal{L}}_{k+1,c} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,c}) = \bar{\mathcal{L}}_{k+1,k+1} = \bar{\mathcal{L}}_{j+1,j+1}$$

情形3： $i_k \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}$ 。则

- 当 $i_k = j+1$ ，

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{kj} &= \sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}} (\bar{\mathcal{L}}_{k+1,c} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,c}) \\ &= \bar{\mathcal{L}}_{k+1,i_k} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,i_k} + \bar{\mathcal{L}}_{k+1,k+1} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,k+1} = -\bar{\mathcal{L}}_{j+1,j+1}. \end{aligned}$$

- 当 $i_k > j+1$ ，

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{kj} &= \sum_{c \in \bar{\mathcal{V}}_{j+1}} (\bar{\mathcal{L}}_{k+1,c} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,c}) \\ &= \bar{\mathcal{L}}_{k+1,i_{i_k-1}} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,i_{i_k-1}} + \bar{\mathcal{L}}_{k+1,i_k} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,i_k} + \bar{\mathcal{L}}_{k+1,k+1} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,k+1} \\ &= -\bar{\mathcal{L}}_{i_k,i_{i_k-1}} + \bar{\mathcal{L}}_{k+1,i_k} - \bar{\mathcal{L}}_{i_k,i_k} + \bar{\mathcal{L}}_{k+1,k+1} = 0. \end{aligned}$$

综合所有三种情形，矩阵 \bar{Q} 亦可写成如下统一形式：

$$\bar{Q}_{kj} = \begin{cases} \bar{\mathcal{L}}_{j+1,j+1}, & \text{若 } j = k, \\ -\bar{\mathcal{L}}_{j+1,j+1}, & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

即等式(2.1.3) 得证。命题4).得证。 \square

注 2.1.1 命题4).的证明完善了文献[114]中的部分结果，其中第一步($\mathcal{L} = \mathcal{L} J \Xi$)未得到充分论证。命题2).表明 Laplacian 矩阵的信息可以通过一个类交换率完整地转移

到一个降阶矩阵 Q 中。实际上, Ξ^T 是关联于图 $\bar{\mathcal{G}}$ 的邻接矩阵。而对 \bar{Q} 中的非对角线元素, 有 $\bar{Q}_{kj} = -\bar{Q}_{jj}$ 当且仅当在 $\bar{\mathcal{G}}$ 中节点 $j+1$ 是 $k+1$ 的父节点。需要注意的是, 在文献[113]的引理 9 中, 作者讨论了一个更为一般的矩阵方程 $YZ = XY$ 的存在性条件。与之不同的是, 引理 2.1.1 显示地给出了方程 $\Xi \mathcal{L} = Q \Xi$ 的解 Q 的具体形式, 并通过(2.1.3)揭示了此解矩阵与相应的有向支撑树结构中各权重分量的联系。更进一步地, 我们将在本文第四章 4.2 节及第五章看到此联系对于基于有向支撑树的控制和优化方法的关键作用。

引理 2.1.2 ([115–117]) 假设图 \mathcal{G} 为强连通的, 则以下结论成立:

- 1). 对应于矩阵 \mathcal{L} 的零特征值, 存在一个正的左特征向量 $r = (r_1, r_2 \cdots, r_N)^T \in \mathbb{R}_+^N$ 。令 $R = \text{diag}(r_1, \cdots, r_N)$ 。则 $\hat{\mathcal{L}} \triangleq R\mathcal{L} + \mathcal{L}^T R > eq0$ 是关联于一个无向图的 Laplacian 矩阵。另外, $r = r_0 \mathbf{1}_N$, 其中 $r_0 \in \mathbb{R}^+$, 当且仅当 \mathcal{G} 是权重平衡的。
- 2). 对任意 $\varsigma \in \mathbb{R}_+^N$ 和 $x \in \mathbb{R}^N$, 以下不等式成立:

$$\min_{\varsigma^T x = 0, x \neq 0} \frac{x^T \hat{\mathcal{L}} x}{x^T x} > \frac{\lambda_2(\hat{\mathcal{L}})}{N}.$$

- 3). [Courant-Fischer] 特别地, 若 ς 取为 $\mathbf{1}_N$, 即对应于矩阵 $\hat{\mathcal{L}}$ 的零特征值的特征向量时, 以下等式成立:

$$\min_{\mathbf{1}_N^T x = 0, x \neq 0} \frac{x^T \hat{\mathcal{L}} x}{x^T x} = \lambda_2(\hat{\mathcal{L}}).$$

引理 2.1.3 ([118, 119]) 假设图 \mathcal{G} 为权重平衡的, 则以下结论成立:

- 1). $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L} = 0$; 反之也成立: 若 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L} = 0$, 则图 \mathcal{G} 为权重平衡的。
- 2). 若 \mathcal{G} 为弱连通的, 则 \mathcal{G} 也必为强连通的。

2.2 神经网络自适应控制

由于具有强大的非线性逼近能力, 神经网络模型被广泛地研究及应用, 其中最富代表性的如多层感知器(MLP)与径向基神经网络(RBFNN)。以 RBFNN 为例, 任意连续函数 $\varphi(x) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ 可由一个 RBFNN 逼近:

$$\tilde{\varphi}(x) = W^T S(x)$$

其中 $x \in \Omega_x \subset \mathbb{R}^m$, Ω_x 是一个紧致集, $W \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 是可调节的神经网络权重。 $S(x) = (s_1(x), s_2(x), \dots, s_q(x))^T$ 包含隐含层神经元 Gaussian 激活函数 $s_i(x) = \exp\left(-\frac{(x-v_i)^T(x-v_i)}{b_i^2}\right)$, $i = 1, 2, \dots, q$, 其中 $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im})^T \in \mathbb{R}^m$, $b_i \in \mathbb{R}$ 分别表示第 i 个隐层神经元的中心和响应域宽度。 q 表示隐层神经元个数。

万能逼近定理[120]指出, 通过选择足够多的隐层神经元, RBFNN (或 MLP) 能够在一个紧致集上以任意精度逼近任意连续函数。对于 $\varphi(x)$, 存在一个理想的权重矩阵 $W^* \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 使得

$$\varphi(x) = W^{*T} S(x) + \varepsilon(x)$$

其中 $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^n$ 为逼近误差, 且有

$$\|\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon, \forall x \in \Omega_x$$

这里 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ 为一个预先设定的误差上界。理论上, W^* 定义于使对所有 $x \in \Omega_x$ 均最小化 $\|\varepsilon(x)\|$ 的矩阵 W :

$$W^* := \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{q \times n}} \left\{ \sup_{x \in \Omega_x} \|\varphi(x) - W^T S(x)\| \right\}.$$

神经网络自适应控制 (或简称神经自适应控制) 是指将神经网络的非线性逼近能力引入控制器设计中, 实现对系统非线性动态的有效辨识和补偿, 进而达到相应的控制目的。通常情况下, 理想的权重矩阵 W^* 需要通过估计得到, 而不能直接用于控制器设计。

2.3 非光滑分析初步

考虑一个带有不连续右端的向量微分方程:

$$\dot{z} = g(z, t) \tag{2.3.1}$$

其中 $g : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测且局部本质有界的。向量函数 $z(t)$ 被称为系统(2.3.1)在 $[t_a, t_b]$ 上的一个 Filippov 解, 若 $z(t)$ 在 $[t_a, t_b]$ 上是绝对连续的, 且对几乎所有的 t 满足微分包含 $\dot{z} \in \mathcal{K}[g](z, t)$ 。这里, $\mathcal{K}[g](z, t) \triangleq \bigcap_{\alpha > 0} \bigcap_{\mu(\bar{N})=0} \bar{co}\{g(B(z, \alpha) - \bar{N}, t)\}$, 其中 $\bigcap_{\mu(\bar{N})=0}$ 表示所有测度为零的集合 \bar{N} 的交集; $\bar{co}\{\cdot\}$ 为取闭凸包的算符; $B(z, \alpha)$ 表示中心为 z , 半径为 α 的开球。

假设函数 $V(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部 Lipschitz 连续的, 则 $V(z)$ 沿系统(2.3.1)的集值

Lie 导数定义为

$$\dot{\tilde{V}}(z(t)) = \bigcap_{\xi \in \partial V(z(t))} \xi^T \mathcal{K}[g](z(t), t),$$

其中 $\partial V(z)$ 表示 V 在 z 处的 Clarke 广义梯度，其详细定义为

$$\partial V(z) = \bar{co}\left\{\lim_{i \rightarrow \infty} \nabla V(z_i) \mid z_i \rightarrow z, z_i \notin \Omega_u \bigcup \bar{N}\right\}.$$

这里， Ω_u 表示 ∇V 不存在的零测集， \bar{N} 是一个任意零测集。

引理 2.3.1 ([121], Barbalat 引理) 假设 $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个一致连续函数。若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(\tau) d\tau$ 存在且有限，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \rightarrow 0$ 。

第三章 分布式自适应控制：一致、跟踪与包含

在本章中，我们主要研究了多智能体系统的分布式一致性、跟踪和包含控制问题。首先，考虑了一类带有匹配未建模动态和干扰的多智能体系统，在全局通讯拓扑代数信息未知的前提下，研究了基于神经网络的完全分布式控制框架。该框架融合了神经自适应控制和自适应耦合调节的方法，优化了相关文献中无领导者一致、单领导者跟踪和多领导者包含控制问题的解法。

其次，我们将所提框架进一步延拓，提出了基于神经网络的平均跟踪控制策略，同样引入了自适应耦合调节方法，一定程度上放宽了相关文献对全局信息的要求。

最后，我们研究了一类有向通讯环境下，带有高维不可测领导者的时滞多智能体系统的跟踪问题，通过设计分布式观测器和基于观测误差的神经自适应控制器，实现了跟随者对高维领导者输出信息的有效跟踪。

3.1 基于神经网络的完全分布式自适应控制

我们已经在1.1.3小节中看到自适应控制是设计完全分布式控制器的一个强有力的工具。但是需要注意的是，1.1.3小节中回顾的文献大部分面向线性或 Lipschitz 非线性智能体网络系统，少数研究非确定性网络系统的文献假设系统的非确定性有一个已知的上界，而这一点在实际系统中通常是不易满足的。

另一方面，当被控系统出现未建模动态时，神经网络展现出了强大的逼近未知非线性的能力[101, 102, 122–124]。在文献[101]中，作者研究了带有一阶未知非线性的多智能体系统，并提出了基于神经网络的自适应跟踪控制方法，允许智能体利用局部信息来调节本地的神经网络权重。随后文献[122]研究了带有匹配非线性和噪声的高阶非确定性多智能体系统，并分别提出了基于状态反馈和输出反馈的神经网络自适应跟踪控制设计方法。针对一类带有运动学时滞的多智能体系统，文献[102]提出了基于径向基神经网络的无领导者一致性控制方法。当出现较强的非线性干扰时，文献[123]提出

了一种保证性能的神经自适应跟踪控制策略。然而，包含上述文献在内，绝大多数基于神经网络逼近方法的文献都只能保证系统的一致性或跟踪误差是一致最终有界的。最近，[124]通过引入一个伪理想神经网络逼近权重矩阵，提出了具有渐近收敛性能的多智能体包含控制器。尽管如此，所有上述文献在处理此类未建模动态时并未达到理想的完全分布式设计，仍然依赖于通讯拓扑的特征值和领导者的未知输入上界等全局信息。

基于上述讨论，一个很自然地问题凸显出来，即如何在处理系统个体动力学行为的不确定性的同时，避免控制设计对系统全局信息的依赖性。针对这个问题，本节的研究对象一类带有未建模动态和外部干扰的多智能体系统，并将在全局信息未知的前提下给出一致性、跟踪和包含等控制策略。

3.1.1 模型描述与预备知识

考虑由 N 个带有未知非线性动力学和外部干扰的智能体组成的网络系统，其中第 i 个 ($i \in \mathcal{I}_N$) 智能体的动力学模型如下：

$$\dot{x}_i = Ax_i + B(u_i + f_i(x_i) + d_i(t)). \quad (3.1.1)$$

上式中 $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别是智能体 i 的状态向量和控制输入。矩阵 A, B 是已知的，定常的，具有相容的维度，且使得 (A, B) 是可镇定的。函数 $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是未知的，光滑的执行器端匹配非线性， $d_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示未知的，有界的匹配干扰，即有

$$\|d_i(t)\|_\infty \leq d_{iM}. \quad (3.1.2)$$

考虑到不同智能体的集总不确定性 $f_i(x_i)$ 和 $d_i(t)$ 可能是不同的，因此智能体网络(3.1.1)是异质的。此外，(3.1.2)中的上界 d_{iM} 可以是未知的。注意到智能体的动力学(3.1.1)是较为一般的：通过适当地选取系统矩阵 A, B ，(3.1.1)包含一阶[101]、二阶[125]和高阶非线性系统[126]；同时，若理想情况下 $f_i(x_i) \equiv d_i(t) \equiv 0$ ，(3.1.1)退化为线性时不变系统。

我们为每个智能体引入一个神经网络，来逼近其未建模非线性动态。基于2.2小节的讨论，当隐层神经元足够多时，智能体 i 的未知非线性函数 $f_i(x_i)$ 可由一个单隐层神经网络线性参数化任意逼近：

$$f_i(x_i) = W_i^T S_i(x_i) + \epsilon_i, \quad \forall x_i \in \Omega_x \quad (3.1.3)$$

其中 $W_i \in \mathbb{R}^{s \times m}$ 是一个未知的理想权重矩阵，使得在一个充分大的紧致集 Ω_x 上，逼近误差总在预设精度范围内 $\|\epsilon_i\| \leq \epsilon_{iM}$ 其中 $\epsilon_{iM} \in \mathbb{R}^+$ 。这里 $S_i(x_i) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^s$ 表示隐层神经元激活函数的向量形式 $S_i(x_i) = (S_{i1}(x_i), \dots, S_{is}(x_i))^T$ 。下面我们引入一个基本假设：

假设 3.1.1 [101, 122–124, 127]

- 神经网络的未知理想权重矩阵 W_i 是有界的，即对任意的 $i \in \mathcal{I}_N$ ，存在 $W_{iM} \in \mathbb{R}^+$ ，使得 $\|W_i\|_F \leq W_{iM}$ 。
- 神经网络的激活函数 S_i 是有界的，即对任意的 $i \in \mathcal{I}_N$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$ ，存在 $S_{iM} \in \mathbb{R}^+$ ，使得 $\|S_i(x)\| \leq S_{iM}$ 。

注 3.1.1 上述假设中 W_{iM}, S_{iM} 对控制器的设计来讲可以是未知的；它们只用于理论分析。通常可选取 *Sigmoid* 函数或径向基函数等作为神经网络激活函数，以保证其有界性。

在假设3.1.1条件下，存在 $W_M, S_M, \epsilon_M \in \mathbb{R}^+$ 使得

$$\|W\|_F \leq W_M, \quad \|S(x)\|_F \leq S_M, \quad \|\epsilon\|_\infty \leq \epsilon_M. \quad (3.1.4)$$

需要注意的是，文献[128, 129]要求系统的未知非线性是有界的。与之不同，我们直接利用神经网络的逼近能力来补偿未知的非线性函数。不失一般性，我们假设 f 不显示地依赖于时间，这是因为可以通过引入状态变量 $x_{n+1} = t$ 将一个非自治系统转化为自治系统[130]。另外，与文献[122]只考虑单领导者跟踪不同，我们将考虑所有三种情形：无领导者一致性，单领导者跟踪和多领导者包含问题。

3.1.2 无领导者一致性

在本小节中，我们考虑网络系统(3.1.1)的渐近一致性控制：即设计合适的控制输入 u_i 使 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \forall i, j \in \mathcal{I}_N$ 。

假设 3.1.2 智能体网络系统(3.1.1)的通讯拓扑 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是一个无向连通图。

为了简化记号，分别定义智能体 i 的全局一致性误差和局部测量误差为 $e_i = x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$ 和 $\delta_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)$ 。令 $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $e = \text{col}(e_1, e_2, \dots, e_N)$,

$\delta = \text{col}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$, $\Xi = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ 。则有 $e = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)x$, $\delta = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)e$ 。注意到 Ξ 有一个单重特征值 0 和一个 $N - 1$ 重特征值 1, 且在假设3.1.2下有 $\mathcal{L}\Xi = \Xi\mathcal{L} = \mathcal{L}$ 。

基于局部信息, 为智能体 $i (i \in \mathcal{I}_N)$ 设计如下的动态耦合控制协议:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i(t)F\delta_i + \beta_i(t)\text{sgn}(F\delta_i) - \hat{W}_i^T(t)S_i(x_i) \\ \dot{\alpha}_i &= \kappa_i\delta_i^T\Gamma\delta_i \\ \dot{\beta}_i &= \nu_i\|F\delta_i\|_1 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

和神经网络权重自适应率

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_i &= \tau_i[S_i(x_i)\delta_i^TP^{-1}B - \sigma_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i(t))] \\ \dot{\bar{W}}_i &= \sigma_i\pi_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

其中 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_i(t)$ 表示智能体 i 和邻居之间的动态耦合增益, $\hat{W}_i(t)$ 是对神经网络理想权重矩阵 W_i 的估计, $\bar{W}_i(t)$ 为对应的伪理想权重。这里, 伪理想权重无明确定义, 可以理解其为理想权重 W_i 的一个动态副本, 其引入可以克服理想权重的未知性。另外, F 和 Γ 是需要进一步设计的反馈矩阵, $\kappa_i, \nu_i, \tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$, $P > 0$ 是可调节的标量及矩阵。

注 3.1.2 在(3.1.5)中, 控制器 u_i 包含三个部分: 反馈项 $\alpha_i(t)F\delta_i$ 用来驱动所有的智能体达到一致; 不连续反馈项 $\beta_i(t)\text{sgn}(F\delta_i)$ 用来消除未知干扰和神经网络逼近误差的影响; 最后 $\hat{W}_i^T(t)S_i(x_i)$ 是基于神经网络的未知非线性补偿项。

显然 $e = 0$ 当且仅当 $x_1 = \dots = x_N$, 即智能体状态达到一致。接下来, 我们分析误差系统 e 的收敛性。定义 $\mathcal{M}_1 = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\mathcal{M}_2 = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_N)$, $\tilde{W}_i = \hat{W}_i - W_i$ 其中 $i \in \mathcal{I}_N$, $\tilde{W} = \text{diag}(\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_N)$, $S(x) = \text{col}(S_1(x_1), \dots, S_N(x_N))$, $\epsilon = \text{col}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$, $d = (d_1, \dots, d_N)$ 。然后, 根据(3.1.1), (3.1.3)和(3.1.5), 可以得到误差系统 e 的动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (\mathbf{I}_N \otimes A + \Xi\mathcal{M}_1\mathcal{L} \otimes BF)e + (\Xi\mathcal{M}_2 \otimes B)\text{sgn}((\mathcal{L} \otimes F)e) \\ &\quad - (\Xi \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon - d). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

根据(3.1.2), 存在 $d_M \in \mathbb{R}^+$ 使得 $\|d\|_\infty \leq d_M$ 。

接下来我们给出本小节的主要定理:

定理 3.1.1 在假设 3.1.1 和假设 3.1.2 的前提下，多智能体系统(3.1.1)在控制器(3.1.5)和神经网络权重自适应率(3.1.6)的作用下可达到渐近一致，其中 $F = -B^T P^{-1}$, $\Gamma = P^{-1} B B^T P^{-1}$, 常量增益 $\kappa_i, \nu_i, \tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$ 。这里， $P > 0$ 是下述线性矩阵不等式(LMI)的一个解：

$$AP + PA^T - \eta BB^T + \theta P \leq 0 \quad (3.1.8)$$

其中 $\eta, \theta \in \mathbb{R}^+$ 。此外，每个神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到对应的伪理想权重矩阵 \bar{W}_i ，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{W}_i - \bar{W}_i) = \mathbf{O}$ ；每个耦合增益 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_i(t)$ 收敛到某个有限值。

证明. 定义 $\tilde{W}_i = \bar{W}_i - W_i$, $i = \mathcal{I}_N$ ，考虑如下的 Lyapunov 函数：

$$\begin{aligned} V_1 = & e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) e + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\kappa_i} (\alpha_i(t) - \bar{\alpha})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\nu_i} (\beta_i(t) - \bar{\beta})^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\tau_i} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i \right) + \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\pi_i} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i \right) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

其中 $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}^+$ 有待后续确定。

注意到(3.1.7)的右侧是不连续的，因此 e 的稳定性分析需要借助微分包含和非光滑理论来进行。因符号函数是可测且本质有界的，故(3.1.7)存在 Filippov 意义下的解。借助微分包含理论，(3.1.7)可重写为

$$\begin{aligned} \dot{e} \in & ^{a.e.} \mathcal{K}[(\mathbf{I}_N \otimes A + \Xi \mathcal{M}_1 \mathcal{L} \otimes BF)e + (\Xi \mathcal{M}_2 \otimes B)\text{sgn}((\mathcal{L} \otimes F)e) \\ & - (\Xi \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon - d)], \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

其中 *a.e.* 表示‘几乎处处’。接着，根据包含算子 $\mathcal{K}[\cdot]$ 的性质，可得出 V_1 沿系统(3.1.7)的集值 Lie 导数如下

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}_1 = & 2e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1} A + \mathcal{L} \mathcal{M}_1 \mathcal{L} \otimes P^{-1} BF)e + \sum_{i=1}^N \frac{2}{\kappa_i} (\alpha_i(t) - \bar{\alpha}) \dot{\alpha}_i + \sum_{i=1}^N \frac{2}{\nu_i} (\beta_i(t) - \bar{\beta}) \dot{\beta}_i \\ & - 2e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1} B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon - d) + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\tau_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i \right) + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\pi_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i \right) \\ & + 2\mathcal{K}[e^T (\mathcal{L} \mathcal{M}_2 \otimes P^{-1} B)\text{sgn}((\mathcal{L} \otimes F)e)]. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

将(3.1.5)中的 $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i$ 和(3.1.6)中的 $\dot{\tilde{W}}_i, \dot{\tilde{W}}_i$ 代入上式(3.1.11)，得

$$\dot{\tilde{V}}_1 = 2e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1} A + \mathcal{L} \mathcal{M}_1 \mathcal{L} \otimes P^{-1} BF)e + 2 \sum_{i=1}^N \left((\alpha_i(t) - \bar{\alpha}) \delta_i^T \Gamma \delta_i + (\beta_i(t) - \bar{\beta}) \|F \delta_i\|_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& -2e^T(\mathcal{L} \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon - d) + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T (S_i(x_i) \delta_i^T P^{-1}B - \sigma_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i))) \\
& + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(\sigma_i \tilde{W}_i^T (\hat{W}_i - \bar{W}_i)) + 2\mathcal{K}[e^T(\mathcal{L}\mathcal{M}_2 \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((\mathcal{L} \otimes F)e)]. \quad (3.1.12)
\end{aligned}$$

因 $F = -B^T P^{-1}$, $\Gamma = P^{-1}BB^TP^{-1}$, 计算可得

$$\begin{aligned}
e^T(\mathcal{L}\mathcal{M}_1\mathcal{L} \otimes P^{-1}BF)e & = -e^T(\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)(\mathcal{M}_1 \otimes P^{-1}BB^TP^{-1})(\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)e \\
& = -\delta^T(\mathcal{M}_1 \otimes \Gamma)\delta = -\sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\delta_i^T \Gamma \delta_i. \quad (3.1.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^T(\mathcal{L}\mathcal{M}_2 \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((\mathcal{L} \otimes F)e) & = -\delta^T(\mathcal{M}_2 \otimes F^T)\text{sgn}((\mathbf{I}_N \otimes F)\delta) \\
& = -\sum_{i=1}^N \beta_i(t)\delta_i^T F^T \text{sgn}(F\delta_i) = -\sum_{i=1}^N \beta_i(t)\|F\delta_i\|_1. \quad (3.1.14)
\end{aligned}$$

其中在(3.1.14)中我们运用了 $x^T \text{sgn}(x) = \|x\|_1$ 对任意列向量 x 均成立。由于对任意的连续函数 f , 均有 $\mathcal{K}[f] = f$, 因此根据(3.1.12), (3.1.13)和(3.1.14), 可得

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{V}}_1 & = 2e^T(\mathcal{L} \otimes P^{-1}A)e - 2\bar{\alpha} \sum_{i=1}^N \delta_i^T \Gamma \delta_i - 2\bar{\beta} \sum_{i=1}^N \|F\delta_i\|_1 \\
& - 2e^T(\mathcal{L} \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon - d) + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(\sigma_i \tilde{W}_i^T (\hat{W}_i - \bar{W}_i)) \\
& + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T (S_i(x_i) \delta_i^T P^{-1}B - \sigma_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i))) \quad (3.1.15)
\end{aligned}$$

可以看出此时 $V_1(t)$ 的集值 Lie 导数实质上是一个单点系统。注意到对任意维数相容的矩阵有 $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$, 可得

$$e^T(\mathcal{L} \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^T S(x)) = \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T S_i(x_i) \delta_i^T P^{-1}B). \quad (3.1.16)$$

因此,

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{V}}_1 & = 2e^T(\mathcal{L} \otimes P^{-1}A)e - 2\bar{\alpha} \sum_{i=1}^N \delta_i^T \Gamma \delta_i - 2\bar{\beta} \sum_{i=1}^N \|F\delta_i\|_1 \\
& + 2e^T(\mathcal{L} \otimes P^{-1}B)(\epsilon + d) - 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(\sigma_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i)^T (\hat{W}_i - \bar{W}_i)). \quad (3.1.17)
\end{aligned}$$

令 $\bar{e} = (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1})e$, 则有

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_1 &= \bar{e}^T (\mathcal{L} \otimes (AP + PA^T) - 2\bar{\alpha}\mathcal{L}^2 \otimes BB^T)\bar{e} - 2\bar{\beta}\|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1 \\ &\quad + 2\bar{e}^T (\mathcal{L} \otimes B)(\epsilon + d) - 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(\sigma_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i)^T(\hat{W}_i - \bar{W}_i)).\end{aligned}\quad (3.1.18)$$

更进一步, Hölder 不等式保证了

$$\begin{aligned}2\bar{e}^T (\mathcal{L} \otimes B)(\epsilon + d) &\leq 2\|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1(\|\epsilon\|_\infty + \|d\|_\infty) \\ &\leq 2(\epsilon_M + d_M)\|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1\end{aligned}\quad (3.1.19)$$

其中最后一个不等式是基于式(3.1.4)。于是, 根据(3.1.18), (3.1.19)可得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_1 &\leq \bar{e}^T (\mathcal{L} \otimes (AP + PA^T) - 2\bar{\alpha}\mathcal{L}^2 \otimes BB^T)\bar{e} \\ &\quad - 2(\bar{\beta} - \epsilon_M - d_M)\|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1.\end{aligned}\quad (3.1.20)$$

由于 \mathcal{G} 是连通的, 根据引理2.1.1, 我们知道 $\mathcal{L} \geq 0$, 且有一个单重的零特征值。则存在一个酉矩阵 $U = [\frac{1}{\sqrt{N}}, Y_1]$ 其中 $Y_1 \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$, 使得 $U^T \mathcal{L} U = \Lambda \triangleq \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, 这里 $\lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 是矩阵 \mathcal{L} 的正特征值。进一步, 令 $\hat{e} = \text{col}(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_N) = (U^T \otimes \mathbf{I}_n)\bar{e}$, 则 $\hat{e}_1 = (\frac{1^T}{\sqrt{N}} \otimes \mathbf{I}_n)\bar{e} = \mathbf{0}$ 。通过选取足够大的 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 使 $\bar{\alpha} > \frac{\eta}{2\lambda_2}$, $\bar{\beta} > \epsilon_M + d_M$, 则根据(3.1.20)和 LMI (3.1.8)可得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_1 &\leq \bar{e}^T (\mathcal{L} \otimes (AP + PA^T) - 2\bar{\alpha}\mathcal{L}^2 \otimes BB^T)\bar{e} \\ &= \hat{e}^T (\Lambda \otimes (AP + PA^T) - 2\bar{\alpha}\Lambda^2 \otimes BB^T)\hat{e} \\ &= \sum_{i=2}^N \lambda_i \hat{e}_i^T (AP + PA^T - 2\bar{\alpha}\lambda_i BB^T) \hat{e}_i \\ &\leq -\theta \hat{e}^T (\Lambda \otimes P) \hat{e} = -\theta e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) e.\end{aligned}\quad (3.1.21)$$

由于 $\mathcal{L} \geq 0$ 且 $P > 0$, 则 $V_1(t)$ 是非增的, 保证了 $V_1(t)$ 中所有的信号 $\alpha_i(t), \beta_i(t), \tilde{W}_i$ 及 \tilde{W}_i 是有界的。根据(3.1.7)和(3.1.4), \dot{e} 也是有界的。因此函数 $\theta e^T(t)(\mathcal{L} \otimes P^{-1})e(t)$ 是一致连续的。由于 $0 < V_1(t) \leq V_1(0)$ 且 $V_1(t)$ 非增, 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V_1(t)$ 必有极限, 记为 V_1^∞ 。注意到(3.1.21), 我们有

$$\int_0^{+\infty} \theta e^T(t)(\mathcal{L} \otimes P^{-1})e(t) dt \leq V_1(0) - V_1^\infty.\quad (3.1.22)$$

根据引理2.3.1, 得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta e^T(t)(\mathcal{L} \otimes P^{-1})e(t) = 0$ 。注意到 $(\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n)e = \mathbf{0}$, 因此有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0.$$

另一方面, 记 $\hat{W}_i^e = \hat{W}_i - \bar{W}_i$, 则根据(3.1.6)可得

$$\dot{\hat{W}}_i^e = -\sigma_i(\tau_i + \pi_i)\hat{W}_i^e + \tau_i S_i(x_i) \delta_i^T P^{-1} B. \quad (3.1.23)$$

随着 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta(t)\| = 0$ 。又因为 $S_i(x_i)$ 是有界的, $\sigma_i, \tau_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{W}_i^e\|_F = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{W}_i - \bar{W}_i) = \mathbf{O}$ 。另外, 因(3.1.5)中 $\kappa_i, \nu_i \in \mathbb{R}^+$ 且 $\Gamma > 0$, 易得 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 均为单调增加的; 结合二者的有界性, 我们知道最终所有的 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 各自收敛到一个有限值。定理3.1.1得证。 \square

注 3.1.3 *LMI (3.1.8)* 有可行解当且仅当 (A, B) 是可镇定的[124]。同时, 也可以使用 Riccati 不等式 $A^T P + PA + Q - PBB^T P \leq 0$ 的形式来替换 *LMI (3.1.8)*[122], 二者存在可行解的条件是等价的。

注 3.1.4 通过定理3.1.1的证明可以看出, 在神经网络自适应率(3.1.6)中引入伪理想权重矩阵有效地补偿了系统一致性误差的最终界(见文献[101, 122, 123]), 为达到完全分布式设计铺平了道路。需要注意, 虽然定理3.1.1保证了 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{W}_i - \bar{W}_i) = 0$, 我们仍不知道估计矩阵 \hat{W}_i 是否收敛到了对应的理想矩阵 W_i 。尽管如此, 伪理想矩阵作为一个替代, 保证了系统一致性误差的渐近收敛, 已然起到了令人满意的效果。

注 3.1.5 当选择常量增益 $\kappa_i, \nu_i, \tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$ 时, τ_i 和 π_i 应取相对较大值, 以保证 \hat{W}_i 和 \bar{W}_i 的快速收敛; σ_i 应作为一个小增益的调节, 用以提升控制器的鲁棒性, 避免估计矩阵 \hat{W}_i 超调至较高的数值, 从而保证镇定过程的快速响应[131]; 最后, κ_i 和 ν_i 决定自适应耦合调节的步长, 应取为小常量来保证闭环系统的稳定性。

推论 3.1.1 在假设3.1.1和假设3.1.2的前提下, 多智能体系统(3.1.1)在控制器

$$u_i = \alpha F \delta_i + \beta \operatorname{sgn}(F \delta_i) - \hat{W}_i^T(t) S_i(x_i) \quad (3.1.24)$$

和神经自适应率(3.1.6)的作用下可达到渐近一致, 其中 $F = -B^T P^{-1}$, $\alpha > \frac{\eta}{2\lambda_2}$, $\beta > \epsilon_M + d_M$, $\tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$, P 和 η 定义于 *LMI (3.1.8)*。另外, 神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到相应的伪理想矩阵 \bar{W}_i 。

3.1.3 单领导者跟踪与多领导者包含

在上一小节中, 我们考虑了非确定性多智能体系统3.1.1的无领导者一致性。本节将考虑当系统中出现领导者时的跟踪或包含控制问题, 这类问题通常适用于需要提前

给定多智能体系统的运动参考信号时的情形。我们首先考虑单领导者跟踪控制问题，然后将所得结果延拓至多领导者共存时的情形。

具有有界输入的单领导者跟踪控制

假设一个多智能体系统中有 N 个跟随者(3.1.1)和一个领导者，序号为 $N + 1$ ，且有如下的线性动力学

$$\dot{x}_{N+1} = Ax_{N+1} + Bu_{N+1} \quad (3.1.25)$$

其中 u_{N+1} 为领导者的输入，由外部给定，且只需满足有界条件，即

$$\|u_{N+1}\|_\infty \leq \gamma \quad (3.1.26)$$

这里 $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 可以是未知的。我们的控制目标是为跟随者(3.1.1)设计分布式协议，从而实现其对领导者的渐近跟踪，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_{N+1}(t)\| = 0, \forall i \in \mathcal{I}_N$ 。

我们用 $\bar{\mathcal{G}}(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{A}})$ 来表示引入领导者 $N + 1$ 后的全局通讯拓扑，其中 $\bar{\mathcal{A}} = (\bar{a}_{ij})$ 即为增广后的邻接矩阵。因为领导者在群体中扮演发送指令的角色，我们合理的假设领导者的行不受到跟随者的影响。基于此，图 $\bar{\mathcal{G}}$ 的 Laplacian 矩阵可以分块为

$$\bar{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & -\bar{\mathbf{a}} \\ \mathbf{0}_N^T & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \text{diag}(\bar{\mathbf{a}})$, $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_{1(N+1)}, \dots, \bar{a}_{N(N+1)})^T$ 。这里 $\bar{a}_{i(N+1)} > 0$ 当且仅当跟随者 i 可以直接获取领导者的信息。

假设 3.1.3 跟随者(3.1.1)之间的通讯拓扑 \mathcal{G} 是一个无向连通图，且至少有一个跟随者可以直接获得领导者的信息。

在假设3.1.3的前提下，根据引理2.1.1得 $\mathcal{L}_1 > 0$ 。定义跟随者 i 的跟踪误差和局部测量误差分别为 $\phi_i = x_i - x_{N+1}$ 和 $\varphi_i = \sum_{j=1}^{N+1} \bar{a}_{ij}(x_i - x_j)$ 。令 $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\phi = \text{col}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$, $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$, 则有 $\varphi = (\mathcal{L}_1 \otimes \mathbf{I}_n)\phi$ 。

无领导者一致性控制协议(3.1.5)稍加修正后，可以自然地用于解决跟踪问题：

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i(t)F\varphi_i + \beta_i(t)\text{sgn}(F\varphi_i) - \hat{W}_i^T(t)S_i(x_i) \\ \dot{\alpha}_i &= \kappa_i\varphi_i^T\Gamma\varphi_i \\ \dot{\beta}_i &= \nu_i\|F\varphi_i\|_1, \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

其中神经网络自适应率可相应地调整为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{W}}_i &= \tau_i [S_i(x_i) \varphi_i^T P^{-1} B - \sigma_i (\hat{W}_i - \bar{W}_i(t))] \\ \dot{\bar{W}}_i &= \sigma_i \pi_i (\hat{W}_i - \bar{W}_i).\end{aligned}\quad (3.1.28)$$

下述定理给出了针对单领导者跟踪问题的主要结果：

定理 3.1.2 在假设 3.1.1 和假设 3.1.3 的前提下，跟随者(3.1.1)在控制协议(3.1.27)和神经网络自适应率(3.1.28)的作用下可实现对领导者(3.1.25)的渐近一致跟踪，其中 F, Γ 与定理 3.1.1 中的设计相同，常量 $\kappa_i, \nu_i, \tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$ 。此外，每个神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到对应的伪理想权重矩阵 \bar{W}_i ；每个耦合增益 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_i(t)$ 收敛到某个有限值。

证明. 根据(3.1.1), (3.1.3), (3.1.25)和(3.1.27)可得误差系统 ϕ 的动力学满足：

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= (\mathbf{I}_N \otimes A + \mathcal{M}_1 \mathcal{L}_1 \otimes BF)\phi + (\mathcal{M}_2 \otimes B)\text{sgn}((\mathcal{L}_1 \otimes F)\phi) \\ &\quad - (\mathbf{I}_N \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) + \mathbf{u}_{N+1} - \epsilon - d),\end{aligned}\quad (3.1.29)$$

其中 $\mathcal{M}_1 = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\mathcal{M}_2 = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_N)$; $\tilde{W}, S(x), \epsilon, d$ 如(3.1.7)中定义;
 $\mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{1}_N \otimes u_{N+1}$ 。

考虑以下 Lyapunov 函数：

$$\begin{aligned}V_2 &= \phi^T (\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\kappa_i} (\alpha_i(t) - \tilde{\alpha})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\nu_i} (\beta_i(t) - \tilde{\beta})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\tau_i} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i \right) + \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\pi_i} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i \right)\end{aligned}\quad (3.1.30)$$

其中 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^+$ 有待后续确定。

函数 V_2 沿系统(3.1.29)的集值 Lie 导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= 2\phi^T (\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1} A + \mathcal{L}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{L}_1 \otimes P^{-1} BF)\phi + \sum_{i=1}^N \frac{2}{\kappa_i} (\alpha_i(t) - \tilde{\alpha}) \dot{\alpha}_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{2}{\nu_i} (\beta_i(t) - \tilde{\beta}) \dot{\beta}_i - 2\phi^T (\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1} B)(\tilde{W}^T S(x) + \mathbf{u}_{N+1} - \epsilon - d) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\tau_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i \right) + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\pi_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i \right) \\ &\quad + 2\mathcal{K}[\phi^T (\mathcal{L}_1 \mathcal{M}_2 \otimes P^{-1} B)\text{sgn}((\mathcal{L}_1 \otimes F)\phi)].\end{aligned}\quad (3.1.31)$$

将(3.1.27)中 $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i$ 和(3.1.28)中 $\dot{\hat{W}}_i, \dot{\overline{W}}_i$ 代入上式得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_2 = & 2\phi^T(\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}A + \mathcal{L}_1\mathcal{M}_1\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}BF)\phi + 2\sum_{i=1}^N(\alpha_i(t) - \tilde{\alpha})\varphi_i^T\Gamma\varphi_i \\ & + 2\sum_{i=1}^N(\beta_i(t) - \tilde{\beta})\|F\varphi_i\|_1 - 2\phi^T(\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^TS(x) + \mathbf{u}_{N+1} - \epsilon - d) \\ & + 2\sum_{i=1}^N\text{tr}(\tilde{W}_i^T(S_i(x_i)\varphi_i^TP^{-1}B - \sigma_i(\hat{W}_i - \overline{W}_i))) + 2\sum_{i=1}^N\text{tr}(\sigma_i\tilde{W}_i^T(\hat{W}_i - \overline{W}_i)) \\ & + 2\mathcal{K}[\phi^T(\mathcal{L}_1\mathcal{M}_2 \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((\mathcal{L}_1 \otimes F)\phi)].\end{aligned}\quad (3.1.32)$$

由于 $F = -B^TP^{-1}$ and $\Gamma = P^{-1}BB^TP^{-1}$, 类似于(3.1.13)和(3.1.14), 有

$$\phi^T(\mathcal{L}_1\mathcal{M}_1\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}BF)\phi = -\sum_{i=1}^N\alpha_i(t)\varphi_i^T\Gamma\varphi_i.\quad (3.1.33)$$

$$\phi^T(\mathcal{L}_1\mathcal{M}_2 \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((\mathcal{L}_1 \otimes F)\phi) = -\sum_{i=1}^N\beta_i(t)\|F\varphi_i\|_1.\quad (3.1.34)$$

同时注意到

$$\phi^T(\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^TS(x)) = \sum_{i=1}^N\text{tr}(\tilde{W}_i^TS_i(x_i)\varphi_i^TP^{-1}B),\quad (3.1.35)$$

于是(3.1.32)可简化为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_2 = & 2\phi^T(\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}A)\phi - 2\tilde{\alpha}\sum_{i=1}^N\varphi_i^T\Gamma\varphi_i - 2\tilde{\beta}\sum_{i=1}^N\|F\varphi_i\|_1 \\ & - 2e^T(\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1}B)(\mathbf{u}_{N+1} - \epsilon - d) - 2\sum_{i=1}^N\text{tr}(\sigma_i(\hat{W}_i - \overline{W}_i)^T(\hat{W}_i - \overline{W}_i)).\end{aligned}\quad (3.1.36)$$

令 $\bar{\phi} = (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1})\phi$, 则有

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_2 \leq & \bar{\phi}^T(\mathcal{L}_1 \otimes (AP + PA^T) - 2\tilde{\alpha}\mathcal{L}_1^2 \otimes BB^T)\bar{\phi} - 2\tilde{\beta}\|(\mathcal{L}_1 \otimes B^T)\bar{\phi}\|_1 \\ & - 2\bar{\phi}^T(\mathcal{L}_1 \otimes B)(\mathbf{u}_{N+1} - \epsilon - d).\end{aligned}\quad (3.1.37)$$

同时, 根据 Hölder 不等式, (3.1.26)和(3.1.4), 有

$$\begin{aligned}-2\bar{\phi}^T(\mathcal{L}_1 \otimes B)(\mathbf{u}_{N+1} - \epsilon - d) & \leq 2\|(\mathcal{L}_1 \otimes B^T)\bar{\phi}\|_1\|\mathbf{u}_{N+1} - \epsilon - d\|_\infty \\ & \leq 2(\gamma + \epsilon_M + d_M)\|(\mathcal{L}_1 \otimes B^T)\bar{\phi}\|_1.\end{aligned}\quad (3.1.38)$$

于是, 根据(3.1.37)和(3.1.38)得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_2 &\leq \bar{\phi}^T (\mathcal{L}_1 \otimes (AP + PA^T) - 2\tilde{\alpha}\mathcal{L}_1^2 \otimes BB^T)\bar{\phi} \\ &\quad - 2(\tilde{\beta} - \gamma - \epsilon_M - d_M)\|(\mathcal{L}_1 \otimes B^T)\bar{\phi}\|_1.\end{aligned}\quad (3.1.39)$$

令 $\Delta = \text{diag}(\Delta_i)$ 为关联于 \mathcal{L}_1 的对角阵, 即存在一个酉矩阵 R , 使得 $R^T \mathcal{L}_1 R = \Delta$ 。令 $\hat{\phi} = (R^T \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\phi}$, 则通过选取足够大的 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 使 $\tilde{\alpha} > \frac{\eta}{2\lambda_{\min}(\mathcal{L}_1)}$ 且 $\tilde{\beta} > \gamma + \epsilon_M + d_M$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_2 &\leq \bar{\phi}^T (\mathcal{L}_1 \otimes (AP + PA^T) - 2\tilde{\alpha}\mathcal{L}_1^2 \otimes BB^T)\bar{\phi} \\ &= \sum_{i=1}^N \Delta_i \hat{\phi}_i^T (AP + PA^T - 2\tilde{\alpha}\Delta_i BB^T)\hat{\phi}_i \\ &\leq -\theta \phi^T (\mathcal{L}_1 \otimes P^{-1})\phi\end{aligned}\quad (3.1.40)$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}^+$ 的定义见 LMI (3.1.8)。由于 $\mathcal{L}_1 > 0$ 且 $P > 0$, 可以得出 $V_2(t)$ 是非增的, 保证了 $\phi, \alpha_i(t), \beta_i(t), \tilde{W}_i, \tilde{\bar{W}}_i$ 的有界性。根据(3.1.29)可得 $\dot{\phi}$ 也是有界的。与定理3.1.1的证明相似, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{W}_i - \bar{W}_i) = \mathbf{O}$, 同时 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 分别收敛到某个有限值。 \square

推论 3.1.2 在假设3.1.1和假设3.1.3的前提下, 跟随者(3.1.1)在静态耦合的控制协议

$$u_i = \alpha F \varphi_i + \beta \text{sgn}(F \varphi_i) - \hat{W}_i^T(t) S_i(x_i)$$

和神经自适应率(3.1.28)的作用下可实现对领导者(3.1.25)的渐近跟踪, 其中 $F = -B^T P^{-1}$, $\alpha > \frac{\eta}{2\lambda_{\min}(\mathcal{L}_1)}$, $\beta > \gamma + \epsilon_M + d_M$, $\tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$, P 和 η 定义见 LMI (3.1.8)。另外, 神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到相应的伪理想矩阵 \bar{W}_i 。

具有有界输入的多领导者包含控制

接下来, 我们将进一步考虑有多个领导者并存时, 跟随者的包含控制问题。假设有 M 个领导者, 其动力学方程如下:

$$\dot{x}_{N+l} = Ax_{N+l} + Bu_{N+l}, \quad (3.1.41)$$

其中领导者的外部输入均为有界的, 即存在 $\hat{\gamma} \in \mathbb{R}^+$, 使得

$$\|u_{N+l}\|_\infty \leq \hat{\gamma}, \quad \forall l \in \mathcal{I}_M. \quad (3.1.42)$$

我们的控制目标是如下定义的渐近包含问题：

定义 3.1.1 对于跟随者(3.1.1)和领导者(3.1.4)组成的多智能体系统，若存在某些非负标量 $q_{ij} \in \mathbb{R}^+$ 满足 $\sum_{j=1}^M q_{ij} = 1$ ，其中 $i \in \mathcal{I}_N, j \in \mathcal{I}_M$ ，且使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \sum_{j=1}^M q_{ij} x_{N+j}(t)\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N.$$

则称领导者实现了对跟随者的渐近包含。

我们用 $\hat{\mathcal{G}}(\hat{\mathcal{V}}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{A}})$ 表示引入了多个领导者的通讯拓扑图，则其 Laplacian 矩阵可分块表示为

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_2 & -\hat{\mathbf{a}} \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{O}_M \end{pmatrix}$$

其中 $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} + \sum_{l=1}^M \text{diag}(\hat{\mathbf{a}}_l)$, $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_M) \in \mathbb{R}_{N \times M}$, $\hat{a}_{il} > 0$ 当且仅当跟随者 i 可直接获取领导者 l 的状态信息。

假设 3.1.4 跟随者(3.1.1)之间的通讯拓扑 \mathcal{G} 是一个无向连通图，且对于每一个领导者，至少有一个跟随者可以直接获得其信息。

在假设3.1.1和假设3.1.4下，有 $\mathcal{L}_2 > 0$ 且 $\hat{\mathbf{a}}\mathbf{1} = \mathcal{L}_2\mathbf{1}$ 。定义 $Q = (q_{ij}) = \mathcal{L}_2^{-1}\hat{\mathbf{a}}$ ，则有 $q_{ij} \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^M q_{ij} = 1$ ：即矩阵 Q 满足作为包含系数矩阵的基本条件。接下来，定义跟随者 i 的包含误差和局部误差分别为 $\rho_i = x_i - \sum_{j=1}^M q_{ij} x_j$ 和 $\zeta_i = \sum_{j=1}^{N+M} \hat{a}_{ij}(x_i - x_j)$ 。使用向量形式，即有 $\rho = x - (\mathcal{L}_2^{-1}\hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{I}_n)x_L$, $\zeta = (\mathcal{L}_2 \otimes \mathbf{I}_n)x - (\hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{I}_n)x_L$ 其中 $\rho = \text{col}(\rho_1, \dots, \rho_N)$, $\zeta = \text{col}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$, $x = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$, $x_L = \text{col}(x_{N+1}, \dots, x_{N+M})$ 。则易知 $\zeta = (\mathcal{L}_2 \otimes \mathbf{I}_n)\rho$ 。

相似地，考虑如下分布式神经自适应控制协议：

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i(t)F\zeta_i + \beta_i(t)\text{sgn}(F\zeta_i) - \hat{W}_i^T(t)S_i(x_i) \\ \dot{\alpha}_i &= \kappa_i \zeta_i^T \Gamma \zeta_i \\ \dot{\beta}_i &= \nu_i \|F\zeta_i\|_1 \end{aligned} \tag{3.1.43}$$

其中神经自适应率为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_i &= \tau_i [S_i(x_i)\zeta_i^T P^{-1}B - \sigma_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i(t))] \\ \dot{\bar{W}}_i &= \sigma_i \pi_i(\hat{W}_i - \bar{W}_i). \end{aligned} \tag{3.1.44}$$

定理 3.1.3 在假设3.1.1和假设3.1.4前提下，定义3.1.1中的包含问题可由控制协议(3.1.43)和神经自适应率(3.1.44)求解，其中 F, Γ 与定理3.1.1中相同， $\kappa_i, \nu_i, \tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$ 。此外，每个神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到对应的伪理想权重矩阵 \bar{W}_i ；每个耦合增益 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_i(t)$ 收敛到某个有限值。

证明. 根据(3.1.1), (3.1.3), (3.1.41), (3.1.43)可得误差系统 ρ 的动力学为

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = & (\mathbf{I}_N \otimes A + \mathcal{M}_1 \mathcal{L}_2 \otimes BF)\rho + (\mathcal{M}_2 \otimes B)\text{sgn}((\mathcal{L}_2 \otimes F)\rho) \\ & - (\mathbf{I}_N \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon - d) - (\mathcal{L}_2^{-1} \hat{\mathbf{a}} \otimes B)\mathbf{u}_L,\end{aligned}\quad (3.1.45)$$

其中 $\mathbf{u}_L = \text{col}(u_{N+1}, \dots, u_{N+M})$ 。

后续证明与定理3.1.2的证明类似，因此不再赘述，只给出 Lyapunov 函数如下：

$$\begin{aligned}V_3 = & \rho^T (\mathcal{L}_2 \otimes P^{-1})\rho + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\kappa_i} (\alpha_i(t) - \hat{\alpha})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\nu_i} (\beta_i(t) - \hat{\beta})^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \text{tr}\left(\frac{1}{\tau_i} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i\right) + \sum_{i=1}^N \text{tr}\left(\frac{1}{\pi_i} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i\right).\end{aligned}$$

□

推论 3.1.3 在假设3.1.1和假设3.1.4的前提下，定义3.1.1中的包含问题可由控制协议

$$u_i = \alpha F \zeta_i + \beta \text{sgn}(F \zeta_i) - \hat{W}_i^T(t) S_i(x_i)$$

和神经自适应率(3.1.44)求解，这里 $F = -B^T P^{-1}$, $\alpha > \frac{\eta}{2\lambda_{\min}(\mathcal{L}_2)}$, $\beta > \hat{\gamma} + \epsilon_M + d_M$, $\tau_i, \sigma_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$, P 和 η 见 LMI (3.1.8)。另外，神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到相应的伪理想矩阵 \bar{W}_i 。

注 3.1.6 通过比较上述定理和相应的推论不难发现，自适应耦合调节的引入对于实现完全分布式设计是必要的一步，类似的方法也出现在相关文献中，如[103, 129]。

注 3.1.7 需要注意的是，虽然定理3.1.3中证明了包含误差渐近收敛到零，在实际应用动态协议(3.1.43)时，由于测量误差，抖振现象等影响， $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 可能出现持续缓慢增长[132]。下面给出一个实用的解决方法：为跟随者 i 引入一个小常量 $r_i \in \mathbb{R}^+$ ；若 $\|\zeta_i\|_2 > r_i$ ，即按照(3.1.43)中的规则更新 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ ，否则令 $\dot{\alpha}_i(t) = \dot{\beta}_i(t) = 0$ 。此时每当跟随者的包含误差达到某个理想的精度， $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 即收敛到某个有限值。以

上讨论同样适用于3.1.2小节中的无领导者一致性协议(3.1.5)和前述单领导者跟踪协议(3.1.27)。

3.1.4 数值仿真

本节将给出无领导者一致、单领导者跟踪和多领导者包含三个算例来验证本节得到的理论结果。不失一般性，本节中考虑无权图。

例 3.1.1 (无领导者一致) 考虑包含 6 个智能体的一个网络系统(3.1.1)，智能体间的通讯拓扑如下图 3.1。

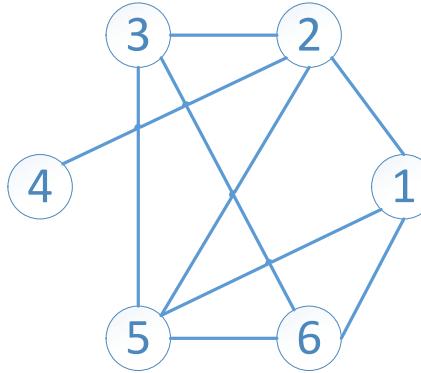


图 3.1: 例3.1.1中多智能体间的通讯拓扑。

智能体动力学的线性部分为一个飞行器的纵向动力学[133]: 状态向量 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -0.277 & 1 & -0.0002 \\ -17.1 & -0.178 & -12.2 \\ 0 & 0 & -6.67 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.67 \end{pmatrix},$$

其中 x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} 分别代表飞行器的攻角，俯仰角速度和升降角；控制量主要为升降角。未知的非线性函数为 $f_i(x_i(t)) = 2x_{i1}(t) \sin(i + x_{i1}(t)) + (x_{i2}(t))^2 \cos(x_{i3}(t))$ ，干扰噪声为 $d_i(t) = 0.1 \sin(it)$ 。为了验证定理3.1.1，令 $\eta = \theta = 2$ ，求解 LMI (3.1.8) 得

$$F = (1.9236, 1.4825, -5.2431),$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3.7004 & 2.8518 & -10.0858 \\ 2.8518 & 2.1978 & -7.7729 \\ -10.0858 & -7.7729 & 27.4899 \end{pmatrix}.$$

每个神经网络逼近器中，输入层权重随机取自标准正态分布，隐层包含 6 个激活函数为 *sigmoid* 函数的神经元。令 $\kappa_i = \nu_i = 0.01$, $\tau_i = 210$, $\sigma_i = 0.5$, $\pi_i = 5$, 初始化 \hat{W}_i ,

\bar{W}_i 均为零矩阵。在执行控制协议(3.1.5)时, 考虑到注3.1.7, 取智能体的一致性误差界均为 0.05。智能体的状态轨迹如图3.2, 可以看到约 $t = 4$ 时所有智能体达到理想的一致状态。伪理想的收敛误差 \hat{W}_i^e 中的元素如图3.3, 动态耦合增益 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 如图3.4。

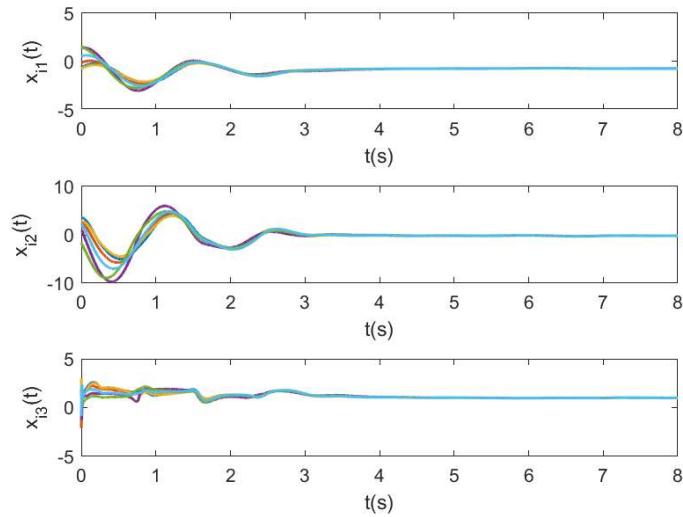


图 3.2: 例3.1.1中智能体的状态 $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ 。

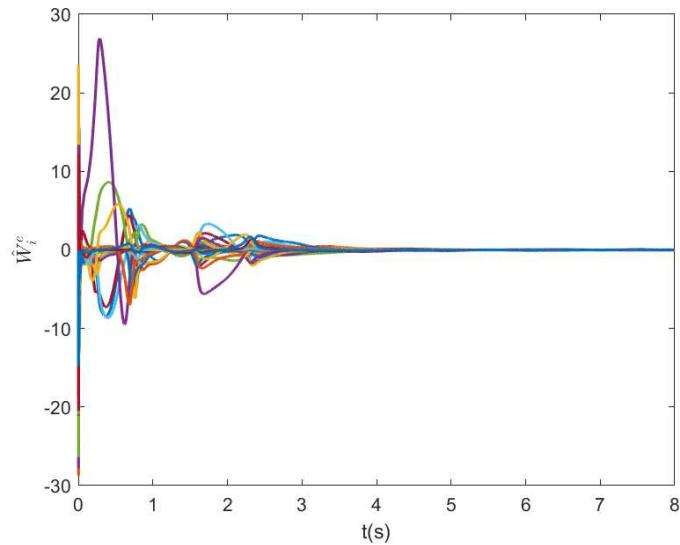
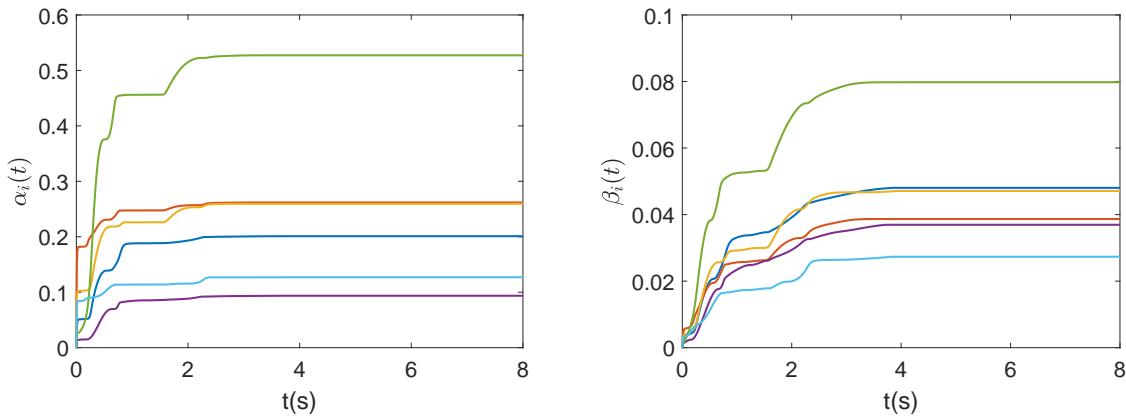


图 3.3: 例3.1.1中伪理想收敛误差矩阵 \hat{W}_i^e 中的元素, $i = 1, \dots, 6$ 。

例 3.1.2 (单领导者跟踪) 考虑一个包含 6 个跟随者的多智能体系统, 跟随者的动力学由(3.1.1)给出, 其中

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

图 3.4: 例3.1.1中动态耦合权重 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ 。

$f_i(x_i(t)) = 2x_{i1}(t)\cos(i + x_{i2}(t))$, $d_i(t) = 0.01\cos(it)$ 。智能体 7 为带有未知外部输入 $u_7 = K_L x_7$ 的领导者(3.1.25), 其中反馈矩阵 $K_L = (0, -2)$ 。容易验证此时领导者的闭环动力学为一个振荡器; 因此反馈控制器 u_7 有界, 满足(3.1.26)。然而, 上界 γ 的具体值未知 (取决于初始值 $x_7(0)$)。所有智能体间的通讯拓扑如图 3.5(a)所示。

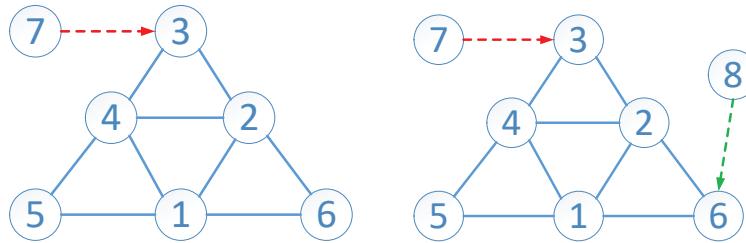


图 3.5: 例3.1.2中的通讯拓扑 (左); 例3.1.3中的通讯拓扑 (右)。

为验证定理3.1.2, 令 $\eta = 2, \theta = 1$ 并求解 LMI (3.1.8), 经计算可得

$$F = -(5.1621, 5.0202), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 26.6477 & 25.9150 \\ 25.9150 & 25.2024 \end{pmatrix}.$$

当执行控制协议(3.1.27)时, 选择 $\kappa_i = \nu_i = 0.1$, $\tau_i = 100$, $\sigma_i = 0.5$, $\pi_i = 10$, $r_i = 0.005$ 。仿真时, 领导者的初始状态为 $x_7(0) = (0.4, -0.4)^T$ 。为了保证逼近效果, 每个跟随者的神经网络隐层含 24 个神经元。图 3.6 分别从二维和三维空间给出了所有智能体的状态和跟踪轨迹。伪理想的收敛误差 \hat{W}_i^e 中的元素如图 3.7, 动态耦合增益 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 如图 3.8。

另外, 值得注意的是动态耦合增益 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 的稳态值通常小于推论3.1.2中给出的静态耦合下界。如图 3.8 中 $\alpha_i(t)$ 的均值为 $mean(0.0784, 0.8608, 0.4202, 0.1706, 0.0059,$

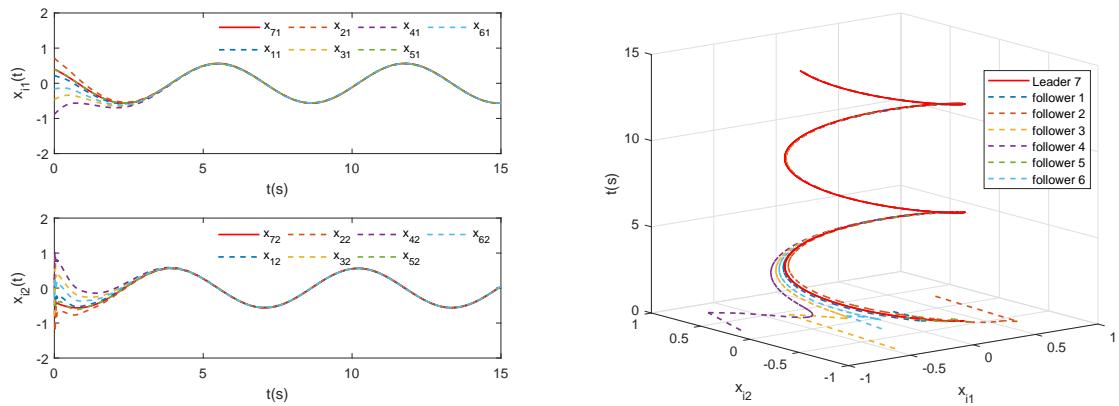


图 3.6: 二维 (左) 和三维 (右) 空间下, 例3.1.2中智能体的状态 $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 7$ 。

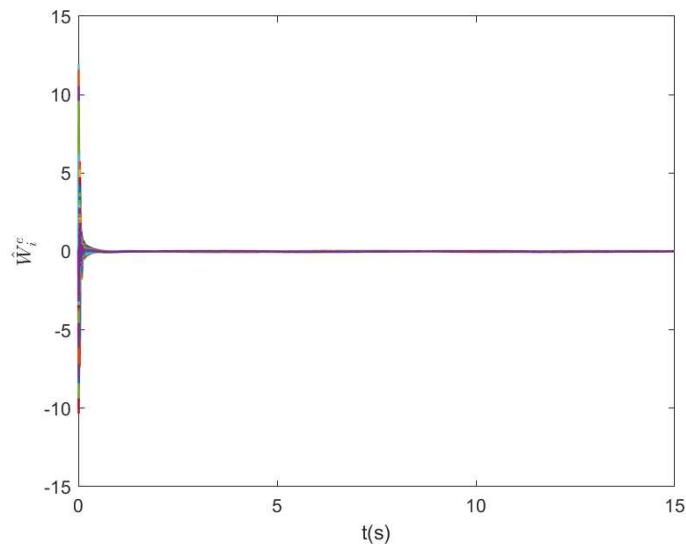


图 3.7: 例3.1.2中伪理想收敛误差矩阵 \hat{W}_i^e 中的元素, $i = 1, \dots, 6$ 。

$0.1320) = 0.2780$, 而推论3.1.2中给出的静态耦合下界为 $\frac{\eta}{2\lambda_{min}(\mathcal{L}_1)} = 8.6391$ 。从能量的角度, 这也表明了所提出的自适应耦合调节的经济性。

为了进一步说明理论上跟踪误差的渐近收敛性, 我们将伪理想矩阵 \bar{W}_i 从自适应率(3.1.28)中移除, 将 σ_i 调节项修改为 $-\sigma_i \hat{W}_i$, 即传统的神经自适应控制设计方法[101, 102, 122, 123]。在保留所有其他设计和参数不变的情况下, 所有智能体的状态如图3.9所示, 其中可以看到系统存在明显的最终一致有界跟踪误差。

例 3.1.3 (多领导者包含) 考虑在例3.1.2的基础上, 增加另外一个领导者8, 如图3.5(b)。领导者8与领导者7动力学相同, 但初始状态不同: $x_8(0) = (0.8, -0.8)^T$ 。我们选取与例3.1.2中完全相同的控制参数, 在控制协议(3.1.43)下, 跟随者逐渐近入

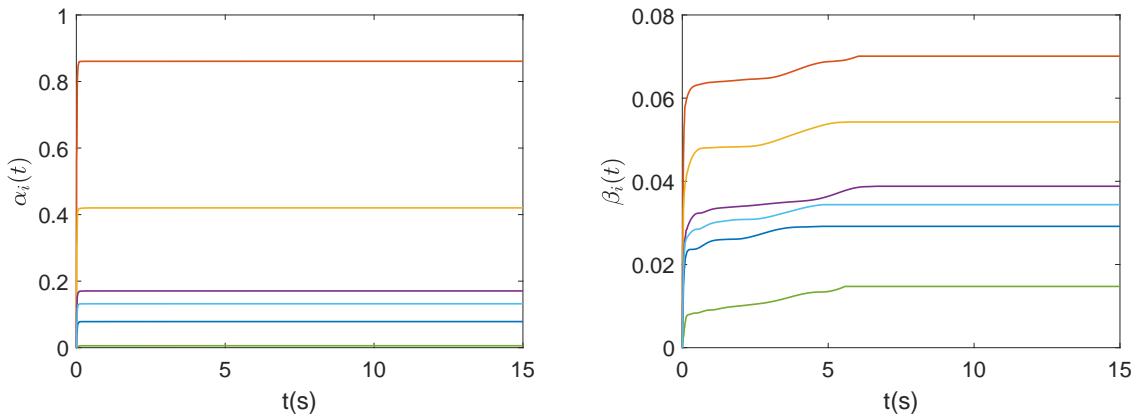


图 3.8: 例3.1.2中动态耦合权重 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ 。

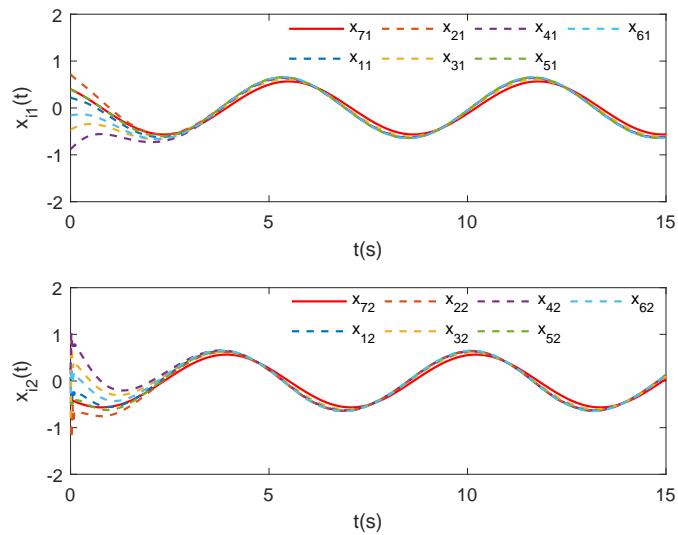


图 3.9: 不为跟随者引入 \bar{W}_i 时, 例3.1.2中智能体的状态 $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 7$ 。

两个领导者的凸包中, 如图3.10。同样地, \hat{W}_i^e 中的元素如图3.11所示, 动态耦合增益 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 的演化如图3.12。可以看到, 所有的实验结果很好的验证了本节的理论部分。

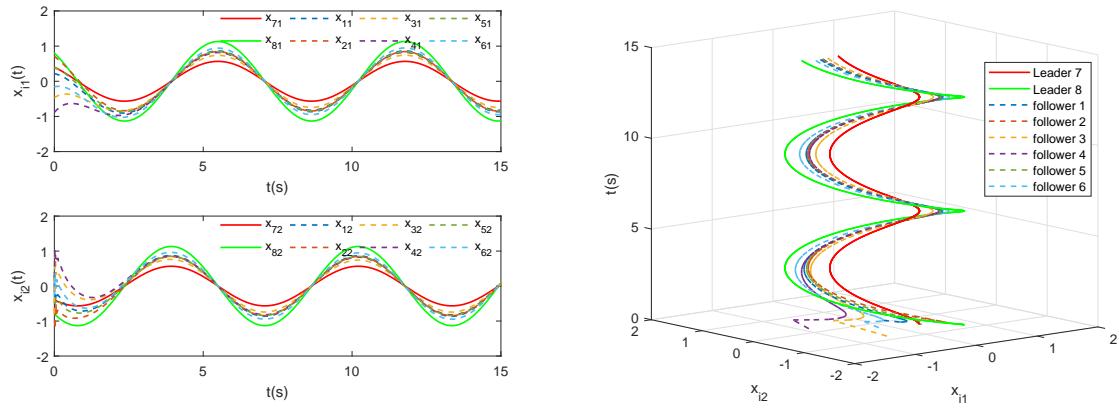


图 3.10: 二维 (左) 和三维 (右) 空间下, 例3.1.3中智能体的状态 $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 8$ 。

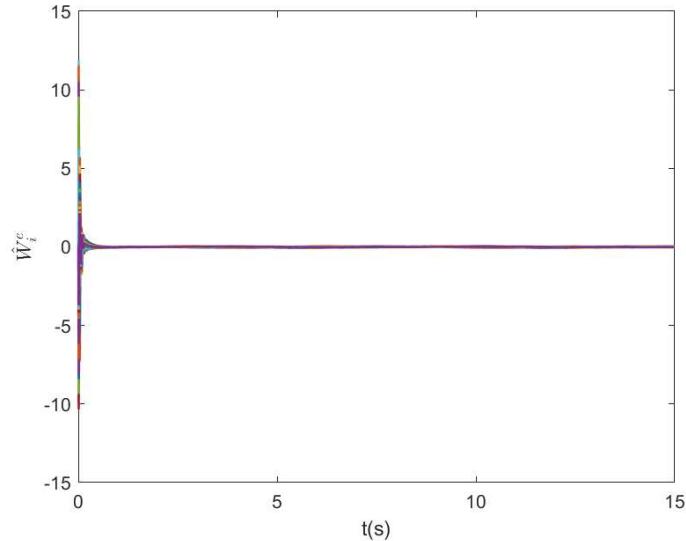


图 3.11: 例3.1.3中伪理想收敛误差矩阵 \hat{W}_i^e 中的元素, $i = 1, \dots, 6$ 。

3.2 基于神经网络的分布式平均跟踪控制

分布式平均跟踪问题[29–35]是近年来的一个热点问题, 在编队控制[39]和分布式优化[40]等场景中有着广泛的应用。在平均跟踪问题中, 每个智能体在本地收到一个时变的外部参考信号, 同时所有智能体希望通过协作一致地跟踪到这些外部信号的平均值。文献[30]考虑了 Euler-Lagrange 系统的平均跟踪算法, 实现了对带有有界导数的参考信号的有界跟踪误差。文献[31]考虑了双重积分器多智能体系统, 并给出了在智能体速度信息缺失时的平均跟踪算法。对于由线性系统产生的外部信号, 文献[32]提出了一类基于边的平均跟踪问题求解框架, 并使用了符号函数的连续化来减弱被控系统的抖颤。最近, 文献[35]研究了带有异质未知非线性动力学的二阶多智能体系统的平均

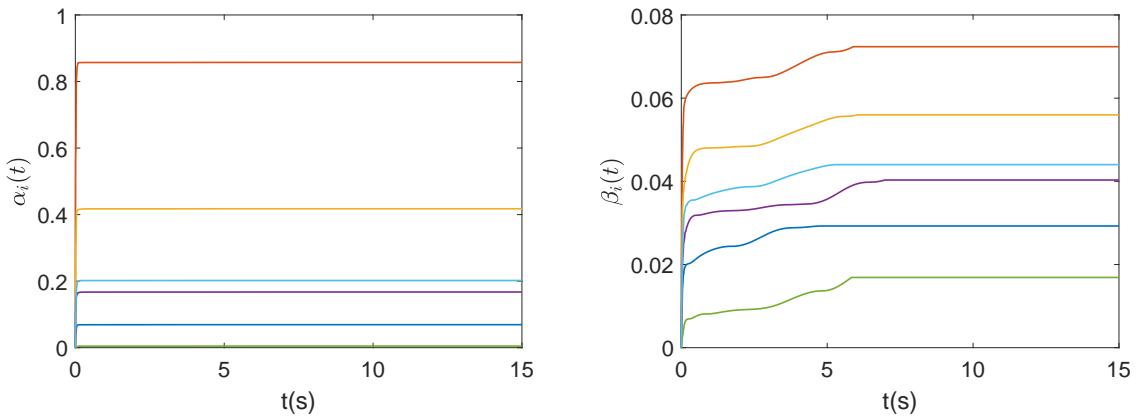


图 3.12: 例3.1.3中动态耦合权重 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ 。

跟踪问题，其中非线性项满足特定的类 Lipschitz 条件，从而可由局部滤波进行补偿。

我们从3.1小节中看到了神经网络在处理系统未知非线性函数时的鲁棒性和适应性。然而，现有文献中几乎没有基于神经网络补偿的分布式平均跟踪算法研究，为了填补这项空白，我们在本节中考虑一类带有匹配未知非线性的多智能体系统，其中时变的外部参考信号有界，且带有有界输入。注意到由于平均跟踪问题对于系统最终一致值的特殊要求，经典的一致性控制器[17, 25, 101]或3.1小节中的内容不可以直接运用到此类问题中。

3.2.1 模型描述与预备知识

考虑一类包含 N 个智能体的网络系统，第 i 个智能体包含匹配未知非线性：

$$\dot{x}_i = Ax_i + B(f_i(x_i) + u_i), \quad i = \mathcal{I}_N \quad (3.2.1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别时智能体 i 的状态和控制输入。系统矩阵 (A, B) 具有相容的维度且可镇定。未知非线性 $f_i(x_i) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 是光滑的，且在不同的智能体之间可以是异质的。

注 3.2.1 对比3.1小节中的(3.1.1)和文献[109, 122]，我们在本节中未考虑未知外部噪声的影响，这是出于简化讨论的目的。本节中的结果可以直接推广到智能体带有匹配的有界噪声干扰时的情形。

假设(3.2.1)中每个智能体 i 均可获得时变的外部信号，由线性系统产生：

$$\dot{r}_i = Ar_i + Bg_i, \quad (3.2.2)$$

其中 g_i 是时间 t 的函数, 可以理解为信号 r_i 的时变输入。

我们的目标是设计分布式协议, 使得智能体系统(3.2.1)一致地跟踪到它们所获得的外部信号(3.2.2)的平均值, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_j\| = 0, \forall i = \mathcal{I}_N$.

假设 3.2.1 智能体(3.2.1)间的通讯拓扑图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 为无向连通图。

假设 3.2.2 外部信号 r_i 和函数 g_i 均为有界, 即存在 $r_M, g_M \in \mathbb{R}^+$, 使得 $\|r_i\|_\infty \leq r_M, \|g_i\|_\infty \leq g_M$ 。

我们在本节中考虑无权图, 即权重矩阵中 $a_{ij} = 1$ 当且仅当 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 。根据引理2.1.1, 定义矩阵 $R \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ 使得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N^T \\ R^T \end{bmatrix} [\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N, R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N^T \\ R^T \end{bmatrix} = \mathbf{I}_N. \quad (3.2.3)$$

则有 $R^T R = \mathbf{I}_{N-1}, RR^T = \Xi$ 其中 $\Xi = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$

$$0 < \lambda_2 \mathbf{I}_{N-1} \leq R^T \mathcal{L} R \leq \lambda_N \mathbf{I}_{N-1} \quad (3.2.4)$$

这里我们分别用 λ_2 和 λ_N 来表示 \mathcal{L} 的最小非零特征值和最大特征值。另外, 易得 $\mathcal{L}\Xi = \Xi\mathcal{L} = \mathcal{L}, \Xi^2 = \Xi, \Xi E = E$ 其中 E 为图 \mathcal{G} 的任一关联矩阵。

接下来, 我们给出两个引理。

引理 3.2.1 ([35]) 在假设3.2.1下, 对任意向量 $x \in \mathbb{R}^N$, 有 $x^T \mathcal{L} E \Gamma \text{sgn}(E^T x) \geq \lambda_2 x^T E \Gamma \text{sgn}(E^T x)$, 其中 $\Gamma > 0$ 为任一正定矩阵。

3.2.2 分布式平均跟踪控制

在本小节中, 我们给出基于神经网络的分布式平均跟踪控制算法。类似地, 我们用(3.1.3)来逼近智能体 i 的未知非线性函数。考虑如下控制协议:

$$u_i = K(x_i - r_i) + c \text{sgn}(K(x_i - p_i)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{ij} \text{sgn}(K(p_i - p_j)) - \hat{W}_i^T S_i(x_i) \quad (3.2.5)$$

其中

$$p_i = z_i + r_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + B(K(p_i - r_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{ij} \text{sgn}(K(p_i - p_j))), \quad (3.2.6)$$

$$c_{ij} = \alpha(\|r_i\|_\infty + \|r_j\|_\infty) + \beta \quad (3.2.7)$$

且

$$\begin{aligned}\dot{\hat{W}}_i &= \tau_i [S_i(x_i)(x_i - p_i)^T P^{-1} B - \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i)] \\ \dot{\bar{W}}_i &= \pi_i \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i).\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

这里 p_i 是一个基于分布式设计的本地滤波， z_i 是一个内部模态， c_{ij} 是时变的耦合矩阵， $\hat{W}_i(t)$ 是对神经网络理想权重矩阵 W_i 的估计， $\bar{W}_i(t)$ 为对应的伪理想权重。 K 是一个反馈增益矩阵， $c, \alpha, \beta, \tau_i, \sigma, \pi_i \in \mathbb{R}^+$ 为常量， $P > 0$ 是一个正定矩阵，这些参数由下文算法3.2.1给出。

注 3.2.2 控制协议(3.2.5)中，标量 c 代表智能体状态和本地滤波间态误差信号的反馈强度；参数化的时变量 c_{ij} 表示智能体 i 与其邻居 j 间滤波误差信号的反馈强度，且由(3.2.7)知，此强度正比于二者外部信号 r_i, r_j 的模。注意到 c_{ij} 具有对称特性，即 $c_{ij} = c_{ji}$ ，相似的设计也出现在相关文献中[108, 129]。应当指出，控制协议(3.2.5)-(3.2.8)的设计部分受到了文献[109, 134]的启发。

算法 3.2.1

1). 选取 $\theta \in \mathbb{R}^+$, 求解下述 LMI:

$$AP + PA^T - 2BB^T + \theta P \leq 0 \quad (3.2.9)$$

得到一个正定矩阵解 $P > 0$;

2). 令 $K = -B^T P^{-1}$;

3). 取 $c > g_M + \epsilon_M, \alpha > \frac{\|B^T P^{-1}\|_\infty}{\lambda_2}, \beta > \frac{g_M}{\lambda_2}, \tau_i, \pi_i, \sigma \in \mathbb{R}^+$, 其中 ϵ_M 同(3.1.4)。

为简化符号，定义 $\tilde{x}_i = x_i - p_i$, $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_{2:N} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N^T \\ R^T \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \right) (p - \mathbf{1}_N \otimes p^*)$, 其中 $p^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j$ 。显然有 $\xi_1 \equiv \mathbf{0}$ 。记 $x = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$, $W = \text{diag}(W_1, \dots, W_N)$, $S(x) = \text{col}(S_1(x_1), \dots, S_N(x_N))$, $\epsilon = \text{col}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$, $\hat{W} = \text{diag}(\hat{W}_1, \dots, \hat{W}_N)$, $\tilde{W} = \hat{W} - W$, $\tilde{x} = \text{col}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_N)$, $r = \text{col}(r_1, \dots, r_N)$, $g = \text{col}(g_1, \dots, g_N)$, $\mathcal{M}_e = \text{diag}(c_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|}$, 其中每条边 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 的权重按照矩阵 E 的列索引进行排序（不重复计边）。

接下来，我们给出本节第一个定理。

定理 3.2.1 在假设3.1.1，假设3.2.1和假设3.2.2的前提下，在控制协议(3.2.5)并算法3.2.1的参数设计下，智能体系统(3.2.1)可实现对外部信号(3.2.2)的渐近平均跟踪，

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i\| = 0$, $\forall i \in \mathcal{I}_N$ 。此外, 每个神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到对应的伪理想权重矩阵 \overline{W}_i 。

证明. 根据 (3.2.1), (3.2.2), (3.1.3) 和控制协议(3.2.5), 可得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= (\mathbf{I}_N \otimes (A + BK))\tilde{x} + c(\mathbf{I}_N \otimes B)\text{sgn}((\mathbf{I}_N \otimes K)\tilde{x}) \\ &\quad - (\mathbf{I}_N \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) + g - \epsilon)\end{aligned}\tag{3.2.10}$$

且

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{2:N} &= (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (A + BK))\xi_{2:N} - (R^T \otimes BK)r + (R^T \otimes B)g \\ &\quad + (R^T E \mathcal{M}_e \otimes B)\text{sgn}((E^T R \otimes K)\xi_{2:N}).\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

考虑 Lyapunov 函数如下:

$$V_1 = V_x + V_\xi + V_w\tag{3.2.12}$$

其中

$$\begin{aligned}V_x &= \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \tilde{x} \\ V_\xi &= \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} \\ V_w &= \text{tr}(\tilde{W}^T \tau^{-1} \tilde{W}) + \text{tr}(\tilde{W}^T \pi^{-1} \tilde{W}).\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

这里 $P > 0$ 是 LMI (3.2.9) 的一个解, R 的定义见(3.2.3), $\tau = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_N)$, $\tilde{W} = \text{diag}(\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_N)$ 其中 $\tilde{W}_i = \overline{W}_i - W_i$, $\pi = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_N)$ 。

首先, 根据(3.2.10), 有

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= 2\tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \dot{\tilde{x}} \\ &= \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes (P^{-1}(A + BK) + (A + BK)^T P^{-1})) \tilde{x} + 2c\tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((\mathbf{I}_N \otimes K)\tilde{x}) \\ &\quad - 2\tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^T S(x) + g - \epsilon).\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

将算法(3.2.1)中 K 代入上式, 同时注意到对任意实向量 x , 有 $x^T \text{sgn}(x) = \|x\|_1$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1})(\mathbf{I} \otimes (AP + PA^T - 2BB^T))(\mathbf{I} \otimes P^{-1})\tilde{x} \\ &\quad - 2c\tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((\mathbf{I} \otimes B^T P^{-1})\tilde{x}) - 2\tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^T S(x) + g - \epsilon)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2 \sum_{i=1}^N c \|B^T P^{-1} \tilde{x}_i\|_1 - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x) + g - \epsilon) \\
&\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2c \sum_{i=1}^N \|B^T P^{-1} \tilde{x}_i\|_1 - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) \\
&\quad + 2(\|g\|_\infty + \|\epsilon\|_\infty) \|(\mathbf{I} \otimes B^T P^{-1}) \tilde{x}\|_1
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

其中我们使用了 LMI (3.2.9) 得到第二个不等式和 Hölder 不等式得到最后一个不等式。根据假设3.2.2和(3.1.4)可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_x &\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^N (c - (\|g\|_M + \|\epsilon\|_M)) \|B^T P^{-1} \tilde{x}_i\|_1.
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

同时，根据(3.2.11)，可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\xi &= 2\xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \dot{\xi}_{2:N} \\
&= \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes (P^{-1}(A + BK) + (A + BK)^T P^{-1})) \xi_{2:N} \\
&\quad - 2\xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} \otimes P^{-1} BK) r + 2\xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} \otimes P^{-1} B) g \\
&\quad + 2\xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} E \mathcal{M}_e \otimes P^{-1} B) \text{sgn}((E^T R \otimes K) \xi_{2:N}).
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

定义 $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = (R \otimes \mathbf{I}_n) \xi_{2:N}$, 有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\xi &\leq -\theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + 2\xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} \otimes P^{-1} BB^T P^{-1}) r \\
&\quad + 2\xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} \otimes P^{-1} B) g - 2\xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} E \mathcal{M}_e \otimes P^{-1} B) \text{sgn}((E^T R \otimes B^T P^{-1}) \xi_{2:N}) \\
&\leq -\theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|B^T P^{-1} r_i\|_\infty \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|g_i\|_\infty \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1 - 2\lambda_2 \varphi^T (E \mathcal{M}_e \otimes P^{-1} B) \text{sgn}((E^T \otimes B^T P^{-1}) \varphi)
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

其中我们使用了 LMI (3.2.9) 得到第一个不等式，同时使用了 Hölder 不等式和引理3.2.1得到最后一个不等式。注意到

$$2\varphi^T (E \mathcal{M}_e \otimes P^{-1} B) \text{sgn}((E^T \otimes B^T P^{-1}) \varphi) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{ij} \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1, \tag{3.2.19}$$

接着, 根据(3.2.7), (3.2.18), (3.2.19)和假设3.2.2可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_\xi &\leq -\theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|B^T P^{-1} r_i\|_\infty \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_\infty \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1 - 2\lambda_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{ij} \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\
 &\leq -\theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left((\alpha \lambda_2 - \|B^T P^{-1}\|_\infty) \|r_i\|_\infty \right. \\
 &\quad \left. + (\beta \lambda_2 - g_M) \right) \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1. \tag{3.2.20}
 \end{aligned}$$

另外, 由(3.2.8)可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_w &= 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\tau_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i \right) + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{1}{\pi_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i \right) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} (\tilde{W}_i^T S_i(x_i) \tilde{x}_i^T P^{-1} B) - 2\sigma \sum_{i=1}^N \text{tr} ((\hat{W}_i - \bar{W}_i)^T (\hat{W}_i - \bar{W}_i)) \\
 &\leq 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} (\tilde{W}_i^T S_i(x_i) \tilde{x}_i^T P^{-1} B). \tag{3.2.21}
 \end{aligned}$$

则根据(3.2.16), (3.2.20), (3.2.21)和算法(3.2.1)中所选参数, 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2\tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) \\
 &\quad - \theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr} (\tilde{W}_i^T S_i(x_i) \tilde{x}_i^T P^{-1} B) \\
 &\leq -\theta (\tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \tilde{x} + \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N}) \\
 &= -\theta [\tilde{x}^T, \xi_{2:N}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes P^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \xi_{2:N} \end{bmatrix} \\
 &\triangleq -\theta e^T \Phi e \leq 0 \tag{3.2.22}
 \end{aligned}$$

其中第二个不等式中我们用到了 $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ 对任意相容矩阵 X, Y 成立。

显然 $\Phi > 0$, 因此 $V_1(t)$ 非增, 保证了 $\tilde{x}, \xi_{2:N}, \tilde{W}_i, \bar{W}_i$ 的有界性且 $V_1(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时必有极限, 记为 V_1^∞ 。由(3.2.22)积分可得

$$\int_0^{+\infty} \theta e^T(t) \Phi e(t) dt \leq V_1(0) - V_1^\infty. \tag{3.2.23}$$

根据(3.2.10), (3.2.11), 假设3.2.2和假设3.1.1可得 \dot{e} 是有界的, 则 $\theta e^T \Phi e$ 为一致连续的。

根据引理2.3.1, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta e^T(t) \Phi e(t) = 0$, 结合 $\Phi > 0$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 即

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_{2:N}(t)\| = 0$ 进而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0$ 。根据 \tilde{x}, ξ 的定义, 我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - p_i\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i - p^*\| = 0. \quad (3.2.24)$$

接下来, 我们证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|p^* - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i\| = 0, \quad (3.2.25)$$

且以指数速率收敛。实际上, 若记 $\zeta(t) = p^* - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i$, 则根据(3.2.2)和(3.2.6)有

$$\dot{\zeta} = (A + BK)\zeta, \quad (3.2.26)$$

其中 K 见算法3.2.1, 则 $A + BK$ 为 Hurwitz 矩阵。

最后, 根据(3.2.24), (3.2.25)和三角不等式, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (3.2.27)$$

即智能体系统实现了对外部信号的平均跟踪。

另外, 定义 $\hat{W}_i^e = \hat{W}_i - \bar{W}_i$, 根据(3.2.8)有

$$\dot{\hat{W}}_i^e = -\sigma(\tau_i + \pi_i)\hat{W}_i^e + \tau_i S_i(x_i) \tilde{x}_i^T P^{-1} B. \quad (3.2.28)$$

由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_i\| = 0$, $S_i(x_i)$ 一致有界, $\sigma, \tau_i, \pi_i \in \mathbb{R}^+$, 则系统 \hat{W}_i^e 是输入稳定的[135]。因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{W}_i^e\|_F = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{W}_i = \bar{W}_i$ 。定理得证。 \square

注 3.2.3 与3.1节类似, 符号函数的存在表明了动力系统(3.2.10)和(3.2.11)是不连续的。由于此时 Lyapunov 函数连续可微, 且其集值 Lie 导数在不连续点仅包含一个单点, 此证明过程仍然成立。为了避免符号的冗余, 我们本节中不再使用微分包含符号。更多细节可参考本章3.1节或文献[109, 129, 132]。

3.2.3 自适应网络耦合调节

在上一小节中, 我们设计的分布式协议可由智能体根据局部信息执行。尽管如此, 算法3.2.1中的参数 c, α, β 依赖于某些局部信息, 如 $\lambda_2, g_M, \epsilon_M$ 。为了处理此类限制, 我

们考虑如下带有动态耦合调节机制的协议:

$$u_i = K(x_i - r_i) + c_i \operatorname{sgn}(K(x_i - p_i)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{ij} \operatorname{sgn}(K(p_i - p_j)) - \hat{W}_i^T S_i(x_i), \quad (3.2.29)$$

$$p_i = z_i + r_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + B(K(p_i - r_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{ij} \operatorname{sgn}(K(p_i - p_j))), \quad (3.2.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_i &= \kappa_i \|K(x_i - p_i)\|_1 \\ c_{ij} &= \alpha_{ij}(\|r_i\|_\infty + \|r_j\|_\infty) + \beta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{ij} &= \mu_{ij}(\|r_i\|_\infty + \|r_j\|_\infty) \|K(\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\ \dot{\beta}_{ij} &= \nu_{ij} \|K(\varphi_i - \varphi_j)\|_1, \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_i &= \tau_i [S_i(x_i)(x_i - p_i)^T P^{-1} B - \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i)] \\ \dot{\bar{W}}_i &= \pi_i \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i), \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

其中 $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)p$

对于此协议(3.2.29)-(3.2.33), 我们有如下结论:

定理 3.2.2 在假设3.1.1, 假设3.2.1和假设3.2.2的前提下, 令控制协议(3.2.29)-(3.2.33)中 $K = -B^T P^{-1}$ 同定理3.2.1, $\kappa_i, \mu_{ij}, \nu_{ij} \in \mathbb{R}^+$, 则智能体系统(3.2.1)可实现对外部信号(3.2.2)的渐近平均跟踪。此外, 每个神经网络权重估计矩阵 \hat{W}_i 收敛到对应的伪理想权重矩阵 \bar{W}_i , 每个自适应耦合变量 $c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ 收敛到某个有限值。

证明. 记 $\mathcal{M}_n = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_N)$, 结合(3.2.29), 此时 \tilde{x} 的动力学如下:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (\mathbf{I}_N \otimes (A + BK))\tilde{x} + (\mathcal{M}_n \otimes B)\operatorname{sgn}((\mathbf{I}_N \otimes K)\tilde{x}) \\ &\quad - (\mathbf{I}_N \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) + g - \epsilon). \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

而 ξ 的动力学同(3.2.11). 注意此时 $c_{ij}(t) = c_{ji}(t)$, 即对称性仍然成立。

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V_2 = V'_x + V'_\xi + V_w \quad (3.2.35)$$

其中

$$\begin{aligned}
 V'_x &= \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \tilde{x} + \sum_{i=1}^N \frac{(c_i - \bar{c})^2}{\kappa_i} \\
 V'_{\xi} &= \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + \lambda_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{(\alpha_{ij} - \bar{\alpha})^2}{\mu_{ij}} + \frac{(\beta_{ij} - \bar{\beta})^2}{\nu_{ij}} \\
 V_w &= \text{tr}(\tilde{W}^T \tau^{-1} \tilde{W}) + \text{tr}(\tilde{W}^T \pi^{-1} \tilde{W}). \tag{3.2.36}
 \end{aligned}$$

这里 $\bar{c}, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}^+$ 有待后续给出， \tilde{W}_i, τ, π 的定义见(3.2.13)。

首先，根据(3.2.15)和(3.2.31)中的 \dot{c}_i 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}'_x &\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2 \tilde{x}^T (\mathcal{M}_n \otimes P^{-1} B) \text{sgn}((\mathbf{I} \otimes B^T P^{-1}) \tilde{x}) \\
 &\quad - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x) + g - \epsilon) + 2 \sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c}) \|K(x_i - p_i)\|_1 \\
 &\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2 \sum_{i=1}^N c_i \|B^T P^{-1} \tilde{x}_i\|_1 - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) \\
 &\quad + 2(\|g\|_\infty + \|\epsilon\|_\infty) \|(\mathbf{I} \otimes B^T P^{-1}) \tilde{x}\|_1 + 2 \sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c}) \|B^T P^{-1} \tilde{x}_i\|_1. \tag{3.2.37}
 \end{aligned}$$

考虑到假设3.2.2和(3.1.4)，进一步有

$$\begin{aligned}
 \dot{V}'_x &\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^N (\bar{c} - (\|g\|_\infty + \|\epsilon\|_\infty)) \|B^T P^{-1} \tilde{x}_i\|_1 \\
 &\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^N (\bar{c} - (\|g\|_M + \|\epsilon\|_M)) \|B^T P^{-1} \tilde{x}_i\|_1. \tag{3.2.38}
 \end{aligned}$$

接着，根据(3.2.20)，(3.2.31)中 c_{ij} 的定义，以及(3.2.32)中的 $\dot{\alpha}_{ij}, \dot{\beta}_{ij}$ ，可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}'_{\xi} &\leq -\theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|B^T P^{-1} r_i\|_\infty \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_M \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1 - 2 \lambda_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [c_{ij} \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\
 &\quad - (\alpha_{ij} - \bar{\alpha})(\|r_i\|_\infty + \|r_j\|_\infty) \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1 - (\beta_{ij} - \bar{\beta}) \|B^T P^{-1} (\varphi_i - \varphi_j)\|_1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|B^T P^{-1} r_i\|_\infty \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_M \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1 \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\bar{\alpha} \lambda_2 (\|r_i\|_\infty + \|r_j\|_\infty) + \bar{\beta} \lambda_2) \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1. \tag{3.2.39}
\end{aligned}$$

结合假设3.2.2, 有

$$\begin{aligned}
\dot{V}'_\xi &\leq -\theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} ((\bar{\alpha} \lambda_2 - \|B^T P^{-1}\|_\infty) \|r_i\|_\infty + (\bar{\beta} \lambda_2 - g_M)) \|B^T P^{-1}(\varphi_i - \varphi_j)\|_1. \tag{3.2.40}
\end{aligned}$$

注意到(3.2.35)中 V_w 和(3.2.33)中 $\dot{\hat{W}}_i$ 与3.2.2小节中相同。在(3.2.35)中, 通过选择足够大的 $\bar{c}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 使得 $\bar{c} > g_M + \epsilon_M, \bar{\alpha} > \frac{\|B^T P^{-1}\|_\infty}{\lambda_2}, \bar{\beta} > \frac{g_M}{\lambda_2}$, 则根据(3.2.38), (3.2.40)和(3.2.21)得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq -\theta \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \tilde{x} - 2 \tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) \\
&\quad - \theta \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N} + 2 \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T S_i(x_i) \tilde{x}_i^T P^{-1} B) \\
&= -\theta (\tilde{x}^T (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1}) \tilde{x} + \xi_{2:N}^T (R^T \mathcal{L} R \otimes P^{-1}) \xi_{2:N}) \\
&\triangleq -\theta e^T \Phi e \leq 0 \tag{3.2.41}
\end{aligned}$$

其中 e, Φ 的定义见(3.2.22)。可知 $V_2(t)$ 是非增的, 保证了 $\tilde{x}, c_i, \xi_{2:N}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \tilde{W}_i$ 和 \tilde{W}_i 的有界性。按照与定理3.2.1中相似的步骤, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i\| = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{W}_i = \overline{W}_i, \forall i \in \mathcal{I}_N$ 。最后, 由于 $\kappa_i, \mu_{ij}, \nu_{ij} \in \mathbb{R}^+$, 所有的自适应耦合变量 $c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ 均为单增的, 结合其有界性, 可知其各自收敛到某个有限值。□

注 3.2.4 在文献[29]中, 初始的内部模态需要满足 $\sum_{i=1}^N z_i(0) = 0$ 和 $\sum_{i=1}^N \dot{z}_i(0) = 0$ 。本小节提出的(3.2.29)与3.2.2小节中的(3.2.5)均不需满足此类初始化条件, 即可以任意初始化。

注 3.2.5 尽管我们理论上给出了平均跟踪误差渐近收敛到零, 一个实际问题是由于测量精度、噪声、系统的抖颤等干扰, 自适应变量 $c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ 可能会缓慢增加[132, 134]。为了解决这个问题, 我们可以引入两个小标量 $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$, 仅当

$\|x_i - p_i\|_1 > T_1$ 时，按照(3.2.31)更新 c_i ；同时仅当 $\|\varphi_i - \varphi_j\|_1 > T_2$ 时，按照(3.2.32)更新 α_{ij}, β_{ij} 。在任一情形的相反情况出现时，我们则保持相应的自适应变量不变。如此一来，只要跟踪误差进入理想的界，自适应变量将收敛至有限值。

注 3.2.6 为了进一步减弱不连续控制(3.2.5)或(3.2.29)引起的系统抖颤，我们可以使用如下的连续函数来代替符号函数 $sgn(z)$ ：

$$\varpi(z, t) = \frac{z}{\|z\| + \varepsilon e^{-\varrho t}} \quad (3.2.42)$$

或，更简单的

$$\varpi(z) = \frac{z}{\|z\| + \varepsilon} \quad (3.2.43)$$

其中 $\varepsilon, \varrho \in \mathbb{R}^+$ 。实际上，以上分别是符号函数的时变和定常的连续逼近[32, 134]。

3.2.4 数值仿真

本节给出两个算例来验证所得的理论结果。在两个例子中，我们假设智能体的通讯拓扑是相同的，如图 3.13；同时外部信号的输入函数也是相同的一维函数，如下：

$$\begin{aligned} g_1 &= \sin(0.8t) \\ g_2 &= 0.5 \sin(0.7t) + 0.5 \sin(0.6t) \\ g_3 &= \frac{e^t}{e^t + 1} \\ g_4 &= \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ g_5 &= \frac{t}{1 + t^2} \\ g_6 &= \tanh(t). \end{aligned}$$

则所有的 g_i 均为有界的，上界 $g_M = 1$ 。在仿真中，初始的外部信号 $r_i(0)$ 取自标准差为 2 的正态分布； $x_i(0), z_i(0)$ 和神经网络的输入层取自标准正态分布； $\hat{W}_i(0) = \bar{W}_i(0) = \mathbf{O}$ 。我们假设逼近误差界 $\epsilon_M = 1$ 。为了保证逼近效果，在两个算例中，每个神经网络隐层包含 30 个带有 Sigmoid 激活函数的隐层神经元。

例 3.2.1 考虑智能体为非确定性二阶振子，系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

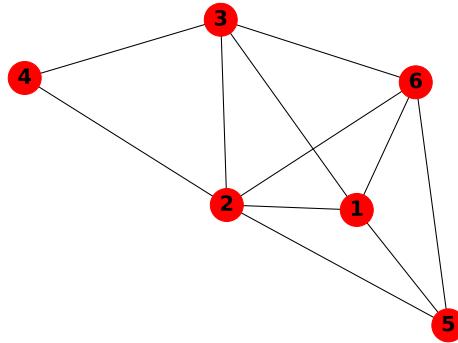


图 3.13: 智能体之间的通讯拓扑。

匹配的未知非线性函数 $f_i(x_i) = ix_{i1} + x_{i2}^2$ 。

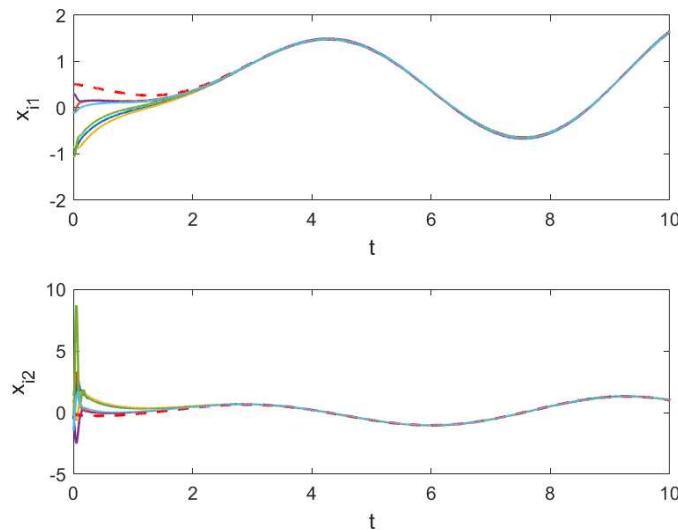
首先, 为了验证定理3.2.1, 令 $\theta = 2$, 求解 LMI (3.2.9) 得

$$P = \begin{bmatrix} 0.1277 & -0.2066 \\ -0.2066 & 0.5409 \end{bmatrix}.$$

令

$$K = [-7.8200, -4.8354],$$

根据算法3.2.1取 $c = 3$, $\alpha = 4.5$, $\beta = 0.65$, $\tau_i = 60$, $\pi_i = 6$, $\sigma = 0.6$ 。在执行协议(3.2.5)后, 智能体的状态渐近跟踪到外部信号的平均值, 如图3.14。神经网络的伪权重矩阵收敛误差 \hat{W}_i^e 和智能体控制输入 u_i 如图3.15。

图 3.14: 智能体的状态 x_i (实线) 和外部信号 r_i 的平均值 (虚线), $i = 1, \dots, 6$ 。

为了验证定理3.2.2, 在相同的初始条件和参数的情况下, 另取 $\kappa_i = \mu_{ij} = \nu_{ij} =$

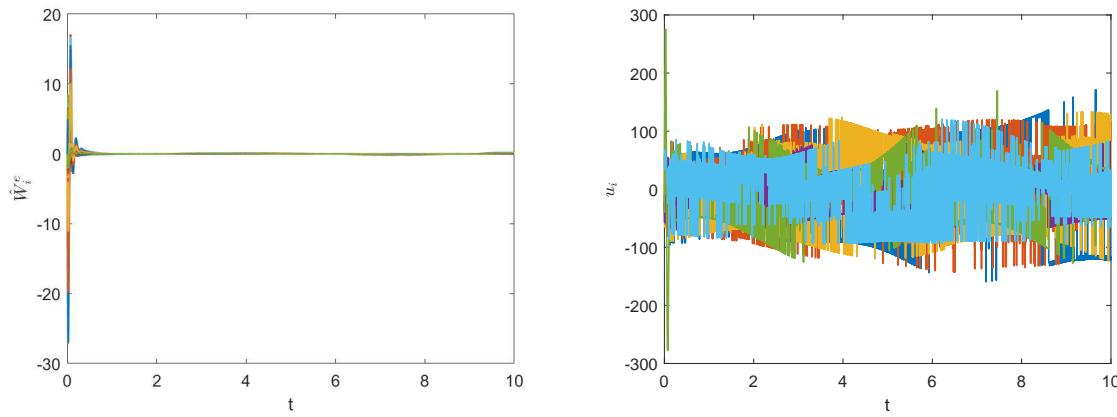


图 3.15: \hat{W}_i^e 中的分量 (左); (3.2.5)中的控制输入 u_i (右); $i = 1, \dots, 6$ 。

0.1。考虑到注3.2.5, 取 $T_1 = T_2 = 0.6$ 。在控制协议(3.2.29)下, 所有智能体的状态同样实现了对外部信号的平均跟踪, 如图3.16所示。另外, \hat{W}_i^e 中的各元素值和自适应变量 $c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ 的演化如图3.17 (左), 同时智能体的控制输入 u_i 如图3.17 (右)。可以看出, 在大约 $t = 2$ 后, 所有自适应变量收敛到稳态值。

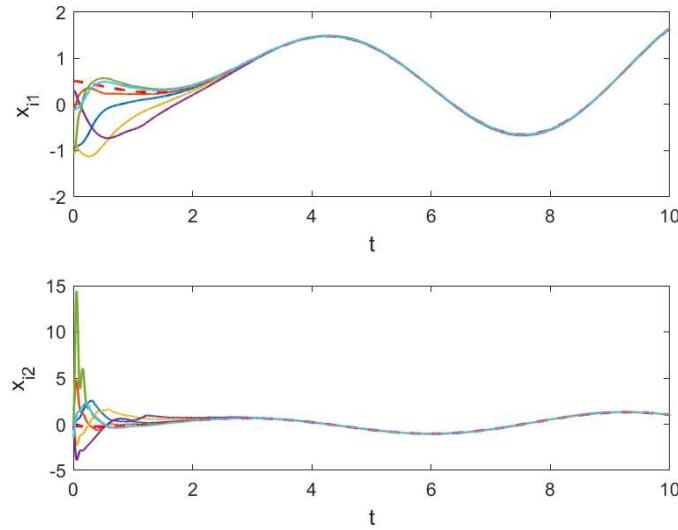


图 3.16: 智能体的状态 x_i (实线) 和外部信号 r_i 的平均值 (虚线), $i = 1, \dots, 6$ 。

为了进一步突出引入神经网络的必要性, 我们以控制器(3.2.5)为例, 移除神经网络逼近项 $\hat{W}_i^T S_i(x_i)$, 而只保留其中前三项作为反馈输入 (类似于文献[134]中的控制策略), 则智能体的状态演化如图3.18。显然, 这一简化的策略没能成功地解决平均跟踪问题。

例 3.2.2 与3.1.4小节中例3.1.1相同, 考虑智能体和外部信号的线性部分动力学为

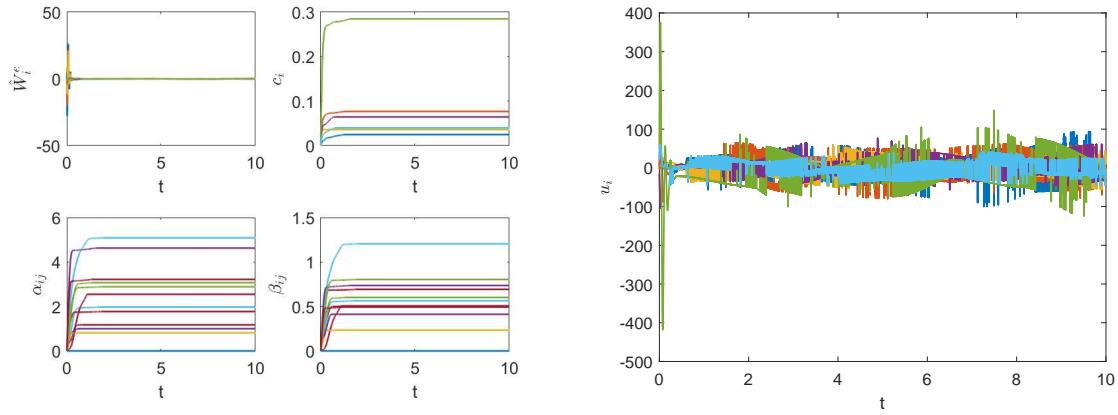


图 3.17: \hat{W}_i^e 中的元素和自适应变量 $c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ (左); (3.2.29) 中的控制输入 u_i (右);
 $i = 1, \dots, 6$ 。

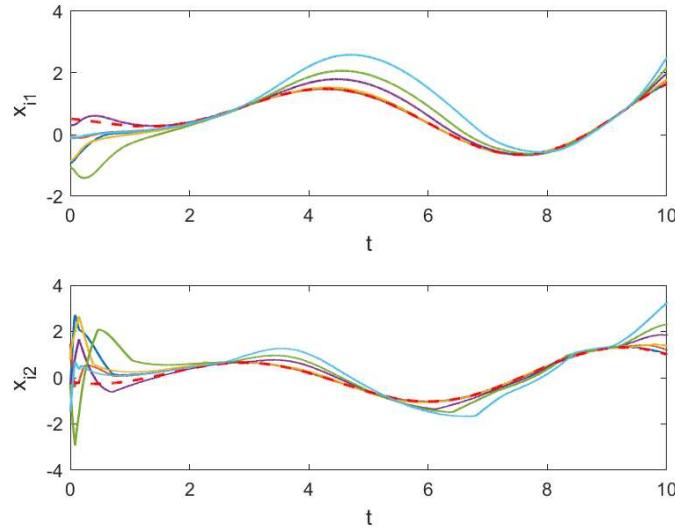


图 3.18: 从(3.2.5)中移除神经网络逼近项后, 智能体的状态 x_i (实线) 和外部信号 r_i 的平均值 (虚线), $i = 1, \dots, 6$ 。

飞行器的纵向动力学 [133], 其中系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -0.277 & 1 & -0.0002 \\ -17.1 & -0.178 & -12.2 \\ 0 & 0 & -6.67 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.67 \end{bmatrix}.$$

未知的非线性函数假设为 $f_i(x_i) = ix_{i1} + x_{i2}x_{i3}$ 。在本例中, 考虑到注 3.2.6, 我们使用连续的控制方法来求解平均跟踪问题。当逼近符号函数时, 我们使用(3.2.42)和参数 $\varepsilon = 1, \varrho = 0.1$ 。

首先，为了验证定理3.2.1，取 $\theta = 2$ ，求解 LMI (3.2.9) 得

$$P = \begin{bmatrix} 1.0117 & -1.4971 & -0.0521 \\ -1.4971 & 21.7860 & 5.6108 \\ -0.0521 & 5.6108 & 2.8395 \end{bmatrix}.$$

令

$$K = [1.9236, 1.4825, -5.2431],$$

取 $c = 3, \alpha = 3, \beta = 0.65, \tau_i = 300, \pi_i = 100, \sigma = 0.6$. 在连续化后的控制协议(3.2.5)作用下，智能体的演化如图3.19所示，所有分量均渐近跟踪到外部信号的平均值。另外，神经网络的伪权重矩阵收敛误差 \hat{W}_i^e 和智能体连续化后的控制输入 u_i 如图3.20。

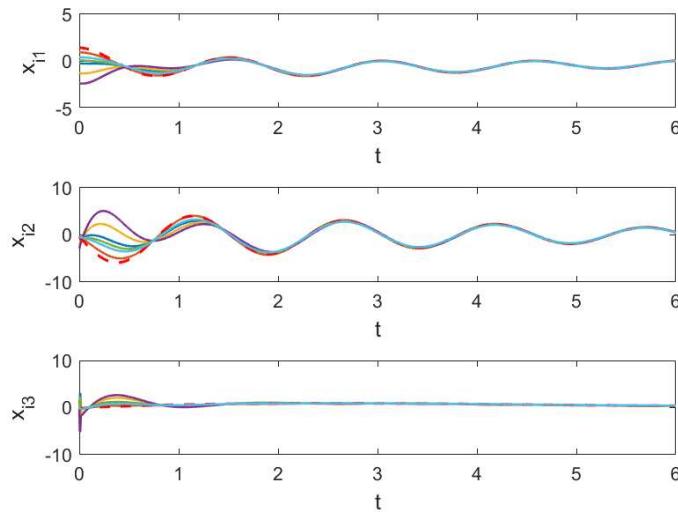


图 3.19: 智能体的状态 x_i (实线) 和外部信号 r_i 的平均值 (虚线), $i = 1, \dots, 6$ 。

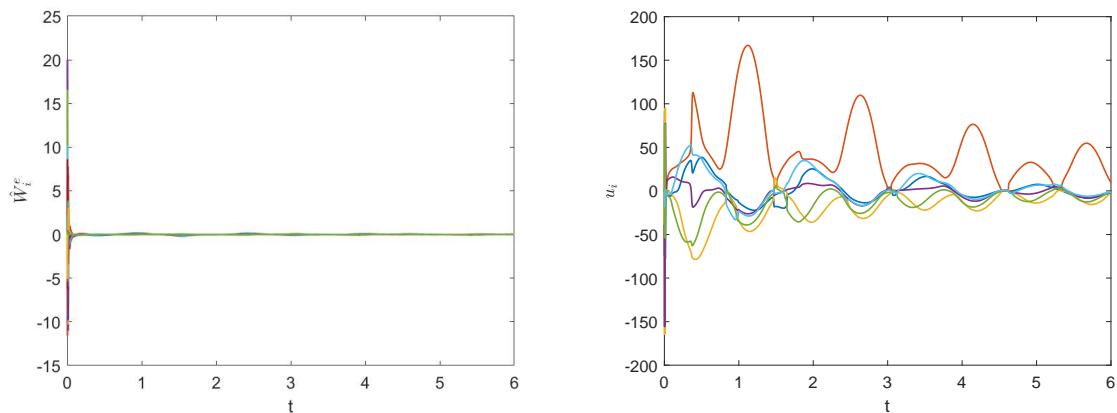


图 3.20: \hat{W}_i^e 中的分量 (左); 连续化后(3.2.5)中的控制输入 u_i (右); $i = 1, \dots, 6$ 。

进而,为了验证定理3.2.2,我们同样给出带有自适应耦合调节的连续化控制器(3.2.29)的实验结果。选择与前述实验相同的初始条件和神经网络参数,另取 $\kappa_i = \mu_{ij} = \nu_{ij} = 0.1$, $T_1 = T_2 = 0.6$ 。则所有智能体的状态演化如图3.21。另外, \hat{W}_i^e 中的各元素值和自适应变量 c_i , α_{ij} , β_{ij} 的演化如图3.22(左),同时智能体的连续化后的控制输入 u_i 如图3.22(右)。

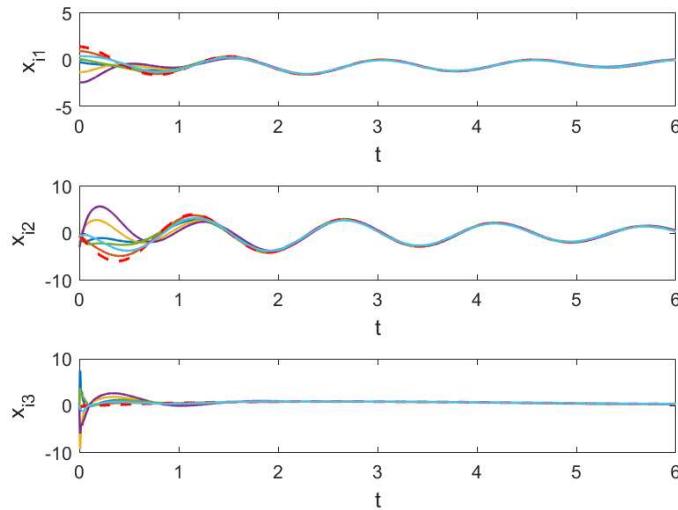


图 3.21: 智能体的状态 x_i (实线) 和外部信号 r_i 的平均值 (虚线), $i = 1, \dots, 6$ 。

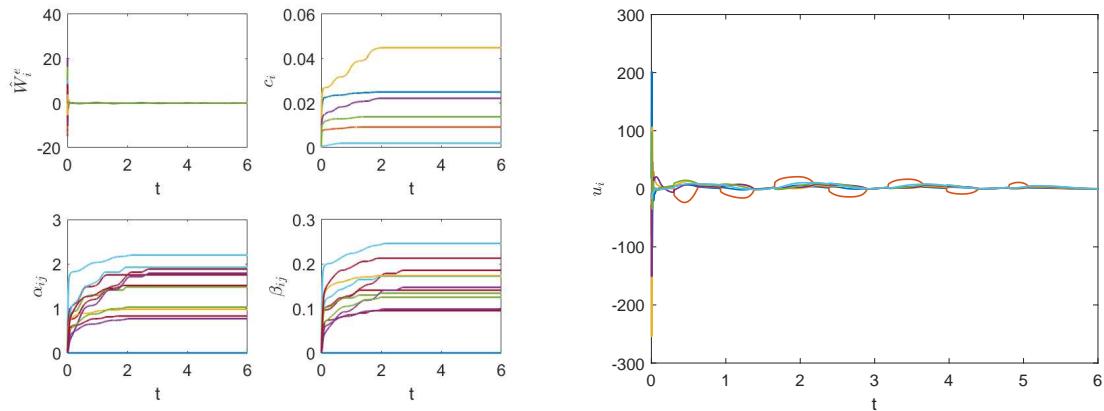


图 3.22: \hat{W}_i^e 中的元素和自适应变量 $c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ (左); 连续化后(3.2.29)中的控制输入 u_i (右); $i = 1, \dots, 6$ 。

可见所有的实验结果验证了本节所得的理论结果的有效性。

3.3 基于神经网络的高维领导者跟踪控制

考虑到实际系统的种种限制，对于系统非确定性的处理是控制理论的一项核心内容。系统时滞是一类典型的、普遍存在的问题，在多智能体的一致性问题中也有着广泛的研究基础[136–141]。根据网络系统中时滞存在的部位或组件的不同，对时滞的研究可以粗略的分为三类：个体状态时滞[138]、控制输入时滞[139, 141]、网络通讯时滞[137, 140]。当然，也可以考虑上述三类时滞任意组合时的情形，如在文献[136]中，作者考虑了线性多智能体系统在输入时滞和通讯时滞共存时的一致性控制策略，并提出了若干独立于通讯时滞的充分性条件。

当考虑系统时滞和未建模动态同时存在时，现有文献已表明 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和神经网络可以有机结合，优势互补[102, 131, 142]。文献[102]提出了一类基于径向基神经网络的非线性时滞多智能体系统一致性控制策略，其中通过将一致性概念放宽至一个球形邻域中，有效避免了控制器潜在的奇异性问题。随后，文献[131, 142]将此类方法进一步延拓，分别求解了二阶非线性和一类仿射非线性多智能体系统的一致跟踪问题，同时通过引入标量形式的神经网络权重自适应率，有效提升了计算和控制效率。

另一方面，系统状态的可测性通常面临着技术限制、噪音干扰或数据丢包等因素的挑战。同时这也激发了基于输出观测的控制方法的研究[20, 143, 144]。如文献[143]研究了一类带有未建模动力学的高阶半严格反馈的多智能体系统，通过设计基于神经网络的状态观测器和自适应反步控制器，实现了智能体状态的有界一致性。文献[144]提出了一类不连续观测器，用于二阶多智能体系统的有限时间一致性分析。文献[20]提出了针对二阶网络系统的分数阶观测器。

注意到前述一致跟踪相关文献大多数围绕同质的多智能体系统，其中假设领导者与跟踪者具有相同的动力学行为。然而，实际网络系统中个体通常存在异质性，具有较高维自由度以及决策空间的领导者也尤为常见[41–43]。在这一背景下，文献[41]研究了一类由高维线性系统建模的领导者和一维积分器系统建模的跟随者组成的网络系统，并给出了跟随者的分布式跟踪控制协议。最近，文献[42, 43]分别研究了在有向切换通讯环境下和在跟随者存在未建模动态时的高维领导者跟踪控制问题。然而，时滞的影响在上述文献中并未考虑。

基于上述讨论，本节将考虑一类异质非线性的多智能体系统的一致跟踪问题，其中领导者的动力学模型为一个高维的 Lipschitz 型非线性系统，而跟随者的动力学同时

受限于未建模动态和未知的时变状态时滞。

3.3.1 模型描述与预备知识

考虑带有 $N + 1$ 个智能体的网络系统，其中智能体 0 是领导者，而智能体 $1 \sim N$ 是跟随者。领导者的动力学行为描述如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = \hat{A}x_0(t) + g(x_0(t), t) \\ y(t) = \hat{C}x_0(t) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

其中 $x_0(t) \in \mathbb{R}^{nm}$ 为领导者的状态向量， $\hat{A} \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$ 为已知的线性部分动力学，非线性向量值函数 $g(x_0(t), t) : \mathbb{R}^{nm} \times [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^m$ 连续可微，且满足以下全局 Lipschitz 条件：

假设 3.3.1 存在 $\psi \in \mathbb{R}^+$ ，使得 $\|g(x, t) - g(y, t)\| \leq \psi \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^{nm}, t > 0$ 。

向量 $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示智能体的输出信号，为了简化讨论，输出测量矩阵 $\hat{C} \in \mathbb{R}^{m \times nm}$ 取作 $\hat{C} = (\mathbf{O}_m, \mathbf{O}_m, \dots, \mathbf{O}_m, \mathbf{I}_m)$ ，即要求跟随者跟踪到领导者状态向量的最后 m 维分量。假设 (\hat{C}, \hat{A}) 是可检测的。注意到领导者的状态 $x_0(t)$ 可以重写为 $x_0(t) = \text{col}(x_0^1(t), x_0^2(t), \dots, x_0^n(t))$ 其中 $x_0^i(t) \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2, \dots, n$ 。我们可将矩阵 $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ 进行如下分块操作

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \cdots & \hat{A}_{1n} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \cdots & \hat{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{n1} & \hat{A}_{n2} & \cdots & \hat{A}_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

其中 $\hat{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}, i, j = 1, 2, \dots, n$ 。同时，假设非线性函数 $g(x_0(t), t)$ 可以分为 $g(x_0(t), t) = \text{col}(g_1(x_0^1(t), t), g_2(x_0^2(t), t), \dots, g_n(x_0^n(t), t))$ ，其中 $g_i(x_0^i(t), t) : \mathbb{R}^m \times [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^m$ 自然地也为连续可微函数。

跟随者 $i (i \in \mathcal{I}_N)$ 的动力学行为描述如下：

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f_i(x_i(t)) + h_i(x_i(t - \tau_i(t))) + d_i(t) + u_i(t) \quad (3.3.3)$$

其中 $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 为其状态向量， $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为已知的系统矩阵， $f_i(x_i(t)), h_i(x_i(t)) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ 均为未知但本质连续的向量值函数，表示智能体的未建模动态。函数 $\tau_i(t)$ 和 $d_i(t)$ 分别表示未知的时变状态时滞和未知外部干扰。

注 3.3.1 注意到在文献[102, 131]中，智能体的状态时滞是时不变的。而这里我们考虑到状态时滞本质上是未知的，因此假设其为时变的将更符合实际情况。同时，带有已知线性动力学描述和未建模非线性动态的系统在实际中也是十分常见的[43]。

我们用 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 来描述 N 个跟随者之间的通讯拓扑，同时用 $\bar{\mathcal{G}}(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{A}})$ 描述整个领导跟随网络的通讯拓扑。我们合理地假设领导者的行行为不受到任何跟随者的影响，同时领导者的输出信息仅可由部分跟随者获得。相应地， $\bar{\mathcal{G}}$ 的 Laplacian 矩阵可分块为

$$\bar{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_N^T \\ -\mathbf{a}_0 & \tilde{\mathcal{L}} \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

其中 $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \text{diag}(\mathbf{a}_0)$, $\mathbf{a}_0 = (a_{10}, a_{20}, \dots, a_{N0})^T$ 且 $a_{i0} > 0$ 当且仅当跟随者 i 可直接获取领导者输出信息。

假设 3.3.2 有向图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含一个以领导者 0 为根节点的有向支撑树。

我们的控制目标是设计分布式协议 $u_i(t)$ ，使所有的跟随者可以跟踪至领导者输出信号的有界邻域内：

定义 3.3.1 ([43]) 跟随者(3.3.3)对高维领导者(3.3.1)实现了残差为 ϖ 的一致跟踪，若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - y(t)\| \leq \varpi, \forall i \in \mathcal{I}_N$ 。

应指出该控制问题的难点主要在于两方面：首先，由于仅部分跟随者可以获取领导者的输出信息，需要通过分布式观测器的设计为每个跟随者重构出高维领导者的状态信息；其次，需要同时在线补偿未建模动态、未知时变时滞和未知干扰的影响。

假设 3.3.3 ([145]) 未知函数 $h_i(x_i(t))$ 满足不等式 $\|h_i(x_i(t))\| \leq \rho_i(x_i(t)), i \in \mathcal{I}_N$ ，其中 $\rho_i(\cdot)$ 为已知的取值为正的光滑函数。

假设 3.3.4 未知干扰是有界的，即存在 $d_M \in \mathbb{R}^+$ ，使得 $\|d_i(t)\| \leq d_M, \forall i \in \mathcal{I}_N$ 。

假设 3.3.5 存在已知 $\tau_d, \tau_{max} \in \mathbb{R}^+$ ，使得未知时滞满足 $\dot{\tau}_i(t) \leq \tau_d < 1, 0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_{max}, \forall i \in \mathcal{I}_N$ 。

引理 3.3.1 ([115]) 对于一个非奇异矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，下列命题等价：

- 1). A 是一个 M 矩阵。
- 2). A 的所有非对角线元素均非正，且 A^{-1} 的所有元素非负。
- 3). A 的所有特征值均包含正实部，即 $\Re(\lambda_i(A)) > 0, \forall i \in \mathcal{I}_n$ 。
- 4). 存在一个对角矩阵 $\Theta > 0$ 使得 $\Theta A + A^T \Theta > 0$ 。

3.3.2 分布式观测器设计

为了保证跟踪的顺利实现，每个跟随者必须在本地构建一个观测器来重构领导者的状态信息。在这一小节中，我们介绍一个基于局部信息的分布式观测器设计机制。

在假设3.3.2下，根据引理2.1.1，我们知道 $\tilde{\mathcal{L}}$ 是一个 M 矩阵。则根据引理3.3.1，存在一个正定对角阵

$$\Xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \quad (3.3.5)$$

使得 $\Xi\tilde{\mathcal{L}} + \tilde{\mathcal{L}}^T\Xi > 0$ 。矩阵 Ξ 的一个可行解可通过选取 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T = (\tilde{\mathcal{L}}^T)^{-1}\mathbf{1}_N$ 得到[107]。记

$$\underline{\lambda} = \lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{L}} + \Xi^{-1}\tilde{\mathcal{L}}^T\Xi), \quad (3.3.6)$$

显然 $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ 。定义 $\zeta_i(t) = \text{col}(\zeta_i^1(t), \zeta_i^2(t), \dots, \zeta_i^n(t)) \in \mathbb{R}^{nm}$ 为跟随者 i 对领导者全阶状态的观测，使得

$$\dot{\zeta}_i^k(t) = g_k(\zeta_i^k(t), t) + \sum_{j=1}^n \hat{A}_{kj} \zeta_i^j(t) - \alpha F_k \eta_i(t) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.7)$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ 有待进一步选取， $F = \text{col}(F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathbb{R}^{nm \times m}$ 为待设计的反馈矩阵， $\eta_i(t)$ 为跟随者 i 基于观测器的局部一致性误差：

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\zeta_j^n(t) - \zeta_i^n(t)) + a_{i0}(y(t) - \zeta_i^n(t)). \quad (3.3.8)$$

令 $\delta_i(t) = \zeta_i(t) - x_0(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 表示跟随者 i 对领导者 0 的观测误差。根据(3.3.1)和(3.3.7)， $\delta_i(t)$ 的动力学满足

$$\dot{\delta}_i(t) = g(\zeta_i(t), t) - g(x_0(t), t) + \hat{A}\delta_i(t) - \alpha F\eta_i(t). \quad (3.3.9)$$

通过定义 $\delta(t) = \text{col}(\delta_1(t), \dots, \delta_N(t))$, $\zeta(t) = \text{col}(\zeta_1(t), \dots, \zeta_N(t)) \in \mathbb{R}^{Nnm}$, $\tilde{g}(\zeta(t), x_0(t), t) = \text{col}(g(\zeta_1(t), t), \dots, g(\zeta_N(t), t)) - \mathbf{1}_N \otimes g(x_0(t), t)$, 可得整个跟随者网络对领导者的观测误差系统为：

$$\dot{\delta}(t) = (\mathbf{I}_n \otimes \hat{A} + \alpha \tilde{\mathcal{L}} \otimes F \hat{C})\delta(t) + \tilde{g}(\zeta(t), x_0(t), t). \quad (3.3.10)$$

根据[43]，可直接得出如下命题：

命题 3.3.1 在假设3.3.1和假设3.3.2的前提下，若存在一个正定矩阵 $P > 0 \in$

$\mathbb{R}^{nm \times nm}$ 和正标量 $\alpha, c_0 \in \mathbb{R}^+$, 使得

$$\begin{pmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} - \alpha \underline{\lambda} \hat{C}^T \hat{C} + c_0 P + I_{nm} & \psi P \\ \psi P & -I_{nm} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.3.11)$$

则观测误差系统(3.3.10)的原点是指数渐近稳定的, 其中反馈矩阵 F 可取作

$$F = -P^{-1} \hat{C}^T.$$

上述命题有效地保证了每个跟随者的观测分量 $\zeta_i^n(t)$ 指数收敛至领导者的输出信号 $y(t)$, 且相对较大的 c_0 值将提高观测系统的指数收敛速率。

3.3.3 神经网络自适应跟踪控制

在本小节中, 我们设计基于神经网络的自适应一致跟踪控制器。记跟随者 i 基于观测的跟踪误差为 $e_i(t) = x_i(t) - \zeta_i^n(t), i = 1, 2, \dots, N$ 。根据(3.3.3)和(3.3.7), 有

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & Ax_i(t) + f_i(x_i(t)) + h_i(x_i(t - \tau_i(t))) + d_i(t) + u_i(t) \\ & - g_n(\zeta_i^n(t), t) - \sum_{j=1}^n \hat{A}_{nj} \zeta_i^j(t) + \alpha F_n \eta_i(t). \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

显然, 为了进一步设计, 合理的观测补偿是必要的。因此, 我们将 $u_i(t)$ 分割为观测补偿项和误差反馈项如下[43]:

$$u_i(t) = u_i^{\text{ot}}(t) + u_i^{\text{et}}(t) \quad (3.3.13)$$

其中 $u_i^{\text{ot}}(t)$ 可以设计为

$$u_i^{\text{ot}}(t) = (\hat{A}_{nn} - A)x_i(t) + g_n(\zeta_i^n(t), t) + \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}_{nj} \zeta_i^j(t) - \alpha F_n \eta_i(t), \quad (3.3.14)$$

而 $u_i^{\text{et}}(t)$ 有待进一步设计。将(3.3.14)代入(3.3.12)得

$$\dot{e}_i(t) = \hat{A}_{nn} e_i(t) + f_i(x_i(t)) + h_i(x_i(t - \tau_i(t))) + d_i(t) + u_i^{\text{et}}(t). \quad (3.3.15)$$

为了进一步分析, 我们首先定义一个函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i(t)^T e_i(t). \quad (3.3.16)$$

取 $V_1(t)$ 沿系统(3.3.15)的轨线得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i(t)^T (\hat{A}_{nn} + \hat{A}_{nn}^T) e_i(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N e_i(t)^T (f_i(x_i(t)) + h_i(x_i(t - \tau_i(t))) + d_i(t) + u_i^{\text{et}}(t)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \chi_{\max} \|e_i(t)\|^2 + \sum_{i=1}^N e_i(t)^T (f_i(x_i(t)) + h_i(x_i(t - \tau_i(t))) + d_i(t) + u_i^{\text{et}}(t))\end{aligned}$$

其中 χ_{\max} 表示矩阵 \hat{A}_{nn} 的所有特征值的最大实部。根据假设3.3.3, 假设3.3.4和Cauchy不等式, 有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left(\chi_{\max} \|e_i(t)\|^2 + e_i(t)^T f_i(x_i(t)) + e_i(t)^T \rho_i(x_i(t - \tau_i(t))) \right. \\ &\quad \left. + d_M \|e_i(t)\| + e_i(t)^T u_i^{\text{et}}(t) \right). \quad (3.3.17)\end{aligned}$$

注 3.3.2 反馈控制不能直接基于(3.3.17)进行设计, 主要有两方面原因: 其一, 尽管函数 $\rho_i(\cdot)$ 已知, 但 $f_i(\cdot)$ 和时滞 $\tau_i(t)$ 均未知; 其二, 未知时滞 $\tau_i(t)$ 与实时的误差信号 $e_i(t)$ 相互耦合, 使得控制设计变得更加困难。针对第二点, 我们首先需将时滞与误差系统解耦合。

根据 Young 不等式, 即 $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, 我们有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left((1 + \chi_{\max}) \|e_i(t)\|^2 + e_i(t)^T u_i^{\text{et}}(t) + e_i(t)^T f_i(x_i(t)) + \frac{\rho_i^2(x_i(t - \tau_i(t)))}{2} \right) \\ &\quad + \frac{Nd_M^2}{2}. \quad (3.3.18)\end{aligned}$$

注意到在(3.3.18)中, $\tau_i(t)$ 与 $e_i(t)$ 已经实现解耦合。接着, 为了克服未知的时变时滞 $\tau_i(t)$ 的影响, 考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V_2(t) = \frac{1}{2(1 - \tau_d)} \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i(t)}^t \rho_i^2(x_i(s)) ds. \quad (3.3.19)$$

对 $V_2(t)$ 求导得

$$\dot{V}_2(t) = \frac{1}{2(1 - \tau_d)} \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2(x_i(t)) - \sum_{i=1}^N \rho_i^2(x_i(t - \tau_i(t))) (1 - \dot{\tau}_i(t)) \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2(1-\tau_d)} \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2(x_i(t)) - \sum_{i=1}^N \rho_i^2(x_i(t-\tau_i(t))) (1-\tau_d) \right) \\
&= \frac{1}{2(1-\tau_d)} \sum_{i=1}^N \rho_i^2(x_i(t)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_i^2(x_i(t-\tau_i(t))). \tag{3.3.20}
\end{aligned}$$

显然， $V_2(t)$ 的引入可以抵消 $\tau_i(t)$ 的影响。实际上，令

$$V_e(t) = V_1(t) + V_2(t), \tag{3.3.21}$$

则有

$$\dot{V}_e(t) \leq \sum_{i=1}^N \left((1 + \chi_{\max}) \|e_i(t)\|^2 + e_i(t)^T u_i^{\text{et}}(t) + e_i(t)^T f_i(x_i(t)) + \frac{\rho_i^2(x_i(t))}{2(1-\tau_d)} \right) + \frac{Nd_M^2}{2}. \tag{3.3.22}$$

为了符号的简洁，我们在下文中省去 $x_i(t)$, $e_i(t)$ 中的时间符号。注意到此时唯一的障碍来自于未知函数 $f_i(x_i)$ 。令 $x_i \in \Omega_{x_i} \subset \mathbb{R}^m$, 其中 Ω_{x_i} 是一个紧致集。定义 Ω_{r_i} , $\Omega_{r_i}^o \subset \Omega_{x_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$ 如下

$$\Omega_{r_i} := \{x_i | \|e_i\| \leq r_i\} \tag{3.3.23}$$

$$\Omega_{r_i}^o := \Omega_{x_i} - \Omega_{r_i} \tag{3.3.24}$$

其中 r_i 是一个任意小的常数。则 $\Omega_{r_i}^o$ 也是一个紧集[145]。由于 $f_i(x_i)$ 在紧集 $\Omega_{r_i}^o \subset \mathbb{R}^m$ 上是连续的，类似于3.1.3， $f_i(x_i)$ 可由一个神经网络来逼近：

$$f_i(x_i) = W_i^{*T} S_i(x_i) + \varepsilon_i(x_i) \tag{3.3.25}$$

其中 $W_i^* \in \mathbb{R}^{q_i \times m}$ 为理想的权重矩阵， $S_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{q_i}$ 包含隐层激活函数， q_i 为隐层神经元个数， $\varepsilon_i(x_i) \in \mathbb{R}^m$ 为逼近误差。则存在 ε_M 使得

$$\|\varepsilon_i(x_i)\| \leq \varepsilon_M, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \tag{3.3.26}$$

记 $w_i^* = \|W_i^*\|_{F^*}$ 。则可设计误差反馈控制项 $u_i^{\text{et}}(t)$ 和神经网络自适应率如下

$$u_i^{\text{et}}(t) = \begin{cases} -\beta_i(t)e_i - \tilde{w}_i(t)\|S_i(x_i)\|^2 e_i - \frac{1}{2(1-\tau_d)} e_i^{-1} \rho_i^2(x_i), & x_i \in \Omega_{r_i}^o \\ 0, & x_i \in \Omega_{r_i} \end{cases} \tag{3.3.27}$$

$$\dot{\tilde{w}}_i(t) = \Gamma_i (\|S_i(x_i)\|^2 \|e_i\|^2 - c_i \tilde{w}_i(t)) \tag{3.3.28}$$

其中 $\tilde{w}_i(t)$ 为 w_i^* 的估计, $\Gamma_i, c_i \in \mathbb{R}^+$, e_i^{-1} 表示 $e_i/\|e_i\|^2$, 即有 $e_i^T e_i^{-1} = (e_i^{-1})^T e_i = 1$ 。 $\beta_i(t)$ 为一个时变参数, 有待进一步设计。

注 3.3.3 由于 e_i^{-1} 在 $e_i = 0_m$ 时没有意义, 因此在误差系统零点, 控制器可能会产生奇异性问题。这里, 我们将一致性的概念放宽至带有残差的一致性, 在误差系统零点的小邻域内不执行控制, 从而避免了奇异性问题[146]。

注 3.3.4 为了提高神经网络逼近非线性函数的能力, 大多数文献需要相对较多的神经元, 且需在线更新权重矩阵中的每一个分量 (见3.1小节和3.2小节)。这里给出了一个简化方案, 即每个智能体只需在线调整其对应神经网络权重的 *Frobenius* 范数, 这一方法显著提升了计算效率[131]。

下面给出本节的主要定理。

定理 3.3.1 在假设3.3.1 ~ 3.3.5和命题3.3.1的前提下, 对任意有界的初始值 $x_i(0), \tilde{w}_i(0)$, 定义3.3.1中的领导跟随问题可由控制器(3.3.13), 神经自适应率(3.3.28)和分布式观测器(3.3.7)求解。另外, (3.3.27)中反馈增益 $\beta_i(t)$ 可取作

$$\beta_i(t) = \beta_{i0} + \beta_{i1}(t) \quad (3.3.29)$$

其中 $\beta_{i0} \geq 2 + \chi_{max}$,

$$\beta_{i1}(t) = \frac{\gamma_i}{2} \left(1 + \frac{1}{(1 - \tau_d) \|e_i\|^2} \int_{t-\tau_{max}}^t \rho_i^2(x_i(s)) ds \right), \quad \gamma_i \in \mathbb{R}^+. \quad (3.3.30)$$

证明. 首先考虑 $x_i \in \Omega_{r_i}^o$ 的情形, 构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = V_e(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{-1} \hat{w}_i^2(t) \quad (3.3.31)$$

其中 $\hat{w}_i(t) = \tilde{w}_i(t) - w_i^*$ 。

对(3.3.31)求导, 同时注意到(3.3.22), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left((1 + \chi_{max}) \|e_i\|^2 + e_i^T u_i^{\text{et}}(t) + e_i^T f_i(x_i) + \frac{\rho_i^2(x_i)}{2(1 - \tau_d)} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{-1} \hat{w}_i(t) \dot{w}_i(t) + \frac{Nd_M^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

将(3.3.25)代入上式得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left((1 + \chi_{\max}) \|e_i\|^2 + e_i^T u_i^{\text{et}}(t) + e_i^T W_i^{*T} S_i(x_i) + e_i^T \varepsilon_i(x_i) + \frac{\rho_i^2(x_i)}{2(1 - \tau_d)} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{-1} \hat{w}_i(t) \dot{\tilde{w}}_i(t) + \frac{Nd_M^2}{2}.\end{aligned}\quad (3.3.33)$$

注意到

$$\begin{aligned}e_i^T W_i^{*T} S_i(x_i) &\leq \|e_i\|^2 \|W_i^{*T} S_i(x_i)\|^2 + \frac{1}{4} \leq w_i^* \|e_i\|^2 \|S_i(x_i)\|^2 + \frac{1}{4}, \\ e_i^T \varepsilon_i(x_i) &\leq \|e_i\|^2 + \frac{1}{4} \|\varepsilon_i(x_i)\|^2 \leq \|e_i\|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_M^2,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left((2 + \chi_{\max}) \|e_i\|^2 + e_i^T u_i^{\text{et}}(t) + w_i^* \|e_i\|^2 \|S_i(x_i)\|^2 + \frac{\rho_i^2(x_i)}{2(1 - \tau_d)} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{-1} \hat{w}_i(t) \dot{\tilde{w}}_i(t) + \frac{N}{4} + \frac{N\varepsilon_M^2}{4} + \frac{Nd_M^2}{2}.\end{aligned}\quad (3.3.34)$$

再将(3.3.27)和(3.3.28)代入(3.3.34)得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left((2 + \chi_{\max} - \beta_i(t)) \|e_i\|^2 - \tilde{w}_i \|S_i(x_i)\|^2 \|e_i\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1 - \tau_d)} \rho_i^2(x_i) + w_i^* \|e_i\|^2 \|S_i(x_i)\|^2 + \frac{\rho_i^2(x_i)}{2(1 - \tau_d)} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \hat{w}_i(t) (\|S_i(x_i)\|^2 \|e_i\|^2 - c_i \tilde{w}_i(t)) + \frac{N}{4} + \frac{N\varepsilon_M^2}{4} + \frac{Nd_M^2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^N ((2 + \chi_{\max} - \beta_i(t)) \|e_i\|^2) - \sum_{i=1}^N c_i \hat{w}_i(t) \tilde{w}_i(t) + \frac{N}{4} + \frac{N\varepsilon_M^2}{4} + \frac{Nd_M^2}{2}.\end{aligned}$$

注意到 $\hat{w}_i(t) \tilde{w}_i(t) = \frac{\hat{w}_i^2(t)}{2} + \frac{\tilde{w}_i^2(t)}{2} - \frac{w_i^{*2}(t)}{2}$, 则有 $-c_i \hat{w}_i(t) \tilde{w}_i(t) \leq -c_i \frac{\hat{w}_i^2(t)}{2} + c_i \frac{w_i^{*2}(t)}{2}$, 进而有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N ((2 + \chi_{\max} - \beta_i(t)) \|e_i\|^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i \hat{w}_i^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i w_i^{*2}(t) + \frac{N}{4} + \frac{N\varepsilon_M^2}{4} + \frac{Nd_M^2}{2}.\end{aligned}\quad (3.3.35)$$

记 $\theta_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i w_i^{*2}(t) + \frac{N}{4} + \frac{N\varepsilon_M^2}{4} + \frac{Nd_M^2}{2}$ 。显然, $\theta_0 \in \mathbb{R}^+$ 依赖于部分控制参数与系

统参数。根据(3.3.29)和(3.3.30)得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\gamma_i}{2} \left(1 + \frac{1}{(1-\tau_d)\|e_i\|^2} \int_{t-\tau_{\max}}^t \rho_i^2(x_i(s)) ds \right) \|e_i\|^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i \hat{w}_i^2(t) + \theta_0 \\
 &\leq -\frac{1}{2} \theta_1 \sum_{i=1}^N \left(\|e_i\|^2 + \frac{1}{1-\tau_d} \int_{t-\tau_{\max}}^t \rho_i^2(x_i(s)) ds \right) - \frac{1}{2} \theta_1 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{-1} c_i \hat{w}_i^2(t) + \theta_0 \\
 &\leq -\frac{1}{2} \theta_1 \sum_{i=1}^N \left(\|e_i\|^2 + \frac{1}{1-\tau_d} \int_{t-\tau_i(t)}^t \rho_i^2(x_i(s)) ds \right) - \frac{1}{2} \theta_1 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{-1} c_i \hat{w}_i^2(t) + \theta_0
 \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

其中 $\theta_1 = \min\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N, \Gamma_1 c_1, \Gamma_2 c_2, \dots, \Gamma_N c_N\}$ 。

注意到(3.3.31), 不等式(3.3.36)可重写为

$$\dot{V}(t) \leq -\theta_1 V(t) + \theta_0.$$

对不等式两侧同时从 0 到 t 积分得

$$V(t) \leq \frac{\theta_0}{\theta_1} + (V(0) - \frac{\theta_0}{\theta_1}) \exp(-\theta_1 t).$$

由于 $V(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i(t)^T e_i(t)$, 于是

$$\|e_i\| \leq \sqrt{2V(0) \exp(-\theta_1 t) + \frac{2\theta_0}{\theta_1} (1 - \exp(-\theta_1 t))}.$$

当 $x_i \in \Omega_{r_i}$ 时, 由于 r_i 可取任意小, 跟随者的一致跟踪误差已经进入到原点附近一个充分小的球形领域内。

最后, 结合命题3.3.1, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - y(t)\| \leq \varpi, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N,$$

其中 $\varpi = \sqrt{\frac{2\theta_0}{\theta_1}}$. □

注 3.3.5 根据 ϖ 的定义, 通过适当地选取较大的 γ_i, Γ_i, q_i , 和较小的 c_i , 可以保证更好的跟踪效果。

注 3.3.6 通过定理3.3.1的证明, 对任意给定的有界初始条件 $x_i(0) \in \Omega_{x_i} \subset \mathbb{R}^m$, 跟随者的跟踪误差是一致有界的, 即定理3.3.1的结果是半全局的[43, 143]。实际中, 集合 Ω_{x_i} 可以取任意大。另外, ε_M, d_M 只用于收敛性分析, 而没有出现在控制器中, 这也以为着它们可以是未知的。

我们直接给出下述推论：

推论 3.3.1 当跟随者的状态时滞为未知的上界为 τ_{max} 的静态常数时，控制器中误差反馈项退化为

$$u_i^{et}(t) = \begin{cases} -\beta_i(t)e_i - \tilde{w}_i(t)\|S_i(x_i)\|^2e_i - \frac{1}{2}e_i^{-1}\rho_i^2(x_i), & x_i \in \Omega_{r_i}^o \\ 0, & x_i \in \Omega_{r_i} \end{cases}$$

其中

$$\beta_{i1}(t) = \frac{\gamma_i}{2} \left(1 + \frac{1}{\|e_i\|^2} \int_{t-\tau_{max}}^t \rho_i^2(x_i(s)) ds \right).$$

在定理3.3.1中其余条件均成立的条件下，定义3.3.1的一致跟踪问题得以解决。

另外，若所有跟随者不存在状态时滞[43]，我们可以相应地移除控制器中的时滞补偿项。

推论 3.3.2 在命题3.3.1和假设3.3.4的前提下，若跟随者状态时滞 $\tau_i(t) \equiv 0$ ，则对任意有界的初始值 $x_i(0), \tilde{w}_i(0)$ ，定义3.3.1的一致跟踪问题可由神经自适应控制器(3.3.13)和分布式观测器(3.3.7)求解，其中观测补偿项由(3.3.14)给出，误差反馈项

$$u_i^{et}(t) = -\beta_i e_i - \tilde{w}_i(t)\|S_i(x_i)\|^2 e_i.$$

神经自适应率由(3.3.28)给出，反馈增益 β_i 满足

$$\beta_i \geq \frac{3 + \gamma_i}{2} + \chi_{max}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}^+.$$

证明. 证明过程类似于定理3.3.1，因此不再赘述，我们只给出 Lyapunov 函数如下：

$$V(t) = V_1(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{-1} \hat{w}_i^2(t).$$

□

3.3.4 数值仿真

本小节给出一个仿真算例来验证本节的定理3.3.1。考虑一个包含 6 个跟随者和单个领导者的网络系统，通讯拓扑 $\bar{\mathcal{G}}$ 如下图 3.23。

假设领导者(3.3.1)是一个双质点弹簧系统[147]，其中 $x_0(t) = (x_{01}(t), x_{02}(t), x_{03}(t),$

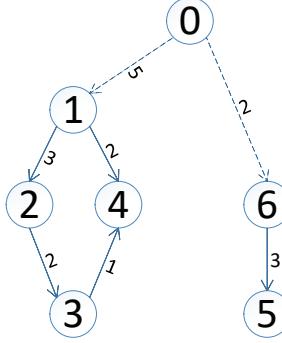


图 3.23: 领导跟随网络拓扑。

$$x_{04}(t))^T, g(x_0(t), t) = (0, 0.5 \sin(x_{02}(t)) + 8 \cos(8t), 0, 0)^T,$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1-k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $m_1 = m_2 = 1.2$, 弹簧系数 $k_1 = 1.0$, $k_2 = 1.5$ 。输出矩阵 $\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。容易验证 (\hat{C}, \hat{A}) 是可检测的。假设跟随者的动力学模型(3.3.3)中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 非线性函数 $f_i(x_i(t)) = (x_{i1}(t) \sin(i + x_{i1}(t)), 2 \cos(x_{i2}(t)))^T$, $h_i(x_i(t)) = (x_{i1}(t) \cos(x_{i1}(t)), x_{i2}(t) \cos(i + x_{i2}(t)))^T$, 外部干扰 $d_i(t) = (d_{i1}(t), d_{i2}(t))^T$ 其中 $d_{ij}(t)$ 任取, 满足有界条件 $|d_{ij}(t)| \leq 0.5$ 。每个跟随者的时变状态时滞分别为 $\tau_1 = 0.4 \frac{e^t}{1+e^t}$, $\tau_2 = 0.5 \frac{e^t}{1+e^t}$, $\tau_3 = 0.6 \frac{e^t}{1+e^t}$, $\tau_4 = 0.7 |\sin(0.5t)|$, $\tau_5 = 0.8 |\sin(0.5t)|$, $\tau_6 = 0.9 |\sin(0.5t)|$ 。显然, 取 $\psi = 0.5$, $\rho_i(x_i(t)) = \sqrt{x_{i1}^2(t) + x_{i2}^2(t)}$, $d_M = 0.5$, $\tau_d = 0.5$, $\tau_{max} = 1$, 则假设3.3.1~3.3.5均成立。领导者的初始位置为原点 $x_0(t) = (0, 0, 0, 0)^T$, 而跟随者的初始位置为标准差为 2 的零均值正态分布。另外, 初始的观测器状态取自标准正态分布, 初始的神经网络权重矩阵为零矩阵。

为了简便, 我们为所有跟随者配置相同结构的径向基神经网络, 其包含 6 个隐含层神经元, 激活函数向量 $S(x) = (s_1(x), s_2(x), \dots, s_6(x))^T$ 中各分量均为高斯函数 $s_i(x) = \exp(-\frac{(x-v_i)^T(x-v_i)}{b_i^2})$, $i = 1, 2, \dots, 6$, 其中 v_i 取自 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 上的均匀分布, $b_i = 1.5$ 。隐含层神经元的响应区域如图 3.24。

根据(3.3.6)计算得 $\lambda = 2.3150$ 。令 $\alpha = 15$, $c_0 = 0.2$ 并求解 LMI(3.3.11), 可得

$$F = - \begin{pmatrix} 1.8994 & 1.6970 & 0.2204 & 0.4784 \\ 11.1735 & 10.2524 & 0.4784 & 2.8884 \end{pmatrix}^T.$$

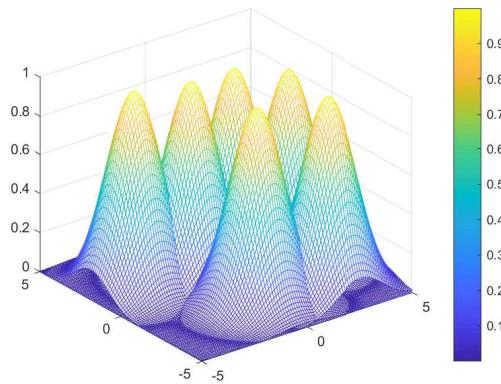
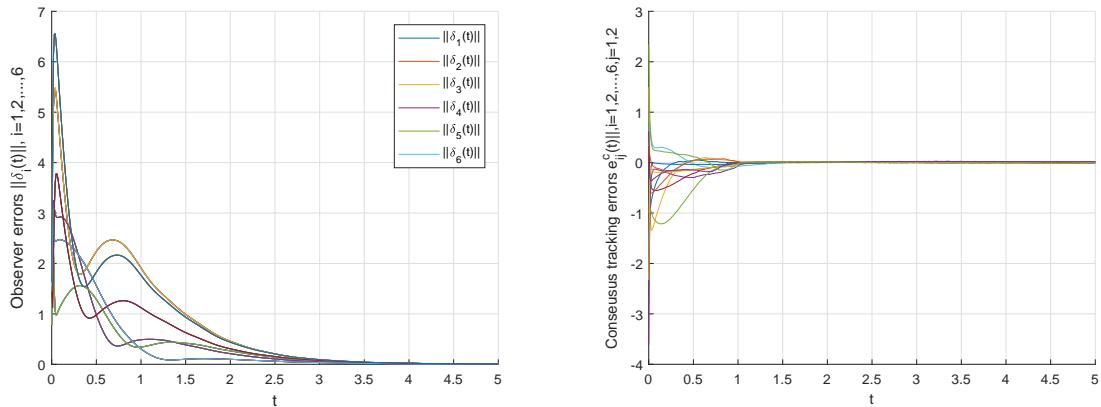


图 3.24: 径向基神经网络中隐含层神经元的响应区域。

自适应神经网络控制器由(3.3.13), (3.3.14), (3.3.27)给出, 其中反馈增益 $\beta_i(t)$ 如(3.3.29), (3.3.30), $\beta_{i0} = 210$, $\gamma_i = 0.6$, $r_i = 10^{-5}$ 。神经网络自适应率(3.3.28)中 $\Gamma_i = 100$, $c_i = 0.02$ 。我们用 $e_i^c(t) = (e_{i1}^c(t), e_{i2}^c(t))^T = x_i(t) - y(t)$ 来表示跟随者 i 的跟踪误差, 控制输入 $u_i(t) = (u_{i1}(t), u_{i2}(t))^T$ 。

图 3.25 (左) 表明观测误差渐近收敛到零, 跟随者实现了对高维领导者有效的分布式观测。图3.25 (右) 给出了跟随者一致跟踪误差的收敛情况。图3.26显示了所有跟随者的状态和高维领导者的输出随时间的演化轨迹。控制输入的演化见图3.27, 神经网络自适应参数的演化见图3.28。

图 3.25: 观测误差 $\|\delta_i(t)\|$ (左) 和一致跟踪误差 $e_{ij}^c(t)$ (右), $i = 1, \dots, 6$, $j = 1, 2$ 。

为了验证所提控制器对外部干扰的鲁棒性, 图3.29 (左) 给出了分别在有外部噪声和无外部噪声时网络中的全局跟踪误差 $E(t) = \sqrt{\frac{1}{6} \sum \|x_i(t) - y(t)\|^2}$ 的演化, 可以看到所提控制器具有较强的抗干扰能力。

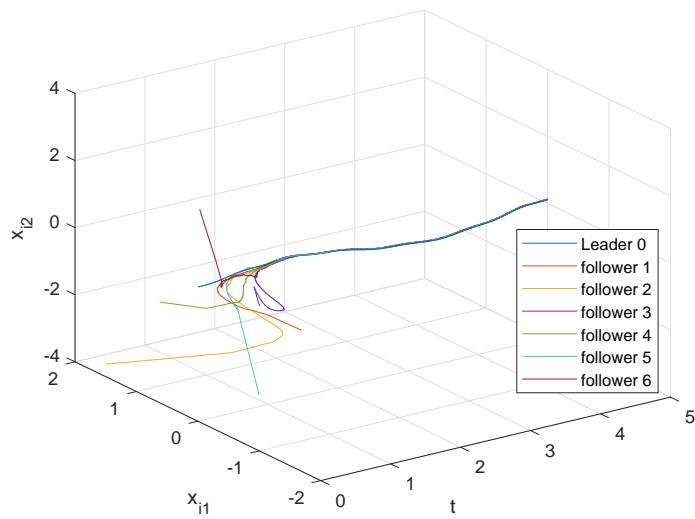


图 3.26: 跟随者的状态轨迹 $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$, 和领导者的输出轨迹 $y_0(t)$ 。

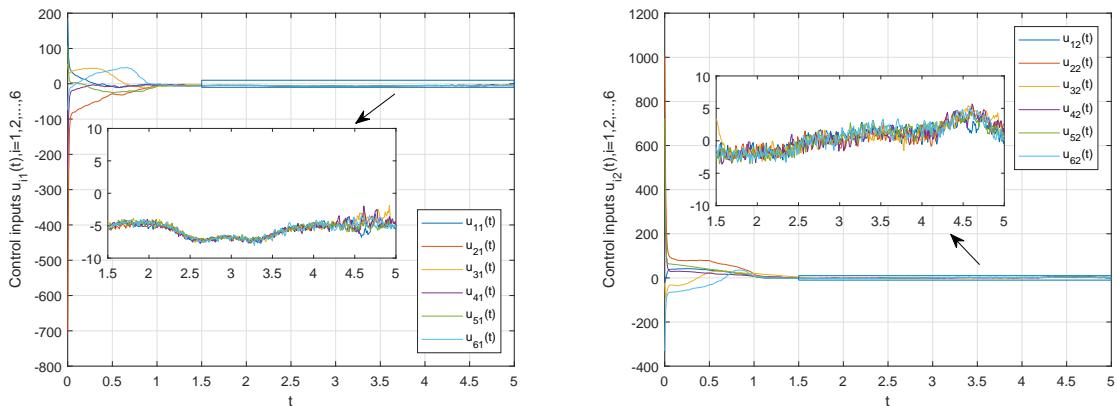
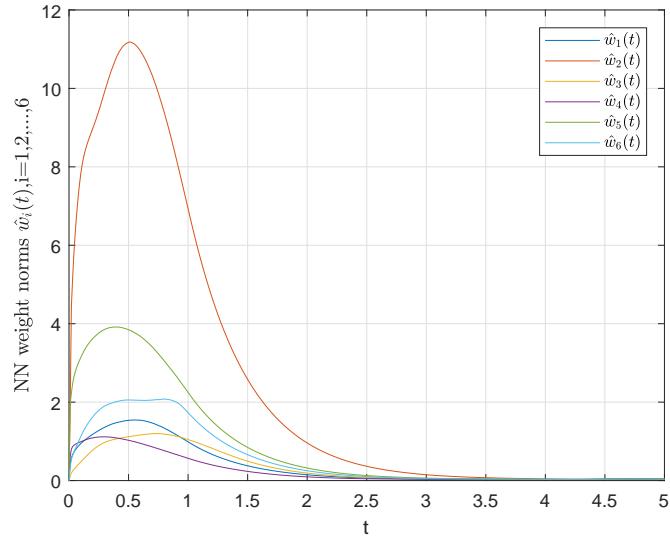
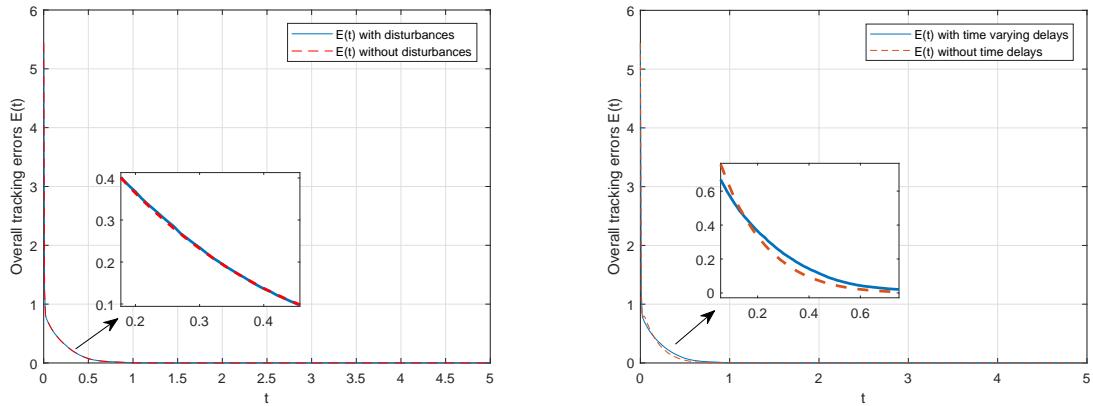


图 3.27: 控制输入分量 $u_{i1}(t)$ (左) 和 $u_{i2}(t)$ (右), $i = 1, \dots, 6$ 。

同样,为了验证所提控制器对系统时滞的鲁棒性,我们假设 $\tau_i(t) = 0$ 。在与上述相同的控制参数 $c_0, \alpha, \Gamma_i, c_i, \gamma_i$ 下,另取 $\beta_i = 210$,则根据推论3.3.2,一致跟踪问题可由简化后的控制器求解。最终,图3.29(右)给出了分别在有无时变时滞下一致跟踪误差 $E(t)$ 的演化情况。可以看到,所提控制器可以有效地抵消系统时滞带来的影响。

注 3.3.7 若我们使用经典的神经网络自适应方法,如文献[43, 102],或本章3.1节和3.2,则此时每个神经网络的权重更新参数为 $6 \times 2 = 12$ 。与此不同,本节中只需进行一个标量的在线更新即可,这一简化显著提升了计算效率。

图 3.28: 神经网络自适应参数 $\hat{w}_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ 。图 3.29: 有外部噪声和无外部噪声时网络中的全局跟踪误差 $E(t)$ (左); 有时变时滞和无时滞时网络中的全局跟踪误差 $E(t)$ (右)。

3.4 本章小结

本章主要研究了几类非确定性网络的一致性、跟踪和包含控制问题。首先考虑了一类带有匹配未建模动态和未知干扰的多智能体系统，提出了一种基于神经网络的完全分布式自适应控制框架，用于无领导者一致性、单领导者跟踪、多领导者包含问题。与现有文献相比，该框架不依赖于系统通讯拓扑的特征值、领导者的未知输入上界等全局信息，进一步提升了控制设计的灵活性。

我们进一步考虑了具有未建模动态的网络系统的平均跟踪问题。为了同时实现对智能体非确定性动力学的补偿和对外部信号平均值的跟踪，我们提出的控制协议包含

自适应神经网络、局部滤波器和一类对称的耦合增益。进而，通过引入自适应网络耦合调节机制，放宽了控制协议对如通讯拓扑特征值等全局信息的依赖性。所提控制协议均保证了一致跟踪误差的渐近收敛，且不要求未建模动态满足类 Lipschitz 条件。

之后，我们考虑了一类非确定性和异质性共存的网络系统的跟踪问题，其中领导者相比于跟随者具有更高的状态维度，同时跟随者受到未建模动态、时滞和外部干扰等的影响。基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函和 M 矩阵理论，我们为跟随者设计了分布式观测器和神经自适应控制器，保证了其对高维领导者输出信息的有效跟踪，并设计实验验证了该控制方法的鲁棒性。

本章三节内容已分别发表于国际刊物 IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Asian Journal of Control 和 IET Control Theory & Applications。

第四章 分布式自适应控制：编队

本章主要研究了多智能体的分布式时变编队(TVF)及时变编队跟踪(TVFT)控制问题。首先，在第三章的基础上，我们将基于神经网络的分布式自适应控制方法进一步延拓至 TVF 问题中，提出了两类分别基于节点和基于边的设计方法。其中基于节点的设计方法与3.1节中所提框架一脉相承，具有完全分布式的特性；同时基于边的设计方法适用于网络通讯拓扑具有切换特性时的情形。

进一步，我们考虑了有向通讯拓扑下的分布式自适应编队控制问题，提出了一类新的基于有向支撑树的编队控制框架。分别在有无领导者存在的情况下，给出了一类新的编队或编队跟踪问题的充分必要条件。

4.1 基于神经网络的自适应时变编队控制

自适应控制应用于前沿的 TVF 问题，大致可分为两类。在第一类问题中，自适应控制的目的是为了逼近智能体动力学中的非确定性，如[55, 61]。这类文献通常使用如神经网络、模糊逻辑等智能控制方法。但是，其中有一个不足是控制设计的过程往往依赖于通讯拓扑的特征值信息。在第二类问题中，自适应控制的目的是将控制器设计与全局通讯拓扑解耦合。根据我们已有的经验，这可以通过设计自适应网络耦合调节机制来实现，如[110, 148]。然而，这类问题中智能体的动力学往往需要建模准确，如确定的线性时不变系统。一个有趣且重要的问题是此两类问题是否可能优势互补？实际上，回顾3.1节，答案已经呼之欲出。我们在3.1小节提出了基于神经网络的完全分布式控制框架，分别用于求解一致性、跟踪和包含控制问题。而将该框架延拓至 TVF 问题，则是本节的一个出发点。

4.1.1 模型描述与预备知识

考虑如下多智能体系统：

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + B(f_i(x_i) + u_i(t)), \quad i \in \mathcal{I}_N \quad (4.1.1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是智能体 i 的状态和控制输入。系统矩阵 (A, B) 为可镇定的。 $f_i(x_i) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 为未知的光滑非线性函数。智能体间的通讯拓扑记为 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 。简化起见, 本节考虑无权图。

一个预先设定的 TVF 可由一个集总向量 $h(t) = \text{col}(h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t))$ 来描述, 其中 $h_i(\cdot)$ 是一个连续可微的时变向量, 代指智能体 i 的编队偏移命令。

定义 4.1.1 若对任意有界的初始状态, 总存在 $\lim_{t \rightarrow \infty} ((x_i - h_i) - (x_j - h_j)) = 0$, $\forall i, j \in \mathcal{I}_N$, 则称多智能体系统(4.1.1)实现了 $TVF h(t)$ 。

我们的控制目的是在通讯拓扑特征值未知的前提下, 基于智能体的局部信息, 设计分布式自适应控制器来求解定义4.1.1的 TVF 问题。

注 4.1.1 参考注3.2.1, 本节中的结果可以直接推广到智能体带有匹配有界噪声干扰时的情形。这里, 若 $f_i(x_i) \equiv 0$, 则定义4.1.1退化为线性时不变系统的 TVF 问题[52, 110, 148]。同时, 若 $h(t) \equiv 0$, 则定义4.1.1为分布式一致性问题, 见3.1小节或文献[129, 149]。

我们首先给出两个引理:

引理 4.1.1 ([115]) 对维度相容的矩阵 A, B, C, D , Kronecker 积具有以下运算性质:

- 1). $(\gamma A) \otimes B = A \otimes (\gamma B) = \gamma(A \otimes B)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
- 2). $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
- 3). $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.
- 4). $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.

引理 4.1.2 ([150]) (Hölder 不等式) 令 $(\mathcal{S}, \Sigma, \mu)$ 为一个测度空间, $p, q \in [1, \infty]$ 使得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对 \mathcal{S} 中所有可测函数 f, g , 有 $\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ 。

接下来, 我们分别从节点和边两个角度出发, 给出分布式自适应 TVF 控制设计。为了符号的简化, 记 $d_i = x_i - h_i$, $e_i = d_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d_j$, $\delta_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(d_i - d_j)$ 。这里 d_i 表示智能体 i 当前状态和目标编队位置的误差, e_i 是智能体 i 的全局编队误差, 而 δ_i 是智能体 i 实际测量得到的局部编队误差。另外, 令 $h = \text{col}(h_1, \dots, h_N)$, $d = \text{col}(d_1, \dots, d_N)$, $e = \text{col}(e_1, \dots, e_N)$, $\delta = \text{col}(\delta_1, \dots, \delta_N)$, $\Xi = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$ 。则有 $e = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)d$, 且 $\delta = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)e$ 。显然, Ξ 有一个单重零特征值和一个 $N - 1$ 重特征值 1, 且有 $\Xi^2 = \Xi$ 。

4.1.2 基于节点的完全分布式编队控制

在本小节中，我们提出了基于节点的 TVF 控制方法，其控制设计过程不依赖于任何全局信息。

假设 4.1.1 智能体之间的通讯拓扑 \mathcal{G} 为无向连通的。

与3.1节类似，我们用3.1.3来逼近智能体 i 的未建模动态，同时引入基本假设3.1.1。对智能体 i ，令 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ 为邻居反馈信号的动态耦合强度，并为每个神经网络引入一个伪理想的权重矩阵 $\bar{W}_i(t)$ 。考虑如下带有动态耦合的控制协议：

$$\begin{aligned} u_i &= K_0 x_i + K_1 d_i + \alpha_i(t) K_2 \delta_i + \beta_i(t) \operatorname{sgn}(K_2 \delta_i) - \hat{W}_i^T(t) S_i(x_i) \\ \dot{\alpha}_i &= \rho_i \delta_i^T \Gamma \delta_i \\ \dot{\beta}_i &= \nu_i \|K_2 \delta_i\|_1 \\ \dot{\hat{W}}_i &= \tau_i [S_i(x_i) \delta_i^T P^{-1} B - \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i(t))] \\ \dot{\bar{W}}_i &= \psi_i \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i), \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

其中 K_0, K_1, K_2, Γ 为反馈增益矩阵， $\rho_i, \nu_i, \tau_i, \sigma, \psi_i \in \mathbb{R}^+$ ， $P > 0$ 是一个正定调节矩阵，这些参数有待后续设计。

注 4.1.2 控制协议 u_i 中包含三个反馈项和一个补偿项。增益 K_0 的设计是为了检验目标编队的可行性；增益 K_1 的设计是为了控制平均编队信号 $\frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}_N} d_j$ ，也可以理解为控制整体编队的动力学行为； K_2 是一个一致性增益。补偿项的作用为在线的辨识和补偿未知非线性函数的影响。

控制协议4.1.2的整体设计流程由以下算法给出。

算法 4.1.1 1). 寻找矩阵 K_0 使以下 TVF 可行性条件对 $\forall i \in \mathcal{I}_N, j \in \mathcal{N}_i$ 成立：

$$(A + BK_0)(h_i - h_j) - (\dot{h}_i - \dot{h}_j) = 0. \quad (4.1.3)$$

若这样的 K_0 存在，继续；否则，则终止算法，此时为多智能体系统(4.1.1)预设的 TVF 在控制协议(4.1.2)下不可行；

2). 选择矩阵 K_1 使 $(A + BK_0 + BK_1, B)$ 为可镇定的。令 $\eta, \theta \in \mathbb{R}^+$, 求解以下 LMI:

$$(A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T - \eta BB^T + \theta P \leq 0 \quad (4.1.4)$$

得矩阵 $P > 0$;

3). 令 $K_2 = -B^T P^{-1}$, $\Gamma = P^{-1}BB^TP^{-1}$, 选择 $\rho_i, \nu_i, \tau_i, \sigma, \psi_i \in \mathbb{R}^+$.

定理 4.1.1 在假设 3.1.1 和假设 4.1.1 的前提下, 若可行性条件(4.1.3)成立, 则定义 4.1.1 的 TVF 问题可由控制协议(4.1.2), 伴随算法 4.1.1 的参数设计求解。

证明. 记 $\tilde{W}_i(t) = \hat{W}_i(t) - W_i$ 为神经网络权重逼近误差。将(3.1.3)中的 $f_i(x_i)$ 和(4.1.2)中的 u_i 代入(4.1.1), 经过运算可得 x_i 的闭环动力学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & (A + BK_0 + BK_1)x_i + \alpha_i BK_2 \delta_i + \beta_i B \operatorname{sgn}(K_2 \delta_i) \\ & - B(\tilde{W}_i^T S_i(x_i) - \epsilon_i) - BK_1 h_i. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

令 $\mathcal{M}_1(t) = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\mathcal{M}_2(t) = \operatorname{diag}(\beta_1, \dots, \beta_N)$, $\tilde{W}(t) = \hat{W}(t) - W$, 则有网络集总状态 x 的动力学为

$$\begin{aligned} \dot{x} = & [\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0 + BK_1)]x + (\mathcal{M}_1 \otimes BK_2)\delta + (\mathcal{M}_2 \otimes B)\operatorname{sgn}((\mathbf{I}_N \otimes K_2)\delta) \\ & - (\mathbf{I}_N \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon) - (\mathbf{I}_N \otimes BK_1)h. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

接着, 误差系统 d 和 e 的动力学可以相继得出如下

$$\begin{aligned} \dot{d} = & [\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0 + BK_1)]d + (\mathcal{M}_1 \mathcal{L} \otimes BK_2)d + (\mathcal{M}_2 \otimes B)\operatorname{sgn}((\mathcal{L} \otimes K_2)d) \\ & - (\mathbf{I}_N \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon) + (\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0))h - \dot{h}, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{e} = & [\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0 + BK_1) + \Xi \mathcal{M}_1 \mathcal{L} \otimes BK_2]e + (\Xi \mathcal{M}_2 \otimes B)\operatorname{sgn}((\mathcal{L} \otimes K_2)e) \\ & - (\Xi \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon) + (\Xi \otimes (A + BK_0))h - (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\dot{h}, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

其中我们用到了引理 4.1.1 和 $\mathcal{L}\Xi = \Xi\mathcal{L} = \mathcal{L}$ 。

显然, 误差系统 $e = 0$ 与 $d_1 = d_2 = \dots = d_N$ 等价, 此时网络系统实现了 TVF。记

$\tau = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_N)$, $\tilde{W} = \overline{W} - W$, $\psi = \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_N)$, 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{1}{2} e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\alpha_i(t) - \bar{\alpha})^2}{\rho_i} + \frac{(\beta_i(t) - \bar{\beta})^2}{\nu_i} \right] \\ & + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{W}^T \tau^{-1} \tilde{W} + \overline{W}^T \psi^{-1} \overline{W}) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

其中 P 是(4.1.4)的一个解, $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}^+$ 有待后续确定。

给定控制协议(4.1.2), V_1 沿系统(4.1.8)轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & e^T [\mathcal{L} \otimes P^{-1} (A + BK_0 + BK_1) + \mathcal{L} \mathcal{M}_1 \mathcal{L} \otimes P^{-1} BK_2] e \\ & + e^T (\mathcal{L} \mathcal{M}_2 \otimes P^{-1} B) \text{sgn}((\mathcal{L} \otimes K_2)e) - e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x) - \epsilon) \\ & + e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1} (A + BK_0)) h - e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) \dot{h} \\ & + \sum_{i=1}^N (\alpha_i(t) - \bar{\alpha}) \delta_i^T \Gamma \delta_i + \sum_{i=1}^N (\beta_i(t) - \bar{\beta}) \|K_2 \delta_i\|_1 \\ & + \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T (S_i(x_i) \delta_i^T P^{-1} B - \sigma(\hat{W}_i - \overline{W}_i))) + \sigma \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T (\hat{W}_i - \overline{W}_i)). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

注意到可行性条件(4.1.3)满足, 则有

$$(\mathcal{L} \otimes (A + BK_0)) h - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{h} = 0. \quad (4.1.11)$$

进而, 根据算法4.1.1的步骤3)., 由、可得

$$\begin{aligned} e^T (\mathcal{L} \mathcal{M}_1 \mathcal{L} \otimes P^{-1} BK_2) e & = -e^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) (\mathcal{M}_1 \otimes P^{-1} BB^T P^{-1}) (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) e \\ & = -\delta^T (\mathcal{M}_1 \otimes \Gamma) \delta = -\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \delta_i^T \Gamma \delta_i. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} e^T (\mathcal{L} \mathcal{M}_2 \otimes P^{-1} B) \text{sgn}((\mathcal{L} \otimes K_2)e) & = -\delta^T (\mathcal{M}_2 \otimes K_2^T) \text{sgn}((\mathbf{I}_N \otimes K_2) \delta) \\ & = -\sum_{i=1}^N \beta_i(t) \delta_i^T K_2^T \text{sgn}(K_2 \delta_i) = -\sum_{i=1}^N \beta_i(t) \|K_2 \delta_i\|_1, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

其中我们用到了 $x^T \text{sgn}(x) = \|x\|_1$ 。同时, 由于 $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$, 可得

$$e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1} B) (\tilde{W}^T S(x)) = \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T S_i(x_i) \delta_i^T P^{-1} B). \quad (4.1.14)$$

结合(4.1.10)-(4.1.14), 经过一些运算和调整, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 = & e^T [\mathcal{L} \otimes P^{-1}(A + BK_0 + BK_1)]e + e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}B)\epsilon \\ & - \bar{\alpha} \sum_{i=1}^N \delta_i^T \Gamma \delta_i - \bar{\beta} \sum_{i=1}^N \|K_2 \delta_i\|_1 - \sigma \|\hat{W} - \bar{W}\|_F^2.\end{aligned}\quad (4.1.15)$$

定义 $\bar{e} = (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1})e$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 = & \frac{1}{2} \bar{e}^T [\mathcal{L} \otimes ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T) - 2\bar{\alpha} \mathcal{L}^2 \otimes BB^T] \bar{e} \\ & + \bar{e}^T (\mathcal{L} \otimes B)\epsilon - \bar{\beta} \|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1 - \sigma \|\hat{W} - \bar{W}\|_F^2 \\ \leq & \frac{1}{2} \bar{e}^T [\mathcal{L} \otimes ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T) - 2\bar{\alpha} \mathcal{L}^2 \otimes BB^T] \bar{e} \\ & - (\bar{\beta} - \epsilon_M) \|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1,\end{aligned}\quad (4.1.16)$$

其中我们运用了(3.1.4)和引理4.1.2来得到不等式。

由于 \mathcal{G} 连通, 根据引理2.1.1知 \mathcal{L} 半正定且有一个单重零特征根。类似于(3.1.21), 存在酉矩阵 $U = [\frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}}, Y_1]$ 其中 $Y_1 \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$, 使得 $U^T \mathcal{L} U = \Lambda \triangleq \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, 这里 $\lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 为 \mathcal{L} 的正特征根。令 $\hat{e} = \text{col}(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_N) = (U^T \otimes \mathbf{I}_n)\bar{e}$, 则有 $\hat{e}_1 = (\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes \mathbf{I}_n)\bar{e} = 0$ 。根据(4.1.16), 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \leq & \frac{1}{2} \bar{e}^T [\mathcal{L} \otimes ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T) - 2\bar{\alpha} \mathcal{L}^2 \otimes BB^T] \bar{e} \\ & - (\bar{\beta} - \epsilon_M) \|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1 \\ = & \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \lambda_i \hat{e}_i^T ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T - 2\bar{\alpha} \lambda_i BB^T) \hat{e}_i \\ & - (\bar{\beta} - \epsilon_M) \|(\mathcal{L} \otimes B^T)\bar{e}\|_1.\end{aligned}\quad (4.1.17)$$

选择足够大的 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, 使 $\bar{\alpha} > \frac{\eta}{2\lambda_2(\mathcal{L})}$, $\bar{\beta} > \epsilon_M$, 则根据(4.1.17)和(4.1.4)可得

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{\theta}{2} \hat{e}^T (\Lambda \otimes P) \hat{e} = -\frac{\theta}{2} e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) e. \quad (4.1.18)$$

由于 $\mathcal{L} \geq 0$, $P > 0$, 则 $V_1(t)$ 非增, 保证了 e , $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, \tilde{W} , \bar{W} 的有界性。根据(4.1.8)和(3.1.4)可得 \dot{e} 的有界性, 则函数 $\frac{\theta}{2} e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) e$ 为一致连续的。由于 $0 < V_1(t) \leq V_1(0)$ 且 $V_1(t)$ 非增, 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V_1(t)$ 必有极限, 记为 V_1^∞ 。实际上,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\theta}{2} e(t)^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) e(t) dt \leq \frac{V_1(0) - V_1^\infty}{2}. \quad (4.1.19)$$

根据引理2.3.1，可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta}{2} e^T (\mathcal{L} \otimes P^{-1}) e = 0$ 。注意到 $\hat{e}_1 = 0$ ，则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ ，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} ((x_i - h_i) - (x_j - h_j)) = 0, \forall i, j \in \mathcal{I}_N$ 。 \square

注 4.1.3 实际上，(4.1.5)中符号函数的存在意味着系统 x 以及 e 的动力学是非光滑的。参照注3.2.3，本节中为了简化符号，不再使用微分包含运算，这并不影响证明的严谨性。

4.1.3 切换拓扑下基于边的编队控制

在本小节中，我们研究了一类基于边的分布式自适应控制方法，并发现其适用于智能体间具有切换的通讯拓扑时的情形。此部分工作是文献[111]从一致性到编队的自然推广。

记 t 时刻智能体的通讯拓扑为 $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{G}^s$ ，其中 $\mathcal{G}^s = \{\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \dots, \mathcal{G}^l\}$ 表示所有可能的通讯拓扑集合。相应地，记 t 时刻通讯拓扑的关联矩阵为时变矩阵 $E(t)$ ，智能体 i 的邻居集合为 \mathcal{N}_i^t 。

假设 4.1.2 \mathcal{G}^s 中所有 l 个可能的通讯拓扑均为无向连通图。

对于所有可能出现连边的智能体对 i, j ，引入 α_{ij}, β_{ij} 作为误差信号 $d_i - d_j$ 的动态耦合强度，同时为每个神经网络引入一个伪理想权重矩阵 $\bar{W}_i(t)$ 。考虑如下带有自适应耦合强度的分布式协议：

$$\begin{aligned} u_i &= K_0 x_i + K_1 d_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \alpha_{ij}(t) K_2(d_i - d_j) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \beta_{ij}(t) \operatorname{sgn}(K_2(d_i - d_j)) - \hat{W}_i^T(t) S_i(x_i) \\ \dot{\alpha}_{ij} &= \rho_{ij}(d_i - d_j)^T \Gamma(d_i - d_j) \quad j \in \mathcal{N}_i^t \\ \dot{\beta}_{ij} &= \nu_{ij} \|K_2(d_i - d_j)\|_1 \quad j \in \mathcal{N}_i^t \\ \dot{\hat{W}}_i &= \tau_i [S_i(x_i) e_i^T P^{-1} B - \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i(t))] \\ \dot{\bar{W}}_i &= \psi_i \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i), \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

其中 K_0, K_1, K_2, Γ 为反馈增益矩阵， $\rho_{ij}, \nu_{ij}, \tau_i, \sigma, \psi_i \in \mathbb{R}^+$ ， $P > 0$ 是一个正定矩阵。

初始化 $\alpha_{ij}(0) = \alpha_{ji}(0)$, $\beta_{ij}(0) = \beta_{ji}(0)$ ，则 $\alpha_{ij}(t)$ 与 $\beta_{ij}(t)$ 都具有对称性，如 $\alpha_{ij}(t) = \alpha_{ji}(t)$ 。

我们同样用一个算法来阐释控制协议4.1.20的设计方法。

算法 4.1.2 1). 寻找矩阵 K_0 使得以下 TVF 可行性条件对 $\forall i \in \mathcal{I}_N$ 成立:

$$(A + BK_0)h_i - \dot{h}_i = 0 \quad (4.1.21)$$

若这样的 K_0 存在, 继续; 否则, 则终止算法, 此时为多智能体系统(4.1.1)预设的 TVF 在控制协议(4.1.20)下不可行;

2). 遵循算法4.1.1中的步骤2).-3)., 确定增益矩阵 K_1, K_2, Γ 。选择 $\rho_{ij}, \nu_{ij}, \tau_i, \sigma, \psi_i \in \mathbb{R}^+$ 。

接下来, 我们给出本小节的主要定理。

定理 4.1.2 在假设3.1.1和假设4.1.2的前提下, 若可行性条件(4.1.21)成立, 则定义4.1.1的 TVF 问题可由控制协议(4.1.20), 伴随算法4.1.2的参数设计求解。

证明. 没有特殊指出时, 相关的符号与定理4.1.1的证明中保持一致。将(3.1.3)中 $f_i(x_i)$ 和(4.1.20)中 u_i 代入(4.1.1), 可得系统 d 的动力学为

$$\begin{aligned} \dot{d} = & [\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0 + BK_1)]d + (E\mathcal{M}_3 E^T \otimes BK_2)d + (E\mathcal{M}_4 \otimes B)\text{sgn}((E^T \otimes K_2)d) \\ & - (\mathbf{I}_N \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon) + (\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0))h - \dot{h}, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

其中 $\mathcal{M}_3(t) = \text{diag}(\alpha_{ij})$, $\mathcal{M}_4(t) = \text{diag}(\beta_{ij})$ 。这里分量 α_{ij}, β_{ij} 按照关联矩阵的 $E(t)$ 的列索引进行排列。

由于可行性条件(4.1.21)成立, 则有 $(\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0))h - \dot{h} = 0$ 。在假设4.1.2条件下, 有 $\exists E(t) = E(t), \forall t$ 。另外, 由于 $e = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)d$, 则有 e 的动力学为

$$\begin{aligned} \dot{e} = & [\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0 + BK_1) + E\mathcal{M}_3 E^T \otimes BK_2]e \\ & + (E\mathcal{M}_4 \otimes B)\text{sgn}((E^T \otimes K_2)e) - (\Xi \otimes B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon) \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

考虑以下统一的 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{1}{2}e^T(\Xi \otimes P^{-1})e + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \left[\frac{(\alpha_{ij}(t) - \tilde{\alpha})^2}{\rho_{ij}} + \frac{(\beta_{ij}(t) - \tilde{\beta})^2}{\nu_{ij}} \right] \\ & + \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{W}^T \tau^{-1} \tilde{W} + \tilde{W}^T \psi^{-1} \tilde{W}), \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

其中 P 为(4.1.4)的一个解, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^+$ 将在后续给出。

将 V_2 沿系统(4.1.23)在(4.1.20)下的闭环轨线求导，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = & e^T [\Xi \otimes P^{-1}(A + BK_0 + BK_1) + E\mathcal{M}_3 E^T \otimes P^{-1}BK_2]e \\ & + e^T(E\mathcal{M}_4 \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((E^T \otimes K_2)e) - e^T(\Xi \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^T S(x) - \epsilon) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} [(\alpha_{ij}(t) - \tilde{\alpha})(d_i - d_j)^T \Gamma(d_i - d_j) + (\beta_{ij}(t) - \tilde{\beta}) \|K_2(d_i - d_j)\|_1] \\ & + \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T (S_i(x_i) e_i^T P^{-1}B - \sigma(\hat{W}_i - \bar{W}_i))) + \sigma \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T (\hat{W}_i - \bar{W}_i)). \quad (4.1.25)\end{aligned}$$

由于 $K_2 = -B^T P^{-1}$, $\Gamma = P^{-1}BB^T P^{-1}$, 则有

$$\begin{aligned}e^T(E\mathcal{M}_3 E^T \otimes P^{-1}BK_2)e &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \alpha_{ij}(t) (e_i - e_j)^T P^{-1}BB^T P^{-1} (e_i - e_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \alpha_{ij}(t) (d_i - d_j)^T \Gamma(d_i - d_j). \quad (4.1.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^T(E\mathcal{M}_4 \otimes P^{-1}B)\text{sgn}((E^T \otimes B^T P^{-1})e) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \beta_{ij}(t) \|B^T P^{-1}(e_i - e_j)\|_1 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \beta_{ij}(t) \|K_2(d_i - d_j)\|_1. \quad (4.1.27)\end{aligned}$$

另外，类似于(4.1.14)，有

$$e^T(\Xi \otimes P^{-1}B)(\tilde{W}^T S(x)) = \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{W}_i^T S_i(x_i) e_i^T P^{-1}B). \quad (4.1.28)$$

根据(4.1.25)-(4.1.28)，经过一系列运算和化简，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = & e^T [\Xi \otimes P^{-1}(A + BK_0 + BK_1)]e + e^T(\Xi \otimes P^{-1}B)\epsilon \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i^t} \tilde{\alpha}(d_i - d_j)^T \Gamma(d_i - d_j) + \tilde{\beta} \|K_2(d_i - d_j)\|_1 - \sigma \|\hat{W} - \bar{W}\|_F^2. \quad (4.1.29)\end{aligned}$$

令 $\bar{e} = (\mathbf{I}_N \otimes P^{-1})e$, 且注意到 $\mathcal{L}(t) = EE^T$, 则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = & \frac{1}{2} \bar{e}^T [\Xi \otimes ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T) - 2\tilde{\alpha}\mathcal{L}(t) \otimes BB^T] \bar{e} \\ & + \bar{e}^T(\Xi \otimes B)\epsilon - \tilde{\beta} \|(\Xi \otimes B^T)\bar{e}\|_1 - \sigma \|\hat{W} - \bar{W}\|_F^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \bar{e}^T [\Xi \otimes ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T) - 2\tilde{\alpha}\mathcal{L}(t) \otimes BB^T] \bar{e} \\ &\quad - (\bar{\beta} - \epsilon_M) \|(\Xi \otimes B^T)\bar{e}\|_1. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

记 $\underline{\lambda} = \min\{\lambda_2(\mathcal{L}^1), \lambda_2(\mathcal{L}^2), \dots, \lambda_2(\mathcal{L}^l)\}$, 选择 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 使得 $\tilde{\alpha} > \frac{\eta}{2\underline{\lambda}}$ 且 $\tilde{\beta} > \epsilon_M$ 。则根据(4.1.30)和 LMI (4.1.4)得

$$V_2 \leq -\frac{\theta}{2} \bar{e}^T (\Xi \otimes P) \bar{e} = -\frac{\theta}{2} e^T (\Xi \otimes P^{-1}) e. \quad (4.1.31)$$

后续的分析类似于定理(4.1.1)中的(4.1.18), 即 Barbalat 引理保证了 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ 。□

注 4.1.4 编队可行性条件(4.1.21)和4.1.2小节中的(4.1.3)对于 TVF 问题是必要的, 类似条件也出现在文献[52, 110]中。注意固定编队[47, 50]的方法不可直接用于求解 TVF 问题。

注 4.1.5 由于神经网络估计过程在一个紧致集 $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ 上有效, 因此我们得到的结果是半全局的。然而, 若 $f_i(x_i)$ 在 \mathbb{R}^n 上光滑, 且神经网络隐层包含的神经元可取任意多, 则 Ω_x 可以任意大, 此时本节得到的结果为全局的[151]。

注 4.1.6 在实际使用动态协议(4.1.20)以及4.1.2小节中的(4.1.2)时, 由于数值精度、抖颤、噪声等影响, 自适应耦合增益仍有可能出现缓慢增长, 甚至破坏系统长期稳定性的情况。与注3.1.7, 注3.2.5类似, 我们引入一个小标量 r , 仅当 $\|\delta_i\| > r$ 时, 按照(4.1.2)来更新 α_i, β_i ; 仅当 $\|d_i - d_j\| > r$ 时按照(4.1.20)来更新 α_{ij}, β_{ij} 。任一情况的相反情况出现时, 则保持相应的耦合增益到下一时刻。则当 TVF 误差收敛到零点附近某个极小的邻域时, 自适应变量即收敛到有限值。

当我们观察两种不同的设计方法及其证明过程时, 不难发现: 一方面, 基于节点的设计(4.1.2)是完全分布式的, 但其只适用于智能体具有固定的通讯拓扑时的情形, 这是由于 Lyapunov 函数(4.1.9)依赖于通讯图的 Laplacian 矩阵。另一方面, 虽然基于边的设计(4.1.20)并不能说是完全分布式的, 这是由于在估计神经网络权重矩阵时需要一个集中式的数据采集过程来储存所有的 $d_i, i \in \mathcal{I}_N$, 但其可应用于智能体之间具有切换通讯拓扑时的情形。这些有趣的观察有助于我们在实际问题中选取恰当的方法, 我们也将在下一小节中更多地来阐释这一观点。

4.1.4 数值仿真

本小节中，我们给出两个例子来验证本节得到的理论结果。在这两个例子中，我们均使用带有 36 个神经元和 sigmoid 激活函数的单隐层神经网络来逼近未知的非线性函数，智能体的初始位置均取自标准差为 3 的 Gaussian 分布。

完全分布式 TVF：基于点的设计

实际网络系统中，经常出现通讯信道固定，但其规模相对较大的情形。此时，基于节点的完全分布式 TVF 控制协议(4.1.2)更能凸显出优势。

例 4.1.1 考虑一个三阶多智能体系统(4.1.1)，其中 $N = 12$ ，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -10 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f_i(x_i(t)) = ix_{i1} \sin(x_{i2}), \quad w_i(t) = 0.1 \cos(it). \quad (4.1.32)$$

这里 $w_i(t)$ 为注4.1.1中提到的匹配有界干扰。智能体的通讯拓扑如图4.1。预定义的 TVF 为两个嵌套的六边形： $i \in \mathcal{I}_6$ 时， $h_i(t) = (\sin(t + \frac{(i-1)\pi}{3}), -\cos(t + \frac{(i-1)\pi}{3}), 2 \cos(t + \frac{(i-1)\pi}{3}))^T$ ； $i \in \mathcal{I}_{12} - \mathcal{I}_6$ 时， $h_i(t) = \frac{1}{2}h_{i-6}(t)$ 。

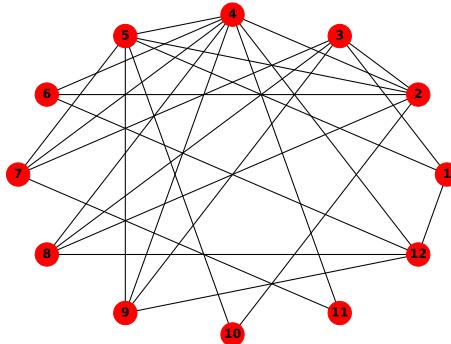


图 4.1: 例4.1.1中智能体之间的通讯拓扑图。

令 $K_0 = (0, 4, 0)$ ，容易验证编队可行性条件(4.1.3)满足。由于 $A + BK_0$ 可镇定，可取 $K_1 = (0, 0, 0)$ 。根据算法4.1.1，令 $\eta = 2, \theta = 1$ ，求解(4.1.4)可得

$$P = \begin{pmatrix} 5.9910 & 0.1493 & -5.9611 \\ 0.1493 & 0.3866 & -1.1662 \\ -5.9611 & -1.1662 & 9.1486 \end{pmatrix}.$$

令

$$K_2 = (-1.8121 - 5.1855 - 1.9510),$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3.2836 & 9.3966 & 3.5354 \\ 9.3966 & 26.8899 & 10.1172 \\ 3.5354 & 10.1172 & 3.8065 \end{pmatrix},$$

取 $\rho_i = \nu_i = 0.1$, $\tau_i = \psi_i = 100$, $\sigma = 0.6$ 。则定理4.1.1的条件满足。考虑到注4.1.6, 引入 $r = 0.1$ 。

使用控制协议(4.1.2)求解该 TVF 问题。图4.2给出了相空间中某些时刻智能体的位置, 可以看到智能体网络形成了两个嵌套的六边形, 并随时间同步的旋转。控制输入和一些辅助的变量如图4.3, 其中所有的自适应耦合权重变量 α_i, β_i 收敛到有限值, 同时神经网络权重估计矩阵收敛到对应的伪理想矩阵。

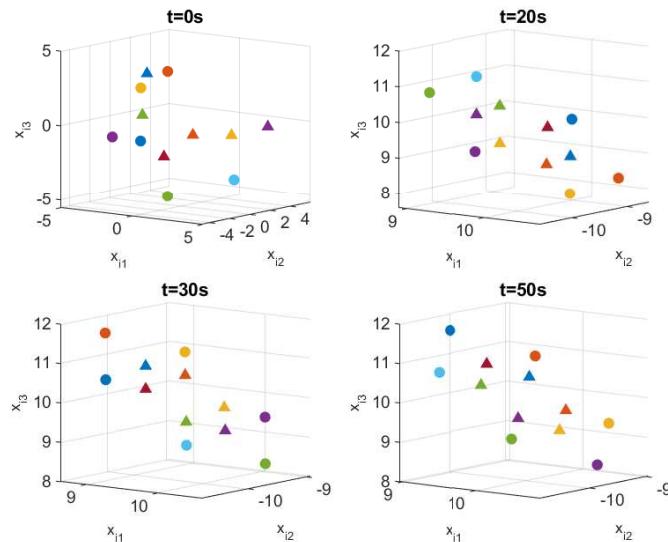


图 4.2: $t = 0s, 20s, 30s, 50s$ 时刻所有智能体的相位图, 其中圆形和三角形分别表示智能体 $i \in \mathcal{I}_6$ 和智能体 $i \in \mathcal{I}_{12} - \mathcal{I}_6$ 。

定义全局编队误差指标 $e_f(t) = \sqrt{\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \|e_i(t)\|^2}$, 则如图4.4 (左), e_f 渐近收敛到零。为了凸显引入神经网络补偿项的必要性, 我们舍弃(4.1.2)中 u_i 的最后一项。如图4.4 (右) 所示, 全局编队误差没有收敛到零, 而是收敛到原点的一个有界邻域内。

切换拓扑下的 TVF: 基于边的设计

实际中还有一些情形, 网络系统中的通讯信道相对较为稀疏, 但是可能在数个连接模式之间切换。这类情况下, 基于边的控制协议(4.1.20)可有效实现切换通讯下的 TVF 控制。

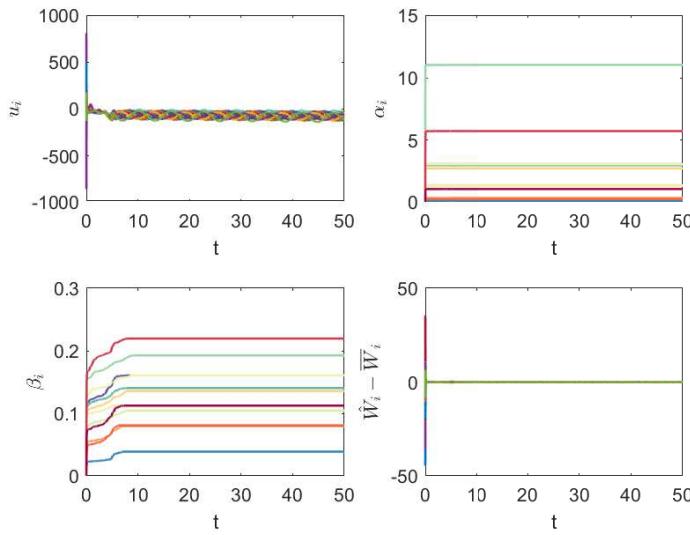


图 4.3: 控制输入 u_i (左上), 自适应耦合权重 α_i (右上)和 β_i (左下), 和矩阵 $\hat{W}_i - \bar{W}_i$ 中的元素(右下), $i = 1, \dots, 6$ 。

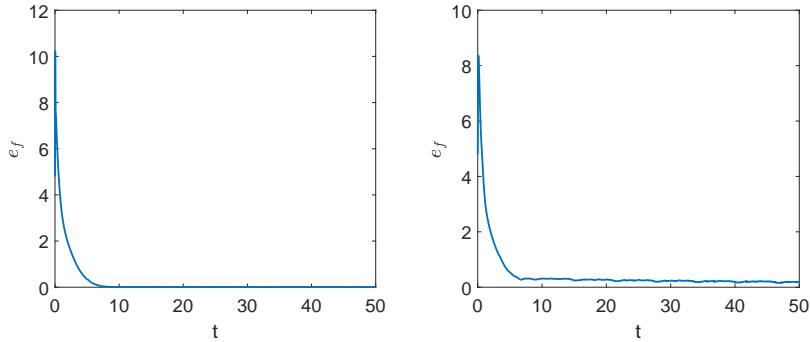


图 4.4: 控制协议(4.1.2)下系统的全局编队误差(左); 舍弃(4.1.2)中神经网络补偿项后系统的全局编队误差(右)。

例 4.1.2 考虑一个二阶多智能体系统(4.1.1), 其中 $N = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ f_i(x_i(t)) = ix_{i1}x_{i2}, \quad w_i(t) = 0.1 \cos(it). \quad (4.1.33)$$

假设通讯拓扑每两秒在图4.5给出的星状图和环状图之间随机切换。预先设定的 TVF 是一个等边三角形: $i \in \mathcal{I}_3$ 时 $h_i(t) = (2 \sin(t + \frac{2(i-1)\pi}{3}), 2 \cos(t + \frac{2(i-1)\pi}{3}))^T$; $i \in \mathcal{I}_6 - \mathcal{I}_3$ 时 $h_i(t) = (\sin(t + \frac{2(i-1)\pi}{3} + \pi), \cos(t + \frac{2(i-1)\pi}{3} + \pi))^T$ 。

取 $K_0 = (0, -2)$, 则编队可行性条件(4.1.21)成立。根据算法4.1.1, 令 $K_1 = K_0$,

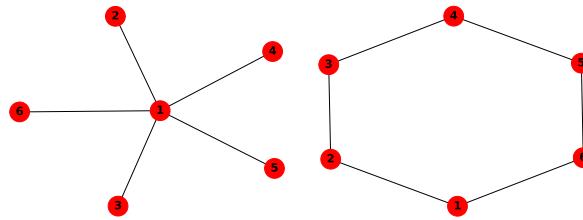


图 4.5: 例4.1.2中智能体间可能出现的通讯拓扑(星状图和环状图)。

$\eta = 3, \theta = 2$ 并求解(4.1.4)得

$$P = \begin{pmatrix} 0.6855 & -0.7725 \\ -0.7725 & 1.2465 \end{pmatrix}.$$

令

$$K_2 = (-2.9967, -2.6594),$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 8.9805 & 7.9694 \\ 7.9694 & 7.0722 \end{pmatrix},$$

取 $\rho_{ij} = \nu_{ij} = 0.02, \tau_i = \psi_i = 100, \sigma = 0.5$, 定理4.1.2的条件成立。同样, 考虑到注4.1.6, 取 $r = 0.05$ 。

图4.6给出了一次实验中通讯拓扑的切换信号。相应地, 图4.7给出了智能体的演化轨迹, 表明智能体网络形成了一个三角队形, 并随时间在相空间内作旋转运动。控制输入和一些辅助的变量如图4.8, 其中所有的自适应耦合权重变量 α_{ij}, β_{ij} 收敛到有限值, 同时神经网络权重估计矩阵收敛到对应的伪理想矩阵。

全局编队误差 $e_f(t) = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \|e_i(t)\|^2}$ 收敛到零, 如图4.9(左)所示。同样, 在舍弃神经网络逼近项后, 全局编队误差如图4.9(右)所示。可以看到, 在简化后的控制器作用下, 全局编队误差不收敛到零, 且在大约 $t = 10.5s$ 发散, 表明本节中神经网络的引入是必要的。

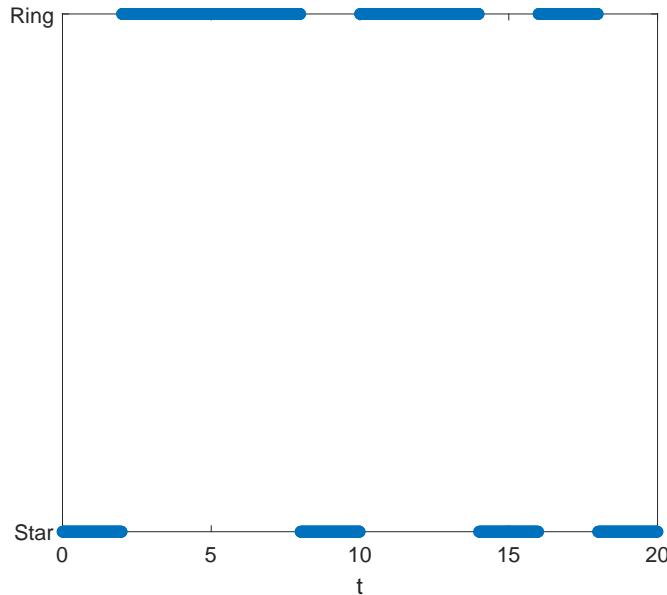
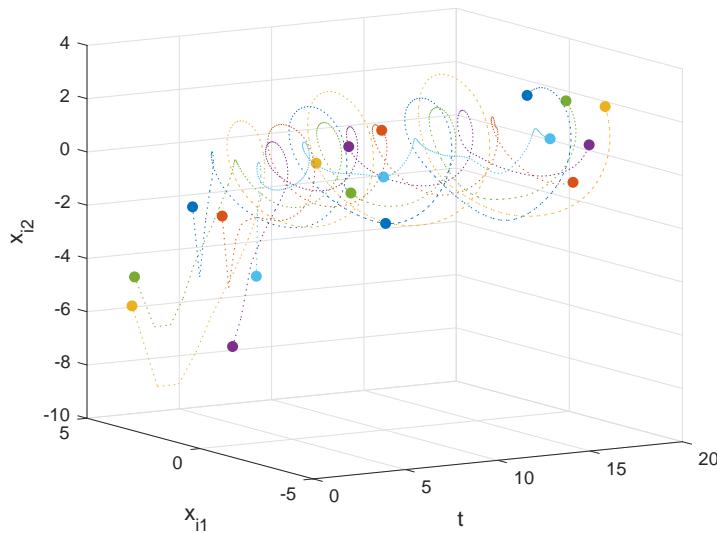


图 4.6: 拓扑切换信号。

图 4.7: 所有智能体的状态 x_i , $i \in \mathcal{I}_6$, 其中虚线表示智能体的运动轨迹, 圆点用来标记智能体分别在 $t = 0s, 10s, 20s$ 时刻的位置。

4.2 基于有向支撑树的自适应时变编队控制

我们在1.1.3小节已经指出, 在相关的 TVF/TVFT 文献[52–56]中, 一个普遍的问题是控制过程依赖于通讯拓扑特征值的先验知识, 这在许多大型网络系统或切换系统中往往是不易获得的, 因此在一定程度上限制了控制器的灵活性和可移植性。

我们已经知道通过设计分布式自适应耦合调节方法, 可以顺利消除对此类网络通

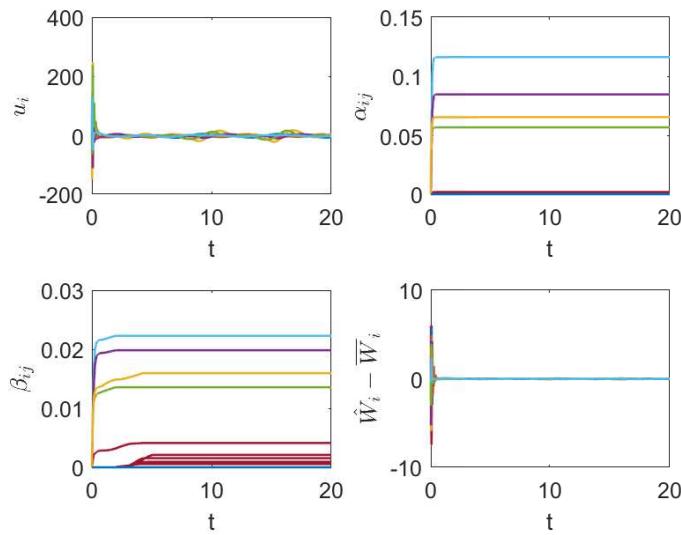


图 4.8: 控制输入 u_i (左上), 自适应耦合权重 α_{ij} (右上)和 β_{ij} (左下), 和矩阵 $\hat{W}_i - \bar{W}_i$ 中的元素(右下), $i = 1, \dots, 6$ 。

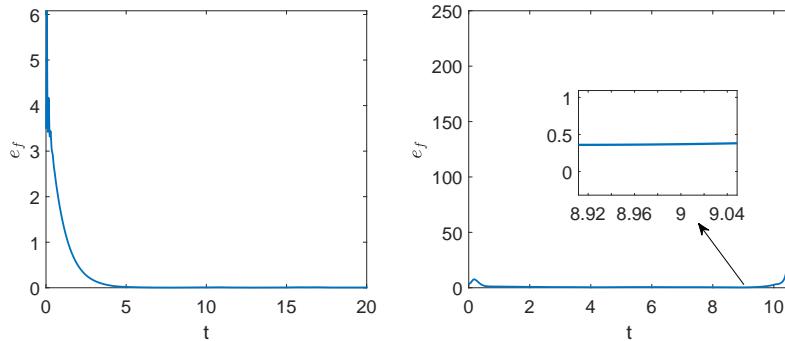


图 4.9: 控制协议(4.1.20)下系统的全局编队误差(左); 舍弃(4.1.2)中神经网络补偿项后系统的全局编队误差(右)。

讯拓扑特征值的依赖性; 且对于无向网络, 基于节点和基于边的设计方法均已较为成熟。比如, 基于节点的方法通常具有完全分布式特性, 不依赖于任何全局信息; 而基于边的方法可适用于带有切换通讯拓扑的情形, 见本章4.1节或文献[105]等。

然而, 在有向图中节点和边的相互依赖性较为复杂, 尤其是较为一般的有向图, 如仅包含有向支撑树(DST)的图。在这个方向上, 文献[152]和[153]提出了基于节点的完全分布式自适应控制方法, 分别用于一致性和TVFT控制中。另一方面, 一类基于DST的方法最近出现在一致性控制中[104, 114, 154], 其显示地利用网络中的一个DST结构来进行分布式自适应耦合调节。应该注意到, 若无法获得一个DST结构, 在有向网络中尚不清楚是否可能设计基于边的完全分布式控制协议(参见文献[104]中的猜想1); 从这个角度讲, 基于DST的分布式自适应方法是目前最为一般的基于边的设计方

法。与基于节点的方法相比[152, 153]，基于 DST 的方法提供了一个有趣的视角，有助于我们更好的理解复杂有向结构对于网络动力学的影响。

我们发现，现有文献中不存在基于 DST 的自适应 TVF/TVFT 控制方法，也尚不清楚基于 DST 的编队可行性条件应如何确定。基于此，我们在本节面向线性系统，给出了一个统一的基于 DST 的 TVF/TVFT 控制方法：该方法在避免了通讯拓扑特征值的先验知识的同时，从一个不同的角度切入编队问题，给出了实现 TVF/TVFT 的充分必要条件。

4.2.1 模型描述与预备知识

我们用 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 表示智能体之间的有向通讯拓扑，其中权重矩阵 \mathcal{A} 中的元素可理解为通讯强度。智能体的动力学为线性时不变系统：

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad i \in \mathcal{I}_N \quad (4.2.1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是智能体 i 的状态向量和待设计的控制输入。令系统矩阵 (A, B) 为可镇定的。

定义 4.2.1 ([110],TVF) 我们称多智能体系统(4.2.1)实现了由时变向量 $h(t) = \text{col}(h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t))$ 定义的时变编队(TVF)，若对系统任意的初始状态，有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((x_i - h_i) - (x_j - h_j)) = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_N. \quad (4.2.2)$$

现在考虑当系统4.2.1中存在 $M (M \geq 1)$ 个领导者时的情形。不失一般性，假设前 M 个智能体为领导者，剩余的为跟随者：

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= Ax_l, & l \in \mathcal{I}_M, \\ \dot{x}_i &= Ax_i + Bu_i, & i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

由于领导者没有入邻居，图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵可以分块为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

其中 $\mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}^{(N-M) \times M}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}^{(N-M) \times (N-M)}$ 。

定义 4.2.2 ([54]) 我们称某个跟随者是充分知情的(*well-informed*)若所有的领导者都是它的入邻居；称其为不知情的(*uninformed*)若没有领导者是它的入邻居。

定义 4.2.3 (TVFT) 我们称多智能体系统(4.2.3)实现了由时变向量 $h^F(t) = \text{col}(h_{M+1}(t), h_{M+2}(t), \dots, h_N(t))$ 和凸组合 $\beta_l \in \mathbb{R}^+$ ($l \in \mathcal{I}_M$ 且 $\sum_{l=1}^M \beta_l = 1$) 定义的时变编队跟踪(TVFT)，若对系统任意的初始状态，有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i - h_i - \sum_{l=1}^M \beta_l x_l) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M. \quad (4.2.5)$$

在特殊情形 $M = 1$ 时，(4.2.5)退化为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i - h_i - x_1) = 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (4.2.6)$$

注 4.2.1 带有多个领导者的 TVFT 问题最先在文献[54]描述如下：预先设定一个 $h^F(\cdot)$ ，寻找一组满足组合凸性的超参数 β_l ，使得对任意初始状态均有(4.2.5)成立。随后，文献[153]和文献[56]分别将该问题推广至分群编队跟踪和输出编队跟踪问题中。本节中出于实际考虑，定义4.2.3提出了一个不同的 TVFT 问题：预先设定 $h^F(\cdot)$ 和任意满足组合凸性的超参数 β_l ，使得对任意初始状态均有(4.2.5)成立。实际上，文献[54, 56, 153]中的方法仅能引出一组特定的，由通讯拓扑结构决定的凸组合系数 β_l ，无法实现凸组合的任意预定义。

本节的目的在于通过不断地推广 DST 方法，求解定义4.2.1和定义4.2.3中列举的问题。本节中，我们认为 $h_i(\cdot)$ (β_l) 的信息仅由跟随者 i (领导者 l) 掌握。

4.2.2 无领导者网络系统的编队控制

本小节主要考虑了定义4.2.1中的 TVF 问题。以下是一个标准的连通性假设([52])。

假设 4.2.1 有向图 \mathcal{G} 包含至少一个 DST。

在假设4.2.1下，我们可以任选图 \mathcal{G} 的一个 DST $\bar{\mathcal{G}}(\mathcal{V}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{A}})$ [114]。不失一般性，假设 $\bar{\mathcal{G}}$ 的根节点为 1。相应地， $\bar{\mathcal{L}}$ 为 $\bar{\mathcal{G}}$ 的 Laplacian 矩阵， $\bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(i)$ 为 $\bar{\mathcal{G}}$ 中智能体 i 的出邻居集合。记 i_k 为节点 $k + 1$ 在 $\bar{\mathcal{G}}$ 中唯一的入邻居， $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。则有 $\bar{\mathcal{E}} = \{e_{i_k, k+1} | k \in \mathcal{I}_{N-1}\} \subseteq \mathcal{E}$ 。

定义 $d_i(t) = x_i(t) - h_i(t)$ ，即智能体 i 当前状态与目标编队偏移之间的误差。记 $x = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$, $d = \text{col}(d_1, \dots, d_N)$ 。考虑如下基于 DST 的自适应 TVF 控制器：

$$u_i = K_0 x_i + K_1 d_i + K_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} \alpha_{ij}(t)(d_i - d_j) \quad (4.2.7)$$

其中时变的耦合权重

$$\alpha_{ij}(t) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{if } e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}}, \\ \bar{a}_{k+1,i_k}(t), & \text{if } e_{ji} \in \bar{\mathcal{E}}. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

$$\dot{\bar{a}}_{k+1,i_k} = \rho_{k+1,i_k} \left((d_{i_k} - d_{k+1}) - \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} (d_{k+1} - d_j) \right)^T \Gamma (d_{i_k} - d_{k+1}). \quad (4.2.9)$$

在(4.2.7)-(4.2.9)中, K_0, K_1, K_2, Γ 为增益矩阵, $\rho_{k+1,i_k} \in \mathbb{R}^+$ 。控制器(4.2.7)中, $\alpha_{ij}(t)$ 表示智能体 i 和它的入邻居 j 之间的耦合强度, 且 $\alpha_{ij}(t)$ 为时变的仅当相应的通讯边出现在 $\bar{\mathcal{G}}$ 中, 即存在某个 $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 使得 $j = i_k, i = k + 1$; 其余情况下 $\alpha_{ij}(t)$ 保持不变。

注 4.2.2 与注4.1.2类似, 控制器(4.2.7)中增益 K_0 是为了检验目标编队的可行性; 增益 K_1 是为了控制平均编队信号 $d_{ave} = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}_N} d_j$ [52]; K_2 是一个一致性增益。与相关文献[52]不同的是, 我们在控制器(4.2.7)-(4.2.9)中显示地用到了网络系统的一个 *DST* 结构。

引理 4.2.1 (TVF 的充分必要条件) 在假设4.2.1的前提下, 对任意 *DST* $\bar{\mathcal{G}}$, 按照(2.1.1)式定义 $\Xi \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ 。则多智能体系统(4.2.1)实现 TVF 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(\Xi \otimes \mathbf{I}_n)d(t)\| = 0. \quad (4.2.10)$$

证明. 根据文献[114]中的引理 3.2, (4.2.10)成立当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|d_i(t) - d_j(t)\| = 0, \forall i, j \in \mathcal{I}_N$ 。则根据定义4.2.1以及 $d_i(t)$ 的定义, 引理4.2.1得证。 \square

引理 4.2.2 (可行性条件) 在假设4.2.1的前提下, 考虑控制协议(4.2.7)及对任意 *DST* $\bar{\mathcal{G}}$ 定义的时变耦合权重(4.2.8)。假设线性时变系统

$$\dot{d}_L = (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (A + BK_0 + BK_1) + Q(t) \otimes BK_2)d_L \quad (4.2.11)$$

的原点是全局渐近稳定的, 则多智能体系统(4.2.1)实现 TVF 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (A + BK_0)(h_{i_k}(t) - h_{k+1}(t)) - (\dot{h}_{i_k}(t) - \dot{h}_{k+1}(t)) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_{N-1}. \quad (4.2.12)$$

这里 $Q(t) = \tilde{Q} + \bar{Q}(t)$, 其中 \tilde{Q} 为固定矩阵, 定义见式(2.1.2), 而

$$\bar{Q}_{kj}(t) = \begin{cases} \bar{a}_{j+1,i_j}(t), & \text{若 } j = k, \\ -\bar{a}_{j+1,i_j}(t), & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

证明. 令 $\bar{d}_k(t) = d_{i_k}(t) - d_{k+1}(t)$, 即 DST 中边 $e_{i_k, k+1}$ 两侧父节点与子节点之间的相对误差, 其中 $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。记 $\bar{d} = \text{col}(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_N)$ 。则 $\bar{d} = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)d$ 。根据引理4.2.1, 只需证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{d}(t)\| = 0$ 。

根据(4.2.1)和(4.2.7), $x(t)$ 的闭环动力学满足

$$\dot{x} = (\mathbf{I}_N \otimes (A + BK_0 + BK_1))x + (\mathcal{L}(t) \otimes BK_2)d - (\mathbf{I}_N \otimes BK_1)h \quad (4.2.14)$$

其中 $\mathcal{L}(t)$ 为 \mathcal{G} 在 t 时刻的 Laplacian 矩阵。接着, 根据(4.2.14)和 d, \bar{d} 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{d}} &= (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (A + BK_0 + BK_1))\bar{d} + (\Xi \mathcal{L}(t) \otimes BK_2)d \\ &\quad + (\Xi \otimes (A + BK_0))h - (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\dot{h} \\ &= (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (A + BK_0 + BK_1) + Q(t) \otimes BK_2)\bar{d} \\ &\quad + (\Xi \otimes (A + BK_0))h - (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\dot{h} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

其中第二个等式是由于引理2.1.1。已知线性时变系统(4.2.11)渐近收敛到原点, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{d}(t)\| = 0$ 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\Xi \otimes (A + BK_0))h(t) - (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\dot{h}(t) = 0. \quad (4.2.16)$$

实际上, 根据 Ξ 定义, (4.2.16)与条件(4.2.12)是等价的。 \square

我们将 TVF 控制器的设计流程总结于以下算法4.2.1, 随后给出主要定理。

算法 4.2.1 1). 寻找一个定常矩阵 K_0 使得编队可行性条件对任一 DST $\bar{\mathcal{G}}$ 成立:

$$(A + BK_0)(h_{i_k}(t) - h_{k+1}(t)) - (\dot{h}_{i_k}(t) - \dot{h}_{k+1}(t)) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_{N-1}. \quad (4.2.17)$$

若此 K_0 存在, 继续; 否则, 终止算法, 无控制参数解;

2). 选择 K_1 使 $(A + BK_0 + BK_1, B)$ 为可镇定的。取 $\eta, \theta \in \mathbb{R}^+$, 求解 LMI:

$$(A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T - \eta BB^T + \theta P \leq 0 \quad (4.2.18)$$

得到一个解 $P > 0$;

3). 令 $K_2 = -B^T P^{-1}$, $\Gamma = P^{-1}BB^TP^{-1}$, 选取 $\rho_{k+1, i_k} \in \mathbb{R}^+$ 。

定理 4.2.1 (基于 DST 的 TVF 控制) 在假设 4.2.1 的前提下，若可行性条件(4.2.17)对 $DST \bar{\mathcal{G}}$ 满足，则定义 4.2.1 的 TVF 问题可由控制器(4.2.7)和自适应耦合权重(4.2.8)-(4.2.9)求解，其中控制参数设计如算法 4.2.1。

证明. 可行性条件(4.2.17)保证了(4.2.12)对 $\forall k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 成立。更进一步，有

$$\dot{\bar{d}} = (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (A + BK_0 + BK_1) + Q(t) \otimes BK_2)\bar{d}, \quad (4.2.19)$$

其中 $Q(t)$ 定义见引理 4.2.2。接下来，我们将证明所提出的控制器保证了 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{d}(t) = 0$ 。进而根据引理 4.2.2，我们即可得出定理的结论。

考虑 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2}\bar{d}^T(\mathbf{I}_{N-1} \otimes P^{-1})\bar{d} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2\rho_{k+1,i_k}}(\bar{a}_{k+1,i_k}(t) - \phi_{k+1,i_k})^2 \quad (4.2.20)$$

其中 P 是(4.2.18)的一个解， $\phi_{k+1,i_k} \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 为待定常数。

根据(4.2.19)及(4.2.9)， V_1 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \bar{d}^T(\mathbf{I}_{N-1} \otimes P^{-1}(A + BK_0 + BK_1) + Q(t) \otimes P^{-1}BK_2)\bar{d} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1}(\bar{a}_{k+1,i_k} - \phi_{k+1,i_k})(\bar{d}_k - \sum_{j+1 \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{d}_j)^T \Gamma \bar{d}_k. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

根据引理 2.1.1 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{a}_{k+1,i_k}(\bar{d}_k - \sum_{j+1 \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{d}_j)^T \Gamma \bar{d}_k &= \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{Q}_{kk}(t)\bar{d}_k + \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \bar{Q}_{jk}(t)\bar{d}_j)^T \Gamma \bar{d}_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{Q}_{jk}(t)\bar{d}_j^T \Gamma \bar{d}_k \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

定义 $\Phi \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 如下：

$$\Phi_{kj} = \begin{cases} \phi_{j+1,i_j}, & \text{若 } j = k, \\ -\phi_{j+1,i_j}, & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4.2.23)$$

则根据(4.2.21)-(4.2.23)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \bar{d}^T(\mathbf{I}_{N-1} \otimes P^{-1}(A + BK_0 + BK_1) + Q(t) \otimes P^{-1}BK_2)\bar{d} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (\bar{Q}_{jk}(t) - \Phi_{jk})\bar{d}_j^T \Gamma \bar{d}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{d}^T (\mathbf{I}_{N-1} \otimes P^{-1}(A + BK_0 + BK_1) + Q(t) \otimes P^{-1}BK_2) \bar{d} \\
&\quad + \bar{d}^T ((\bar{Q}(t) - \Phi) \otimes \Gamma) \bar{d}.
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

定义 $\tilde{d} = (\mathbf{I}_{N-1} \otimes P^{-1})\bar{d}$, 将算法4.2.1中 K_2, Γ 代入into (4.2.24)可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \tilde{d}^T (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (A + BK_0 + BK_1)P - Q(t) \otimes BB^T) \tilde{d} \\
&\quad + \tilde{d}^T ((\bar{Q}(t) - \Phi) \otimes BB^T) \tilde{d} \\
&= \tilde{d}^T (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (A + BK_0 + BK_1)P) \tilde{d} - \tilde{d}^T ((\bar{Q} + \Phi) \otimes BB^T) \tilde{d} \\
&= \frac{1}{2} \tilde{d}^T \left(\mathbf{I}_{N-1} \otimes ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T) \right. \\
&\quad \left. - (\bar{Q} + \bar{Q}^T + \Phi + \Phi^T) \otimes BB^T \right) \tilde{d}.
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

接下来我们通过数学归纳法来证明通过适当地选择 $\phi_{k+1,i_k}, k \in \mathcal{I}_{N-1}$, 可使

$$\Phi + \Phi^T = \begin{pmatrix} 2\phi_{2,i_1} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{N-2,1} & \phi_{N-1,1} \\ \phi_{21} & 2\phi_{3,i_2} & \cdots & \cdots & \phi_{N-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N-2,1} & \vdots & \cdots & 2\phi_{N-1,i_{N-2}} & \phi_{N-1,N-2} \\ \phi_{N-1,1} & \phi_{N-1,2} & \cdots & \phi_{N-1,N-2} & 2\phi_{N,i_{N-1}} \end{pmatrix} > 0. \tag{4.2.26}$$

定义 $\Psi_1 = (2\phi_{2,i_1})$, $\Psi_k = \begin{pmatrix} \Psi_{k-1} & \varphi_k \\ \varphi_k^T & 2\phi_{k+1,i_k} \end{pmatrix}$ 其中 $\varphi_k = (\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{k,k-1})^T$, $k = 2, \dots, N-1$ 。显然, 取 $\phi_{2,i_1} > 0$ 则有 $\Psi_1 > 0$ 。假设 $\Psi_{k-1} > 0$, $k \geq 2$ 。注意到 $|\phi_{kj}| \leq |\phi_{j+1,i_j}|$, $\forall j \in \mathcal{I}_{k-1}$, 则有 $\varphi_k^T \Psi_{k-1}^{-1} \varphi_k \leq \lambda_m(\Psi_{k-1}^{-1}) \sum_{j=2}^k \phi_{j,i_{j-1}}^2$ 。通过选择 $\phi_{k+1,i_k} > \frac{\sum_{j=2}^k \phi_{j,i_{j-1}}^2}{2\lambda_m(\Psi_{k-1})}$, 则根据 Schur 补引理[155]可得 $\Psi_k > 0$ 。通过数学归纳法, 即有 $\Phi + \Phi^T = \Psi_{N-1} > 0$ 。

更进一步, 由于 \tilde{Q} 固定, 总可以选择充分大的 $\phi_{k+1,i_k}, k \in \mathcal{I}_{N-1}$, 使得 $\lambda_m(\tilde{Q} + \tilde{Q}^T + \Phi + \Phi^T) \geq \eta$, 其中 η 的定义见(4.2.18)。接着, 根据(4.2.25)和(4.2.18)可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &\leq \frac{1}{2} \tilde{d}^T \left(\mathbf{I}_{N-1} \otimes ((A + BK_0 + BK_1)P + P(A + BK_0 + BK_1)^T - \eta BB^T) \right) \tilde{d} \\
&\leq -\frac{\theta}{2} \tilde{d}^T (\mathbf{I}_{N-1} \otimes P) \tilde{d} = -\frac{\theta}{2} \bar{d}^T (\mathbf{I}_{N-1} \otimes P^{-1}) \bar{d} \leq 0,
\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

保证了信号 $\bar{d}(t)$ 和 $\bar{a}_{k+1,i_k}(t)$ 的有界性。注意到 $\dot{V}_1(t) = 0$ 时 $\bar{d} = 0$, 根据 LaSalle 不变原理[156]可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{d}(t) = 0$ 。 \square

注 4.2.3 LMI (4.2.18)有可行解当且仅当 $(A + BK_0 + BK_1, B)$ 可镇定, 而这在 (A, B) 可镇定的条件下是可以得到保证的。注意不同的编队向量 $h(\cdot)$ 可能需要设计不

同的控制参数 P, K_0, K_1 。

注 4.2.4 在前沿的 TVF 研究工作中，编队可行性包含的条件个数一般是 $\frac{N(N-1)}{2}$ 阶的，即每条通讯边对应一个条件，如本章 4.1.3 和文献 [52, 110]。而这里可行性条件 (4.2.17) 包含 $N - 1$ 个条件，即通过利用图的 DST 结构得出了具有最小数目的可行性条件：注意 $N - 1$ 是使得 \mathcal{G} 为弱连通的最小边数。为了更好的说明这一点，考虑有向环状通讯的三个智能体，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。假设 $h_1(t) = (\sin(t) + \cos(t), \cos(t))^T$, $h_2(t) = (\cos(t), 0)^T$, $h_3(t) = (\cos(t) - \sin(t), -\cos(t))^T$ 。此时，令 $K_0 = (0, 0)$ ，则条件 (4.2.17) 对任意 DST 均成立，此时仅需两个（而非三个）可行性条件的验证。

4.2.3 带有多个领导者的网络系统的编队跟踪控制

本小节中，我们提出一个新的基于广义的 DST 概念的分布式自适应控制器用于求解定义 4.2.3 的 TVFT 问题。我们首先考虑更加一般的具有多个领导者时的情形，随后对单领导者时的情形给出一个推论。

定义 4.2.4 我们称有向图 \mathcal{G} 包含一个以领导层为根的广义 DST，若其中每个跟随者或是充分知情的，或是不知情的；且对每个不知情的跟随者，存在一条从一个充分知情的跟随者到它的有向路径。

假设 4.2.2 有向图 \mathcal{G} 至少包含一个以领导层为根的广义 DST。

注 4.2.5 文献 [54, 153] 中假设从任一领导者与不同的充分知情跟随者之间的耦合权重是相同的，且属于先验知识。假设 4.2.2 放宽了这些限制。

我们接下来引入一个辅助多智能体系统，其通讯拓扑由 \mathcal{G} 导出，记为 $\mathcal{G}'(\mathcal{V}', \mathcal{E}', \mathcal{A}')$ 。定义 $\mathcal{V}' = \mathcal{I}_{N-M+1}$ ，其中智能体 1 是领导者，其余为跟随者。 $\mathcal{E}' = \{e'_{1j}, j > 1 | j + M - 1$ 在 \mathcal{G} 中是充分知情的} $\cup \{e'_{jp}, j, p > 1 | e_{j+M-1, p+M-1} \in \mathcal{E}\}$ 。邻接矩阵 $\mathcal{A}' = (a'_{jp})$ 中若 $e'_{pj} \in \mathcal{E}'$ ，有 $a'_{jp} > 0$ ，否则 $a'_{jp} = 0$ 。

为了进一步说明假设 4.2.2 和导出图 \mathcal{G}' ，我们给出一个简单的例子，如图 4.10。显然，在导出图 \mathcal{G}' 中多个领导者合并称为单一的联合领导者。

在辅助多智能体系统中，分别用 y_j 和 v_j 表示智能体 j 的状态和控制输入。对于领导者，定义 $y_1 = \sum_{l=1}^M \beta_l x_l$, $h'_1 \equiv 0$ 。对于跟随者，定义 $y_j = x_{j+M-1}$, $h'_j = h_{j+M-1}$

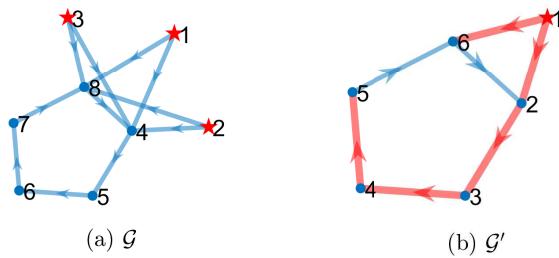


图 4.10: 一个带有三个领导者 $1, 2, 3$, 且满足假设 4.2.2 的通讯拓扑 $\mathcal{G}(a)$, 和其诱导出的带有单个领导者 1 的图 $\mathcal{G}'(b)$ 。

其中 $j = 2, \dots, N - M + 1$ 。令 $d'_j = y_j - h'_j$, $j \in \mathcal{I}_{N-M+1}$ 。则辅助系统的动力学满足

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= Ay_1, \\ \dot{y}_j &= Ay_j + Bv_j \quad j = 2, \dots, N - M + 1,\end{aligned}\tag{4.2.28}$$

其中 $v_j = u_{j+M-1}$, 且其初始值由原系统(4.2.3)的初始值决定。

引理 4.2.3 (TVFT 的充分必要条件) 在假设 4.2.2 的条件下, 带有多个领导者的多智能体系统(4.2.3)实现实由 $h^F(t) = \text{col}(h_{M+1}(t), h_{M+2}(t), \dots, h_N(t))$ 和 $\beta_l, l \in \mathcal{I}_M$ 定义的 TVFT, 当且仅当带有单个领导者的辅助多智能体系统(4.2.28)实现实由 $h'_F(t) = \text{col}(h'_2(t), h'_3(t), \dots, h'_{N-M+1}(t))$ 定义的 TVFT。

证明. 根据 y_j, h'_j 的定义, 显然有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_j(t) - h'_j(t) - y_1(t)) = 0, j = 2, \dots, N - M + 1$, 等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - h_i(t) - \sum_{l=1}^M \beta_l x_l(t)) = 0, i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$. \square

在假设4.2.2下, \mathcal{G}' 中至少有一个以领导者为根的 DST $\hat{\mathcal{G}}'(\mathcal{V}', \hat{\mathcal{E}}', \hat{\mathcal{A}}')$ 。类似地, 用 j_k 表示 $\hat{\mathcal{G}}'$ 中智能体 $k+1$ 的父节点, $k \in \mathcal{I}_{N-M}$; 用 $\mathcal{N}'_{\text{in}}(j)$ 表示 \mathcal{G}' 中 j 的入邻居集; $\hat{\mathcal{N}}'_{\text{out}}(j)$ 表示 $\hat{\mathcal{G}}'$ 中 j 的出邻居集。

对原系统(4.2.3)的跟随者 i , $i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$, 考虑如下基于广义 DST 的分布式自适应 TVFT 控制器:

$$u_i = v_{i-M+1}, \quad (4.2.29)$$

$$v_j = K_0 h'_j + K_2 \sum_{p \in \mathcal{N}'_{\text{in}}(j)} \alpha'_{jp}(t)(d'_j - d'_p), \quad (4.2.30)$$

$$\alpha'_{jp}(t) = \begin{cases} a'_{jp}, & \text{if } e_{pj} \in \mathcal{E}' \setminus \hat{\mathcal{E}}', \\ \hat{a}'_{k+1,i_r}(t), & \text{if } e_{pj} \in \hat{\mathcal{E}}' \end{cases} \quad (4.2.31)$$

$$\dot{\hat{a}}'_{k+1,j_k} = \rho_{k+1,j_k} \left((d'_{j_k} - d'_{k+1}) - \sum_{p \in \hat{\mathcal{N}}'_{\text{out}}(k+1)} (d'_{k+1} - d'_p) \right)^T \Gamma (d'_{j_k} - d'_{k+1}). \quad (4.2.32)$$

为了更好地阐释辅助多智能体系统的作用，我们将系统 $x_i, i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$ 的闭环信息流绘制如图4.11。与直接在原系统(4.2.3)中设计控制器的思路不同，我们定义了一个辅助多智能体系统(4.2.28)，同时引入了原系统和辅助系统的一系列交互机制：在(4.2.30)阶段，(4.2.3)中每个领导者 x_l 将自身的状态按 β_l 比发送给(4.2.28)中的领导者，同时原系统每个跟随者将自身状态发送给辅助系统相应的跟随者；在(4.2.29)阶段，(4.2.28)中每个跟随者以自身的控制输入回应原系统(4.2.3)中相应的跟随者。如此一来，原系统(4.2.3)的 TVFT 问题成功地退化为辅助系统(4.2.28)中单个领导者的 TVFT 问题。根据图4.11可以看到，仅有跟随者 i 的局部信息出现在 x_i 的闭环信息流中。

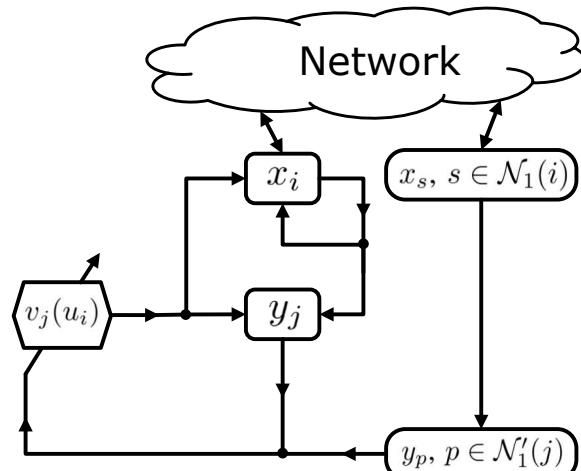


图 4.11: 闭环系统 x_i 的信息流， $i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$ 。

我们将 TVFT 控制器设计流程总结于以下算法4.2.2，之后给出本节的主要定理。

算法 4.2.2 1). 寻找常量矩阵 K_0 使得以下编队可行性条件对 $\forall i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$ 成立：

$$(A + BK_0)h_i(t) - \dot{h}_i(t) = 0. \quad (4.2.33)$$

若此 K_0 存在，继续；否则，终止算法，无控制参数解；

2). 选取 $\eta, \theta \in \mathbb{R}^+$ ，求解以下 LMI：

$$AP + PA^T - \eta BB^T + \theta P \leq 0 \quad (4.2.34)$$

得到一个解 $P > 0$;

3). 令 $K_2 = -B^T P^{-1}$, $\Gamma = P^{-1} B B^T P^{-1}$, 选择标量 $\rho_{k+1,i_k} \in \mathbb{R}^+$ 。

定理 4.2.2 (基于广义 DST 的 TVFT 控制) 在假设4.2.2的前提下, 若可行性条件(4.2.33)满足, 则定义4.2.3中的 TVFT 问题可由控制器(4.2.29)-(4.2.32)求解, 其中控制参数设计如算法4.2.2。

证明. 可行性条件(4.2.33)对 $\forall i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$ 成立, 等价于 $(A + BK_0)h'_j(t) - \dot{h}'_j(t) = 0$, $\forall j \in \{2, \dots, N-M+1\}$, 这表明由 $h'_F = \text{col}(h'_2, h'_3, \dots, h'_{N-M+1})$ 定义的 TVFT 对于辅助系统(4.2.28)是可行的。根据引理4.2.3, 只需证明(4.2.30)-(4.2.32)使得系统(4.2.28)实现了对单个领导者的编队跟踪。

引理4.2.1和引理2.1.1同样可应用于 \mathcal{G}' 和 $\hat{\mathcal{G}'}$, 不再赘述。令 $h' = \text{col}(h'_1, h'_F)$, $\hat{d}'_k(t) = d'_{i_k}(t) - d'_{k+1}(t)$, $\hat{d}' = \text{col}(\hat{d}'_1, \dots, \hat{d}'_{N-M+1})$ 。则有 $\hat{d}' = (\Xi' \otimes \mathbf{I}_n)d'$ 。令 $Q'(t) = \tilde{Q}' + \hat{Q}'(t)$ 其中 Ξ' 和 \tilde{Q}' 分别根据 $\hat{\mathcal{G}'}$ 定义, 见(2.1.1)和(2.1.2), 而

$$\hat{Q}'_{kj}(t) = \begin{cases} \hat{a}'_{j+1,i_j}(t), & \text{若 } j = k, \\ -\hat{a}'_{j+1,i_j}(t), & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4.2.35)$$

其中时变权重定义如(4.2.30)。

给定(4.2.29), 可得辅助系统(4.2.28)的闭环动力学为

$$\dot{y} = (\mathbf{I}_{N-M+1} \otimes A)y + (\mathcal{L}'(t) \otimes BK_2)d' + (\mathbf{I}_{N-M+1} \otimes BK_0)h'. \quad (4.2.36)$$

则根据(4.2.36)和 d, \hat{d} 的定义可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{d}'} &= (\mathbf{I}_{N-M} \otimes A)\hat{d}' + (\Xi' \mathcal{L}'(t) \otimes BK_2)d' + (\Xi' \otimes (A + BK_0))h' - (\Xi' \otimes \mathbf{I}_n)\dot{h}' \\ &= (\mathbf{I}_{N-M} \otimes A + Q'(t) \otimes BK_2)\hat{d}' + (\Xi' \otimes (A + BK_0))h' - (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\dot{h}' \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

其中 $\mathcal{L}'(t)$ 为 $\mathcal{G}'(t)$ 的时变 Laplacian 矩阵。在可行性条件(4.2.33)下, 可得

$$\dot{\hat{d}'} = (\mathbf{I}_{N-M} \otimes A + Q'(t) \otimes BK_2)\hat{d}'. \quad (4.2.38)$$

考虑 Lyapunov 函数如下

$$V_2(t) = \frac{1}{2}\hat{d}'^T(\mathbf{I}_{N-M} \otimes P^{-1})\hat{d}' + \sum_{k=1}^{N-M} \frac{1}{2\rho_{k+1,i_k}}(\hat{a}'_{k+1,i_k}(t) - \delta_{k+1,i_k})^2 \quad (4.2.39)$$

其中 P 是(4.2.34)的一个解, $\delta_{k+1,i_k} \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathcal{I}_{N-M}$ 。按照与定理4.2.1的证明中相似的步骤, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{d}'(t) = 0$ 。于是, 辅助系统(4.2.28)实现了带有单个领导者的 TVFT。与此同时, 原系统(4.2.3)中实现了带有多个领导者的 TVFT。□

在 $M = 1$ 的特殊情况下, 辅助系统(4.2.28)与原系统重合, 因此可被移除。此时基于 DST 的自适应 TVFT 控制器可直接对跟随者 i , $i = 2, \dots, N$, 设计如下:

$$u_i = K_0 h_i + K_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} \alpha_{ij}(t)(d_i - d_j) \quad (4.2.40)$$

$$\alpha_{ij}(t) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{if } e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \hat{\mathcal{E}}, \\ \hat{a}_{k+1,i_k}(t), & \text{if } e_{ji} \in \hat{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (4.2.41)$$

自适应率 $\dot{\hat{a}}_{k+1,i_k}$ 同(4.2.9)。这里, $d_1(t) = x_1(t)$ 。于是, 我们有如下推论:

推论 4.2.1 (单个领导者的 TVFT 控制) 假设以领导者为根节点存在一个 DST $\hat{\mathcal{G}}$, 在可行性条件(4.2.33)下, 带有单个领导者的 TVFT 问题可由(4.2.40)-(4.2.41)和同(4.2.9)的自适应率 $\dot{\hat{a}}_{k+1,i_k}$ 求解, 其中控制参数设计如算法4.2.2。

注 4.2.6 在单一领导者存在时, 假设4.2.2退化为经典的以领导者为根的 DST 存在性假设([51, 53], etc)。因此, 定理4.2.2提供了在一个或多个领导者存在时基于 DST 的自适应控制方法的统一的框架。

注 4.2.7 带有单个领导者的 TVFT 问题可以认为是一类特殊的 TVF 问题, 其中对领导者有 $h_1(\cdot) \equiv 0$ 。此时, 可行性条件(4.2.33)可由(4.1.3)退化得到。通过对比(4.2.7)和(4.2.40)可以发现, 在(4.2.40)中 $K_1 = -K_0$, 这意味着由于编队参考信号已预设为领导者的轨迹, 因此平均编队信号的增益设计固定下来, 不再具有自由度。

4.2.4 数值仿真

本小节中, 我们给出三个数值算例来验证上述理论结果, 分别为 TVF, 带有三个领导者的 TVFT, 和带有单一领导者的 TVFT。在所有算例中, 智能体(跟随者)的初始状态随机取自标准差为 5 的 Gaussian 分布, 通讯边的初始耦合权重取自 $(0, 0.1)$ 之间的均匀分布。

例 4.2.1 (TVF) 考虑一个二阶多智能体系统(4.1.1), 其中 $N = 12$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。智能体通过图5.7中 \mathcal{G}_1 进行通讯, 预设的 TVF 是一对嵌

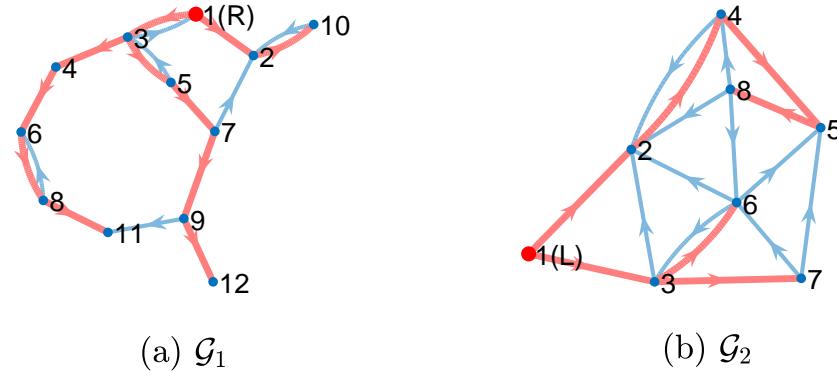


图 4.12: 通讯拓扑: 例4.2.1(a); 例4.2.2(b)。图中有向支撑树由红色标记, $(R), (L)$ 分别表示根节点和领导者。

套的六边形: $i \in \mathcal{I}_6$ 时 $h_i(t) = (8 \sin(t + \frac{(i-1)\pi}{3}), 8 \cos(t + \frac{(i-1)\pi}{3}))^T$; $i \in \mathcal{I}_{12} \setminus \mathcal{I}_6$ 时 $h_i(t) = (4 \sin(t + \frac{(i-1)\pi}{3}), 4 \cos(t + \frac{(i-1)\pi}{3}))^T$ 。

令 $K_0 = (0, -2)$, 可以验证条件(4.1.3)对选择的 DST 是成立的。令 $K_1 = (0, 0.1)$, $\eta = 2$, $\theta = 1$, 求解 $LMI(4.2.18)$ 得 $P = \begin{pmatrix} 0.2934 & -0.3074 \\ -0.3074 & 0.6175 \end{pmatrix}$. 根据算法4.2.1可得 $K_2 = (-3.5470, -3.3852)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 12.5813 & 12.0074 \\ 12.0074 & 11.4598 \end{pmatrix}$ 。令 $\rho_{k+1, i_k} = 0.1$ 。

智能体的状态轨迹如图4.13, 其中可以看到嵌套的六边形逐渐形成, 并随时间在相空间内进行旋转。令 $e_i(t) = d_i(t) - d_{ave}$ (参见注4.2.2), $i \in \mathcal{I}_N$ 。全局编队误差 $E(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|^2}$ 收敛到零, 如图4.14。图4.14同时也给出了网络中的耦合权重 α_{ij} , 其中出现在 DST 中的时变权重很快收敛 (实线), 其余权重保持不变 (虚线)。为了形成对比, 图4.15给出了若所有权重保持不变时 ($\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(0)$), 无法实现有效的 TVF 控制 (编队误差发散)。

例 4.2.2 (带有三个领导者的 TVFT) 考虑一个三阶的多智能体系统(4.2.3), 其中 $N = 8$, $M = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -10 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

智能体的通讯拓扑 \mathcal{G} 如图4.10。跟随者团体希望形成一个时变的五角形:

$$h_i(t) = \begin{pmatrix} 3 \sin(t + \frac{2(i-4)\pi}{5}) \\ -3 \cos(t + \frac{2(i-4)\pi}{5}) \\ 6 \cos(t + \frac{2(i-4)\pi}{5}) \end{pmatrix}, \quad i = 4, 5 \cdots, 8,$$

同时跟踪三个领导者的平均值, 即 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1/3$ 。

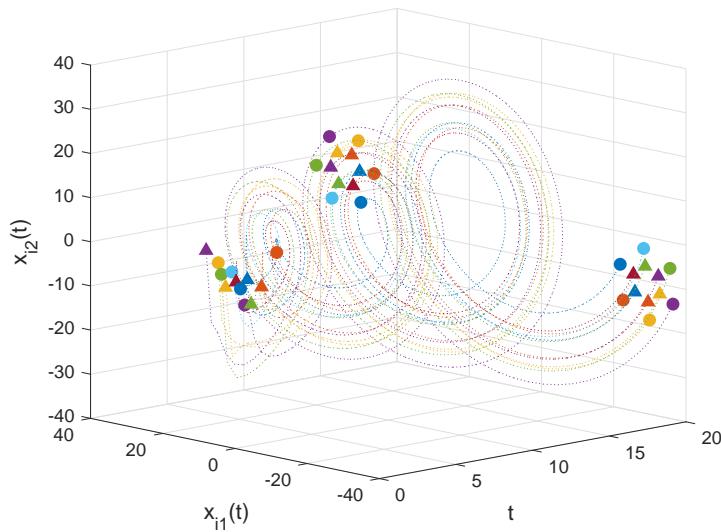


图 4.13: 例4.2.1中智能体的状态 $x_i(t)$, 其中圆形和方形分别用来标记 $t = 0, 10, 20$ 时智能体 $i \in \mathcal{I}_6$ 和 $i \in \mathcal{I}_{12} \setminus \mathcal{I}_6$ 的相位。

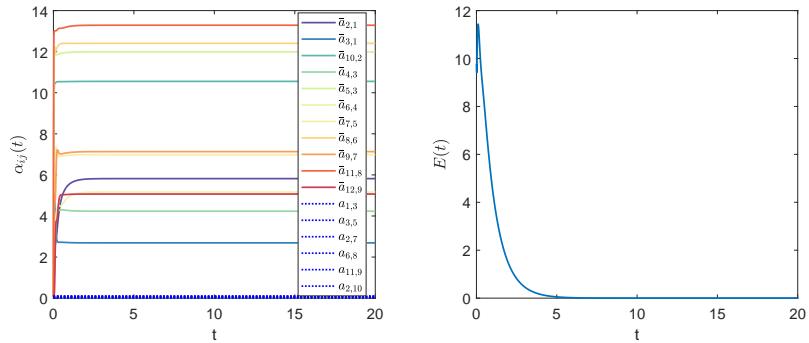


图 4.14: 例4.2.1中耦合权重 $\alpha_{ij}(t)$ 和全局编队误差 $E(t)$ 在所提自适应控制下的演化曲线。

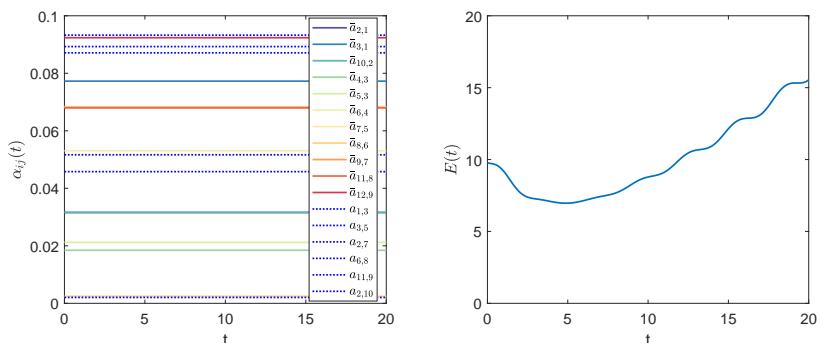


图 4.15: 例4.2.1中耦合权重 $\alpha_{ij}(t)$ 和全局编队误差 $E(t)$ 在静态控制下的演化曲线（与图4.14具有相同的初始状态）。

令 $K_0 = (0, 4, 0)$, 可以验证 $h_i(\cdot)$ 是可行的。取 $\eta = 2, \theta = 1, \rho_{k+1,j_k} = 0.1$ 。根据算法4.2.2, 可得 $K_2 = (-2.3066, -6.8257, -2.4970)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 5.3206 & 15.7444 & 5.7596 \\ 15.7444 & 46.5895 & 17.0434 \\ 5.7596 & 17.0434 & 6.2349 \end{pmatrix}$ 。

领导者的初始状态取为 $x_1(0) = (5, 5, 10)^T, x_2(0) = (-10, -5, -5)^T, x_3(0) = (5, -10, 5)^T$ 。图4.16给出了几个特定时刻智能体在相空间中的位置图, 可以从中看到跟随者团体形成了一个五角形并围绕三个领导者的中心旋转。类似地, 定义全局编队跟踪误差 $E(t) = \sqrt{\frac{1}{N-3} \sum_{i=4}^N \|d_i(t) - \sum_{l=1}^3 \beta_l x_l(t)\|^2}$ 。图4.17给出了 \mathcal{G}' 中权重 α'_{ij} (参见图4.10) 和 $E(t)$ 的演化。同样, 固定耦合的策略未能完成 TVFT 任务, 如图4.18。

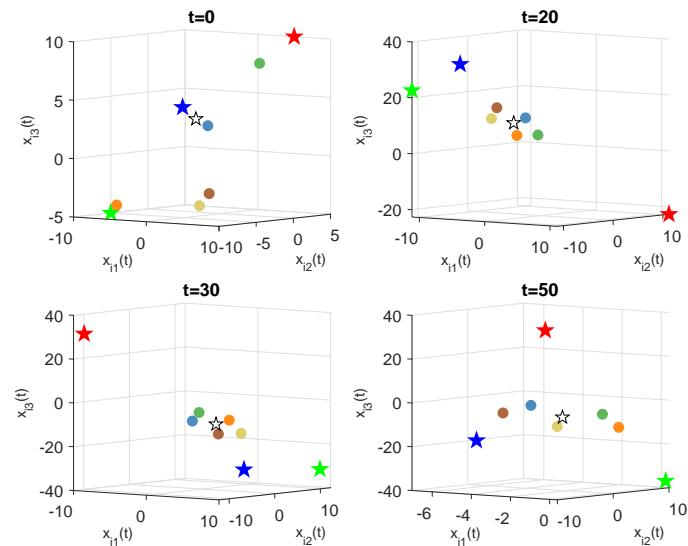


图 4.16: 例4.2.2中智能体分别在 $t = 0, 20, 30, 50$ 时的相位图, 其中三个实心五角形, 五个圆形, 和一个空心五角形分别代表领导者、跟随者以及领导者的平均状态。

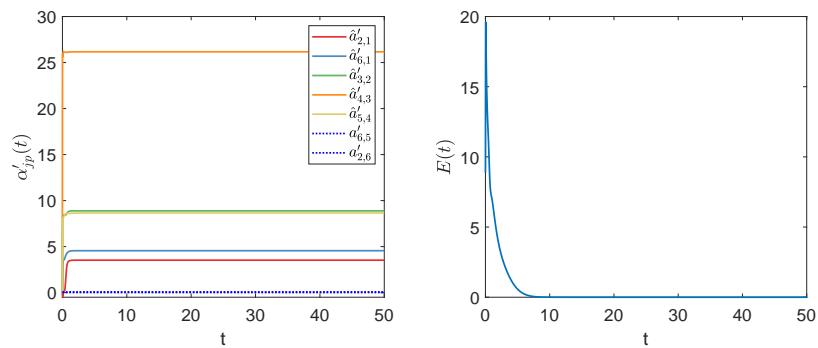


图 4.17: 例4.2.2中图 \mathcal{G}' 的耦合权重 $\alpha'_{jp}(t)$ 和全局编队跟踪误差 $E(t)$ 在所提自适应控制下的演化曲线。

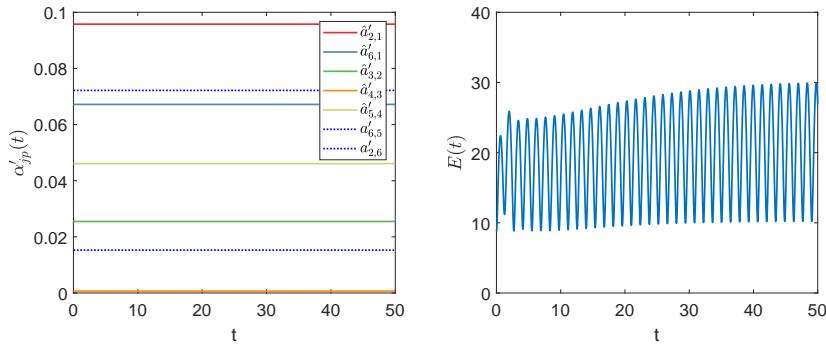


图 4.18: 例4.2.2中图 \mathcal{G}' 的耦合权重 $\alpha'_{jp}(t)$ 和全局编队跟踪误差 $E(t)$ 在静态控制下的演化曲线 (与图4.17具有相同的初始状态)。

例 4.2.3 (带有单个领导者的 TVFT) 考虑一个二阶多智能体网络系统(4.2.3), 其中 $N = 8$, $M = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 通讯拓扑为图5.7中的 \mathcal{G}_2 所示。

目标队形是围绕领导者的一个人类似于等边三角形: $i \in \{2, 3, 4\}$ 时 $h_i(t) = (4 \sin(t + \frac{2(i-2)\pi}{3} + \pi), 4 \cos(t + \frac{2(i-2)\pi}{3} + \pi))^T$; $i \in \{5, 6, 7, 8\}$ 时 $h_i(t) = (2 \sin(t + \frac{(i-5)\pi}{2}), 2 \cos(t + \frac{(i-5)\pi}{2}))^T$ 。

令 $K_0 = (-1, 0)$, 可以验证此时编队可行性条件(4.1.21)成立。取 $\eta = 2$, $\theta = 1$, 求解 LMI (4.2.34)得解 $P = \begin{pmatrix} 0.6513 & -0.6513 \\ -0.6513 & 0.8256 \end{pmatrix}$ 。根据算法4.2.2, 有 $K_2 = (-5.7356, -5.7356)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 32.8969 & 32.8969 \\ 32.8969 & 32.8969 \end{pmatrix}$ 。最后, 取 $\rho_{k+1, i_k} = 0.1$ 。

领导者得初始状态取为 $x_1(0) = (0.5, 0.5)^T$ 。所有智能体得轨迹如图4.19, 从中可以看出跟随者逐渐形成三角队形并围绕领导者作旋转运动。若定义全局编队跟踪误差为 $E(t) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N \|d_i(t) - x_1(t)\|^2}$, 则从图4.20中可以看出其收敛到零 (同时 DST 上得时变权重收敛至有限值)。同样地, 此时图4.21 (左) 表明固定耦合下编队跟踪误差发散, 进一步证明了引入自适应耦合的必要性。

我们在本节前言中已经指出, 除了基于 DST 的方法之外, 通过分布式自适应耦合将控制器设计与通讯拓扑特征值相互解耦的方法并不唯一: 如文献[152, 153]中提出的基于节点的设计方法。值得注意的是, 虽然基于节点的方法不显示地依赖于一个 DST, 但是 DST 的存在性作为一个前提假设出现。而为了验证该假设, 设计人员至少需要找到网络中的一个 DST (一些经典的算法如深度/广度优先遍历等[118])。从这个角度来讲, 基于 DST 的方法并未增加控制器应用的局限性。此外, 我们引入一个与基于节点的分布式自适应方法[152, 153]的数值比较, 即

$$u_i = K_0 h_i + K_2(c_i(t) + \xi_i P^{-1} \xi_i) \xi_i$$

$$\dot{c}_i = \rho_i \xi_i^T \Gamma \xi_i \quad \xi_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_{in}(i)} a_{ij} (d_i - d_j). \quad (4.2.42)$$

注意到(4.2.42)中网络内部所有的耦合权重均为时变的。我们选取相同的智能体初始状态和控制参数 $P, \Gamma, K_0, K_2, \rho_i = 0.1$ 。由于与控制协议(4.2.42)设计思路的不同，很难选择完全相同的网络初始耦合强度。因此，我们考虑三种不同的网络初始条件 $c_i(0) = 10, 30, 100$ ，分别给出网络的编队误差收敛曲线，如图4.21（右）所示。通过与图4.20（右）进行比较，可以看出在基于节点的方法(4.2.42)中，通常需要较高的网络耦合增益来实现快速和平稳的收敛。换言之，基于 DST 的方法通过强化某个选定的 DST 结构，有效减弱了编队误差的振荡，实现了更快速收敛。

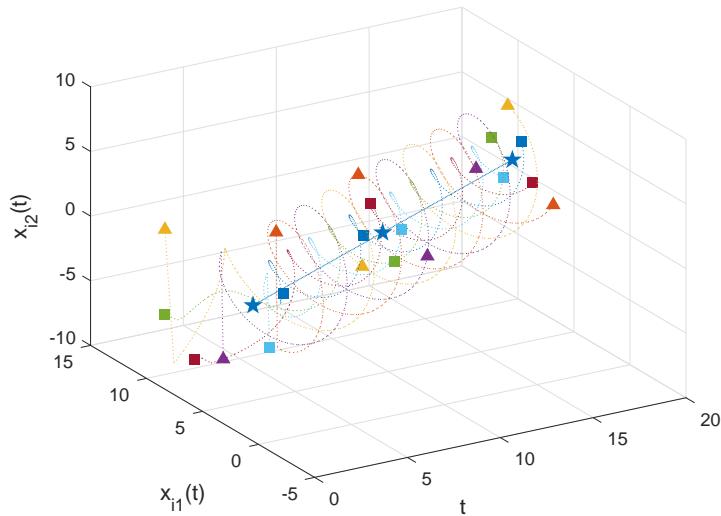


图 4.19: 例4.2.3中所有智能体的轨迹 $x_i(t)$ ，其中三个三角形、四个方形和一个五角形分别用来标记 $t = 0, 10, 20$ 时跟随者 $i \in \{2, 3, 4\}$ 、跟随者 $i \in \{5, 6, 7, 8\}$ 和领导者 $i = 1$ 的相位。

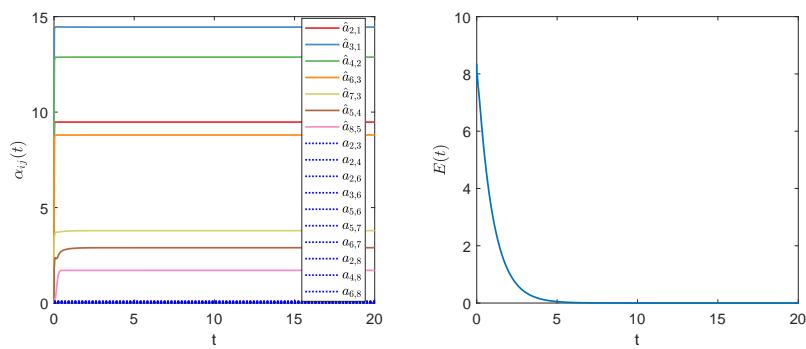


图 4.20: 例4.2.3中耦合权重 $\alpha_{ij}(t)$ 和全局编队跟踪误差 $E(t)$ 在所提自适应控制下的演化曲线。

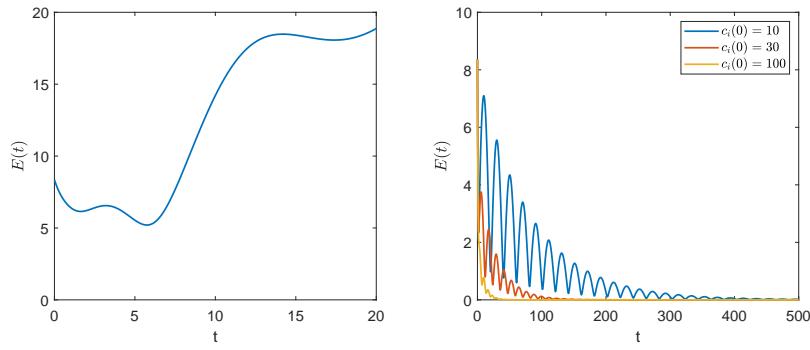


图 4.21: 例4.2.3中全局编队跟踪误差 $E(t)$ 在静态控制下的演化曲线 (左); $E(t)$ 在基于节点的分布式自适应控制(4.2.42)下的演化曲线 (右)。

注 4.2.8 在设计满足可行性条件的编队队形时, 正(余)弦函数 $h(\cdot)$ 是应用最广泛的一类基函数 (如文献[27, 51, 53–56, 110, 153])。通过对正弦函数的调整和叠加, 可以描述许多周期类时变编队, 如圆形[157], 方形[27]等。

4.3 本章小结

本章首先考虑了一类带有匹配未建模动态的多智能体系统的分布式 TVF 控制问题。基于不同的视角, 设计了两类分别为基于点和基于边的自适应耦合调节方法。与此同时, 在两种设计框架下均引入神经网络以在线辨识和补偿系统的非确定性。在 Barbalat 引理指导下, 我们证明了两类控制策略均使得智能体渐近地实现时变编队。更进一步, 基于点的设计方法具有完全分布式特性; 而基于边的方法适用于智能体通讯网络具有切换拓扑时的情形。

其次, 我们进一步考虑了有向通讯拓扑下分布式自适应 TVF/TVFT 控制问题。针对线性多智能体系统, 我们提出了一类基于有向支撑树(DST)的自适应控制框架, 建立了基于 DST 的实现 TVF/TVF 的充分必要条件。其中, 针对带有多个领导者的 TVFT 问题, 我们提出了一类新的基于广义 DST 的设计方法, 为带有多个领导者的分布式控制问题提供了新的思路。

本章4.1节与4.2节内容已分别发表于国际刊物 IEEE Transactions on Network Science and Engineering 与 IEEE Transactions on Control of Network Systems 上。

第五章 分布式自适应控制：优化与资源配置

在本章中，我们将自适应耦合调节的思想引入分布式优化和资源配置问题中。我们首先考虑了强连通图上的分布式优化问题，提出了一类新的基于有向支撑树(DST)的分布式自适应优化框架：对于平衡图，我们将基于 DST 的自适应耦合调节方法引入经典的鞍点动力学中，达到了分布式自适应优化的目的；对于非平衡图，我们引入了一个基于 DST 的有限时间权重调节机制。

进一步，我们考虑了强连通权重平衡图上的资源配置问题。分别基于 DST 和网络节点，设计了两类分布式自适应耦合调节机制，从而实现了网络内部的自适应最优资源配置。

本章中，为了强调权重的影响，我们用 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$ 来表示一个加权有向图，其中矩阵 $\mathcal{W} = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 来表示加权邻接矩阵，且 $w_{ij} \in \mathbb{R}^+$ 当且仅当 $e_{ji} \in \mathcal{E}$ ，即智能体 i 可以收到智能体 j 的信息，否则 $w_{ij} = 0$ 。

5.1 分布式自适应优化和权重调平

分布式优化旨在使用一个多智能体网络来协同求解一个优化问题。分布式优化在近年来受过广泛关注，部分原因是由于其在多个领域中的应用前景，如智能电网、云计算、机器学习等[66, 69, 74–77, 90–92, 100]。标准（无约束）的分布式优化问题通常描述如下：

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} F(z) \triangleq \sum_{i=1}^N f_i(z). \quad (5.1.1)$$

这里 F 是一个全局的，和可分的代价函数， f_i 是智能体 i 的局部代价函数。

为了求解上述问题(5.1.1)，文献中给出了智能体之间通讯拓扑的不同假设：如无向连通图[69, 90–92]，强连通平衡图[74, 100]，或强连通非平衡图[66, 75–77]。其中文

献[74, 100]中所提算法需要依赖于全局 Laplacian 矩阵的特征值信息来选取一个固定参数。文献[66, 76, 77]中的算法同样依赖于全局 Laplacian 矩阵的代数信息（特征值或特征向量），从而最终依赖于整个网络的全局通讯状态信息。从分布式优化的角度，消除此类全局先验知识的影响是至关重要的。文献[75]中提出的一个修正后的鞍点算法不依赖于此类全局信息，但是其需要满足衰减步长条件，可能导致较慢的收敛。更进一步，除了文献[66]之外，所有上述文献均假设局部函数满足凸性；文献[66]允许局部函数非凸，作为让步，要求全局函数为强凸的，并且需要持续增大网络中所有节点对之间的耦合权重，这一点可能会导致较强的振荡和慢速的收敛（参见5.1.4小节中的仿真对比）。

分布式权重调平指将一个原本非平衡的图通过分布式的算法调节为平衡图[158–161]。这一想法为非平衡图上的分布式优化提供了一个有趣的思路，比如，在开始分布式优化算法前在有限时间内将一个非平衡图调节为平衡图。遗憾的是，有限时间的收敛性只有在整数域权重调平时得到了保证[159–161]，而有限时间内更一般的在实数域调平一个有向图仍是一个开放的问题。

5.1.1 问题描述

我们首先回顾一下凸优化的相关概念。对一个可微函数 $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 而言， ∇g 表示其导数。我们说定义在一个凸集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函数 g 是严格凸的，若 $(x - y)^T(\nabla g(x) - \nabla g(y)) > 0, \forall x, y \in \Omega, x \neq y$ ；另外，若存在 $M \in \mathbb{R}^+$ ，使得 $(x - y)^T(\nabla g(x) - \nabla g(y)) > M\|x - y\|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ ，则称 g 是强凸的。

考虑在一个有向图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$ 上进行交互的 N 个智能体，希望通过协作来得到(5.1.1)的最优解，记为 z^* 。每个智能体 $i \in \mathcal{V}$ 与(5.1.1)中的局部代价函数 $f_i(\cdot)$ 相关联。本节考虑如下假设：

假设 5.1.1 全局代价函数 $F(\cdot)$ 是 \mathbb{R}^n 上的可微函数，且是严格凸的。每个局部代价函数 $f_i(\cdot)$ 均是可微的，且其梯度 $\nabla f_i(x) = \Upsilon x + \psi_i(x)$ ，其中 $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $\Upsilon \geq 0$ ， $\|\psi_i(x)\| \leq K$ 且 $K \in \mathbb{R}^+$ （可以是未知的），对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $i \in \mathcal{V}$ 均成立。

假设 5.1.2 有向图 \mathcal{G} 是强连通的。

注 5.1.1 $F(\cdot)$ 的严格凸性是问题(5.1.1)的最优解 z^* 存在且唯一的充分条件，比文献[66]中要求 $F(\cdot)$ 强凸的条件更具一般性。局部梯度 ∇f_i 的形式包含了现有文献中的标准假设，如当 $\Upsilon = 0$ 时的有界假设[69, 75, 162]，或当 $\Upsilon = \sigma \mathbf{I}_n, \sigma \in \mathbb{R}^+$ 时的内部变

量解耦假设。具有一致有界梯度 $\psi_i(\cdot)$ 的函数包括三角函数、用于分类/回归的对数/分数损失函数[92]等等。另外，不同于[69, 74–77, 90, 91, 100]，我们对 $f_i(\cdot)$ 的凸性不作要求。

注 5.1.2 在假设5.1.2的条件下，以任意智能体节点为根总能找出至少一个 DST 。且对一个强连通有向图而言，可以在不依赖任何全局 $Laplacian$ 矩阵信息的前提下以分布式的方法得到一个 DST [163]。强连通性有向图的假设在分布式优化文献中是一个较为标准假设[66, 74, 77, 100]，同时比无向连通图的假设更具一般性[69, 90–92]。

在假设5.1.1和假设5.1.2的条件下，本节的目的在于系统地求解(5.1.1)。我们先从权重平衡图的情形开始研究。

5.1.2 平衡图下基于有向支撑树的分布式自适应优化

文献[74, 式(11)]中提出了一类鞍点动力学来求解权重平衡有向图上的问题(5.1.1)，其中包含一个固定的耦合增益 α ，且其选取规则依赖于全局 $Laplacian$ 矩阵特征值的先验知识。在本小节中，我们提出一类新的自适应类鞍点动力学，在避免此类先验知识的前提下，引入了动态耦合增益来重新求解问题(5.1.1)。

令每个智能体 $i \in \mathcal{V}$ 在本地储存一个对于最优决策变量 z^* 的估计 $x_i \in \mathbb{R}^n$ ，和一个辅助变量 $y_i \in \mathbb{R}^n$ 。每个智能体 i 只能接受到来自其入邻居的信息来调节自身的 x_i, y_i 。令智能体系统通过拓扑图 \mathcal{G} 来通讯 y_i 的信息；同时通过图 $\mathcal{G}^A(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}(t))$ 来通讯 x_i 的信息，其中 $\mathcal{A}(t) = (\alpha_{ij}(t))$ 是带有动态耦合增益的权重矩阵，且 $\mathcal{A}(0) = \mathcal{W}$ 。通过选取任一 DST ，考虑以下算法：

$$\dot{x}_i = -\gamma_1 \nabla f_i(x_i) - \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} \alpha_{ij}(t)(x_i - x_j) - \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} w_{ij}(y_i - y_j) \quad (5.1.2a)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} \alpha_{ij}(t)(x_i - x_j) \quad (5.1.2b)$$

和动态耦合增益

$$\alpha_{ij}(t) = \begin{cases} w_{ij}, & \text{若 } e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}}, \\ \bar{a}_{k+1,i_k}(t), & \text{若 } e_{ji} \in \bar{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (5.1.3a)$$

$$\dot{a}_{k+1,i_k} = \gamma_2 \left((x_{i_k} - x_{k+1}) - \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} (x_{k+1} - x_j) \right)^T (x_{i_k} - x_{k+1}) \quad (5.1.3b)$$

其中 $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ ， $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$ 。根据(5.1.3)，仅当智能体 i 和其入邻居 j 通讯 x_j 且边 e_{ji} 出现在 $\bar{\mathcal{G}}$ （即存在某个 $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 使得 $j = i_k, i = k + 1$ 时，它们之间的耦合增益才是自

适应变化的。通过定义整个网络系统的变量 $x = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$, $y = \text{col}(y_1, \dots, y_N)$, 算法(5.1.2)即

$$\dot{x} = -\gamma_1 \nabla f(x) - (\mathcal{L}^A(t) \otimes \mathbf{I}_n)x - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)y \quad (5.1.4a)$$

$$\dot{y} = (\mathcal{L}^A(t) \otimes \mathbf{I}_n)x \quad (5.1.4b)$$

其中 $f(x) \triangleq \sum_{i=1}^N f_i(x_i) : \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}$ 为网络状态 x 的累计代价函数, 易得其梯度 $\nabla f(x) = \text{col}(\nabla f_1(x_1), \dots, \nabla f_N(x_N))$ 。本节中, 我们在与图 \mathcal{G}^A 相关的矩阵 (如 Laplacian 矩阵 $\mathcal{L}^A(t)$) 中显示地加入时间 t , 来强调其中由于自适应耦合增益的存在而引起的时变性。

引理 5.1.1 在假设 5.1.1-5.1.2 成立的前提下, 进一步考虑 \mathcal{G} 是权重平衡的。若 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是(5.1.4)的一个平衡点, 则 $\tilde{x} = \mathbf{1}_N \otimes z^*$, 即(5.1.1)的全局最小值点。

证明. 我们首先研究系统(5.1.4)的平衡点 (\tilde{x}, \tilde{y}) , 令

$$0 = -\gamma_1 \nabla f(\tilde{x}) - (\mathcal{L}^A(t) \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{x} - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{y} \quad (5.1.5a)$$

$$0 = (\mathcal{L}^A(t) \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{x}. \quad (5.1.5b)$$

根据引理2.1.1中的命题1)., $\mathbf{1}_N$ 是矩阵 \mathcal{L} 和矩阵 $\mathcal{L}^A(t)$, $\forall t$ 的对应于单重零特征值的右特征向量。因此(5.1.5b)保证了存在某 $z \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\tilde{x} = \mathbf{1}_N \otimes z$ 。根据引理2.1.3中的命题1)., 我们有 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L} = 0$ 。在(5.1.5a)两侧左乘 $\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n$ 可得 $\sum_{i=1}^N \nabla f_i(z) = 0$, 即 $\nabla F(z) = 0$ 。根据 $F(\cdot)$ 的严格凸性, 则有 $\tilde{x} = \mathbf{1}_N \otimes z^*$ 。注意到若 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是(5.1.4)的一个平衡点, 则 $(\tilde{x}, \tilde{y} + \mathbf{1}_N \otimes \kappa)$ 也是(5.1.4)的一个平衡点, 其中 $\kappa \in \mathbb{R}^n$ 具有任意性。□

注 5.1.3 问题(5.1.1)等价于如下约束非凸优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{Nn}} f(x), \quad s.t. \quad x_1 = x_2 = \dots = x_N, \quad (5.1.6)$$

其中非凸性的存在是由于在假设 5.1.1 下 $f(x)$ 有可能是非凸的。类鞍点算法(5.1.4)也可以理解为对 x 的梯度下降和对 y 的梯度上升[74]。

根据引理5.1.1, 只需证明系统(5.1.4)的任一轨线收敛到一个平衡点。我们首先将平衡点 (\tilde{x}, \tilde{y}) 平移到原点, 然后进行一个坐标变换:

$$\mu = x - \tilde{x}, \quad \nu = y - \tilde{y} \quad (5.1.7a)$$

$$\bar{\mu} = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\mu, \quad \bar{\nu} = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\nu \quad (5.1.7b)$$

其中 Ξ 的定义见(2.1.1)。写成分量的形式， $\bar{\mu} = \text{col}(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{N-1})$ 其中 $\bar{\mu}_k = \mu_{i_k} - \mu_{k+1}$, $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。在新坐标下，算法(5.1.2)和自适应率(5.1.3b)可以写成

$$\dot{\bar{\mu}} = -\gamma_1(\Xi \otimes \mathbf{I}_n)h - (Q^A(t) \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\mu} - (Q \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\nu} \quad (5.1.8a)$$

$$\dot{\bar{\nu}} = (Q^A(t) \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\mu} \quad (5.1.8b)$$

$$\dot{\bar{a}}_{k+1,i_k} = \gamma_2 \left(\bar{\mu}_k - \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{\mu}_{j-1} \right)^T \bar{\mu}_k \quad (5.1.8c)$$

这里 $h = \nabla f(\mu + \tilde{x}) - \nabla f(\tilde{x})$, Q 和 $Q^A(t), \forall t$ 基于 DST 定义，形式见(2.1.2)。更具体地， $Q^A(t) = \tilde{Q} + \bar{Q}^A(t)$ 包含一个固定矩阵 \tilde{Q} 和时变矩阵

$$\bar{Q}_{kj}^A(t) = \begin{cases} \bar{a}_{j+1,i_j}(t), & \text{若 } j = k, \\ -\bar{a}_{j+1,i_j}(t), & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (5.1.9)$$

注意，为了得到(5.1.8)，我们使用了引理2.1.1中的命题2).和命题4).，以及 Kronecker 积的性质。

引理 5.1.2 对于系统(5.1.8)，在任意的初始条件下， $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 渐近收敛到原点，另外权重 $\bar{a}_{k+1,i_k}, k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 收敛到某些有限常数。

证明. 证明过程的主要想法在于利用矩阵 Q^s 的正定性，将系统(5.1.8)的稳定性寄托于自适应权重 $\bar{a}_{k+1,i_k}, k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。考虑如下 Lyapunov 函数：

$$V = \underbrace{\frac{1}{2}\bar{\mu}^T \bar{\mu} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2\gamma_2}(\bar{a}_{k+1,i_k}(t) - \phi_{k+1,i_k})^2}_{V_\mu} + \underbrace{\frac{3\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^s)} \cdot \frac{1}{2}(\bar{\mu} + \bar{\nu})^T (\bar{\mu} + \bar{\nu})}_{V_\nu} \quad (5.1.10)$$

其中 $Q^s > 0$ ，这是由引理2.1.1中命题3).保证。常数 $\phi_{k+1,i_k} \in \mathbb{R}^+, k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 有待进一步确定。

V_μ 沿系统(5.1.8)轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_\mu = & -\gamma_1 \bar{\mu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h - \bar{\mu}^T (Q^A(t) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mu} - \bar{\mu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{a}_{k+1,i_k} - \phi_{k+1,i_k})(\bar{\mu}_k - \sum_{j+1 \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{\mu}_j)^T \bar{\mu}_k. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

根据(5.1.9)可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{a}_{k+1,i_k} (\bar{\mu}_k - \sum_{j+1 \in \mathcal{N}_{\text{out}}(k+1)} \bar{\mu}_j)^T \bar{\mu}_k &= \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{Q}_{kk}^A(t) \bar{\mu}_k + \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \bar{Q}_{jk}^A(t) \bar{\mu}_j)^T \bar{\mu}_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{Q}_{jk}^A(t) \bar{\mu}_j^T \bar{\mu}_k = \bar{\mu}^T (\bar{Q}^A(t) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mu}. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

定义 $\Phi \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 为

$$\Phi_{kj} = \begin{cases} \phi_{j+1,i_j}, & \text{若 } j = k, \\ -\phi_{j+1,i_j}, & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (5.1.13)$$

则, 根据假设5.1.1和(5.1.11)-(5.1.13)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\mu &= -\gamma_1 \bar{\mu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h - \bar{\mu}^T (Q^A(t) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mu} - \bar{\mu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} + \bar{\mu}^T ((\bar{Q}^A(t) - \Phi) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mu} \\ &\leq -\gamma_1 \lambda_{\min}(\Upsilon) \bar{\mu}^T \bar{\mu} - \gamma_1 \bar{\mu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h' - \bar{\mu}^T ((\tilde{Q} + \Phi) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mu} - \bar{\mu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

其中 $h' = \psi(\mu + \tilde{x}) - \psi(\tilde{x})$, $\psi(x) = \text{col}(\psi_1(x_1), \dots, \psi_N(x_N))$ 。根据 Young 不等式可得

$$-\gamma_1 \bar{\mu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h' \leq \frac{\bar{\mu}^T \bar{\mu}}{2} + \frac{\gamma_1^2 h'^T (\Xi^T \Xi \otimes \mathbf{I}_n) h'}{2} \leq \frac{\bar{\mu}^T \bar{\mu}}{2} + \frac{\gamma_1^2 \lambda_{\max}(\Xi^T \Xi) h'^T h'}{2} \quad (5.1.15)$$

$$-\bar{\mu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} \leq \frac{\bar{\mu}^T \bar{\mu}}{2} + \frac{\bar{\nu}^T (Q^T Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu}}{2} \leq \frac{\bar{\mu}^T \bar{\mu}}{2} + \frac{\lambda_{\max}(Q^T Q) \bar{\nu}^T \bar{\nu}}{2}. \quad (5.1.16)$$

由于所有的 ψ_i 均以 K 为上界, 则有 $\|\psi(x)\| \leq \sqrt{N}K$, $\forall x \in \mathbb{R}^{Nn}$ 。进一步, 有

$$h'^T h' \leq (\|\psi(\mu + \tilde{x})\| + \|\psi(\tilde{x})\|)^2 \leq 4NK^2. \quad (5.1.17)$$

则根据(5.1.14)-(5.1.17)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\mu &\leq -\bar{\mu}^T ((\tilde{Q} + \Phi + \gamma_1 \lambda_{\min}(\Upsilon) \mathbf{I}_{N-1}) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mu} + \bar{\mu}^T \bar{\mu} \\ &\quad + \frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{2} \bar{\nu}^T \bar{\nu} + 2NK^2 \gamma_1^2 \lambda_{\max}(\Xi^T \Xi). \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

V_ν 沿系统(5.1.8)轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_\nu &= -\gamma_1 \bar{\mu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h - \bar{\mu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} - \gamma_1 \bar{\nu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h - \bar{\nu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} \\ &\leq \frac{\bar{\mu}^T \bar{\mu}}{2} + 2NK^2 \gamma_1^2 \lambda_{\max}(\Xi^T \Xi) + \frac{\lambda_{\max}(Q^T Q) \bar{\mu}^T \bar{\mu}}{\lambda_{\min}(Q^s)} + \frac{\lambda_{\min}(Q^s) \bar{\nu}^T \bar{\nu}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_{\min}(Q^s)\bar{\nu}^T\bar{\nu}}{2} + \frac{2NK^2\gamma_1^2\lambda_{\max}(\Xi^T\Xi)}{\lambda_{\min}(Q^s)} - \lambda_{\min}(Q^s)\bar{\nu}^T\bar{\nu} \\
& = \frac{\lambda_{\min}(Q^s) + 2\lambda_{\max}(Q^TQ)}{2\lambda_{\min}(Q^s)}\bar{\mu}^T\bar{\mu} - \frac{\lambda_{\min}(Q^s)}{4}\bar{\nu}^T\bar{\nu} + \frac{2NK^2\gamma_1^2\lambda_{\max}(\Xi^T\Xi)(1 + \lambda_{\min}(Q^s))}{\lambda_{\min}(Q^s)}
\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

其中不等式部分我们运用了 Young 的不等式和 Q^s 的正定性。

根据(5.1.18)和(5.1.19)，我们知道(5.1.10)中 \dot{V} 满足

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq -\bar{\mu}^T((\tilde{Q} + \Phi + \gamma_1\lambda_{\min}(\Upsilon)\mathbf{I}_{N-1}) \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\mu} - \frac{\lambda_{\max}(Q^TQ)}{4}\bar{\nu}^T\bar{\nu} + \eta_1\bar{\mu}^T\bar{\mu} + \eta_2, \\
\eta_1 & = 1 + \frac{3\lambda_{\max}(Q^TQ)\lambda_{\min}(Q^s) + 6\lambda_{\max}(Q^TQ)^2}{2\lambda_{\min}(Q^s)^2}, \quad \eta_2 = 2NK^2\gamma_1^2\lambda_{\max}(\Xi^T\Xi)(1 + \frac{3\lambda_{\max}(Q^TQ)(1 + \lambda_{\min}(Q^s))}{\lambda_{\min}(Q^s)^2}).
\end{aligned}$$

令 $\delta \in \mathbb{R}^+$ 是一个任意小的标量。则，当 $\bar{\mu}^T\bar{\mu} \geq \delta$ 时，总存在一个充分大的 $\eta \in \mathbb{R}^+$ 使得 $\eta\bar{\mu}^T\bar{\mu} \geq \eta_1\bar{\mu}^T\bar{\mu} + \eta_2$ 。此时，有

$$\dot{V} \leq -\bar{\mu}^T((\Phi^s - \eta\mathbf{I}_{N-1} + \tilde{Q}^s + \gamma_1\lambda_{\min}(\Upsilon)\mathbf{I}_{N-1}) \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\mu} - \frac{\lambda_{\max}(Q^TQ)}{4}\bar{\nu}^T\bar{\nu}.$$

接下来则是选取一些合适的 ϕ_{k+1,i_k} 使得 Φ^s 充分正定，从而使得整个系统稳定化。

首先，我们证明 $\Phi^s - \eta\mathbf{I}_{N-1} > 0$ 其中

$$\Phi^s = \begin{pmatrix} \phi_{2,i_1} & \frac{1}{2}\phi_{21} & \cdots & \frac{1}{2}\phi_{N-2,1} & \frac{1}{2}\phi_{N-1,1} \\ \frac{1}{2}\phi_{21} & \phi_{3,i_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}\phi_{N-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}\phi_{N-2,1} & \vdots & \cdots & \phi_{N-1,i_{N-2}} & \frac{1}{2}\phi_{N-1,N-2} \\ \frac{1}{2}\phi_{N-1,1} & \frac{1}{2}\phi_{N-1,2} & \cdots & \frac{1}{2}\phi_{N-1,N-2} & \phi_{N,i_{N-1}} \end{pmatrix}.$$

记 $\Omega_1 = (\phi_{2,i_1} - \eta)$, $\Omega_k = \begin{pmatrix} \Omega_{k-1} & \varphi_k \\ \varphi_k^T & \phi_{k+1,i_k} - \eta \end{pmatrix}$, 其中 $\varphi_k = \frac{1}{2}(\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kk-1})^T$, $k = 2, \dots, N-1$ 。显然，令 $\phi_{2,i_1} > \eta$ 则有 $\Omega_1 > 0$ 。假设 $\Omega_{k-1} > 0$, $k \geq 2$ 。注意到根据(5.1.13)有 $|\phi_{kj}| \leq |\phi_{j+1,i_j}|$, $\forall j \in \mathcal{I}_{k-1}$ 。则有 $\varphi_k^T\Omega_{k-1}^{-1}\varphi_k \leq \frac{\sum_{j=2}^k \phi_{j,i_{j-1}}^2}{4\lambda_{\min}(\Omega_{k-1})}$ 。通过选择 $\phi_{k+1,i_k} > \eta + \frac{\sum_{j=2}^k \phi_{j,i_{j-1}}^2}{4\lambda_{\min}(\Omega_{k-1})}$, 则根据 Schur 引理[155, Chapter 2.1]可得 $\Omega_k > 0$ 。于是，由数学归纳理论， $\Phi^s - \eta\mathbf{I}_{N-1} = \Omega_{N-1}$ 是正定的。

更进一步，由于 \tilde{Q} 和 Υ 均为固定的，我们总可以选择充分大的 ϕ_{k+1,i_k} 使得 $\lambda_{\min}(\Phi^s - \eta\mathbf{I}_{N-1} + \tilde{Q}^s) > -\gamma_1\lambda_{\min}(\Upsilon)$ 。此时，则有 $\dot{V} \leq 0$ 对所有的 $\bar{\mu}^T\bar{\mu} \geq \delta$ 和 $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^{(N-1)n}$ 成立。因此，(5.1.8)的轨线是有界的。注意到由于 \dot{V} 是连续的，根据 LaSalle 不变原理[156]，可以得出 $\bar{\mu}$ 收敛到一个残差集 $\mathcal{S} = \{\bar{\mu} \mid \|\bar{\mu}\|^2 \leq \delta\}$ 中，同时 $\bar{\nu}, \bar{a}_{k+1,i_k}$ 收敛到使得 $\dot{V} = 0$ 的对应值。最后，由于 δ 可取任意小，即保证了 $\bar{\mu}, \bar{\nu}$ 收敛到原点，权重 \bar{a}_{k+1,i_k} , $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 收敛到某些有限的常数值。□

接下来我们给出这一部分的主要结果：

定理 5.1.1 在假设 5.1.1-5.1.2 成立的前提下，进一步考虑 \mathcal{G} 是权重平衡的。对任意的初始值 $x_i(0), y_i(0) \in \mathbb{R}^n$ ，算法 (5.1.2)-(5.1.3) 中 x_i 漫近收敛至 z^* , $\forall i \in \mathcal{V}$ 。此外，权重 $\bar{a}_{k+1,i_k}, k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 收敛到某些有限常数。

证明. 在引理 5.1.2 的基础上，由于 \exists 的零空间由向量 $\mathbf{1}_N$ 张成，可得在原坐标系下，(5.1.4) 中的 (x, y) 收敛到 $(\tilde{x} + \mathbf{1}_N \otimes \tau, \tilde{y} + \mathbf{1}_N \otimes \kappa)$ ，这里 $\tau, \kappa \in \mathbb{R}^n$ 。

接下来我们基于最优值点 z^* 的唯一性，借助反证法的思想来证明 $\tau = 0$ 。假设 $\tau \neq 0$ ，则根据(5.1.4)可得 τ 的稳态动力学为

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\tau} = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n)\dot{x} \\ &= -\frac{\gamma_1}{N}\nabla F(z^* + \tau) - \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N^T \mathcal{L}^A(t)\mathbf{1}_N \otimes (z^* + \tau)) \\ &\quad - \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N^T \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)(\tilde{y} + \mathbf{1}_N \otimes \kappa) \\ &= -\frac{\gamma_1}{N}\nabla F(z^* + \tau) \neq 0, \end{aligned}$$

推出矛盾。因此 $\tau = 0$ 。

以上讨论说明系统(5.1.4)的任一轨线收敛到一个平衡点 $(\tilde{x}, \tilde{y} + \mathbf{1}_N \otimes \kappa)$ ，这里 $\kappa \in \mathbb{R}^n$ 。根据引理 5.1.1，各智能体的估计收敛到(5.1.1)的全局最优值点 z^* 。 \square

注 5.1.4 与经典的自适应控制理论[156]一致，假设 5.1.1 中的上界 K 只用于证明算法的收敛性；因此， K 的值可以是未知的。算法 (5.1.2) 的收敛性是全局的，对任意初始 $x(0), y(0) \in \mathbb{R}^{Nn}$ 和任意参数 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$ 下均能得到保证。其中后者两个参数的调节具有如下含义：增大 γ_1 允许智能体在局部梯度的下降方向上采取更大的步长；增大 γ_2 强化了智能体之间相互通讯对于全局最优值点的估计的重要性。

注 5.1.5 为了更好的阐述所提算法相比于文献[66]（权重平衡图部分）的特点，注意到算法 (5.1.2)-(5.1.3) 可以允许仅沿着一个 DST 的部分耦合增益具有自适应性，而文献[66]需要自适应调节网络中所有的耦合增益。理论分析部分，定理 5.1.1 是基于对局部梯度的一个特定形式上的假设展开的，省去了文献[66]中关于不变集的讨论。DST 角度的益处在下一小节的非平衡图情形中表现的更为明显，这是因为基于 DST 的算法克服了对全局 Laplacian 矩阵的依赖性（参加文献[66]中的注 6）。

5.1.3 非平衡图下基于有向支撑树的分布式权重调平

权重平衡条件在现实中很有可能没有办法满足，因此我们希望通过引入一个有限时间的权重调平算法将5.1.2中的框架推广到非平衡图中。同样，基于任一 DST $\bar{\mathcal{G}}$ ，考虑如下算法：

$$\beta_{ij}(t) = \begin{cases} w_{ij}, & \text{if } e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}}, \\ \bar{b}_{k+1,i_k}(t), & \text{if } e_{ji} \in \bar{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (5.1.20a)$$

$$\dot{\bar{b}}_{k+1,i_k} = -\gamma_3 \text{sig}^q \left(\sum_{p \in \mathcal{N}_{\text{in}}(k+1)} \beta_{k+1,p} - \sum_{c \in \mathcal{N}_{\text{out}}(k+1)} \beta_{c,k+1} \right) \quad (5.1.20b)$$

这里 $k \in \mathcal{I}_{N-1}$, $q \in (0, 1)$, $\gamma_3 \in \mathbb{R}^+$ 。另外, $\beta_{ij}(0) = w_{ij}$, $\forall i, j \in \mathcal{V}$ 。记 $\bar{b} = (\bar{b}_{2,i_1}, \bar{b}_{3,i_2}, \dots, \bar{b}_{N,i_{N-1}})^T$ 。

权重更新率(5.1.20b)的设计部分地受到有限时间镇定理论的启发[164]。其背后的想法在于通过调整权重 \bar{b}_{k+1,i_k} 来使节点 $k+1$ 达到平衡。两个问题必须得到解决：

- 1). 节点 $2, \dots, N$ 是否会达到平衡？
- 2). 如果问题1).的答案是肯定的，根节点是否会随之达到平衡？

首先，基于下述引理，问题2).的答案是肯定的。

引理 5.1.3 有向图 \mathcal{G} 是权重平衡的当且仅当 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L}_{2:N} = 0$ ，其中 $\mathcal{L}_{2:N}$ 是 \mathcal{L} 中包含删除首列后得到的子矩阵。

证明. 由于 $\mathcal{L}\mathbf{1}_N = 0$ ，则 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L} = 0$ 当且仅当 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L}_{2:N} = 0$ 。根据引理2.1.3中命题1).，原引理得证。 \square

为了回答上述问题1).，我们需要一些初步的分析。

引理 5.1.4 假设 $\bar{\mathcal{G}}$ 是 \mathcal{G} 的一个 DST。考虑将 $\bar{\mathcal{G}}$ 上的所有权重作为自变量 \bar{b}_{k+1,i_k} , $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ ，并定义相应的 Laplacian 矩阵为 \mathcal{L}^B ，权重邻接矩阵为 \mathcal{W}^B 。则隐式线性方程组 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L}_{2:N}^B = 0$ 有且仅有唯一解，记为 $\bar{b}^* := (\bar{b}_{2,i_1}^*, \bar{b}_{3,i_2}^*, \dots, \bar{b}_{N,i_{N-1}}^*)^T \in \mathbb{R}^{N-1}$ 。

证明. 注意到矩阵 \mathcal{W}^B 的第 k 行, $k \in \{2, \dots, N\}$, 包含唯一的变量 $\bar{b}_{k,i_{k-1}}$ 。则对于以 \bar{b}_{k+1,i_k} , $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 为自变量的隐式线性方程组 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L}_{2:N}^B = 0$ 而言，其系数矩阵为 $N-1$ 阶满秩方阵，意味着其解存在且唯一。 \square

结合引理5.1.3和引理5.1.4，若我们用 \bar{b}^* 中的元素替换掉 $\bar{\mathcal{G}}$ 的相应元素，同时保持 \mathcal{G} 的其他权重不变，我们即可得到一个“平衡图”。更准确的说，此时得到的图，称为 $\mathcal{G}_{\text{pseudo}}^*$ ，实际上是一个伪平衡图，这是由于 \bar{b}^* 中可能出现非正分量。然而，通过对

$\mathcal{G}_{\text{pseudo}}^*$ 中的边进行一些必要的调整，我们即可得到一个最终的平衡图。为了解释整个过程，我们来看一个简单的例子，如图5.1。

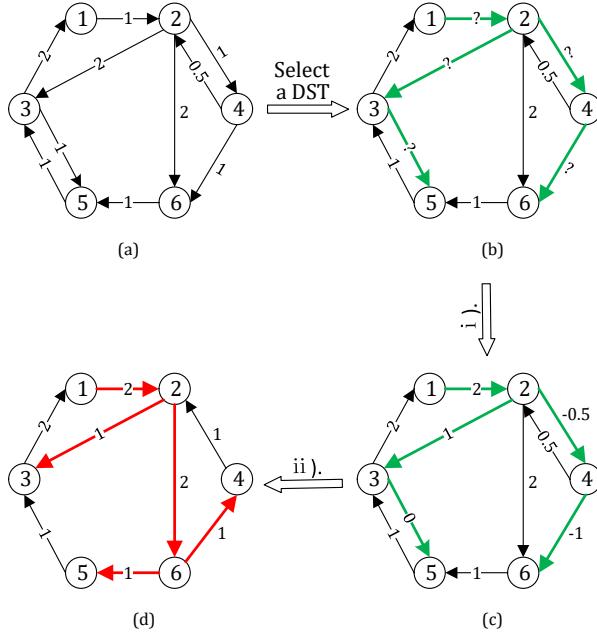


图 5.1: (a): 一个非平衡图 \mathcal{G} ; (b): 图 \mathcal{G} 的一个 DST $\bar{\mathcal{G}}$, 其中 “?” 表示可调整的权重; (c): 伪平衡图 $\mathcal{G}_{\text{pseudo}}^*$; (d): 平衡图 \mathcal{G}^* , 其中红色标记的为一个新的 DST $\bar{\mathcal{G}}^*$ 。

我们提出的权重平衡过程包含以下两步:

- i). 运行(5.1.20)来确定 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的权重, 从而得到伪平衡图 $\mathcal{G}_{\text{pseudo}}^*$;
- ii). 若 $\bar{b}_{k+1,i_k}^* = 0$ 且 $w_{i_k,k+1} \neq 0$, 移除边 $e_{i_k,k+1}$; 若 $\bar{b}_{k+1,i_k}^* = 0$ 且 $w_{i_k,k+1} = 0$, 引入两条带有相同权重 (如单位权重) 的边 $e_{i_k,k+1}$ 和 e_{k+1,i_k} ; 若 $\bar{b}_{k+1,i_k}^* < 0$, 引入一个带有权重 $|\bar{b}_{k+1,i_k}^*|$ 的反向边 e_{k+1,i_k} (若 e_{k+1,i_k} 已存在, 则以增量 $|\bar{b}_{k+1,i_k}^*|$ 增加其权重)。最终, 可得平衡图 \mathcal{G}^* 。

注 5.1.6 已知一个弱连通的平衡图也是强连通的 (见引理2.1.3中命题2)。经过权重平衡的两个步骤i)-ii), 我们得到的平衡图 \mathcal{G}^* 是弱连通且平衡的, 因此, 其强连通性得以保留。

接下来, 我们给出(5.1.20)的收敛性结果, 同时也是前述问题1).的答案。

定理 5.1.2 在假设5.1.2的前提下, 权重调平算法(5.1.20)中 \bar{b} 在有限时间内收敛到 \bar{b}^* (定义见引理5.1.4)。

证明. 根据引理5.1.4, \bar{b}^* 的唯一性保证了其分量 \bar{b}_{k+1,i_k}^* 具有以下递归形式:

$$\bar{b}_{k+1,i_k}^* = \begin{cases} \sum_{c \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{b}_{c,k+1}^* + \sum_{c \in \mathcal{N}_{\text{out}}(k+1) \setminus \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} w_{c,k+1} - \sum_{p \in \mathcal{N}_{\text{in}}(k+1), p \neq i_k} w_{k+1,p}, & \text{若 } k+1 \text{ 为蒂节点,} \\ \sum_{c \in \mathcal{N}_{\text{out}}(k+1)} w_{c,k+1} - \sum_{p \in \mathcal{N}_{\text{in}}(k+1), p \neq i_k} w_{k+1,p}, & \text{若 } k+1 \text{ 为叶节点.} \end{cases} \quad (5.1.21)$$

下面我们自下至上来证明 DST 上权重的收敛行为。我们用 d 来表示 $\bar{\mathcal{G}}$ 的深度，即 $\bar{\mathcal{G}}$ 中最长路径包含的边数。

首先，记 $E_1 = \{k \in \mathcal{I}_{N-1} | k+1 \text{ 是一个叶节点}\}$ 。对每个 $k \in E_1$ ，考虑如下标量 Lyapunov 函数

$$V_1 = (\bar{b}_{k+1,i_k} - \bar{b}_{k+1,i_k}^*)^2. \quad (5.1.22)$$

根据(5.1.20)-(5.1.22)，可得 V_1 的导数如下

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -2\gamma_3(\bar{b}_{k+1,i_k} - \bar{b}_{k+1,i_k}^*) \text{sig}^q \left(\bar{b}_{k+1,i_k} - \sum_{c \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} w_{c,k+1} + \sum_{p \in \mathcal{N}_{\text{in}}(k+1), p \neq i_k} w_{k+1,p} \right) \\ &= -2\gamma_3 V_1^{\frac{1+q}{2}}. \end{aligned}$$

根据[164, 定理4.2]，可得 $V_1 \equiv 0$ ，即 $\bar{b}_{k+1,i_k} \equiv \bar{b}_{k+1,i_k}^*$, $\forall t \geq T_1(k)$ ，这里 $T_1(k) : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为

$$T_1(k) = \frac{|\bar{b}_{k+1,i_k}(0) - \bar{b}_{k+1,i_k}^*|^{1-q}}{\gamma_3(1-q)}.$$

令 $T_1^* = \max\{T_1(k), k \in E_1\}$ 。注意若 $d = 1$ ，即根节点 1 为中央节点时，有 $E_1 = \mathcal{I}_{N-1}$ ，此时算法(5.1.20)的收敛时间为 $T_h^* = \max\{\frac{|\bar{b}_{k+1,i_k}(0) - \bar{b}_{k+1,i_k}^*|^{1-q}}{\gamma_3(1-q)}, k \in \mathcal{I}_{N-1}\}$ 。

下面我们考虑当 $d > 1$ 的情形。我们首先定义一系列集合 $E_s = \{k \in \mathcal{I}_{N-1} \setminus \bigcup_{l=1}^{s-1} E_l | \forall c \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1), c-1 \in \bigcup_{l=1}^{s-1} E_l\}$, $s = 2, \dots, d$ 。则有 $i_k = 1, \forall k \in E_d$ 。对任意的 $s \in \{2, \dots, d\}$ 中的每个 $k \in E_s$ ，考虑相同的 Lyapunov 函数 $V_s = V_1$ 。根据(5.1.20)-(5.1.22)， V_s 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -2\gamma_3(\bar{b}_{k+1,i_k} - \bar{b}_{k+1,i_k}^*) \text{sig}^q \left(\bar{b}_{k+1,i_k} + \sum_{p \in \mathcal{N}_{\text{in}}(k+1), p \neq i_k} w_{k+1,p} - \sum_{c \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{b}_{c,k+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{c \in \mathcal{N}_{\text{out}}(k+1) \setminus \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} w_{c,k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\gamma_3(\bar{b}_{k+1,i_k} - \bar{b}_{k+1,i_k}^*) \text{sig}^q \left(\bar{b}_{k+1,i_k} - \bar{b}_{k+1,i_k}^* - \sum_{c \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} (\bar{b}_{c,k+1} - \bar{b}_{c,k+1}^*) \right) \\
&= -2\gamma_3(\bar{b}_{k+1,i_k} - \bar{b}_{k+1,i_k}^*) \text{sig}^q \left(\bar{b}_{k+1,i_k} - \bar{b}_{k+1,i_k}^* - \sum_{k' \triangleq c-1, c \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} (\bar{b}_{k'+1,i_{k'}} - \bar{b}_{k'+1,i_{k'}}^*) \right).
\end{aligned}$$

结合 E_s 的定义, 我们有

$$\dot{V}_s = -2\gamma_3 V_s^{\frac{1+q}{2}}, \quad \forall t \geq T_{s-1}^*$$

其中 $T_s^* = \max\{T_s(k), k \in E_s\}$, $T_s(k) : E_s \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为

$$T_s(k) = T_{s-1}^* + \frac{|\bar{b}_{k+1,i_k}(T_{s-1}^*) - \bar{b}_{k+1,i_k}^*|^{1-q}}{\gamma_3(1-q)}.$$

因此, $V_s \equiv 0$, 即 $\bar{b}_{k+1,i_k} \equiv \bar{b}_{k+1,i_k}^*$, $\forall t \geq T_s(k)$ 。

至此, 我们已经知道当 $t \geq T_d^*$ 时, $\bar{b}_{k+1,i_k} \equiv \bar{b}_{k+1,i_k}^*$ 对所有 $k \in \bigcup_{s=1}^d E_s$ 成立。显然所有的 E_s 非空, 互不相交, 且 $\bigcup_{s=1}^d E_s = \mathcal{I}_{N-1}$ 。即对任意的 $k \in \mathcal{I}_{N-1}$, 存在唯一的 $s \in \{1, \dots, d\}$ 使得 $k \in E_s$ 。因此, 可以得出结论 $\bar{b} \equiv \bar{b}^*$, $\forall t \geq T_d^*$ 。 \square

注 5.1.7 为了在一个非平衡图上求解(5.1.1), 文献[66]假设与全局 Laplacian 矩阵相关的某个特定的左特征向量为已知信息。我们提出的基于权重平衡的方法有效地移除了对此类信息的依赖性。

注 5.1.8 在前沿的权重调平算法中[158–161], 所有的变权都是可调整的。此时, 实数域权重调平算法的收敛通常不能在有限时间内收敛。与这些工作不同, 我们固定了一个有向图中除去一个 DST 外的权重, 再辅以必要的修正, 在有限时间内得到了一个实数域权重的平衡图。

要注意若在(5.1.20b)取 $q = 1$, 有限时间收敛性将得不到保证。此时, (5.1.20b)退化为

$$\dot{b}_{k+1,i_k} = -\gamma_3 \left(\sum_{p \in \mathcal{N}_{\text{in}}(k+1)} \beta_{k+1,p} - \sum_{c \in \mathcal{N}_{\text{out}}(k+1)} \beta_{c,k+1} \right). \quad (5.1.23)$$

定理 5.1.3 在假设5.1.2的前提下, 权重调平算法(5.1.20a)+(5.1.23)使得 \bar{b} 漸近收敛到 \bar{b}^* 。特殊地, 当 \bar{G} 时, 可实现以 γ_3 为衰减率的指数收敛, 即 $\|\bar{b}(t) - \bar{b}^*\| = \|\bar{b}(0) - \bar{b}^*\| e^{-\gamma_3 t}$ 。

证明. 证明思路与5.1.2类似，同时借助 LaSalle 不变原理[156, 定理2.2]。为了避免冗余，具体过程不再赘述。 \square

5.1.4 数值仿真

考虑一个包含 6 个智能体的网络，智能体的局部代价函数定义于 $z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ，分别为

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z_1^2 + z_1 z_2 + 3z_2^2 + 5 \sin(z_1), \\ f_2(z) &= (z_1 + 1)^2 + z_1 z_2 + 3(z_2 - 1)^2 + 10 \cos(z_2 + 1), \\ f_3(z) &= (z_1 - 2)^2 + z_1 z_2 + 3(z_2 + 2)^2 + 20 \arctan(2z_1 z_2), \\ f_4(z) &= (z_1 + 3)^2 + z_1 z_2 + 3(z_2 - 3)^2 - 5 \sin(z_1), \\ f_5(z) &= (z_1 - 4)^2 + z_1 z_2 + 3(z_2 + 4)^2 - 10 \cos(z_2 + 1), \\ f_6(z) &= (z_1 + 5)^2 + z_1 z_2 + 3(z_2 - 5)^2 - 20 \arctan(2z_1 z_2). \end{aligned}$$

首先考虑通讯拓扑为图5.1(d)中的 \mathcal{G}^* 的情形。容易验证假设5.1.1成立。尽管所有的局部代价函数均为非凸的，但是全局代价函数 F 是严格凸的。

为了验证定理5.1.1，我们选择 \mathcal{G}^* 中红色标记的 DST $\bar{\mathcal{G}}^*$ 。令算法(5.1.2)-(5.1.3)中 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ ，初始值 $x_i(0), y_i(0)$ 取自标准差为 5 的正态分布。全局函数 $\nabla F(\cdot)$ 的梯度在每个智能体 $x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t))^T, i \in \mathcal{V}$ 的状态下的取值如图5.2（纵轴为对数坐标），表明智能体实现了对全局优化问题的求解 ($\nabla F(x_i) \rightarrow 0$)。图5.2同时表明 $\bar{\mathcal{G}}^*$ 上的所有权重收敛到某有限常数。作为对比，我们考虑一个基于[66, 式(3)]修正¹的算法：

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\gamma_1 \nabla f_i(x_i) - \alpha_i(t) \xi_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} w_{ij} (y_i - y_j) \\ \dot{y}_i &= \alpha_i(t) \xi_i, \quad \dot{\alpha}_i = \gamma_2 \|\xi_i\|^2 \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

其中 $\xi_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} w_{ij} (x_i - x_j)$ 。取 $\alpha_i(0) = 1$ ，在相同的初始状态和参数 ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$) 条件下，实验结果如图5.3。通过与图5.2对比，可以发现只调整特定的沿着 DST 的边权可以起到降低抖动和加速收敛的作用。

为了体现引入自适应策略的必要性，同时为注5.1.5提供支撑，我们给出了算

¹在[66, 式(3)]中， ξ_i 项的增益为自适应变量 α_i 和 $\beta_i = \|\xi_i\|^2$ 的加和，其中 β_i 的作用是避免 α_i 在算法初段超调至较大值。这里， β_i 可被移除而不影响实验结果。同时，我们将参数 γ_2 移至 $\dot{\alpha}_i$ 内部。

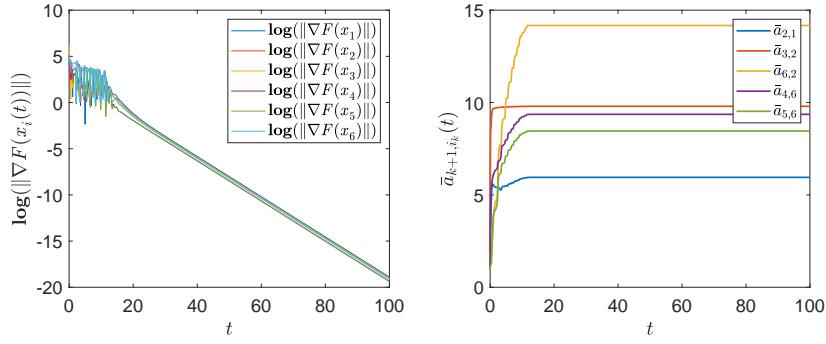


图 5.2: 全局梯度 $\nabla F(\cdot)$ 在 $x_i(t)$ 处的值 (对数坐标), $i \in \mathcal{V}$ (左); $\bar{\mathcal{G}}^*$ 中的自适应耦合增益 $\bar{a}_{k+1,i_k}(t)$, $k \in \mathcal{I}_5$ (右)。这里, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ 。

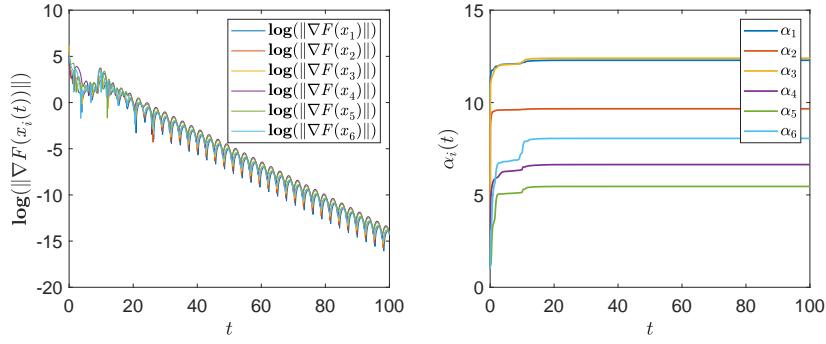


图 5.3: 算法(5.1.24)下的全局梯度与自适应变量。

法(5.1.2)-(5.1.3)在四种不同参数对 γ_1, γ_2 下的收敛性表现, 其中 $\gamma_2 = 0$ 时的非自适应策略 (左上) 未能实现对全局优化问题的寻优。

如果智能体之间的初始拓扑为非平衡的图5.1(a), 我们可以首先执行权重调平算法(5.1.20)来得到图 \mathcal{G}^* 。我们选择图5.1(b)中绿色标记的 DST, $\gamma_3 = q = 0.1$ 。如图5.5所示, 图 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的自适应变量 $\bar{b}_{k+1,i_k}(t)$ 在有限时间内收敛到对应的 \bar{b}_{k+1,i_k}^* , $\forall k \in \mathcal{I}_5$ (见图5.1(c)), 从而验证了定理5.1.2。

最后, 为了验证定理5.1.3, 我们采用(5.1.20a)+(5.1.23)来调平图5.1(a)。选择 $\gamma_3 = 0.1$, 则图 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的自适应变量 $\bar{b}_{k+1,i_k}(t)$ 演近收敛到对应的 \bar{b}_{k+1,i_k}^* , $\forall k \in \mathcal{I}_5$, 如图5.6所示。

可见, 实验结果有效地验证了本节所取得的理论成果。

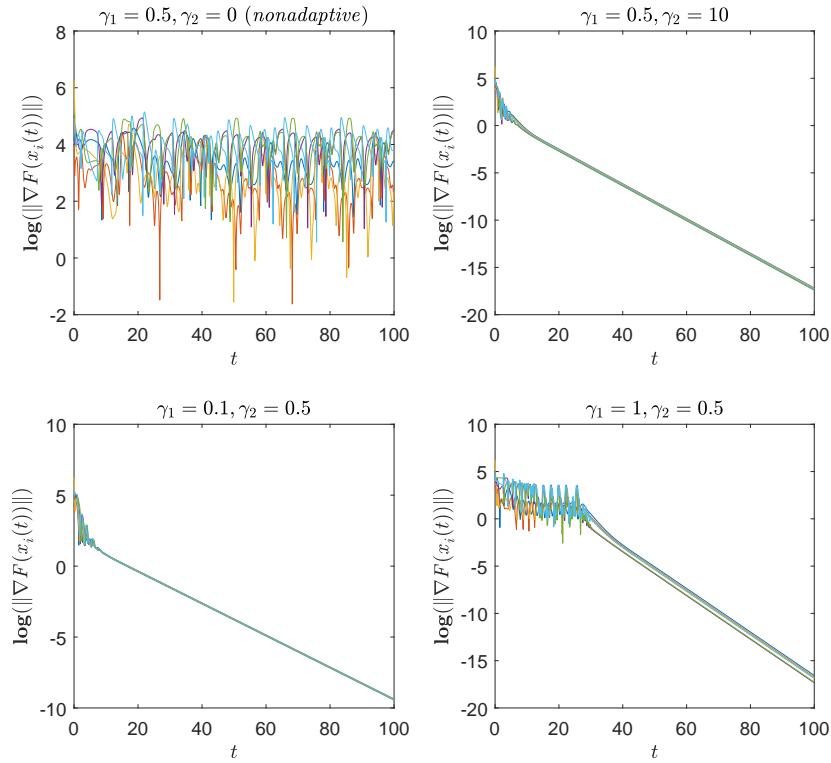


图 5.4: 全局梯度 $\nabla F(\cdot)$ 在 $x_i(t)$ 处的值 (对数坐标), $i \in \mathcal{V}$, 在四组不同参数对 γ_1, γ_2 下的演化曲线, 作为与图 5.2 (左) 的对比。

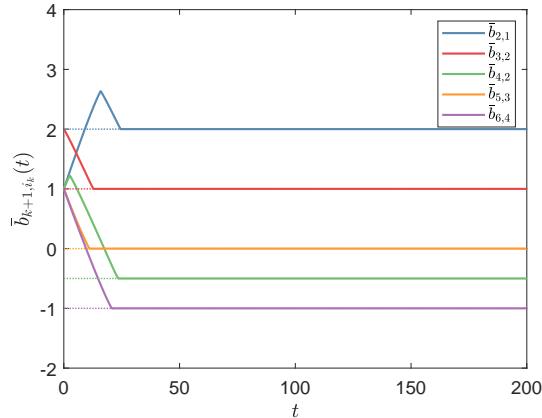


图 5.5: $\bar{\mathcal{G}}$ 中的时变权重 $\bar{b}_{k+1,i_k}(t)$, $k \in \mathcal{I}_5$ 。虚线为伪平衡图 $\bar{\mathcal{G}}_{\text{pseudo}}^*$ 中对应的权重 \bar{b}_{k+1,i_k}^* 。这里, $\gamma_3 = q = 0.1$ 。

5.2 基于一类非确定鞍点动力学的分布式自适应资源配置

我们在上一节中考虑了经典的分布式优化问题, 并引入了基于 DST 的自适应权重调节方法。本节将考虑一类带有全局约束的优化问题, 即资源配置问题。同样

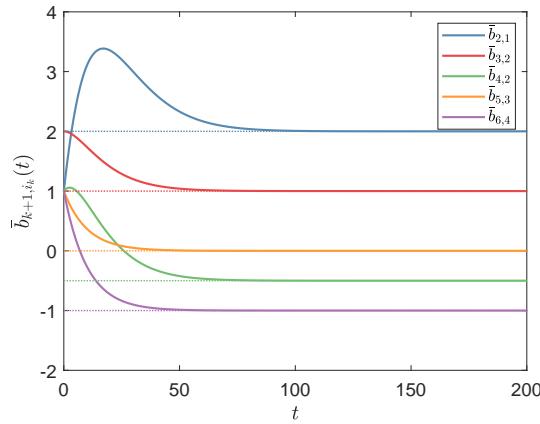


图 5.6: 调平算法(5.1.20a)+(5.1.23)下时变权重 $\bar{b}_{k+1,i_k}(t)$ 的渐近收敛。这里, $\gamma_3 = 0.1$ 。

地, 针对资源配置问题, 现有文献给出了智能体之间通讯拓扑的不同假设: 如无向连通[85, 88, 93–99]、无向无环(树图)[165]、强连通权重平衡图[67, 83, 86, 87, 89]或非平衡图[89, 166, 167]。这些工作中, 大多数算法要求智能体在局部寻优时具有单位步长[83, 93–95], 或充分小步长[97, 166, 167]。同时, 大部分算法通常选取固定的、同质的耦合增益, 且该增益选取方法依赖于全局 Laplacian 矩阵特征值信息[67, 85–89]。同时, 注意文献[83, 96, 98]所提算法仅能保证智能体协同估计到某个次优解。

我们已经充分地看到, 通过在原本固定的耦合增益处设计具有自调节的功能的耦合增益, 可以达到完全分布式的效果, 如一致([104, 107, 117, 168]与本文第三章)、编队([109]与本文第四章)、分布式优化([66]与本章5.1节)。然而, 即使对于最简单的无向图, 自适应资源配置的算法在现有文献中也没有出现(据作者所知), 其难点在于: 为了寻找最优资源配置解, 智能体需要基于一类嵌套的原始对偶动力学来寻求 Lagrangian 乘子的一致性[93]。此时, 在不依赖于 Laplacian 矩阵的任意特征信息的前提下, 同时实现资源配置的最优性和 Lagrangian 乘子的一致性十分困难。一个可行的方案是采取文献[66]与本章5.1节中的方案直接求解关于 Lagrangian 乘子的分布式一致性优化问题。这样的想法已经出现在文献[98, 167]中, 但其可能会造成所谓的“双时间尺度”问题。

基于上述讨论, 本节提出了两类用于求解有向图上资源配置问题的连续时间分布式自适应算法, 分别为基于 DST 的方法及基于点的方法。两类算法的核心思想均是通过引入异质的自适应耦合调节机制来促进各智能体 Lagrangian 乘子间的一致性。所提算法既不需要充分小或单位步长, 又不依赖于全局 Laplacian 矩阵特征值的信

息。我们发现两种算法可以由统一的一类非确定性鞍点动力学描述，且其稳定性可在 Lyapunov 框架下借助 Peter-Paul 不等式进行严格的证明。

5.2.1 问题描述与初步分析

考虑在一个有向图 \mathcal{G} 上交互通讯的 N 个智能体。每个智能体有一定数量的本地原始资源 $d_i \in \mathbb{R}^n$ 和一个相关联的本地代价函数 $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 。在分布式资源配置问题中，智能体团队希望协同寻找一个全局的资源分配方案，使累计代价函数 $f(\cdot) : \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}$ 达到最小，同时满足资源总量守恒的条件：

$$\min_{x \triangleq \text{col}(x_1, \dots, x_N)} f(x) \triangleq \sum_{i=1}^N f_i(x_i), \quad \text{s.t. } \sum_{i=1}^N x_i = d, \quad (5.2.1)$$

其中 $d = \sum_{i=1}^N d_i$ 。

我们引入一个分布式资源配置问题中的标准假设[67, 93, 95, 98]：

假设 5.2.1 每个本地代价函数 $f_i(\cdot)$ 是连续可微，且严格凸的。

引理 5.2.1 在假设 5.2.1 的前提下，问题(5.2.1)有且仅有一个最优值点，记为 x^* 。同时，存在唯一的 $y^* \in \mathbb{R}^n$ ，即 Lagrangian 乘子，使得

$$\nabla f(x^*) + \mathbf{1}_N \otimes y^* = 0; \quad (\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n)(x^* - D) = 0. \quad (5.2.2)$$

其中 $\nabla f(x) = \text{col}(\nabla f_1(x_1), \dots, \nabla f_N(x_N))$ (根据 $f(\cdot)$ 的定义可得)，且 $D = \text{col}(d_1, \dots, d_N)$ 。式(5.2.2)通常被称为 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件。

为了求解问题(5.2.1)，可以使用如下鞍点动力学：

$$\dot{x} = -\nabla f(x) - \mathbf{1}_N \otimes y; \quad \dot{y} = (\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n)(x - D). \quad (5.2.3)$$

然而，可以注意到此时 y 的更新并不是分布式的。为了使上述鞍点算法以分布式的方式进行，研究人员提出了一些修正的算法，如通过引入一个关于 y 的积分反馈项[67, 93]。本节针对通讯拓扑作以下假设：

假设 5.2.2 智能体网络的通讯拓扑图 \mathcal{G} 是强连通且权重平衡的。

注 5.2.1 在分布式资源配置问题中，假设 5.2.2 是标准的[67, 74, 83, 86, 87, 89]，比无向图的假设更加一般[85, 88, 93–99, 165]。在强连通图 \mathcal{G} 中，可以不依赖于全局 Laplacian 矩阵的信息来得到一个 DST[163]。

我们首先给出本节用到的特殊记号和一些引理。

定义 \mathcal{M}_r^N 为所有具有零行和的 $N \times N$ 集合。对于一个自治动力系统 $\mathcal{O} : \dot{x} = f(x)$, 记 $\mathcal{O}|_{x_0} = f(x_0)$ 。

引理 5.2.2 (Peter-Paul 不等式, [156]) 对任意的 $a, b \in \mathbb{R}^n$ 和 $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, 以下不等式成立

$$a^T b \leq \frac{a^T a}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^T b}{2}. \quad (5.2.4)$$

Peter-Paul 不等式是指数为 2 的带有偏置量 ϵ 的 Young 不等式, 其命名含义是指对不等式右端某一项取值更严格的代价是对另一项取值更加松弛, 即“打劫 Peter 从而支付给 Paul”。

下述引理可以从文献[168]中的引理2.3推断得到。

引理 5.2.3 假设 $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 。令 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为一个正交矩阵, $x = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$ 为一个集总向量, 其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{I}_N$ 。则有

$$x^T (U \otimes \mathbf{I}_n) x = \sum_{k=1}^n y_k^T U y_k$$

其中 $y_k = ([Sx_1]_k, [Sx_2]_k, \dots, [Sx_N]_k)^T$, $k \in \mathcal{I}_n$ 。这里 $[Sx_i]_k$ 表示向量 Sx_i 的第 k 个元素。

考虑以下非确定动力系统

$$\mathcal{O} : \dot{x} = -\kappa_1(\nabla f(x) + y) \quad (5.2.5a)$$

$$\dot{y} = x - D - (\Upsilon \otimes \mathbf{I}_n)y - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)z \quad (5.2.5b)$$

$$\dot{z} = (\Upsilon \otimes \mathbf{I}_n)y \quad (5.2.5c)$$

其中 $\kappa_1 \in \mathbb{R}^+$, 且 $y = \text{col}(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$, $z = \text{col}(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$ 分别包含智能体 i 的局部辅助变量 y_i 和 z_i 。 (5.2.5b) 中矩阵 \mathcal{L} 是图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵。我们称系统(5.2.5)是非确定的是由于我们假设矩阵 $\Upsilon \in \mathcal{M}_r^N$ 是未知的。更具体地, 矩阵 Υ 表示智能体的 Lagrangian 乘子间的耦合规则。后续我们将通过设计适当地自适应调节方法来得到特定的 Υ , 同时保证系统5.2.5的稳定性。

针对非确定系统(5.2.5), 我们首先定义其广义平衡点如下:

定义 5.2.1 我们称三元组 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn}$ 是系统(5.2.5)的一个广义平衡点，若对任意的 $\Upsilon \in \mathcal{M}_r^N$ ，总有 $\mathcal{O}|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = 0$ 。

引理 5.2.4 在假设5.2.1和假设5.2.2的条件下，系统(5.2.5)有无穷多个广义平衡点。另外，若 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 是(5.2.5)的一个广义平衡点，则 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x^*, \mathbf{1}_N \otimes y^*)$ ，其中 \tilde{x} 是问题(5.2.1)的最优值点，即 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是唯一的。

证明. 由于 $(\Upsilon \otimes \mathbf{I}_n)y = 0$ 对任意 $\Upsilon \in \mathcal{M}_r^N$ 成立，则有 $\tilde{y} = \mathbf{1}_N \otimes y_0$ ， $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 。将 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 代入(5.2.5b)中并在等式两侧同时左乘 $(\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n)$ ，可得 $0 = (\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n)(\tilde{x} - D) - (\mathbf{1}_N^T \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{z}$ 。在假设5.2.2的条件下，有 $\mathbf{1}_N^T \mathcal{L} = 0$ ，因此 $(\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n)(\tilde{x} - D) = 0$ ，其与 $\nabla f(\tilde{x}) + \mathbf{1}_N \otimes y_0 = 0$ 恰好共同构成了 KKT 条件(5.2.2)。根据引理5.2.1，我们知道 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x^*, \mathbf{1}_N \otimes y^*)$ 存在且是唯一的。进一步，由于 $\text{rank}(\mathcal{L}) = N - 1$ ，存在无穷多的解 \tilde{z} 使得 $(\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_m)\tilde{z} = x - D$ ：实际上，若 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 是(5.2.5)的一个广义平衡点，则 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + \mathbf{1}_N \otimes \Delta z)$ 对任取的 $\Delta z \in \mathbb{R}^n$ 也是一个广义平衡的。□

在接下来的两个小节中，我们分别基于 DST 和基于点来设计两类 Υ 的连续实现方法，以保证系统(5.2.5)广义平衡点的稳定吸引行为。

5.2.2 基于有向支撑树的设计方法

我们选择图 \mathcal{G} 的任一 DST，考虑如下分布式自适应资源配置算法：

$$\mathcal{O}^a : \dot{x} = -\kappa_1(\nabla f(x) + y) \quad (5.2.6a)$$

$$\dot{y} = x - D - (\mathcal{L}^a \otimes \mathbf{I}_n)y - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)z \quad (5.2.6b)$$

$$\dot{z} = (\mathcal{L}^a \otimes \mathbf{I}_n)y \quad (5.2.6c)$$

$$\dot{a}_{ij} = \begin{cases} \kappa_2 \left((y_{i_k} - y_{k+1}) - \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} (y_{k+1} - y_j) \right)^T (y_{i_k} - y_{k+1}) \triangleq \dot{a}_{k+1,i_k}, & \text{若 } e_{ji} \in \bar{\mathcal{E}} \\ 0, & \text{若 } e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (5.2.6d)$$

其中 $i \in \mathcal{V}$, $j \neq i$ ($k \in \mathcal{I}_{N-1}$), $\kappa_2 \in \mathbb{R}^+$, \mathcal{L}^a 是依赖于增益的 Laplacian 矩阵：

$$\mathcal{L}_{ij}^a = -a_{ij}w_{ij}, i \neq j; \quad \mathcal{L}_{ii}^a = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}w_{ij}, i = 1, \dots, N. \quad (5.2.7)$$

可以看出，原始权重 w_{ij} 与自适应变量 a_{ij} 的乘积决定了智能体 i 在更新 y_i 时相对误差信号 $(y_i - y_j)$ 的反馈增益。注意，我们在(5.2.6)-(5.2.7)中并未定义 a_{ii} ，这是由于智能体 i 在更新 y_i 或 z_i 时并不需要 y_i 的绝对信息。

定理 5.2.1 在假设5.2.1-5.2.2的前提下，若存在一个标量 $m \in \mathbb{R}^+$ 使得下述条件（基于支撑树的 m 强凸性）对任意 $x, y \in \mathbb{R}^{Nn}$ 均成立：

$$(x - y)^T (\bar{\mathcal{L}}^U \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \geq m(x - y)^T (\bar{\mathcal{L}}^U \otimes \mathbf{I}_n) (x - y) \quad (5.2.8)$$

其中 $\bar{\mathcal{L}}^U = \Xi^T \Xi$ 是 $\bar{\mathcal{G}}$ 对应的无向支撑树 $\bar{\mathcal{G}}^U$ 的无权 Laplacian 矩阵（ Ξ 定义见(2.1.1)），则在任意初始条件 $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn}$ 和任意 $a_{ij}(0) \in \mathbb{R}$ 下，算法(5.2.6)均使 (x, y) 漂近收敛至 $(x^*, \mathbf{1}_N \otimes y^*)$ 。另外，自适应变量 \bar{a}_{k+1, i_k} 收敛至某些有限常数， $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。

证明. 基于引理5.2.4，我们将证明(5.2.6a)-(5.2.6c)的每条轨线均收敛至系统(5.2.5)的一个广义平衡点。首先定义5.2.6a)-(5.2.6c)的轨迹与系统(5.2.5)的任一广义平衡点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 之间的误差，并进行一个坐标变换：

$$\mu = x - \tilde{x}, \quad \nu = y - \tilde{y}, \quad \eta = z - \tilde{z} \quad (5.2.9a)$$

$$\bar{\mu} = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) \mu, \quad \bar{\nu} = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) \nu, \quad \bar{\eta} = (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) \eta \quad (5.2.9b)$$

其中 Ξ 定义如(2.1.1)。以分量的形式， $\bar{\mu} = \text{col}(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{N-1})$ 其中 $\bar{\mu}_k = \mu_{i_k} - \mu_{k+1}$ ， $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。

注意到 $\mathcal{L}^a \in \mathcal{M}_r^N$ ，根据定义5.2.1可得 $\mathcal{O}^a|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = 0$ 。接着，在新坐标系下，动力系统 \mathcal{O}^a 等价于

$$\dot{\bar{\mu}} = -\kappa_1 (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h - \kappa_1 \bar{\nu} \quad (5.2.10a)$$

$$\dot{\bar{\nu}} = \bar{\mu} - (Q^a \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} - (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\eta} \quad (5.2.10b)$$

$$\dot{\bar{\eta}} = (Q^a \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} \quad (5.2.10c)$$

$$\dot{\bar{a}}_{k+1, i_k} = \kappa_2 \left(\bar{\nu}_k - \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{\nu}_{j-1} \right)^T \bar{\nu}_k, \quad k \in \mathcal{I}_{N-1} \quad (5.2.10d)$$

其中 $h = \nabla f(\mu + \tilde{x}) - \nabla f(\tilde{x})$ ， Q 和 Q^a 分别基于原 Laplacian 矩阵以及引入自适应变量后的 Laplacian 矩阵，具体定义如(2.1.2)。更具体地， $Q^a = \tilde{Q}^a + \bar{Q}^a$ 包含一个固定

矩阵 \tilde{Q}^a (注意若 $e_{ji} \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}}$, 则 $\dot{a}_{ij} = 0$), 和一个时变矩阵

$$\bar{Q}_{kj}^a = \begin{cases} \bar{a}_{j+1,i_j} w_{j+1,i_j}, & \text{若 } j = k, \\ -\bar{a}_{j+1,i_j} w_{j+1,i_j}, & \text{若 } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (5.2.11)$$

其中我们使用了引理2.1.1中命题2). 以及 Kronecker 积的性质来得到(5.2.10b)-(5.2.10c); 同时我们运用了 $(\Xi \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{y} = 0$ 这一性质来得到(5.2.10d)。

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1 + 3\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\epsilon_1 \lambda_{\min}^2(Q^s)} V_{\bar{\mu}} + V_{\bar{\nu}}^a + \frac{3\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^s)} V_{\bar{\eta}} \quad (5.2.12)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{\bar{\mu}} &= \frac{1}{2} \bar{\mu}^T \bar{\mu} \\ V_{\bar{\nu}}^a &= \frac{1}{2} \bar{\nu}^T \bar{\nu} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{w_{k+1,i_k}}{2\kappa_2} (\bar{a}_{k+1,i_k}(t) - \phi_{k+1,i_k})^2 \\ V_{\bar{\eta}} &= \frac{1}{2} (\bar{\nu} + \bar{\eta})^T (\bar{\nu} + \bar{\eta}) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

这里 $Q^s > 0$ 由引理2.1.1中命题3). 保证, $\epsilon_1, \phi_{k+1,i_k} \in \mathbb{R}^+$, $k = 1, \dots, N-1$, 有待后续确定。

$V_{\bar{\mu}}$ 沿系统(5.2.10)的轨线导数为

$$\dot{V}_{\bar{\mu}} = -\kappa_1 \bar{\mu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h - \kappa_1 \bar{\mu}^T \bar{\nu}. \quad (5.2.14)$$

根据(5.2.9b)和(5.2.8)可得

$$\bar{\mu}^T (\Xi \otimes \mathbf{I}_n) h \geq m \bar{\mu}^T \bar{\mu}. \quad (5.2.15)$$

接着,

$$\dot{V}_{\bar{\mu}} \leq -\kappa_1 m \bar{\mu}^T \bar{\mu} - \kappa_1 \bar{\mu}^T \bar{\nu} \leq (\epsilon_2 - \kappa_1 m) \bar{\mu}^T \bar{\mu} + \frac{\kappa_1^2}{4\epsilon_2} \bar{\nu}^T \bar{\nu} \quad (5.2.16)$$

其中我们使用了引理5.2.2来得到最后一个不等式, $\epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ 有待后续确定。

$V_{\bar{\nu}}^a$ 沿系统(5.2.10)的轨线导数为

$$\dot{V}_{\bar{\nu}}^a = \bar{\nu}^T \bar{\mu} - \bar{\nu}^T (Q^a \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} - \bar{\nu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\eta}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} w_{k+1,i_k} (\bar{a}_{k+1,i_k} - \phi_{k+1,i_k}) \left(\bar{\nu}_k - \sum_{j+1 \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{\nu}_j \right)^T \bar{\nu}_k. \quad (5.2.17)$$

根据(5.2.11)可得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} w_{k+1,i_k} \bar{a}_{k+1,i_k} \left(\bar{\nu}_k - \sum_{j+1 \in \bar{\mathcal{N}}_{\text{out}}(k+1)} \bar{\nu}_j \right)^T \bar{\nu}_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{Q}_{kk}^a \bar{\nu}_k + \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \bar{Q}_{jk}^a \bar{\nu}_j)^T \bar{\nu}_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{Q}_{jk}^a \bar{\nu}_j^T \bar{\nu}_k = \bar{\nu}^T (\bar{Q}^a \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu}. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

定义 $\Phi \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 如下:

$$\Phi_{kj} = \begin{cases} \phi_{j+1,i_j} w_{j+1,i_j}, & \text{if } j = k, \\ -\phi_{j+1,i_j} w_{j+1,i_j}, & \text{if } j = i_k - 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.2.19)$$

则, 根据(5.2.17)-(5.2.19)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{\nu}}^a &= \bar{\nu}^T \bar{\mu} - \bar{\nu}^T (Q^a \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} - \bar{\nu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\eta} + \bar{\nu}^T ((\bar{Q}^a - \Phi) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} \\ &= \bar{\nu}^T \bar{\mu} - \bar{\nu}^T ((\tilde{Q}^a + \Phi) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} - \bar{\nu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

注意到对任意正定矩阵 $A > 0$ 和任意向量 x , 有 $x^T A x \leq \lambda_{\max}(A) x^T x$ 。结合引理5.2.2, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{\nu}}^a &\leq \bar{\nu}^T \bar{\mu} - \bar{\nu}^T ((\tilde{Q}^a + \Phi) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} + \frac{\bar{\nu}^T \bar{\nu}}{2} + \frac{\bar{\eta}^T (Q^T Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\eta}}{2} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}^2(Q^s)} \bar{\mu}^T \bar{\mu} + \left(\frac{\lambda_{\min}^2(Q^s)}{4} + \frac{1}{2} \right) \bar{\nu}^T \bar{\nu} \\ &\quad - \bar{\nu}^T ((\tilde{Q}^a + \Phi) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} + \frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{2} \bar{\eta}^T \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

$V_{\bar{\eta}}$ 沿系统(5.2.10)的轨线导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{\eta}} &= \bar{\nu}^T \bar{\mu} - \bar{\nu}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\eta} + \bar{\eta}^T \bar{\mu} - \bar{\eta}^T (Q \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\eta} \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_{\min}(Q^s)} \bar{\mu}^T \bar{\mu} + \frac{\lambda_{\min}(Q^s)}{2} \bar{\nu}^T \bar{\nu} + \frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^s)} \bar{\nu}^T \bar{\nu} + \frac{\lambda_{\min}(Q^s)}{4} \bar{\eta}^T \bar{\eta} \\ &\quad + \frac{\lambda_{\min}(Q^s)}{2} \bar{\eta}^T \bar{\eta} + \frac{1}{2\lambda_{\min}(Q^s)} \bar{\mu}^T \bar{\mu} - \lambda_{\min}(Q^s) \bar{\eta}^T \bar{\eta} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda_{\min}(Q^s)} \bar{\mu}^T \bar{\mu} + \left(\frac{\lambda_{\min}(Q^s)}{2} + \frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^s)} \right) \bar{\nu}^T \bar{\nu} - \frac{\lambda_{\min}(Q^s)}{4} \bar{\eta}^T \bar{\eta} \quad (5.2.22)$$

这里我们通过反复运用引理5.2.2来得到其中的不等式。

根据(5.2.12), (5.2.16), (5.2.21)和(5.2.22)整理可得, Lyapunov 函数沿(5.2.10)的轨线导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq - \frac{(1 + 3\lambda_{\max}(Q^T Q))(\kappa_1 m - \epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 \lambda_{\min}^2(Q^s)} \bar{\mu}^T \bar{\mu} \\ &\quad - \bar{\nu}^T ((\Phi^s - \gamma \mathbf{I}_{N-1} + (\tilde{Q}^a)^s) \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\nu} - \frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{4} \bar{\eta}^T \bar{\eta} \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

其中

$$\gamma = \frac{\kappa_1^2 (1 + 3\lambda_{\max}(Q^T Q))}{4\epsilon_1 \epsilon_2 \lambda_{\min}^2(Q^s)} + \frac{3\lambda_{\max}^2(Q^T Q)}{\lambda_{\min}^2(Q^s)} + \frac{3\lambda_{\max}(Q^T Q)}{2} + \frac{\lambda_{\min}^2(Q^s)}{4} + \frac{1}{2} \quad (5.2.24)$$

接下来, 我们将选取适当的 $\epsilon_1, \epsilon_2, \phi_{k+1,i_k} \in \mathbb{R}^+$ 来镇定整个闭环系统。首先, 我们总可以取 ϵ_1, ϵ_2 使得 $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \kappa_1 m$ 。接着, 我们将选取 $\phi_{k+1,i_k}, k = 1, \dots, N-1$ 使得 $\Phi^s - \gamma \mathbf{I}_{N-1} + (\tilde{Q}^a)^s > 0$ 。这里由于 γ 和 $(\tilde{Q}^a)^s$ 都是固定的, 因此我们只需说明可以取 ϕ_{k+1,i_k} 使 $\Phi^s - \bar{\gamma} \mathbf{I}_{N-1} > 0$ 对任意 $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^+$ 成立。实际上, 与5.1小节引理5.1.2的证明类似, 我们取 $\phi_{2,i_1} > \frac{\bar{\gamma}}{w_{2,i_1}}$, 且 $\phi_{k+1,i_k} > \bar{\gamma} + \frac{\sum_{j=2}^k \phi_{j,i_{j-1}}^2 w_{j,i_{j-1}}^2}{4\lambda_{\min}(\Omega_{k-1})}$, 这里 $\Omega_1 = (\phi_{2,i_1} w_{2,i_1} - \bar{\gamma})$, $\Omega_k = \begin{pmatrix} \Omega_{k-1} & \varphi_k \\ \varphi_k^T & \phi_{k+1,i_k} w_{k+1,i_k} - \bar{\gamma} \end{pmatrix}$ 其中 $\varphi_k = \frac{1}{2}(\phi_{k1} w_{k1}, \phi_{k2} w_{k2}, \dots, \phi_{k,k-1} w_{k,k-1})^T$, $k = 2, \dots, N-1$ 。则 $\Phi^s - \bar{\gamma} \mathbf{I}_{N-1}$ (即 Ω_{N-1}) 的正定性可由 Schur 补引理[155]和数学归纳法原理保证。此时, $\dot{V}_1 \leq 0$, 则 V_1 有一个有限的上界, 其中所有的信号 $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\eta}$, \bar{a}_{k+1,i_k} 均有界。注意到 V_1 是连续可微的, 根据 LaSalle 不变原理, (5.2.10)的每条轨线收敛, 且使得 $\dot{V}_1 = 0$ 。根据(5.2.23), 则有 $(\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\eta}) \rightarrow (0, 0, 0)$, 且自适应变量 $\bar{a}_{k+1,i_k}, k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 收敛到有限常数。相应地, 在原坐标系下系统(5.2.6)中, $(x, y, z) \rightarrow (\tilde{x} + \mathbf{1}_N \otimes \Delta_x, \tilde{y} + \mathbf{1}_N \otimes \Delta_y, \tilde{z} + \mathbf{1}_N \otimes \Delta_z) \triangleq (x_s, y_s, z_s)$, 这里 $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \in \mathbb{R}^n$ 。

接下来, 我们证明 $\Delta_x = \Delta_y = 0$ 。实际上, Δ_x, Δ_y 的稳态动力学行为满足

$$\dot{\Delta}_x = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n) \dot{x}_s, \quad \dot{\Delta}_y = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n) \dot{y}_s. \quad (5.2.25)$$

将(5.2.6a)-(5.2.6b)在 (x_s, y_s, z_s) 处的值代入上式, 同时注意到 $\mathcal{O}^a|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = 0$, 有

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_x &= -\frac{\kappa_1}{N} (\mathbf{1}_N^T \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla f(x_s) - \nabla f(\tilde{x})) - \kappa_1 \Delta_y = 0, \\ \dot{\Delta}_y &= \Delta_x = 0. \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

即 $\Delta_x = \Delta_y = 0$ 。因此, $(x_s, y_s) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, 表明(5.2.6a)-(5.2.6c)的每条轨线收敛到(5.2.5)的一个广义平衡点。根据引理5.2.4, 则有 $(x, y) \rightarrow (x^*, \mathbf{1}_N \otimes y^*)$ 。 \square

考虑一类特殊的二次本地代价函数

$$f_i(x) \triangleq x^T \Theta x + x^T \varphi_i, \quad \Theta > 0, \quad \varphi_i \in \mathbb{R}^n. \quad (5.2.27)$$

此时, 基于支撑树的 m 强凸条件(5.2.8)对任意的 $m \leq \lambda_{\min}(\Theta)$ 和任意有向支撑树均成立。我们有如下推论:

推论 5.2.1 在假设5.2.1-5.2.2的前提下, 针对带有本地代价函数(5.2.27)的资源配置问题(5.2.1), 在任意初始条件 $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn}$ 和任意 $a_{ij}(0) \in \mathbb{R}$ 下, 算法(5.2.6)均使 (x, y) 漐近收敛至 $(x^*, \mathbf{1}_N \otimes y^*)$ 。另外, 自适应变量 \bar{a}_{k+1,i_k} 收敛至某些有限常数, $k \in \mathcal{I}_{N-1}$ 。

注 5.2.2 我们提出的自适应资源配置框架在本质上与相关文献[67, 85–89], 后者大多是基于全局 Laplacian 矩阵特征值的知识来建立收敛性结果。定理5.2.1的证明思路是反复利用 Peter-Paul 不等式以把整个闭环系统的稳定性寄托于自适应变量 \bar{a}_{k+1,i_k} , 从而在设计阶段消除了对全局 Laplacian 矩阵特征值这一先验知识的依赖性。

注 5.2.3 除了上述注解, 值得注意的是引入自适应增益(5.2.6d)的另一个优点在于克服了相关文献对于智能体在进行局部梯度下降寻优时步长的限制, 如单位步长[83, 93–95], 或充分小步长[97, 166, 167]。这里, 算法(5.2.6)在任意参数 $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}^+$ 都具有全局收敛性, 因此可以更方便的实现参数调节: 增大 κ_1 允许智能体在本地寻优时采取较大的步长; 而增大 κ_2 则强化了智能体之间通讯 Lagrangian 乘子的重要性。

5.2.3 基于节点的设计方法

在5.2.2小节中, 算法(5.2.6d)依赖于网络通讯拓扑的一个 DST。尽管, 强连通图上 DST 的寻找可以以一个分布式的方式进行[163], 我们仍然希望知道是否可能移除这一中间步骤。针对这个问题, 我们在本小节提出了一类基于点的设计方法。考虑如下完全分布式自适应资源配置算法:

$$\mathcal{O}^\alpha : \dot{x} = -\kappa_1(\nabla f(x) + y) \quad (5.2.28a)$$

$$\dot{y} = x - D - (\mathcal{AL} \otimes \mathbf{I}_n)y - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)z \quad (5.2.28b)$$

$$\dot{z} = (\mathcal{AL} \otimes \mathbf{I}_n)y \quad (5.2.28c)$$

$$\dot{\alpha}_i = \kappa_2 \xi_i^T \xi_i, \quad \xi_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} w_{ij} (y_i - y_j) \quad (5.2.28d)$$

其中 $\mathcal{A} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $i \in \mathcal{V}$ 。

定理 5.2.2 在假设 5.2.1-5.2.2 的前提下，若存在一个标量 $m \in \mathbb{R}^+$ 使得下述条件（联合 m 强凸）条件对任意 $x, y \in \mathbb{R}^{Nn}$ 成立：

$$(x - y)^T (\mathcal{L}^T \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \geq m(x - y)^T (\mathcal{L}^T \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) (x - y), \quad (5.2.29)$$

则在任意 $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn}$ 和任意 $\alpha_i(0) \in \mathbb{R}^+$ ，算法 (5.2.28) 均使 (x, y) 演近收敛至 $(x^*, \mathbf{1}_N \otimes y^*)$ 。另外，自适应变量 α_i 收敛至有限常数， $i \in \mathcal{I}_N$ 。

证明. 与定理 5.2.1 的证明类似，首先定义 (5.2.28a)-(5.2.28c) 与系统 (5.2.5) 的任一广义平衡点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 之间的误差如 (5.2.9a)，接着作一个坐标变换：

$$\hat{\mu} = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mu, \quad \hat{\nu} = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \nu, \quad \hat{\eta} = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \eta. \quad (5.2.30)$$

注意到 $\mathcal{A}\mathcal{L} \in \mathcal{M}_r^N$ ，根据定义 5.2.1 有 $\mathcal{O}^\alpha|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = 0$ 。记 $\xi = \text{col}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ ，则有 $\xi = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)y = (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n)(y - \tilde{y}) = \nu$ 。因此，动力系统 \mathcal{O}^α 等价于

$$\dot{\hat{\mu}} = -\kappa_1 (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) h - \kappa_1 \hat{\nu} \quad (5.2.31a)$$

$$\dot{\hat{\nu}} = \hat{\mu} - (\mathcal{L}\mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} - (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\eta} \quad (5.2.31b)$$

$$\dot{\hat{\eta}} = (\mathcal{L}\mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} \quad (5.2.31c)$$

$$\dot{\alpha}_i = \kappa_2 \hat{\nu}_i^T \hat{\nu}_i, \quad i \in \mathcal{I}_N \quad (5.2.31d)$$

其中 $h = \nabla f(\mu + \tilde{x}) - \nabla f(\tilde{x})$ 。

考虑如下 Lyapunov 函数：

$$V_2 = \frac{N(\lambda_2^2(\mathcal{L}^s) + 3\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L}))}{\epsilon_1 \lambda_2^3(\mathcal{L}^s)} V_{\hat{\mu}} + V_{\hat{\nu}}^\alpha + \frac{3N\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{\lambda_2^2(\mathcal{L}^s)} V_{\hat{\eta}} \quad (5.2.32)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{\hat{\mu}} &= \frac{1}{2} \hat{\mu}^T \hat{\mu} \\ V_{\hat{\nu}}^\alpha &= \frac{1}{2} \hat{\nu}^T (\mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\kappa_2} (\alpha_i(t) - \bar{\alpha})^2 \\ V_{\hat{\eta}} &= \frac{1}{2} (\hat{\nu} + \hat{\eta})^T (\hat{\nu} + \hat{\eta}) \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

这里 $\bar{\alpha}, \epsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ 有待后续确定。

$V_{\hat{\mu}}$ 沿系统(5.2.31)的时间导数为

$$\dot{V}_{\hat{\mu}} = -\kappa_1 \hat{\mu}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) h - \kappa_1 \hat{\mu}^T \hat{\nu}. \quad (5.2.34)$$

根据(5.2.30)和(5.2.29)得

$$\hat{\mu}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) h \geq m \hat{\mu}^T \hat{\mu}. \quad (5.2.35)$$

与(5.2.16)类似，有

$$\dot{V}_{\hat{\mu}} \leq (\epsilon_2 - \kappa_1 m) \hat{\mu}^T \hat{\mu} + \frac{\kappa_1^2}{4\epsilon_2} \hat{\nu}^T \hat{\nu} \quad (5.2.36)$$

其中 $\epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ 有待后续确定。

$V_{\hat{\nu}}^\alpha$ 沿系统(5.2.31)的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\hat{\nu}}^\alpha &= \hat{\nu}^T (\mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\mu} - \hat{\nu}^T (\mathcal{A} \mathcal{L} \mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} - \hat{\nu}^T (\mathcal{A} \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\eta} \\ &\quad + \hat{\nu}^T ((\mathcal{A} - \bar{\alpha} \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu}. \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

令 $\tilde{\nu} = (\mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} \triangleq \text{col}(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_N)$ 。根据引理5.2.3可得

$$\hat{\nu}^T (\mathcal{A} \mathcal{L} \mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} = \tilde{\nu}^T (\mathcal{L}^s \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\nu} = \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k^T \mathcal{L}^s \tilde{\delta}_k \quad (5.2.38)$$

其中 $\tilde{\delta}_k = ([S\tilde{\nu}_1]_k, [S\tilde{\nu}_2]_k, \dots, [S\tilde{\nu}_N]_k)^T$ 。这里 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是任意一个正交矩阵。注意到 $[S\tilde{\nu}_i]_k = \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{in}}(i)} w_{ij} ([S\nu_i]_k - [S\nu_j]_k)$ 。若记 $\delta_k = ([S\nu_1]_k, [S\nu_2]_k, \dots, [S\nu_N]_k)^T$ ，则有 $\tilde{\delta}_k = \mathcal{A} \mathcal{L} \delta_k$, $\forall k \in \mathcal{I}_n$ 。在假设5.2.2下，有 $(\mathcal{A}^{-1} \mathbf{1}_N)^T \tilde{\delta}_k = \mathbf{1}_N^T \mathcal{L} \delta_k = 0$ 对任意 k 成立。注意到 $\mathcal{A}^{-1} \mathbf{1}_N \in \mathbb{R}_+^N$ ($\alpha_i(0) \in \mathbb{R}^+, \dot{\alpha}_i \geq 0$)，根据(5.2.38)和引理2.1.2中命题1).-2). 可得

$$\begin{aligned} \hat{\nu}^T (\mathcal{A} \mathcal{L} \mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} &= \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k^T \mathcal{L}^s \tilde{\delta}_k \geq \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{N} \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k^T \tilde{\delta}_k \\ &= \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{N} \tilde{\nu}^T \tilde{\nu} = \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{N} \hat{\nu}^T (\mathcal{A}^2 \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu}. \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

接着，根据(5.2.37)和(5.2.39)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\hat{\nu}}^\alpha &\leq \hat{\nu}^T (\mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\mu} - \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{N} \hat{\nu}^T (\mathcal{A}^2 \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} - \hat{\nu}^T (\mathcal{A} \mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\eta} + \hat{\nu}^T ((\mathcal{A} - \bar{\alpha} \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} \\ &\leq \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{4N} \hat{\nu}^T (\mathcal{A}^2 \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} + \frac{N}{\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \hat{\mu}^T \hat{\mu} - \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{N} \hat{\nu}^T (\mathcal{A}^2 \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{\nu}^T \left((\mathcal{A} - \bar{\alpha} \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{I}_n \right) \hat{\nu} + \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{2N} \hat{\nu}^T (\mathcal{A}^2 \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} + \frac{\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{2\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \hat{\eta}^T \hat{\eta} \\
& = \frac{N}{\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \hat{\mu}^T \hat{\mu} - \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{4N} \hat{\nu}^T (\mathcal{A}^2 \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} + \hat{\nu}^T \left((\mathcal{A} - \bar{\alpha} \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{I}_n \right) \hat{\nu} + \frac{\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{2\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \hat{\eta}^T \hat{\eta}
\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

其中我们反复运用了引理5.2.2来得到第二个不等式。

类似于(5.2.22), 可得 $V_{\hat{\eta}}$ 的导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\hat{\eta}} &= \hat{\nu}^T \hat{\mu} - \hat{\nu}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\eta} + \hat{\eta}^T \hat{\mu} - \hat{\eta}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\eta} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \hat{\mu}^T \hat{\mu} + \left(\frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{2} + \frac{\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \right) \hat{\nu}^T \hat{\nu} - \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{4} \hat{\eta}^T \hat{\eta}.
\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

其中我们用到了 $\hat{\eta}^T (\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\eta} \geq \lambda_2(\mathcal{L}^s) \hat{\eta}^T \hat{\eta}$, 此不等式关系由引理2.1.2中命题3). 保证。

综合(5.2.32), (5.2.36), (5.2.40), (5.2.41), 并经过一些运算, 可得 V_2 沿系统(5.2.31)的轨线导数满足

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq - \frac{N(\lambda_2^2(\mathcal{L}^s) + 3\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L}))(\kappa_1 m - \epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 \lambda_2^3(\mathcal{L}^s)} \hat{\mu}^T \hat{\mu} \\
&\quad - \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{4N} \hat{\nu}^T (\mathcal{A}^2 \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\nu} + \hat{\nu}^T \left((\mathcal{A} - (\bar{\alpha} - \gamma') \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{I}_n \right) \hat{\nu} - \frac{N\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{4\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \hat{\eta}^T \hat{\eta}
\end{aligned} \tag{5.2.42}$$

其中

$$\gamma' = \frac{N\kappa_1^2(\lambda_2^2(\mathcal{L}^s) + 3\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L}))}{4\epsilon_1 \epsilon_2 \lambda_2^3(\mathcal{L}^s)} + \frac{3N\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{2\lambda_2(\mathcal{L}^s)} + \frac{3N\lambda_{\max}^2(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{\lambda_2^3(\mathcal{L}^s)} \tag{5.2.43}$$

选择 ϵ_1, ϵ_2 使得 $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \kappa_1 m$, 且 $\bar{\alpha} \geq \gamma' + \frac{N}{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}$ 。则根据(5.2.42)可得

$$\dot{V}_2 \leq - \frac{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}{4N} \hat{\nu}^T \left(\left(\mathcal{A} - \frac{2N}{\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \mathbf{I}_N \right)^2 \otimes \mathbf{I}_n \right) \hat{\nu} - \frac{N\lambda_{\max}(\mathcal{L}^T \mathcal{L})}{4\lambda_2(\mathcal{L}^s)} \hat{\eta}^T \hat{\eta} \leq 0, \tag{5.2.44}$$

故 V_2 极限有界, 所有的信号 $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\eta}, \alpha_i$ 均有界。后续证明与定理5.2.1的证明类似, 不再赘述。 \square

注意对于局部代价函数(5.2.27), 联合 m 强凸条件对于任意 $m \leq \lambda_{\min}(\Theta)$ 成立, 因此我们有如下推论:

推论 5.2.2 在假设5.2.1-5.2.2的前提下, 针对带有局部代价函数(5.2.27)的资源配置问题(5.2.1), 在任意 $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn}$ 和任意 $\alpha_i(0) \in \mathbb{R}^+$ 下, 算法(5.2.28)保证了 $(x, y) \rightarrow (x^*, \mathbf{1}_N \otimes y^*)$ 。另外, 自适应变量 α_i 收敛至有限常数, $i \in \mathcal{I}_N$ 。

注 5.2.4 对比算法(5.2.28)与5.2.2小节中的算法(5.2.6)，可以发现基于DST的设计与基于点的设计在驱动Lagrangian乘子一致性时的角度是不同的。在基于DST的算法(5.2.6)中，所选中的DST的根节点充当一个领导者的角色，然而在基于点的方法(5.2.28)中，我们对网络中所有的智能体是一视同仁的。

5.2.4 数值仿真

考虑在一个包含 N 个智能体的网络上的资源分配问题，其中资源总量为 d ，智能体通讯拓扑是一个强连通平衡图 \mathcal{G} 。每个智能体的局部代价函数为 $f_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$ ，其中 $a_i = 0.10875$ ， b_i 和 c_i 分别在区间[10.76, 74]和[6.78, 32.96]随机选取[67]。接下来，我们考虑两种情形，每一种情形中，每个智能体的初始资源 $d_i = \frac{d}{N}$ ，初始 (x_i, y_i, z_i) 取自标准差为5的正态分布。对于基于DST的算法(5.2.6)，初始 $a_{ij}(0)$ 取自 $(-1, 1)$ 之间的均匀分布；对于基于点的算法(5.2.28)，初始 $\alpha_i(0)$ 取自 $(0, 1)$ 之间的均匀分布。

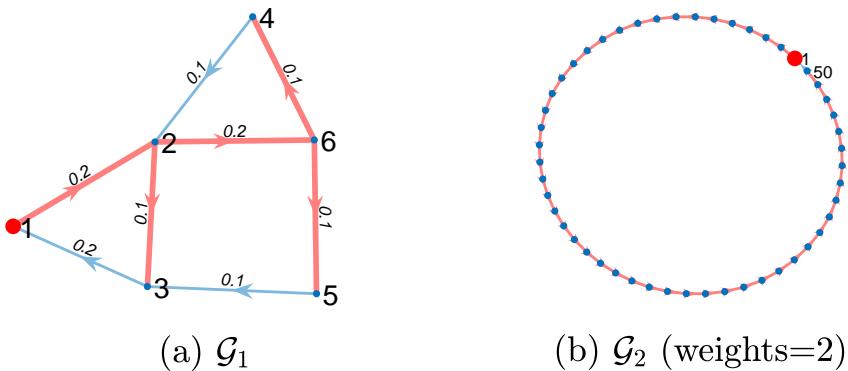


图 5.7: 两种情形下的通讯拓扑，其中红色标记的为一个DST。

情形 1: $d = 1500$, $N = 6$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ (图 5.7(a));

首先，在基于DST的算法(5.2.6)和基于点的算法(5.2.28)中，我们均选择 $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ，相应的智能体状态和自适应变量的演化分别如图5.8和图5.9，其中虚线表示最优资源配置解。为了形成比较，图5.10给出了算法(5.2.6)在一组不同的参数 $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = 0.1$ 下的收敛情况。

情形 2: $d = 10^4$, $N = 50$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_2$ (图 5.7(b));

类似地，在基于DST的算法(5.2.6)和基于点的算法(5.2.28)中，均选择 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1$ ，相应的智能体状态和自适应变量的演化分别如图5.11和图5.12，其中虚线表示最

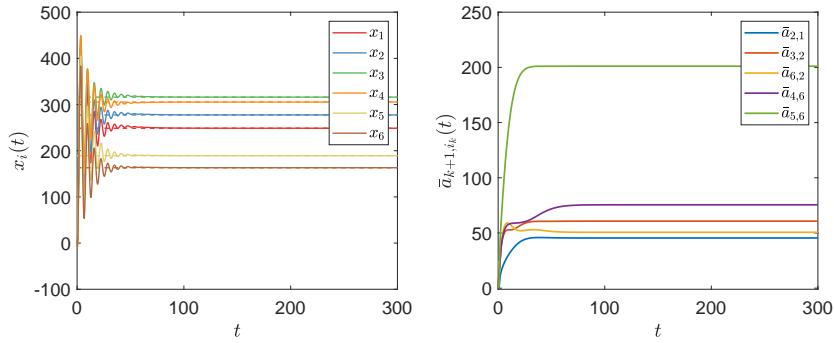


图 5.8: 情形 1: 算法(5.2.6)中智能体的状态 $x_i(t)$ 和自适应变量 $\bar{a}_{k+1,i_k}(t)$ 的演化, 这里 $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ 。

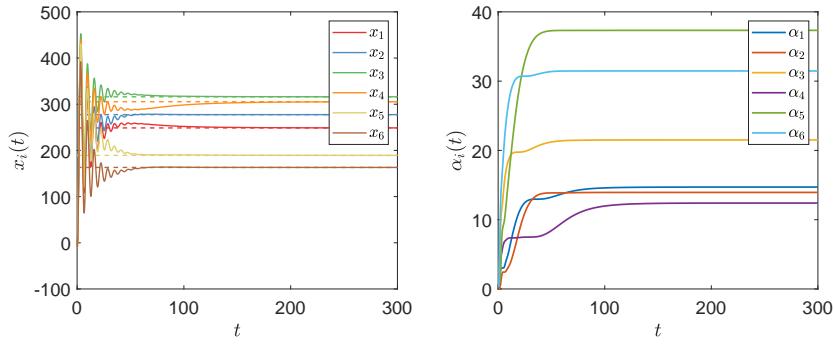


图 5.9: 情形 1: 算法(5.2.28)中智能体的状态 $x_i(t)$ 和自适应变量 $\alpha_i(t)$ 的演化, 这里 $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ 。

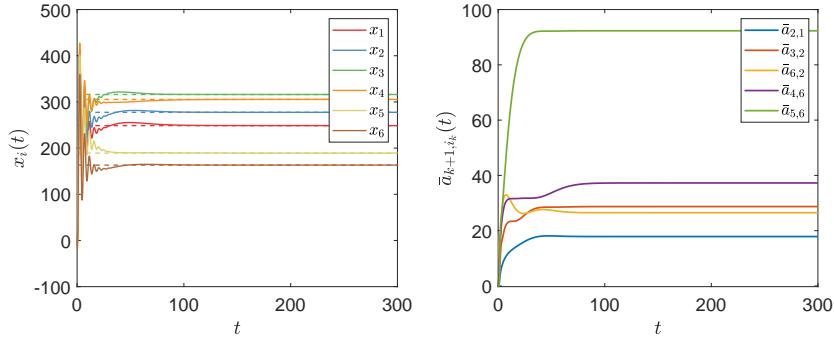


图 5.10: 情形 1: 算法(5.2.6)中智能体的状态 $x_i(t)$ 和自适应变量 $\bar{a}_{k+1,i_k}(t)$ 的演化, 这里 $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = 0.1$ 。

优资源配置解。最后, 为了对比说明引入自适应方法的必要性, 令 $\alpha_i \equiv 1$, 可以从图5.13中看到非自适应的策略未能求解该资源配置问题。

通过对比情形 2 与情形 1, 可以看到当 $N = 50$ 时自适应变量稳态值的大小与 $N = 6$ 时相近甚至更小。因此, 我们通过对算法(5.2.28)的收敛性证明中正比于 N 的下界 $\bar{\alpha} \geq \gamma' + \frac{N}{\lambda_2(\mathcal{L}^s)}$ 进行简单的讨论来结束本节: 实际上, 此下界仅用于稳定性分

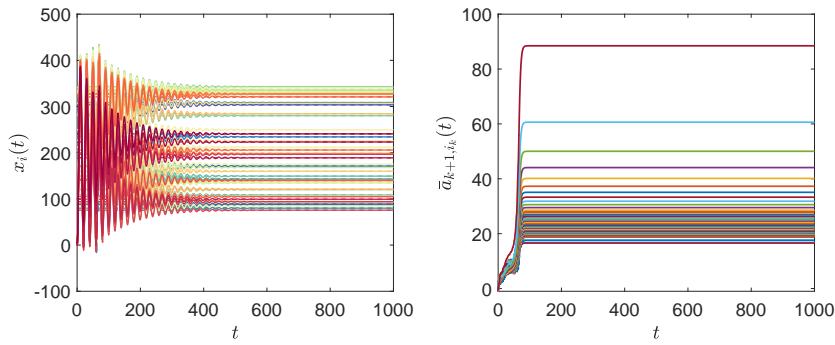


图 5.11: 情形 2: 算法(5.2.6)中智能体的状态 $x_i(t)$ 和自适应变量 $\bar{a}_{k+1,i_k}(t)$ 的演化, 这里 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1$ 。

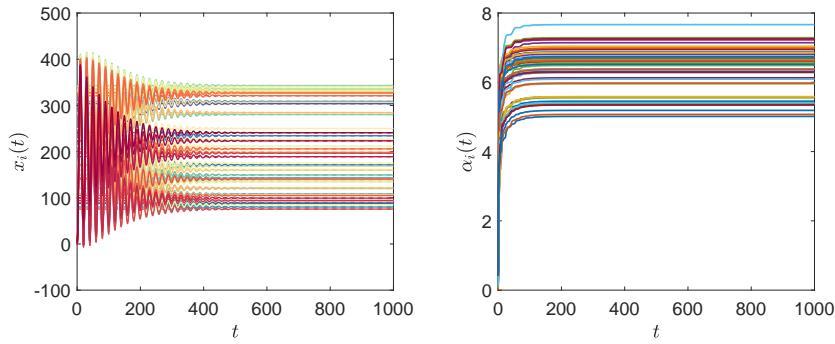


图 5.12: 情形 2: 算法(5.2.28)中智能体的状态 $x_i(t)$ 和自适应变量 $\alpha_i(t)$ 的演化, 这里 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1$ 。

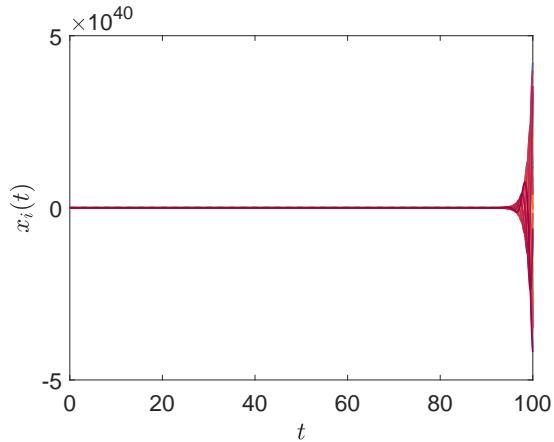


图 5.13: 情形 2: 非自适应条件下算法(5.2.28) ($\alpha_i \equiv 1, \kappa_1 = 0.1$)中智能体的状态 $x_i(t)$ 的演化。

析[117], 通过实验可以发现真实的自适应变量稳态值的大小主要依赖于参数 κ_2 , 而几乎不受网络规模 N 的影响, 从而具有良好的可扩展性。

5.3 本章小结

我们在本章中首先提出了依赖基于有向支撑树(DST)的自适应框架，用于求解强连通图上依赖带有非凸局部函数的分布式优化问题。首先，我们针对权重平衡图，提出了一类基于 DST 的分布式自适应优化算法；进而通过引入一个基于 DST 的有限时间权重平衡算法，将所提框架延拓至非平衡图。研究表明所提方法可以消除现有方法对全局 Laplacian 矩阵代数信息的依赖性。

进而，我们考虑了权重平衡图上的网络内部资源配置问题。通过辨识出一类非确定鞍点系统，我们提出了两类分别基于 DST 和基于点的分布式自适应资源配置算法。借助 Peter-Paul 不等式和 Lyapunov 稳定性理论，我们严格证明了两类算法的渐近收敛性。同样地，所提方法有效克服了相关文献中对全局 Laplacian 矩阵特征值信息的依赖性。

本章5.1和5.2节内容已分别投稿至国际刊物 IEEE Transactions on Automatic Control 和 IEEE Transactions on Network Science and Engineering 上。

第六章 总结与展望

6.1 总结

本论文主要研究了非确定性网络系统的分布式自适应控制理论。全文共六章，其中主体部分为第三章至第五章，分别从一致性、编队、优化的背景下展开研究，相继提出了基于神经网络的完全分布式一致性、基于有向支撑树(DST)的分布式自适应编队、基于 DST 的分布式自适应优化等框架。本文的研究工作在现有基础上丰富了分布式自适应控制理论与方法，全文主要研究内容与贡献总结如下：

(1) 针对带有匹配未建模动态的非线性多智能体系统，现有文献对于网络个体非确定性以及网络全局非确定性（如代数连通度未知）的处理常常不能兼顾。本文通过综合神经网络自适应控制与自适应网络耦合调节的优势，提出了基于神经网络的完全分布式控制框架，相继在第3.1节，第3.2节，第4.1节中解决了一致性（一致跟踪、包含）、平均跟踪、时变编队问题，验证了所提框架的普适性。

(2) 我们在第3.3节针对一类带有高维领导者和多源非确定性（未建模动态、时滞、噪声）多智能体系统，提出了基于神经网络和 Lyapunov-Krasovskii 泛函的鲁棒自适应跟踪控制策略。控制器设计遵循“分布式观测，自适应跟踪”的思想，在多源非确定性的影响下保证了跟随者对高维领导者输出信息的渐近有界跟踪。在高维领导者跟踪问题中首次考虑了系统时滞的影响，并验证了所提控制器对有界慢变时滞的鲁棒性。

(3) 相比于无向网络，有向网络系统的分布式自适应控制问题要复杂许多。我们在第4.2节中提出了一类基于 DST 的时变编队与时变编队跟踪方法。其中，针对多个领导者并存时的时变编队跟踪问题，我们定义了一类广义有向支撑树，并提出了基于一类辅助网络系统的自适应编队跟踪控制方法，为带有多个领导者的网络系统控制问题提供了新的思路。

(4) 现有的分布式优化解法中通常需要要求局部代价函数的凸性、或网络权重平衡性、或衰减步长、或全局 Laplacian 矩阵的代数信息（特征值、特征向量等）。然而，以上均非求解一个分布式优化问题的必要条件。针对一般的强连通图，我们在5.1节中

提出了基于 DST 的分布式自适应优化框架，有效消除了对上述条件的依赖性。所提框架包含平衡图上基于 DST 的分布式自适应优化算法以及非平衡图上基于 DST 的有限时间分布式权重调平算法，兼具新颖性及实用性。

(5) 在(4)的基础上，我们在5.2节中将自适应网络耦合调节的思想引入资源配置问题。通过辨识出一类非确定鞍点动力学，我们提出了两类分布式自适应资源配置算法，其中基于 DST 的算法与5.1节相呼应，而基于点的算法不需要寻找一个 DST 的中间步骤，但同时需要在全局层面满足更强的联合强凸条件。

6.2 展望

网络时代对于非确定性控制理论有着更高的要求，这是由于网络系统中的非确定性不仅来源于个体，更多的存在于网络结构、通讯环境、交互博弈等。纵览全文，在本文工作的基础上，仍然有许多值得深入探讨的问题，在此列举几例与读者共勉：

(1) 在本文第三章中，我们提出了基于神经网络的完全分布式自适应控制方法，创新性地将神经网络自适应控制和自适应网络耦合调节方法融合起来，系统地解决了带有未建模动态的网络系统的一致性、跟踪、包含、平均跟踪等问题。目前，该方法只适用于无向通讯的网络系统。在有向通讯的网络系统中，模型非确定性的存在使得控制器设计更加困难，此时如何设计出完全分布式自适应控制框架，将是后续工作的一个研究重点。

(2) 编队行为具有较强的实际意义和应用背景。我们在第四章中深入研究了多智能体的时变编队问题，分别考虑了带有匹配未建模动态的无向多智能体系统的时变编队问题，以及有向通讯下线性多智能体系统的时变编队/时变编队跟踪问题。在此方向上仍然有许多问题值得深入探讨，如类似于上述有向非确定性网络系统的时变编队控制方法，另外如队形变换、智能避障功能的引入等等。与此同时，另一个未来研究工作的重点是搭建实验平台来验证已取得的成果，以及为后续的研究工作提供实验支撑。

(3) 分布式优化是当前学术界的一个热点话题，而其中自适应控制方法的应用却非常少见。我们在第五章中对自适应方法用于求解分布式优化问题做了一些有益的尝试。然而，目前的尝试仅仅是一个开端，由于分布式优化的“热”和自适应控制的“趣”，我们有理由相信这个方向有巨大的发展潜力，相关的延伸问题如约束凸优化、非光滑凸优化、非凸优化等。

(4) 除了上述的一致性、编队、分布式优化等，网络系统的协同行为还有很多，仅举两例：博弈问题和分布式计算。通过将前期提出的自适应方法应用到博弈问题或分布式计算问题中，或许会为该领域带去一些新的思路和结果。

(5) 通过与其余先进控制理念的结合，将进一步丰富分布式自适应控制理论与方法。如事件驱动下的分布式自适应控制、鲁棒分布式自适应控制等等，也是值得深入挖掘的研究方向。

参考文献

- [1] 陈关荣, “复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战,” *自动化学报*, vol. 39, no. 4, pp. 312–321, 2013.
- [2] J. Aseltine, A. Mancini, and C. Sarture, “A survey of adaptive control systems,” *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. 6, no. 1, pp. 102–108, 1958.
- [3] A. Morse, “Global stability of parameter-adaptive control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 3, pp. 433–439, 1980.
- [4] K. Narendra, Yuan-Hao Lin, and L. Valavani, “Stable adaptive controller design, part ii: Proof of stability,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 3, pp. 440–448, 1980.
- [5] Y. Zheng, J. Ma, and L. Wang, “Consensus of hybrid multi-agent systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 1359–1365, 2018.
- [6] R. Olfati-Saber, “Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401–420, 2006.
- [7] D. Meng and K. L. Moore, “Robust cooperative learning control for directed networks with nonlinear dynamics,” *Automatica*, vol. 75, pp. 172–181, 2017.
- [8] S. Izumi, R. Kogami, X. Xin, and T. Yamasaki, “Synchronization of Metronomes on a Hanging Plate,” *Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers*, vol. 31, no. 11, pp. 400–402, Nov. 2018.
- [9] T. Menara, G. Baggio, D. S. Bassett, and F. Pasqualetti, “Stability conditions for cluster synchronization in networks of heterogeneous kuramoto oscillators,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 7, no. 1, pp. 302–314, 2020.
- [10] W. Yu, G. Chen, and M. Cao, “Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems,” *Automatica*, vol. 46, no. 6, pp. 1089–1095, 2010.
- [11] M. H. DeGroot, “Reaching a consensus,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, no. 345, pp. 118–121, 1974.
- [12] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. I. Cohen, and O. Shochet, “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 6, p. 1226, 1995.
- [13] A. Jadbabaie, Jie Lin, and A. S. Morse, “Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, 2003.

- [14] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [15] W. Ren and R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.
- [16] Z. Li, Z. Duan, G. Chen, and L. Huang, "Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 57, no. 1, pp. 213–224, 2010.
- [17] J. Wang, D. Cheng, and X. Hu, "Consensus of multi-agent linear dynamic systems," *Asian Journal of Control*, vol. 10, no. 2, pp. 144–155, 2008.
- [18] Z.-H. Guan, Z.-W. Liu, G. Feng, and Y.-W. Wang, "Synchronization of complex dynamical networks with time-varying delays via impulsive distributed control," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 57, no. 8, pp. 2182–2195, 2010.
- [19] C. P. Chen, C.-E. Ren, and T. Du, "Fuzzy observed-based adaptive consensus tracking control for second-order multiagent systems with heterogeneous nonlinear dynamics," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, no. 4, pp. 906–915, 2016.
- [20] W. Yu, Y. Li, G. Wen, X. Yu, and J. Cao, "Observer design for tracking consensus in second-order multi-agent systems: Fractional order less than two," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 2, pp. 894–900, 2017.
- [21] W. Xu, D. W. Ho, L. Li, and J. Cao, "Event-triggered schemes on leader-following consensus of general linear multiagent systems under different topologies," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 1, pp. 212–223, 2017.
- [22] Y. Cao, D. Stuart, W. Ren, and Z. Meng, "Distributed containment control for double-integrator dynamics: Algorithms and experiments," in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, 2010, pp. 3830–3835.
- [23] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh, and M. Baradarannia, "Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems," *Automatica*, vol. 54, pp. 210–216, 2015.
- [24] J. Hu, J. Yu, and J. Cao, "Distributed containment control for nonlinear multi-agent systems with time-delayed protocol," *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 2, pp. 747–756, 2016.
- [25] G. Wen, Y. Zhao, Z. Duan, W. Yu, and G. Chen, "Containment of higher-order multi-leader multi-agent systems: A dynamic output approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 4, pp. 1135–1140, 2016.
- [26] J. Qin, W. X. Zheng, H. Gao, Q. Ma, and W. Fu, "Containment control for second-order multiagent systems communicating over heterogeneous networks," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 28, no. 9, pp. 2143–2155, 2017.
- [27] F. Wang, Z. Liu, and Z. Chen, "Distributed containment control for second-order multiagent systems with time delay and intermittent communication," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 18, pp. 5730–5746, 2018.

- [28] F. Wang, Y. Ni, Z. Liu, and Z. Chen, “Containment control for general second-order multiagent systems with switched dynamics,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 50, no. 2, pp. 550–560, 2020.
- [29] F. Chen, W. Ren, W. Lan, and G. Chen, “Distributed average tracking for reference signals with bounded accelerations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 3, pp. 863–869, 2014.
- [30] F. Chen, G. Feng, L. Liu, and W. Ren, “Distributed average tracking of networked Euler-Lagrange systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 2, pp. 547–552, 2015.
- [31] S. Ghapani, W. Ren, F. Chen, and Y. Song, “Distributed average tracking for double-integrator multi-agent systems with reduced requirement on velocity measurements,” *Automatica*, vol. 81, pp. 1–7, 2017.
- [32] Y. Zhao, Y. Liu, Z. Li, and Z. Duan, “Distributed average tracking for multiple signals generated by linear dynamical systems: An edge-based framework,” *Automatica*, vol. 75, pp. 158–166, 2017.
- [33] H. Hong, W. Yu, X. Yu, G. Wen, and A. Alsaedi, “Fixed-time connectivity-preserving distributed average tracking for multiagent systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 64, no. 10, pp. 1192–1196, 2017.
- [34] Y. Zhao, Y. Liu, G. Wen, and T. Huang, “Finite-time distributed average tracking for second-order nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 30, no. 6, pp. 1780–1789, 2019.
- [35] S. Ghapani, S. Rahili, and W. Ren, “Distributed average tracking of physical second-order agents with heterogeneous unknown nonlinear dynamics without constraint on input signals,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, no. 3, pp. 1178–1184, 2019.
- [36] D. P. Spanos, R. Olfati-Saber, and R. M. Murray, “Dynamic consensus on mobile networks,” in *IFAC World Congress*, 2005, pp. 1–6.
- [37] S. S. Kia, J. Cortés, and S. Martínez, “Distributed event-triggered communication for dynamic average consensus in networked systems,” *Automatica*, vol. 59, pp. 112–119, 2015.
- [38] S. S. Kia, B. Van Scy, J. Cortés, R. A. Freeman, K. M. Lynch, and S. Martinez, “Tutorial on dynamic average consensus: The problem, its applications, and the algorithms,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 39, no. 3, pp. 40–72, 2019.
- [39] F. Chen and W. Ren, “A connection between dynamic region-following formation control and distributed average tracking,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 48, no. 6, pp. 1760–1772, 2018.
- [40] S. Rahili and W. Ren, “Distributed continuous-time convex optimization with time-varying cost functions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 4, pp. 1590–1605, 2017.
- [41] Y. Hong and X. Wang, “Multi-agent tracking of a high-dimensional active leader with switching topology,” *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 22, no. 4, pp. 722–731, 2009.

- [42] G. Wen, T. Huang, W. Yu, Y. Xia, and Z. Liu, "Cooperative tracking of networked agents with a high-dimensional leader: Qualitative analysis and performance evaluation," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 48, no. 7, pp. 2060–2073, 2018.
- [43] G. Wen, W. Yu, Z. Li, X. Yu, and J. Cao, "Neuro-adaptive consensus tracking of multiagent systems with a high-dimensional leader," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 7, pp. 1730–1742, 2017.
- [44] Y. Q. Chen and Z. Wang, "Formation control: a review and a new consideration," in *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot and Systems (IROS)*. IEEE, 2005, pp. 3664–3669.
- [45] W. Ren and Y. Cao, *Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [46] K.-K. Oh, M.-C. Park, and H.-S. Ahn, "A survey of multi-agent formation control," *Automatica*, vol. 53, pp. 424–440, 2015.
- [47] W. Ren, "Consensus based formation control strategies for multi-vehicle systems," in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2006, pp. 4237–4242.
- [48] M. A. Lewis and K.-H. Tan, "High precision formation control of mobile robots using virtual structures," *Autonomous Robots*, vol. 4, no. 4, p. 387–403, 1997.
- [49] "Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 35, no. 1, pp. 495 – 500, 2002.
- [50] C.-L. Liu and Y.-P. Tian, "Formation control of multi-agent systems with heterogeneous communication delays," *International Journal of Systems Science*, vol. 40, no. 6, pp. 627–636, 2009.
- [51] F. Xiao, L. Wang, J. Chen, and Y. Gao, "Finite-time formation control for multi-agent systems," *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2605–2611, 2009.
- [52] X. Dong, J. Xi, G. Lu, and Y. Zhong, "Formation control for high-order linear time-invariant multiagent systems with time delays," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 1, no. 3, pp. 232–240, 2014.
- [53] X. Dong, Y. Li, C. Lu, G. Hu, Q. Li, and Z. Ren, "Time-varying formation tracking for UAV swarm systems with switching directed topologies," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 30, no. 12, pp. 3674–3685, 2019.
- [54] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, and Y. Zhong, "Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 6, pp. 5014–5024, 2017.
- [55] J. Yu, X. Dong, Q. Li, and Z. Ren, "Practical time-varying formation tracking for second-order nonlinear multiagent systems with multiple leaders using adaptive neural networks," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 29, no. 12, pp. 6015–6025, 2018.
- [56] S. Zuo, Y. Song, F. L. Lewis, and A. Davoudi, "Time-varying output formation containment of general linear homogeneous and heterogeneous multiagent systems," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 537–548, 2019.

- [57] X. Dong and G. Hu, “Time-varying formation control for general linear multi-agent systems with switching directed topologies,” *Automatica*, vol. 73, pp. 47–55, 2016.
- [58] X. Ge, Q.-L. Han, and X.-M. Zhang, “Achieving cluster formation of multi-agent systems under aperiodic sampling and communication delays,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65, no. 4, pp. 3417–3426, 2018.
- [59] Y. Liu and Y. Jia, “An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 1, pp. 148–154, 2012.
- [60] G. Wen, C. P. Chen, J. Feng, and N. Zhou, “Optimized multi-agent formation control based on an identifier–actor–critic reinforcement learning algorithm,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 5, pp. 2719–2731, 2018.
- [61] A.-M. Zou and K. D. Kumar, “Neural network-based adaptive output feedback formation control for multi-agent systems,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, no. 2, pp. 1283–1296, 2012.
- [62] J. Lü, F. Chen, and G. Chen, “Nonsmooth leader-following formation control of nonidentical multi-agent systems with directed communication topologies,” *Automatica*, vol. 64, pp. 112–120, 2016.
- [63] C. Wang, Z. Zuo, Q. Gong, and Z. Ding, “Formation control with disturbance rejection for a class of lipschitz nonlinear systems,” *Science China-Information Sciences*, vol. 60, no. 7, pp. 070202:1–070202:11, 2017.
- [64] J. Yu, X. Dong, Q. Li, and Z. Ren, “Time-varying formation tracking for high-order multi-agent systems with switching topologies and a leader of bounded unknown input,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no. 5, pp. 2808–2825, 2018.
- [65] 洪奕光, “分布式优化:算法设计和收敛性分析,” *控制理论与应用*, no. 7, pp. 32–39, 2014.
- [66] Z. Li, Z. Ding, J. Sun, and Z. Li, “Distributed adaptive convex optimization on directed graphs via continuous-time algorithms,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 5, pp. 1434–1441, 2017.
- [67] S. S. Kia, “Distributed optimal in-network resource allocation algorithm design via a control theoretic approach,” *Systems & Control Letters*, vol. 107, pp. 49–57, 2017.
- [68] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers,” *Foundations & Trends in Machine Learning*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2010.
- [69] A. Nedić and A. Ozdaglar, “Distributed subgradient methods for multi-agent optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, 2009.
- [70] A. Nedić, A. Ozdaglar, and P. A. Parrilo, “Constrained consensus and optimization in multi-agent networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 4, pp. 922–938, 2010.
- [71] A. Falsone, K. Margellos, S. Garatti, and M. Prandini, “Dual decomposition for multi-agent distributed optimization with coupling constraints,” *Automatica*, vol. 84, pp. 149 – 158, 2017.

- [72] Q. Liu and J. Wang, “A second-order multi-agent network for bound-constrained distributed optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 12, pp. 3310–3315, 2015.
- [73] Q. Liu, S. Yang, and J. Wang, “A collective neurodynamic approach to distributed constrained optimization,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 28, no. 8, pp. 1747–1758, 2017.
- [74] B. Gharesifard and J. Cortés, “Distributed continuous-time convex optimization on weight-balanced digraphs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 3, pp. 781–786, 2013.
- [75] B. Touri and B. Gharesifard, “A modified saddle-point dynamics for distributed convex optimization on general directed graphs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 7, pp. 3098–3103, 2020.
- [76] S. Pu, W. Shi, J. Xu, and A. Nedić, “A push-pull gradient method for distributed optimization in networks,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2018, pp. 3385–3390.
- [77] R. Xin and U. A. Khan, “A linear algorithm for optimization over directed graphs with geometric convergence,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 2, no. 3, pp. 315–320, 2018.
- [78] J. Wang and N. Elia, “A control perspective for centralized and distributed convex optimization,” in *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 2011, pp. 3800–3805.
- [79] Y. Zhao, Y. Liu, G. Wen, and G. Chen, “Distributed optimization for linear multiagent systems: Edge- and node-based adaptive designs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 7, pp. 3602–3609, 2017.
- [80] Z. Feng, G. Hu, and C. G. Cassandras, “Finite-time distributed convex optimization for continuous-time multiagent systems with disturbance rejection,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 7, no. 2, pp. 686–698, 2020.
- [81] X. Wang, G. Wang, and S. Li, “Distributed finite-time optimization for integrator chain multiagent systems with disturbances,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 12, pp. 5296–5311, 2020.
- [82] G. Chen and Z. Li, “A fixed-time convergent algorithm for distributed convex optimization in multi-agent systems,” *Automatica*, vol. 95, pp. 539 – 543, 2018.
- [83] S. Liang, X. Zeng, and Y. Hong, “Distributed sub-optimal resource allocation over weight-balanced graph via singular perturbation,” *Automatica*, vol. 95, pp. 222 – 228, 2018.
- [84] T. Ibaraki and N. Katoh, *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1988.
- [85] Q. Liu, X. Le, and K. Li, “A distributed optimization algorithm based on multiagent network for economic dispatch with region partitioning,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, doi: 10.1109/TCYB.2019.2948424.

- [86] A. Cherukuri and J. Cortés, “Initialization-free distributed coordination for economic dispatch under varying loads and generator commitment,” *Automatica*, vol. 74, pp. 183 – 193, 2016.
- [87] Z. Deng, S. Liang, and Y. Hong, “Distributed continuous-time algorithms for resource allocation problems over weight-balanced digraphs,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 48, no. 11, pp. 3116–3125, 2018.
- [88] L. Bai, C. Sun, Z. Feng, and G. Hu, “Distributed continuous-time resource allocation with time-varying resources under quadratic cost functions,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2018, pp. 823–828.
- [89] Y. Zhu, W. Ren, W. Yu, and G. Wen, “Distributed resource allocation over directed graphs via continuous-time algorithms,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, pp. 1–10, 2019, doi: 10.1109/TSMC.2019.2894862.
- [90] Q. Liu, S. Yang, and Y. Hong, “Constrained consensus algorithms with fixed step size for distributed convex optimization over multiagent networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 8, pp. 4259–4265, 2017.
- [91] P. Lin, W. Ren, and J. A. Farrell, “Distributed continuous-time optimization: nonuniform gradient gains, finite-time convergence, and convex constraint set,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 5, pp. 2239–2253, 2017.
- [92] D. Varagnolo, F. Zanella, A. Cenedese, G. Pillonetto, and L. Schenato, “Newton-raphson consensus for distributed convex optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 4, pp. 994–1009, 2016.
- [93] P. Yi, Y. Hong, and F. Liu, “Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems,” *Automatica*, vol. 74, pp. 259 – 269, 2016.
- [94] B. Gharesifard, T. Başar, and A. D. Domínguez-García, “Price-based coordinated aggregation of networked distributed energy resources,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 10, pp. 2936–2946, 2016.
- [95] Z. Li and Z. Ding, “Distributed multiobjective optimization for network resource allocation of multiagent systems,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, doi: 10.1109/TCYB.2019.2961475.
- [96] C. Li, X. Yu, T. Huang, and X. He, “Distributed optimal consensus over resource allocation network and its application to dynamical economic dispatch,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 29, no. 6, pp. 2407–2418, 2018.
- [97] A. Nedić, A. Olshevsky, and W. Shi, “Improved convergence rates for distributed resource allocation,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2018, pp. 172–177.
- [98] H. Yun, H. Shim, and H.-S. Ahn, “Initialization-free privacy-guaranteed distributed algorithm for economic dispatch problem,” *Automatica*, vol. 102, pp. 86 – 93, 2019.
- [99] P. Dai, W. Yu, G. Wen, and S. Baldi, “Distributed reinforcement learning algorithm for dynamic economic dispatch with unknown generation cost functions,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 16, no. 4, pp. 2258–2267, 2020.

- [100] S. S. Kia, J. Cortés, and S. Martínez, “Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication,” *Automatica*, vol. 55, pp. 254–264, 2015.
- [101] A. Das and F. L. Lewis, “Distributed adaptive control for synchronization of unknown nonlinear networked systems,” *Automatica*, vol. 46, no. 12, pp. 2014–2021, 2010.
- [102] C. P. Chen, G.-X. Wen, Y.-J. Liu, and F.-Y. Wang, “Adaptive consensus control for a class of nonlinear multiagent time-delay systems using neural networks,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 25, no. 6, pp. 1217–1226, 2014.
- [103] W. Yu, P. DeLellis, G. Chen, M. Di Bernardo, and J. Kurths, “Distributed adaptive control of synchronization in complex networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2153–2158, 2012.
- [104] W. Yu, J. Lu, X. Yu, and G. Chen, “Distributed adaptive control for synchronization in directed complex networks,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 53, no. 5, pp. 2980–3005, 2015.
- [105] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and L. Xie, “Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols,” *Automatica*, vol. 49, no. 7, pp. 1986–1995, 2013.
- [106] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and M. Fu, “Consensus of multi-agent systems with general linear and lipschitz nonlinear dynamics using distributed adaptive protocols,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 7, pp. 1786–1791, 2013.
- [107] Z. Li, G. Wen, Z. Duan, and W. Ren, “Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 4, pp. 1152–1157, 2015.
- [108] B. Cheng and Z. Li, “Fully distributed event-triggered protocols for linear multi-agent networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, no. 4, pp. 1655–1662, 2019.
- [109] G. Wen, G. Hu, Z. Zuo, Y. Zhao, and J. Cao, “Robust containment of uncertain linear multi-agent systems under adaptive protocols,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 12, pp. 2053–2069, 2017.
- [110] R. Wang, X. Dong, Q. Li, and Z. Ren, “Distributed adaptive control for time-varying formation of general linear multi-agent systems,” *International Journal of Systems Science*, vol. 48, no. 16, pp. 3491–3503, 2017.
- [111] D. Yue, Q. Li, J. Cao, and X. Tan, “Robust neuro-adaptive asymptotic consensus for a class of uncertain multi-agent systems: An edge-based paradigm,” in *International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, 2019, pp. 1–7.
- [112] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*. Springer, 2008.
- [113] C. W. Wu and L. O. Chua, “Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 42, no. 8, pp. 430–447, 1995.

- [114] Z. Yu, D. Huang, H. Jiang, C. Hu, and W. Yu, “Distributed consensus for multiagent systems via directed spanning tree based adaptive control,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 56, no. 3, pp. 2189–2217, 2018.
- [115] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge university press, 1990.
- [116] W. Yu, G. Chen, M. Cao, and J. Kurths, “Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Cybernetics*, vol. 40, no. 3, pp. 881–891, 2010.
- [117] J. Mei, W. Ren, and J. Chen, “Distributed consensus of second-order multi-agent systems with heterogeneous unknown inertias and control gains under a directed graph,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 8, pp. 2019–2034, 2016.
- [118] F. Bullo, J. Cortés, and S. Martinez, *Distributed Control of Robotic Networks*. Princeton University Press, 2009.
- [119] A. Stanoev and D. Smirkov, “Consensus theory in networked systems,” in *Consensus and Synchronization in Complex Networks*. Springer, 2013, pp. 1–22.
- [120] J. Park and I. W. Sandberg, “Universal approximation using radial-basis-function networks,” *Neural Computation*, vol. 3, no. 2, pp. 246–257, 1991.
- [121] H. K. Khalil and J. W. Grizzle, *Nonlinear systems*. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002, vol. 3.
- [122] Z. Peng, D. Wang, H. Zhang, and G. Sun, “Distributed neural network control for adaptive synchronization of uncertain dynamical multiagent systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 25, no. 8, pp. 1508–1519, 2014.
- [123] S. El-Ferik, H. A. Hashim, and F. L. Lewis, “Neuro-adaptive distributed control with prescribed performance for the synchronization of unknown nonlinear networked systems,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 48, no. 12, pp. 2135–2144, 2018.
- [124] G. Wen, P. Wang, T. Huang, W. Yu, and J. Sun, “Robust neuro-adaptive containment of multileader multiagent systems with uncertain dynamics,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 49, no. 2, pp. 406–417, 2019.
- [125] A. Das and F. L. Lewis, “Cooperative adaptive control for synchronization of second-order systems with unknown nonlinearities,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 13, pp. 1509–1524, 2011.
- [126] H. Zhang and F. L. Lewis, “Adaptive cooperative tracking control of higher-order nonlinear systems with unknown dynamics,” *Automatica*, vol. 48, no. 7, pp. 1432–1439, 2012.
- [127] S. El-Ferik, A. Qureshi, and F. L. Lewis, “Neuro-adaptive cooperative tracking control of unknown higher-order affine nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 798–808, 2014.

- [128] Z. Li, Z. Duan, and F. L. Lewis, “Distributed robust consensus control of multi-agent systems with heterogeneous matching uncertainties,” *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 883–889, 2014.
- [129] Y. Zhao, G. Wen, Z. Duan, and G. Chen, “Adaptive consensus for multiple nonidentical matching nonlinear systems: An edge-based framework,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 62, no. 1, pp. 85–89, 2015.
- [130] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018.
- [131] G. Wen, C. P. Chen, Y.-J. Liu, and Z. Liu, “Neural network-based adaptive leader-following consensus control for a class of nonlinear multiagent state-delay systems,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 8, pp. 2151–2160, 2017.
- [132] Z. Li, X. Liu, W. Ren, and L. Xie, “Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 2, pp. 518–523, 2013.
- [133] B. S. Heck and A. A. Ferri, “Application of output feedback to variable structure systems,” vol. 12, no. 6, 1989, pp. 932–935.
- [134] Y. Zhao, Y. Liu, G. Wen, X. Yu, and G. Chen, “Distributed average tracking for lipschitz-type of nonlinear dynamical systems,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 49, no. 12, pp. 4140–4152, 2019.
- [135] E. D. Sontag, “Input to state stability: Basic concepts and results,” in *Nonlinear and optimal control theory*. Springer, 2008, pp. 163–220.
- [136] Y.-P. Tian and C.-L. Liu, “Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2122–2128, 2008.
- [137] N. Mu, X. Liao, and T. Huang, “Event-based consensus control for a linear directed multiagent system with time delay,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 62, no. 3, pp. 281–285, 2015.
- [138] Y. Tang, H. Gao, W. Zhang, and J. Kurths, “Leader-following consensus of a class of stochastic delayed multi-agent systems with partial mixed impulses,” *Automatica*, vol. 53, pp. 346–354, 2015.
- [139] G. Wen, Y. Yu, Z. Peng, and H. Wang, “Dynamical group consensus of heterogeneous multi-agent systems with input time delays,” *Neurocomputing*, vol. 175, pp. 278–286, 2016.
- [140] Y. Chen and Y. Shi, “Consensus for linear multiagent systems with time-varying delays: A frequency domain perspective,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 8, pp. 2143–2150, 2017.
- [141] X. Tan, J. Cao, X. Li, and A. Alsaedi, “Leader-following mean square consensus of stochastic multi-agent systems with input delay via event-triggered control,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 12, no. 2, pp. 299–309, 2017.
- [142] G.-X. Wen, C. P. Chen, Y.-J. Liu, and Z. Liu, “Neural-network-based adaptive leader-following consensus control for second-order non-linear multi-agent systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 9, no. 13, pp. 1927–1934, 2015.

- [143] C. P. Chen, G.-X. Wen, Y.-J. Liu, and Z. Liu, “Observer-based adaptive backstepping consensus tracking control for high-order nonlinear semi-strict-feedback multiagent systems,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 46, no. 7, pp. 1591–1601, 2016.
- [144] X. Liu, D. W. Ho, J. Cao, and W. Xu, “Discontinuous observers design for finite-time consensus of multiagent systems with external disturbances,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 28, no. 11, pp. 2826–2830, 2017.
- [145] S. S. Ge, F. Hong, and T. H. Lee, “Adaptive neural control of nonlinear time-delay systems with unknown virtual control coefficients,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Cybernetics*, vol. 34, no. 1, pp. 499–516, 2004.
- [146] M. S. Mahmoud, *Robust Control and Filtering for Time-delay Systems*. CRC Press, 2000.
- [147] H. Zhang, F. L. Lewis, and Z. Qu, “Lyapunov, adaptive, and optimal design techniques for cooperative systems on directed communication graphs,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 7, pp. 3026–3041, 2012.
- [148] Y. Zhao, Q. Duan, G. Wen, D. Zhang, and B. Wang, “Time-varying formation for general linear multiagent systems over directed topologies: A fully distributed adaptive technique,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018.
- [149] W. Yu, W. Ren, W. X. Zheng, G. Chen, and J. Lü, “Distributed control gains design for consensus in multi-agent systems with second-order nonlinear dynamics,” *Automatica*, vol. 49, no. 7, pp. 2107–2115, 2013.
- [150] W. H. Yang, “On generalized holder inequality,” *Nonlinear Analysis-Theory, Methods & Applications*, vol. 16, no. 5, pp. 489–498, 1991.
- [151] F. Lewis, S. Jagannathan, and A. Yesildirak, *Neural network control of robot manipulators and non-linear systems*. CRC Press, 1998.
- [152] Y. Lv, Z. Li, Z. Duan, and G. Feng, “Novel distributed robust adaptive consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs and external disturbances,” *International Journal of Control*, vol. 90, no. 2, pp. 137–147, 2017.
- [153] J. Hu, P. Bhowmick, and A. Lanzon, “Distributed adaptive time-varying group formation tracking for multiagent systems with multiple leaders on directed graphs,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 7, no. 1, pp. 140–150, 2020.
- [154] Z. Yu, H. Jiang, D. Huang, and C. Hu, “Directed spanning tree-based adaptive protocols for second-order consensus of multiagent systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 6, pp. 2172–2190, 2018.
- [155] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994, vol. 15.
- [156] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley New York, 1995.

- [157] L. Brinón-Arranz, A. Seuret, and C. Canudas-de Wit, “Cooperative control design for time-varying formations of multi-agent systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 8, pp. 2283–2288, 2014.
- [158] A. Priolo, A. Gasparri, E. Montijano, and C. Sagües, “A decentralized algorithm for balancing a strongly connected weighted digraph,” in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2013, pp. 6547–6552.
- [159] B. Gharesifard and J. Cortés, “Distributed strategies for making a digraph weight-balanced,” in *Proceedings of the Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, 2009, pp. 771–777.
- [160] A. I. Rikos, T. Charalambous, and C. N. Hadjicostis, “Distributed weight balancing over digraphs,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 190–201, 2014.
- [161] A. I. Rikos and C. N. Hadjicostis, “Distributed integer weight balancing in the presence of time delays in directed graphs,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 5, no. 3, pp. 1300–1309, 2018.
- [162] T. Tatarenko and B. Touri, “Non-convex distributed optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 8, pp. 3744–3757, 2017.
- [163] P. Humblet, “A distributed algorithm for minimum weight directed spanning trees,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 31, no. 6, pp. 756–762, 1983.
- [164] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
- [165] J. W. Simpson-Porco, B. K. Poolla, N. Monshizadeh, and F. Dörfler, “Input-output performance of linear-quadratic saddle-point algorithms with application to distributed resource allocation problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 5, pp. 2032–2045, 2020.
- [166] H. Li, Q. Lü, and T. Huang, “Convergence analysis of a distributed optimization algorithm with a general unbalanced directed communication network,” *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, vol. 6, no. 3, pp. 237–248, 2019.
- [167] J. Zhang, K. You, and K. Cai, “Distributed dual gradient tracking for resource allocation in unbalanced networks,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 68, pp. 2186–2198, 2020.
- [168] J. Mei, W. Ren, J. Chen, and B. D. O. Anderson, “Consensus of linear multi-agent systems with fully distributed control gains under a general directed graph,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2014, pp. 2993–2998.

附录 A 博士期间撰写和发表的论文

一、发表的期刊论文列表：

- [1]. Dongdong Yue, Jinde Cao, Qi Li, and Xinli Shi. Neuro-adaptive consensus strategy for a class of nonlinear time-delay multi-agent systems with an unmeasurable high-dimensional leader. *IET Control Theory & Applications*, 13(2): 230–238, 2019. (SCI 收录)
- [2]. Dongdong Yue, Jinde Cao, Qi Li, and Mahmoud Abdel-Aty. Distributed neuro-adaptive formation control for uncertain multi-agent systems: node- and edge-based designs. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 7(4): 2656–2666, 2020. (SCI 收录)
- [3]. Dongdong Yue, Qi Li, Kil To Chong, and Jinde Cao. Neural-network-embedded distributed average tracking of agents with matching unknown nonlinearities. *Asian Journal of Control*, Doi: 10.1002/asjc.2365. (SCI 收录)
- [4]. Dongdong Yue, Jinde Cao, Qi Li, and Qingshan Liu. Neural-network-based fully distributed adaptive consensus for a class of uncertain multiagent systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Doi: 10.1109/TNNLS.2020.3009098. (SCI 收录)
- [5]. Dongdong Yue, Simone Baldi, Jinde Cao, Qi Li, and Bart De Schutter. A directed spanning tree adaptive control solution to time-varying formations. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, Doi: 10.1109/TCNS.2021.3050332. (SCI 收录)

二、在审的期刊论文列表：

- [1]. Dongdong Yue, Simone Baldi, Jinde Cao, and Bart De Schutter. Distribut-

ed adaptive optimization with weight-balancing. Submitted to IEEE Transactions on Automatic Control, conditionally accepted.

[2]. **Dongdong Yue**, Simone Baldi, Jinde Cao, Qi Li, and Bart De Schutter. Distributed adaptive resource allocation over digraphs: an uncertain saddle-point dynamics viewpoint. Submitted to IEEE Transactions on Network Science and Engineering.

三、发表的会议论文列表:

[1]. **Dongdong Yue**, Qi Li, Jinde Cao, and Xuegang Tan. Robust neuro-adaptive asymptotic consensus for a class of uncertain multi-agent systems: an edge-based paradigm. *2019 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, pp. 1-7, Budapest, Hungary. (EI 收录)

[2]. Xuegang Tan, Jinde Cao, Rensi Chen, and **Dongdong Yue**. The event-based consensus of multi-agent networks with control gain in normal distribution. In *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 5990-5994, Guangzhou, China. (EI 收录)

[3]. **Dongdong Yue**, Simone Baldi, Jinde Cao, Qi Li, and Bart De Schutter. A directed spanning tree adaptive control framework for time-varying formations. (Abstract). In *39th Benelux Meeting on Systems and Control*, pp. 74, Elspeet, The Netherlands.

附录 B 博士期间主持和参加的科研项目、学术会议和获得的荣誉

一、博士期间主持和参加的科研项目：

1. 主持江苏省2019年度普通高校研究生科研创新计划项目 (No. KYCX19_0086),
2019.03-2020.03
项目名称：“非确定性网络系统的分布式自适应控制”
2. 参与江苏省产业前瞻与共性关键技术重点研发项目 (No. BE2017157), 2017.06-
2020.06
项目名称：“基于深度学习的钢企智慧物流系统研发”
3. 参与国家自然科学基金重点项目 (No. 61833005), 2018.01-2022.12
项目名称：“基于群体智能的分布式优化理论、方法及应用研究”
4. 参与国家自然科学基金面上项目 (No. 61876036), 2019.01-2022.12
项目名称：“基于模型分解和群集神经动力学网络的分布式优化算法研究”

二、博士期间参加的学术会议与学术论坛：

1. 2018 年 05 月，第 14 届中国网络科学论坛，南京，江苏
2. 2018 年 07 月，南京大学数据驱动决策暑期学校，南京，江苏
3. 2018 年 10 月，2018 年国际复杂系统与网络论坛，南京，江苏
4. 2019 年 07 月，2019 年国际神经网络联席会议，布达佩斯，匈牙利，并作 15 分钟英文报告
5. 2020 年 03 月，第 39 届比荷卢系统与控制会议，埃佩斯特，荷兰，并作 15 分钟英文报告
6. 2020 年 05 月，第 16 届中国网络科学论坛，云端，并作 15 分钟线上报告

三、博士期间科研工作经历:

1. 2017年08月–2019年04月, 科远智慧科技集团股份有限公司(SCIYON), 南京, 产学研合作算法研究员: 数据驱动的工业过程故障诊断
2. 2019年05月–2019年08月, 冈山县立大学(OPU), 系统工程系, 冈山, 日本, 访问学者, 合作导师: 忻欣
3. 2019年10月–2020年10月, 代尔夫特理工大学(TUD), 系统与控制中心, 代尔夫特, 荷兰, 公派联合培养博士, 合作导师: Bart De Schutter, Simone Baldi

四、博士期间获得的荣誉:

1. 2017年10月, 东南大学“学业奖学金”二等奖
2. 2019年10月, 东南大学教育基金会奖学金
3. 2020年10月, 博士研究生“国家奖学金”

附录 C 致谢

2015年夏末，我与合肥工业大学数学学院其余三位应届本科毕业生共同经过推免，叩开了东南大学这所百年学府的大门，进入数学学院复杂系统与网络科学研究中心攻读硕士学位。后来，其余三位校友毕业相继走上工作岗位，反倒是本科期间相对最“不学无术”的我选择了攻读博士学位。我于2017年年初由东大数学学院跨学科进入自动化学院硕博连读，从九龙湖校区的九曲桥畔走到四牌楼校区的大礼堂前，逐步完成了一个从“学生”到“研究生”的蜕变。

衷心感谢我的两位导师李奇教授和曹进德教授，我在科研道路上前进的每一步都离不开两位老师的 support 和帮助。李老师为我提供了优质的科研平台和宝贵的产学研合作机会。在我科研工作进展并不顺利的时候，李老师安慰我“任何一个方向只要深入进去一定会有收获”。在我有了一定的研究经验之后，他鼓励我“走出去”积极进行国际合作交流，并资助我赴日本冈山县立大学进行了为期三个月的短期访问。科研之外，李老师对于我生活上的照顾也是无微不至的，经常关切地询问我生活费是否够用，生活中有没有困难等。在我博士后期远在异国他乡学习的时候，李老师也会偶尔打来电话关心我的生活与工作情况。李老师乐业敬业的精神、丰富的产学研经验和令人如沐春风般的指导风格将继续伴我走上工作岗位。曹老师是我科研道路上的领路人。记得当我犹豫要不要转博士时，曹老师看出了我的顾虑，鼓励我跳出舒适圈，同时表示将共同指导我的博士论文工作，这些话给了我最终选择攻读博士的勇气。当我在博士前期迷茫、焦虑、科研不得其法的时候，曹老师鼓励我要“学术与实践两条腿走路”、“多读、多学、多问、多做”，同时建议我寻找自己的兴趣点并坚持下去。之后，我找准方向，终于在不久后完成了第一篇学术论文的写作，并在两位老师的指导下顺利投稿发表，迈出了科研道路上的第一步。生活中，曹老师对我也是十分关怀。记得当我遇到科研瓶颈期的时候，接连失眠是常态。或许是因为我在社交平台上分享过一两次失眠的动态，曹老师很关切地询问并嘱咐我注意劳逸结合。看似很简单的话语，但对于当时的我而言犹如灵丹妙药，失眠的问题很快消失。类似的细节数不胜数，曹

老师严谨的治学态度、乐观豁达的生活作风、张弛有度的指导风格将使我受益终身。

在博士研究后期，我有幸获得国家留学基金委和东南大学教育基金会资助，远赴荷兰代尔夫特理工大学系统控制中心进行为期一年的联合培养。在此向我的两位外导 Bart De Schutter 教授以及 Simone Baldi 教授表示衷心的感谢。Bart 作为中心主任，公务繁忙，但仍然坚持每两周与我进行时一个小时的会议；同时 Simone 每两周也会安排与我的一次会议；而平均每月三人至少围绕我的研究进展共同开一次“三方会议”；这样我几乎每周都能得到外导的反馈！在感受到一定压力的同时，我更多地觉得自己十分幸运。两位外导对我的论文草稿修改的效率、细致程度，以及专业精神更是让我感动。如当我完成第一篇文章初稿的时候，Bart 请我把文章修改成双倍行距，然后打印出来给他。乍一听我一头雾水，后来很快反应过来，这样方便他在行文的间隙随时标注和修改！果然，在收到他递回的稿件时，每一页已经被红墨水铺满。外导 Simone 的工作效率是惊人的，常常我下午给他发一版稿件，他到晚上甚至凌晨即会回复详细的意见和建议。再如有关分布式自适应优化的稿件由 Simone 和 Bart 前后修改了十余版，再经国内导师审查后，方才投稿到了一本控制领域权威期刊 IEEE 自动控制杂志。两位外导的专业精神将永远激励着我。

感谢日本冈山县立大学忻欣教授（现东南大学教授）在我赴日短期访学期间对我学术上的点拨和生活上的帮助。忻老师不但学术造诣高，而且平易近人，风趣幽默。感谢南京科远智慧科技股份有限公司大数据团队在我产学研实习期间对我的培养。感谢在日本和荷兰学习期间热心帮助过我的同胞和国际友人们。

感谢东南大学团队刘庆山、虞文武、温广辉、梁金玲、卢剑权、杨绍富、许文盈、胡建强等老师对我科研工作上的指导、启发以及生活上的帮助。感谢团结友爱的课题组兄弟姐妹们，他们包括冒建亮、时欣利、李若霞、魏若宇、万颖、丁小帅、陈仁思、黄群、吕晓晓、谭学刚等。

感谢我的父母和姐姐对我全方位的支持，您们是我最坚强的后盾。感谢在我研究生期间出生的两个小外甥女，每次见到你们我总能将烦恼抛掷脑后，享受亲情的喜悦。感谢我的未婚妻三年多以来与我风雨共济，不离不弃。感谢你对我出国留学决定的理解与支持，以及两地相隔时展现出的坚强与独立。你的出现让我更加完整，我将加倍呵护你，给你一个温暖的家！

最后，感谢母校东南大学对我的栽培！

岳冬冬

2021 年 1 月于东南大学