

# 数值代数作业 C3

刘月婕 PB18010470

2020 年 11 月 15 日

## 1 第一题

### 1.1 QR 分解解三个方程的结果

```
第一题，第一个方程的解为
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0.999999 1 0.999995 1.00001 0.99998 1.00004 0.999919 1.00016 0.999676 1.00065
0.998703 1.00259 0.994813 1.01037 0.979268 1.04142 0.917316 1.16472 0.673157 1.64331
-0.245117 3.32422 -2.98438 6.3125
第一题，第二个方程的解为
1.3464 -0.463959 5.2932 4.532 -0.613191 2.59991 2.61405 8.25957 1.79022 3.83821
5.82764 3.88542 2.31814 5.9332 7.34987 3.56809 8.96924 3.73949 8.6359 0.901474
0.349359 4.60494 1.60128 2.38227 9.57597 -0.142022 -0.155756 8.69958 8.15998 -0.299395
-0.166035 4.95975 3.56856 2.35463 8.88511 4.79425 2.17243 -0.518561 7.01318 0.386809
6.11874 9.42584 -0.377113 9.3453 0.924155 6.41316 6.94429 8.14393 0.616394 6.69213
5.46231 2.68479 1.68982 2.417 3.14018 8.18124 7.04744 6.34439 7.50866 4.56901
8.80123 6.41867 6.01211 0.460198 0.385906 1.68074 1.8067 4.25229 6.67037 6.04399
6.88977 0.0583178 8.52705 2.67116 8.76131 2.7157 3.08173 7.467 4.24831 6.04995
0.252241 3.42765 5.4713 4.85933 -0.0645618 5.78629 2.20164 4.19734 0.824936 7.55329
3.64213 5.02542 7.1037 -0.0623888 7.52019 5.86048 1.87504 2.38915 5.23342 3.27666
第一题，第三个方程的解为
0.999998 1.00024 0.990743 1.14744 -0.185425 6.02095 -8.5316 -3.05105 54.0268 -85.7381
38.7999 1.12245 45.5912 24.1688 -122.166 -62.8096 129.588 193.491 -210.243 3.58405
-182.01 290.155 -22.5724 46.7033 -336.306 157.112 175.455 -105.807 68.9669 -16.1511
-51.4767 -72.7549 -65.1817 97.8081 187.06 -41.1123 -142.828 -45.5972 127.117 -36.3864
```

图 1: QR 分解

### 1.2 第一章节目录运行结果

第一个方程，列主元与真实解最为接近，只有最后三项有偏差；QR 分解前 60 阶均为准确解，后有偏差；不选主元的高斯消去前 34 阶为准确解，

后有偏差。第二个方程，五种方法的解均相同，与精确解相差很小。第三个方程，平方根法无解，改进的平方根法只有前三项与精确解接近，不选主元的高斯消去只有前三项与精确解接近，列主元高斯消去前四项与精确解接近，QR 分解前四项与精确解接近，因而五种方法都不能给出有效的解。

```
第一题, 不选主元
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0.999998 1 0.999992 1.00002 0.999969 1.00006
0.999878 1.00024 0.999512 1.00098 0.998047 1.00391 0.992188 1.01562 0.968752 1.0625
0.875008 1.24998 0.500031 1.99994 -0.999878 4.99976 -6.99951 16.999 -30.998 64.9961
-126.992 256.984 -510.969 1024.94 -2046.87 4096.74 -8190.47 16383.9 -32764.5 65531
-131055 262097 -524127 1.048e+06 -2.09498e+06 4.18586e+06 -8.35533e+06 1.66451e+07 -3.30281e+07 6.50077e+07
-1.25821e+08 2.34867e+08 -4.02629e+08 5.36838e+08
第一题, 列主元
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 0.999999 1 0.999997
```

图 2: 第一个方程不选主元和列主元

```
第二题, 平方根法, 第一个方程
系数矩阵b为
13 2 57 50 1 28 37 87 30 46
66 47 33 69 83 52 97 55 91 18
9 48 23 35 98 8 7 95 90 5
3 53 43 36 96 59 26 4 70 17
71 100 15 94 25 72 84 89 21 73
64 34 22 29 42 92 85 78 86 62
99 79 67 11 6 19 24 51 77 74
75 16 88 44 93 39 41 82 56 65
12 40 63 54 10 60 32 45 20 80
49 61 76 14 81 68 27 31 58 38

该矩阵的解为
1.3464 -0.463959 5.2932 4.532 -0.613191 2.59991 2.61405 8.25957 1.79022 3.83821
5.82764 3.88542 2.31814 5.9332 7.34987 3.56809 8.96924 3.73949 8.6359 0.901474
0.349359 4.60494 1.60128 2.38227 9.57597 -0.142022 -0.155756 8.69958 8.15998 -0.299395
-0.166035 4.95975 3.56856 2.35463 8.88511 4.79425 2.17243 -0.518561 7.01318 0.386809
6.11874 9.42584 -0.377113 9.3453 0.924155 6.41316 6.94429 8.14393 0.616394 6.69213
5.46231 2.68479 1.68982 2.417 3.14018 8.18124 7.04744 6.34439 7.50866 4.56901
8.80123 6.41867 6.01211 0.460198 0.385906 1.68074 1.8067 4.25229 6.67037 6.04399
6.88977 0.0583178 8.52705 2.67116 8.76131 2.7157 3.08173 7.467 4.24831 6.04995
0.252241 3.42765 5.4713 4.85933 -0.0645618 5.78629 2.20164 4.19734 0.824936 7.55329
3.64213 5.02542 7.1037 -0.0623888 7.52019 5.86048 1.87504 2.38915 5.23342 3.27666
```

图 3: 第二个方程平方根法

第二题，改进的平方根法，第一个方程  
系数矩阵b为

```

13 2 57 50 1 28 37 87 30 46
66 47 33 69 83 52 97 55 91 18
9 48 23 35 98 8 7 95 90 5
3 53 43 36 96 59 26 4 70 17
71 100 15 94 25 72 84 89 21 73
64 34 22 29 42 92 85 78 86 62
99 79 67 11 6 19 24 51 77 74
75 16 88 44 93 39 41 82 56 65
12 40 63 54 10 60 32 45 20 80
49 61 76 14 81 68 27 31 58 38

```

该矩阵的解为

```

1.3464 -0.463959 5.2932 4.532 -0.613191 2.59991 2.61405 8.25957 1.79022 3.83821
5.82764 3.88542 2.31814 5.9332 7.34987 3.56809 8.96924 3.73949 8.6359 0.901474
0.349359 4.60494 1.60128 2.38227 9.57597 -0.142022 -0.155756 8.69958 8.15998 -0.299395
-0.166035 4.95975 3.56856 2.35463 8.88511 4.79425 2.17243 -0.518561 7.01318 0.386809
6.11874 9.42584 -0.377113 9.3453 0.924155 6.41316 6.94429 8.14393 0.616394 6.69213
5.46231 2.68479 1.68982 2.417 3.14018 8.18124 7.04744 6.34439 7.50866 4.56901
8.80123 6.41867 6.01211 0.460198 0.385906 1.68074 1.8067 4.25229 6.67037 6.04399
6.88977 0.0583178 8.52705 2.67116 8.76131 2.7157 3.08173 7.467 4.24831 6.04995
0.252241 3.42765 5.4713 4.85933 -0.0645618 5.78629 2.20164 4.19734 0.824936 7.55329
3.64213 5.02542 7.1037 -0.0623888 7.52019 5.86048 1.87504 2.38915 5.23342 3.27666

```

图 4: 第二个方程改进的平方根法

第三题，不选主元Gauss消元，第一个方程

```

1.3464 -0.463959 5.2932 4.532 -0.613191 2.59991 2.61405 8.25957 1.79022 3.83821
5.82764 3.88542 2.31814 5.9332 7.34987 3.56809 8.96924 3.73949 8.6359 0.901474
0.349359 4.60494 1.60128 2.38227 9.57597 -0.142022 -0.155756 8.69958 8.15998 -0.299395
-0.166035 4.95975 3.56856 2.35463 8.88511 4.79425 2.17243 -0.518561 7.01318 0.386809
6.11874 9.42584 -0.377113 9.3453 0.924155 6.41316 6.94429 8.14393 0.616394 6.69213
5.46231 2.68479 1.68982 2.417 3.14018 8.18124 7.04744 6.34439 7.50866 4.56901
8.80123 6.41867 6.01211 0.460198 0.385906 1.68074 1.8067 4.25229 6.67037 6.04399
6.88977 0.0583178 8.52705 2.67116 8.76131 2.7157 3.08173 7.467 4.24831 6.04995
0.252241 3.42765 5.4713 4.85933 -0.0645618 5.78629 2.20164 4.19734 0.824936 7.55329
3.64213 5.02542 7.1037 -0.0623888 7.52019 5.86048 1.87504 2.38915 5.23342 3.27666

```

第三题，列主元Gauss消元，第一个方程

```

1.3464 -0.463959 5.2932 4.532 -0.613191 2.59991 2.61405 8.25957 1.79022 3.83821
5.82764 3.88542 2.31814 5.9332 7.34987 3.56809 8.96924 3.73949 8.6359 0.901474
0.349359 4.60494 1.60128 2.38227 9.57597 -0.142022 -0.155756 8.69958 8.15998 -0.299395
-0.166035 4.95975 3.56856 2.35463 8.88511 4.79425 2.17243 -0.518561 7.01318 0.386809
6.11874 9.42584 -0.377113 9.3453 0.924155 6.41316 6.94429 8.14393 0.616394 6.69213
5.46231 2.68479 1.68982 2.417 3.14018 8.18124 7.04744 6.34439 7.50866 4.56901
8.80123 6.41867 6.01211 0.460198 0.385906 1.68074 1.8067 4.25229 6.67037 6.04399
6.88977 0.0583178 8.52705 2.67116 8.76131 2.7157 3.08173 7.467 4.24831 6.04995
0.252241 3.42765 5.4713 4.85933 -0.0645618 5.78629 2.20164 4.19734 0.824936 7.55329
3.64213 5.02542 7.1037 -0.0623888 7.52019 5.86048 1.87504 2.38915 5.23342 3.27666

```

图 5: 第二个方程不选主元和列主元

```

第二题，平方根法，第二个方程
-5.30739e-16 -9.0318e-14 -1.61113e-12 -1.19976e-11 -5.7511e-11 -2.07184e-10
-6.08993e-10 -1.53568e-09 -3.43285e-09 -6.96251e-09 -1.30294e-08 -2.27992e-08 -3.76814e-08 -5.9303e-08 -8.94455e-08 -1.29995e-07
-1.82852e-07 -2.49862e-07 -3.32712e-07 -4.32896e-07 -5.51614e-07 -6.89733e-07 -8.47753e-07 -1.02577e-06 -1.22345e-06 -1.44005e-06
由于矩阵病态，以上输出无效的Akk, 以下是无效的解
1.96415e+14 -2.31362e+16 6.03608e+17 -5.01927e+18 -5.13412e+18 3.46253e+20 -2.57073e+21 1.00382e+22 -2.43218e+22 3.84062e+22
-3.96672e+22 2.58814e+22 -9.69201e+21 1.59076e+21 -1.82022e+18 3.77758e+17 8.11268e+13 3.64039e+12 3.08135e+11 4.07349e+10
7.25718e+09 1.62484e+09 4.37688e+08 1.3623e+08 4.81702e+07 1.88353e+07 8.06336e+06 3.69811e+06 1.82323e+06 951341
520897 298686 178707 110596 70810 1 46678 3 31636 1 21926 7 15581 3 79919 7

第二题，改进的平方根法，第二个方程
1.00003 0.994927 1.20016 -2.25844 27.1908 -104.419 147.985 396.609 -1891.08 2621.03
-804.517 174.334 -2800.91 937.812 3240.17 1201.7 -1723.22 -6837.18 4279.32 -836.212
7574.24 -4346.32 -2330.18 1450.92 -1525.86 411.367 1415.31 -3864.24 5006.02 -1051.14
-4128.5 3052.79 3279.77 -3579.81 -1404.79 -486.237 1820.35 2397.91 -3053.46 792.299

```

图 6: 第三个方程平方根法和改进的平方根法

```

第三题，不选主元Gauss消元，第二个方程
1 0.999782 1.00951 0.823416 2.7167 -8.59692 32.6272 -56.877 40.7007 48.6039
-118.234 106.696 -74.517 42.1086 15.4826 15.6782 -28.4538 -78.642 99.0434 -61.0471
93.381 -61.9504 -9.04398 91.1563 -65.0043 43.8346 -175.183 38.7058 153.483 -0.694875
-65.6605 51.3813 33.1039 -194.959 75.1504 100.395 -73.5576 60.1729 -52.6182 16.785

第三题，列主元Gauss消元，第二个方程
0.999999 1.00009 0.996432 1.06334 0.411547 4.12549 -8.62672 16.6269 -5.07201 -20.1779
35.6773 -18.6104 4.65339 17.6253 -36.0689 -2.25891 54.8001 -23.0647 -4.98395 -9.23923
12.5628 5.29353 -12.6424 1.95342 10.319 -8.74651 47.6163 -60.6321 -6.51182 45.2902
45.6469 -99.9903 30.911 23.6804 -31.6537 30.0916 8.92173 -6.73858 -16.7634 11.5148

```

图 7: 第三个方程不选主元和列主元

## 2 第二题和第三题

第二题的最小二乘解为  $a = 1, b = 1, c = 1$ , 因而所求二次多项式为  $y = t^2 + t + 1$ 。

第三题参数的最小二乘结果如图。

```

第二题，系数a, b, c分别为
1 1 1
第三题，x0到x11的解为
2.07752 0.718888 9.6802 0.153506 13.6796 1.98683 -0.958225 -0.484023 -0.0736469 1.0187 1.44352 2.90279

```

图 8: 最小二乘解