

目 录

第一章 电路模型和电路定律	1
§ 1-1 电路和电路模型	1
§ 1-2 电流和电压的参考方向	3
§ 1-3 电功率和能量	5
§ 1-4 电路元件	6
§ 1-5 电阻元件	6
§ 1-6 电容元件	9
§ 1-7 电感元件	12
§ 1-8 电压源和电流源	15
§ 1-9 受控电源	17
§ 1-10 基尔霍夫定律	19
习 题	24
第二章 电阻电路的等效变换	31
§ 2-1 引言	31
§ 2-2 电路的等效变换	31
§ 2-3 电阻的串联和并联	32
§ 2-4 电阻的 Y 形连接和 Δ 形连接的等效变换	35
§ 2-5 电压源、电流源的串联和并联	39
§ 2-6 实际电源的两种模型及其等效变换	40
§ 2-7 输入电阻	43
习 题	45
第三章 电阻电路的一般分析	50
§ 3-1 电路的图	50
§ 3-2 KCL 和 KVL 的独立方程数	52
§ 3-3 支路电流法	56
§ 3-4 网孔电流法	58
§ 3-5 回路电流法	61
§ 3-6 结点电压法	66
习 题	73
第四章 电路定理	80
§ 4-1 叠加定理	80

§ 4 - 2 替代定理.....	86
§ 4 - 3 戴维宁定理和诺顿定理.....	88
§ 4 - 4 特勒根定理.....	96
§ 4 - 5 互易定理.....	99
§ 4 - 6 对偶原理	102
习 题	104
第五章 含有运算放大器的电阻电路	111
§ 5 - 1 运算放大器的电路模型	111
§ 5 - 2 比例电路的分析	114
§ 5 - 3 含有理想运算放大器的电路的分析	116
习 题	119
第六章 一阶电路.....	123
§ 6 - 1 动态电路的方程及其初始条件	123
§ 6 - 2 一阶电路的零输入响应	126
§ 6 - 3 一阶电路的零状态响应	132
§ 6 - 4 一阶电路的全响应	137
§ 6 - 5 一阶电路的阶跃响应	141
§ 6 - 6 一阶电路的冲激响应	144
习 题	150
第七章 二阶电路.....	158
§ 7 - 1 二阶电路的零输入响应	158
§ 7 - 2 二阶电路的零状态响应和阶跃响应	166
§ 7 - 3 二阶电路的冲激响应	168
习 题	170
第八章 相量法	173
§ 8 - 1 复数	173
§ 8 - 2 正弦量	176
§ 8 - 3 相量法的基础	179
§ 8 - 4 电路定律的相量形式	183
习 题	187
第九章 正弦稳态电路的分析	190
§ 9 - 1 阻抗和导纳	190
§ 9 - 2 阻抗(导纳)的串联和并联	194
§ 9 - 3 电路的相量图	196
§ 9 - 4 正弦稳态电路的分析	198
§ 9 - 5 正弦稳态电路的功率	201
§ 9 - 6 复功率	205
§ 9 - 7 最大功率传输	208

§ 9 - 8 串联电路的谐振	210
§ 9 - 9 并联谐振电路	216
习 题	218
第十章 含有耦合电感的电路	231
§ 10 - 1 互感	231
§ 10 - 2 含有耦合电感电路的计算	235
§ 10 - 3 空心变压器	239
§ 10 - 4 理想变压器	240
习 题	243
第十一章 三相电路	248
§ 11 - 1 三相电路	248
§ 11 - 2 线电压(电流)与相电压(电流)的关系	251
§ 11 - 3 对称三相电路的计算	252
§ 11 - 4 不对称三相电路的概念	255
§ 11 - 5 三相电路的功率	256
习 题	258
第十二章 非正弦周期电流电路和信号的频谱	263
§ 12 - 1 非正弦周期信号	263
§ 12 - 2 周期函数分解为傅里叶级数	264
§ 12 - 3 有效值、平均值和平均功率	270
§ 12 - 4 非正弦周期电流电路的计算	272
§ 12 - 5 对称三相电路中的高次谐波	275
§ 12 - 6 傅里叶级数的指数形式	277
§ 12 - 7 傅里叶积分简介	280
习 题	282
第十三章 拉普拉斯变换	289
§ 13 - 1 拉普拉斯变换的定义	289
§ 13 - 2 拉普拉斯变换的基本性质	291
§ 13 - 3 拉普拉斯反变换的部分分式展开	295
§ 13 - 4 运算电路	299
§ 13 - 5 应用拉普拉斯变换法分析线性电路	302
习 题	308
第十四章 网络函数	314
§ 14 - 1 网络函数的定义	314
§ 14 - 2 网络函数的极点和零点	316
§ 14 - 3 极点、零点与冲激响应	317
§ 14 - 4 极点、零点与频率响应	320
§ 14 - 5 卷积	325

习 题	326
第十五章 电路方程的矩阵形式	332
§ 15-1 割集	332
§ 15-2 关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵	335
* § 15-3 矩阵 A 、 B_1 、 Q_1 之间的关系	341
§ 15-4 回路电流方程的矩阵形式	342
§ 15-5 结点电压方程的矩阵形式	346
§ 15-6 割集电压方程的矩阵形式	351
* § 15-7 列表法	353
§ 15-8 状态方程	357
习 题	362
第十六章 二端口网络	369
§ 16-1 二端口网络	369
§ 16-2 二端口的方程和参数	370
§ 16-3 二端口的等效电路	379
§ 16-4 二端口的转移函数	381
§ 16-5 二端口的连接	384
§ 16-6 回转器和负阻抗变换器	386
习 题	389
第十七章 非线性电路简介	394
§ 17-1 非线性电阻	394
§ 17-2 非线性电容和非线性电感	399
§ 17-3 非线性电路的方程	401
§ 17-4 小信号分析法	403
§ 17-5 分段线性化方法	406
* § 17-6 工作在非线性范围的运算放大器	410
* § 17-7 二阶非线性电路的状态平面	413
* § 17-8 非线性振荡电路	416
* § 17-9 混沌电路简介	417
* § 17-10 人工神经元电路	420
习 题	422
第十八章 均匀传输线	426
§ 18-1 分布参数电路	426
§ 18-2 均匀传输线及其方程	427
§ 18-3 均匀传输线方程的正弦稳态解	431
§ 18-4 均匀传输线的原参数和副参数	438
§ 18-5 终端接特性阻抗的传输线	442
§ 18-6 终端接任意阻抗的传输线	443

目 录

5

§ 18-7 无损耗传输线.....	446
§ 18-8 无损耗线方程的通解.....	453
§ 18-9 无损耗线的波过程.....	457
习 题	459
附 录 A 磁路和铁心线圈	461
§ A-1 磁场和磁路	461
§ A-2 铁磁物质的磁化曲线	463
§ A-3 磁路的基本定律	465
§ A-4 恒定磁通磁路的计算	467
§ A-5 交变磁通磁路简介	472
§ A-6 铁心线圈	475
习 题	476
附 录 B PSPICE 简介	479
§ B-1 电路的计算机辅助分析	479
§ B-2 PSPICE	482
部分习题答案	487
索引	496
参考书目	502

第一章

电路模型和电路定律

· —— 内容提要 —— ·

本章介绍电路模型的概念,电压、电流参考方向的概念,吸收、发出功率的表达式和计算方法,还将介绍电阻、电容、电感、独立电源和受控电源等电路元件。

不同的电路元件的变量之间具有不同的约束。基尔霍夫定律是集总参数电路的基本定律,包括电流定律和电压定律,分别对相互连接的支路电流之间和相互连接的支路电压之间予以线性约束。这种约束与构成电路的元件性质无关。

§ 1-1 电路和电路模型

人们在工作和生活中时常会遇到一些实际电路。实际电路是为完成某种预期的目的而设计、安装、运行的,由电路器件(例如晶体管)和电路部件(例如电容器、电阻器等)相互连接而成,具有传输电能、处理信号、测量、控制、计算等功能。在实际电路中,电能或电信号的发生器称为电源,用电设备称为负载。电压和电流是在电源的作用下产生的,因此,电源又称为激励源。由激励而在电路中产生的电压和电流称为响应。有时,根据激励和响应之间的因果关系,把激励称为输入,响应称为输出。

有些实际电路十分复杂。例如,电力的产生、输送和分配是通过发电机、变压器、输电线等完成的,形成了一个庞大和复杂的电路或系统。当前,集成电路的应用已渗透到许多领域,集成电路芯片可能小到不大于指甲,但在上面有成千上万个晶体管相互连接成为一个电路或系统。当今,超大规模集成电路的集成度越来越高,就是说在同样大小的硅片上可容纳的器件数目越来越多,可达数百万或更多。前面所谈电路,无论尺寸大小都是比较复杂的,但有些电路非常简单,例如手电筒就是一个很简单的电路。

本书的主要内容是介绍电路理论的入门知识并为后续课程准备必要的基础。电路理论研究电路中发生的电磁现象，并用电流、电荷、电压、磁通等物理量描述其中的过程。电路理论主要用于计算电路中各器件的端子电流和端子间的电压，一般不涉及内部发生的物理过程。本书讨论的电路不是实际电路而是它们的电路模型。实际电路的电路模型是由理想电路元件相互连接而成，理想电路元件是组成电路模型的最小单元，是具有某种确定的电磁性质的假想元件，它是一种理想化的模型并具有精确的数学定义。在一定假设条件下，可用足以反映其中电磁性质的理想电路元件或它们的组合模拟实际电路中的器件。在电路模型中各理想元件的端子是用“理想导线”连接起来的。根据端子的数目，理想电路元件可分为二端、三端、四端元件等等。

图 1-1(a)所示为含有一个电源即干电池，一个负载即小灯珠和两根连接导线的简单电路，其电路模型如图 1-1(b)所示。该图中的电阻元件 R 作为小灯珠的电路模型，干电池用电压源 U_s 和电阻元件 R_s 的串联组合作为模型，连接导线用理想导线(其电阻设为零)或线段表示。

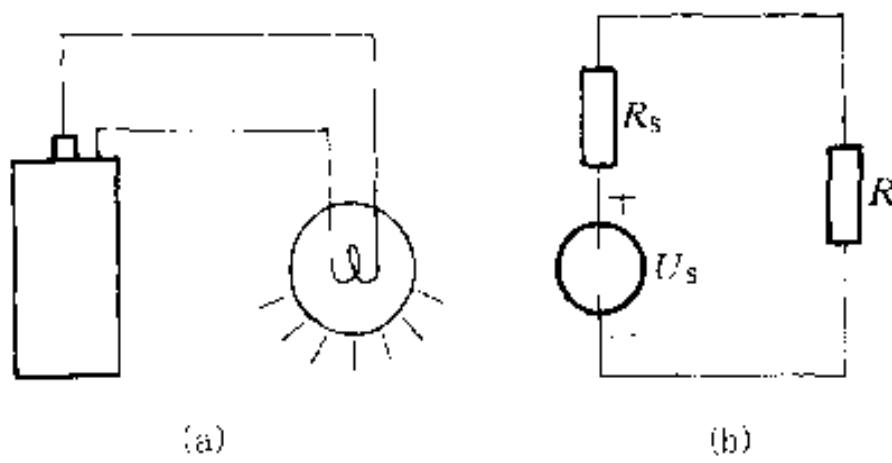


图 1-1 实际电路与电路模型

用理想电路元件或它们的组合模拟实际器件就是建立其模型(简称建模)。建模时必须考虑工作条件，并按不同精确度的要求把给定工作情况下的主要物理现象及功能反映出来。例如，在直流情况下，一个线圈的模型可以是一个电阻元件；在较低频率下，就要用电阻元件和电感元件的串联组合模拟，在较高频率下，还应计及导体表面的电荷作用，即电容效应，所以其模型还需要包含电容元件。可见在不同的条件下，同一实际器件可能采用不同的模型。模型取得恰当，对电路的分析和计算结果就与实际情况接近；模型取得不恰当，则会造成很大误差，有时甚至导致自相矛盾的结果。如果模型取得太复杂就会造成分析的困难；反之，如果取得太简单，就不足以反映所需求解的真实情况。所以建模问题需要专门研究，本书不作介绍。

今后本书所说电路一般均指出理想电路元件构成的抽象电路或电路模型，

而非实际电路。同时将把理想电路元件简称为电路元件。^①

电路理论是一门研究网络^②分析和网络综合或设计的基础工程学科,它与近代系统理论有密切的关系。本书的主要内容是电路分析,探讨电路的基本定律和定理,并讨论各种计算方法,为学习电气工程技术、电子和信息工程技术等建立必要的理论基础。

§ 1-2 电流和电压的参考方向

电路理论中涉及的物理量主要有电流、电压、电荷和磁通,通常用 I 、 U 、 Q 和 Φ 分别表示^③。磁通链用 Ψ 表示。另外,电功率和电能量也是重要的物理量,它们的符号分别为 P 、 W 。

在电路分析中,当涉及某个元件或部分电路的电流或电压时,有必要指定电流或电压的参考方向。这是因为电流或电压的实际方向可能是未知的,也可能是随时间变动的。图 1-2 表示一个电路的一部分,其中的长方框表示一个二端元件。流过这个元件的电流为 i ,其实际方向或是由 A 到 B,或是由 B 到 A。在该图中用实线箭头表示电流的参考方向,它不一定就是电流的实际方向。指定参考方向的用意是在于把电流看成代数量。如果电流 i 的实际方向是由 A 到 B,如图(a)中虚线箭头所示,它与参考方向一致,则电流为正值,即 $i > 0$ 。在图(b)中,指定的电流参考方向自 B 到 A(见实线箭头),如果电流的实际方向是由 A 到 B(见虚线箭头),两者不一致,故电流为负值,即 $i < 0$ 。这样,在指定的电流参考方向下,电流值的正和负就可以反映出电流的实际方向。电流的参考方向可以任意指定,一般用箭头表示,也可以用双下标表示,例如 i_{AB} 表示参考方向是由 A 到 B。

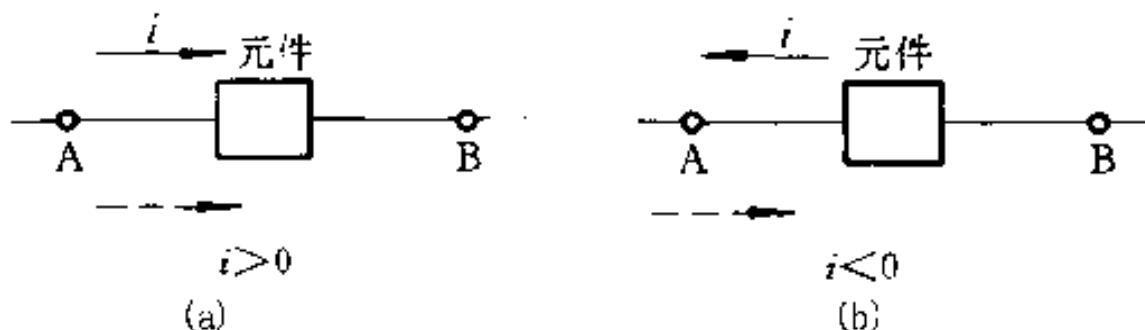


图 1-2 电流的参考方向

同理,对电路中两点之间的电压也可以指定参考方向或参考极性。两点之间的电压参考方向可以用正(+)、负(-)极性表示,正极指向负极的方向就是电

^① 有些实际电路器件也称为“电路元件”,本书中凡涉及“电路元件”均指理想化的模型。

^② 本书中,“网络”(network)和“电路”(circuit)将不加区分地被引用。“网络”的含义较为广泛,可延伸至非电情况。

^③ 当电路中的电流、电压、电荷等变量随时间变化时,一般用小写字母 i 、 u 、 q 表示,用大写字母 I 、 U 、 Q 时则表示对应的变量是恒定量,但本书有时也采用小写字母表示恒定的变量;可根据上、下文判断。

压的参考方向,见图 1-3。指定电压的参考方向后,电压就成为一个代数量。在图 1-3 中,如果 A 点电位高于 B 点电位,即电压的实际方向是由 A 到 B,两者的方向一致,则 $u > 0$ 。当实际电位是 B 点高于 A 点,两者相反,则 $u < 0$ 。有时为了图示方便,可用一个箭头表示电压的参考方向(图 1-3)。还可用双下标表示电压,如 u_{AB} 表示 A 和 B 之间电压参考方向由 A 指向 B。

一个元件的电流或电压的参考方向可以独立地任意指定。如果指定流过元件的电流的参考方向是从标以电压正极性的一端指向负极性的一端,即两者的参考方向一致,则把电流和电压的这种参考方向称为关联参考方向,如图 1-4(a);当两者不一致时,称为非关联参考方向。在图 1-4(b)中,N 表示电路的一个部分,它有两个端子与外电路连接,电流 i 的参考方向自电压 u 的正极性端流入电路,从负极性端流出,两者的参考方向一致,所以是关联参考方向;图 1-4(c)所示电流和电压的参考方向是非关联的。

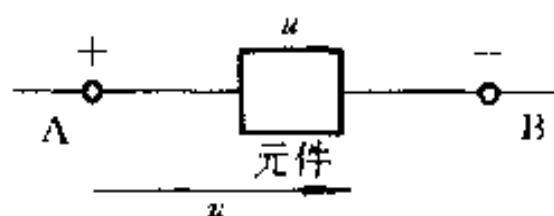


图 1-3 电压的参考方向

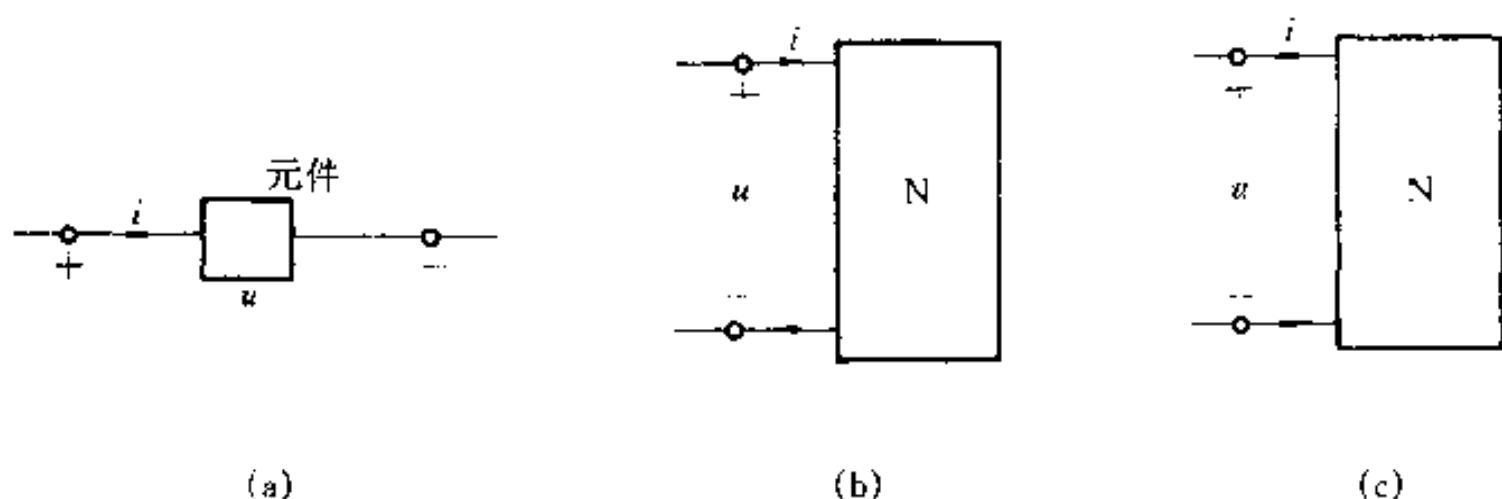


图 1-4 关联方向

在国际单位制(SI)中,电流的单位为 A(安培,简称安),电荷的单位为 C(库仑,简称库),电压的单位为 V(伏特,简称伏)。表 1-1 列出了 SI 单位中规定的

表 1-1 SI 倍数与分数词头

倍率	词头名称词	词头符号	分率	词头名称词	词头符号
10^{24}	尧[它]	yotta	10^{-1}	分	deci
10^{21}	泽[它]	zetta	10^{-2}	厘	centi
10^{18}	艾[可萨]	exa	10^{-3}	毫	milli
10^{16}	拍[它]	peta	10^{-6}	微	micro
10^{12}	太[拉]	tera	10^{-9}	纳[诺]	nano
10^9	吉[咖]	giga	10^{-12}	皮[可]	pico
10^6	兆	mega	10^{-15}	飞[母托]	femto
10^3	千	kilo	10^{-18}	阿[托]	atto
10^2	百	hecto	10^{-21}	仄[普托]	zepto
10	十	deca	10^{-24}	幺[科托]	yocto

用来构成十进倍数和分数单位的词头。例如, $1 \mu\text{A}$ (微安) = 10^{-6} A , 2 kV (千伏) = $2 \times 10^3 \text{ V}$ 。

§ 1-3 电功率和能量

在电路的分析和计算中,能量和功率的计算是十分重要的。这是因为电路在工作状况下总伴随有电能与其他形式能量的相互交换;另一方面,电气设备、电路部件本身都有功率的限制,在使用时要注意其电流值或电压值是否超过额定值,过载会使设备或部件损坏,或是不能正常工作。

电功率与电压和电流密切相关。当正电荷从元件上电压的“+”极经元件运动到电压的“-”极时,与此电压相应的电场力要对电荷作功,这时,元件吸收能量;反之,正电荷从电压的“-”极经元件运动到电压“+”极时,电场力作负功,元件向外释放电能。

从 t_0 到 t 的时间内,元件吸收的电能可根据电压的定义(A、B 两点的电压在量值上等于电场力将单位正电荷由 A 点移动到 B 点时所作的功)求得为

$$W = \int_{q(t_0)}^{q(t)} u dq$$

由于 $i = \frac{dq}{dt}$, 所以

$$W = \int_{t_0}^t u(\xi) i(\xi) d\xi \quad (1-1)$$

式中 u 和 i 都是时间的函数,并且是代数量,因此,电能 W 也是时间的函数,且是代数量。功率是能量对时间的导数,能量是功率对时间的积分。由式(1-1)可知,元件吸收的电功率可写为

$$p(t) = u(t) i(t) \text{①} \quad (1-2)$$

式中 p 是元件吸收的功率。当 $p > 0$ 时,元件确实吸收功率; $p < 0$ 时,元件实际释放电能即发出功率。

当电流的单位为 A,电压的单位为 V 时,能量的单位为 J(焦耳,简称焦),当时间的单位为 s(秒)时,功率的单位为 W(瓦特,简称瓦)。

在指定电压和电流的参考方向后,应用式(1-2)求功率时应当注意:当电压和电流的参考方向为关联参考方向时,乘积“ ui ”表示元件吸收的功率;当 p 为正值时,表示该元件确实吸收功率。如果电压和电流的参考方向为非关联参考方向时,乘积“ ui ”表示元件发出的功率,此时,当 p 为正值时,该元件确实发出

① 本书通常把 $u(t), i(t)$ 等简写为 u, i 等。

功率。一个元件若吸收功率 100 W , 也可以认为它发出功率 -100 W , 同理, 一个元件若发出功率 100 W , 也可以认为它吸收功率 -100 W 。这两种说法是一致的。

在图 1-5 中, 已知某元件两端的电压 u 为 5 V , A 点电位高于 B 点电位; 电流 i 的实际方向为自 A 点到 B 点, 其值为 2 A 。根据图 1-5(a) 中指定的参考方向, u 和 i 为关联参考方向, $u = 5 \text{ V}$, $i = 2 \text{ A}$ 。根据式(1-2), $p = 10 \text{ W}$, 为正值, 此元件吸收的功率为 10 W 。如果指定的 u 和 i 的参考方向为非关联参考方向, 如图 1-5(b) 时, 则此时 $u = -5 \text{ V}$, $i = 2 \text{ A}$ 。按式(1-2), 元件发出的功率 $p = 10 \text{ W}$, 为负值。所以此元件实际上是吸收 10 W , 与按图 1-5(a) 求得的结果一致。

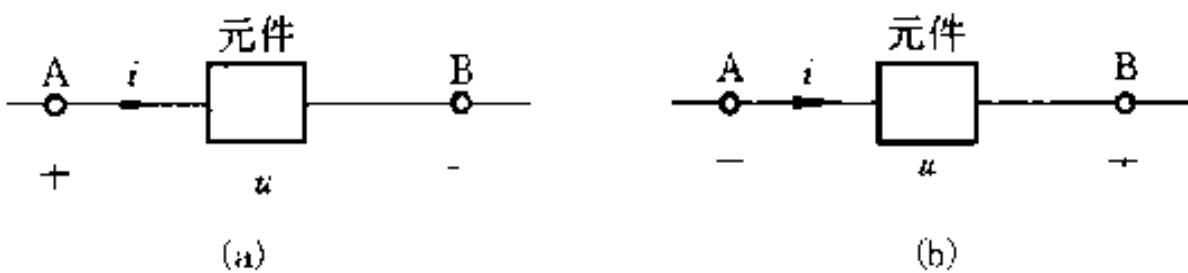


图 1-5 元件的功率

§1-4 电路元件

电路元件是电路中最基本的组成单元。电路元件通过其端子与外部相连接; 元件的特性则通过与端子有关的物理量描述。每一种元件反映某种确定的电磁性质。集总(参数)元件假定: 在任何时刻, 流入二端元件的一个端子的电流一定等于从另一端子流出的电流, 两个端子之间的电压为单值量。由集总元件构成的电路称为集总电路, 或具有集总参数的电路。用集总元件及其组合模拟实际的部件和器件以及用集总电路作为实际电路的电路模型是有条件的, 本书的第 18 章将加以讨论。本书的其余各章只考虑集总电路。

前已提及, 电路元件按与外部连接的端子数目可分为二端、三端、四端元件等。电路元件还可分为无源元件和有源元件, 线性元件和非线性元件, 时不变元件和时变元件等等。

§1-5 电阻元件

电阻器、灯泡、电炉等在一定条件下可以用二端线性电阻元件作为其模型(以后各章主要讨论二端元件, 故将略去“二端”两字)。线性电阻元件是这样的理想元件: 在电压和电流取关联参考方向下, 在任何时刻它两端的电压和电流关

系服从欧姆定律,即有

$$u = Ri \quad (1-3)$$

线性电阻元件的图形符号见图 1-6(a)。上式中 R 称为元件的电阻, R 是一个正实常数。当电压单位用 V,电流单位用 A 表示时,电阻的单位为 Ω (欧姆,简称欧)。

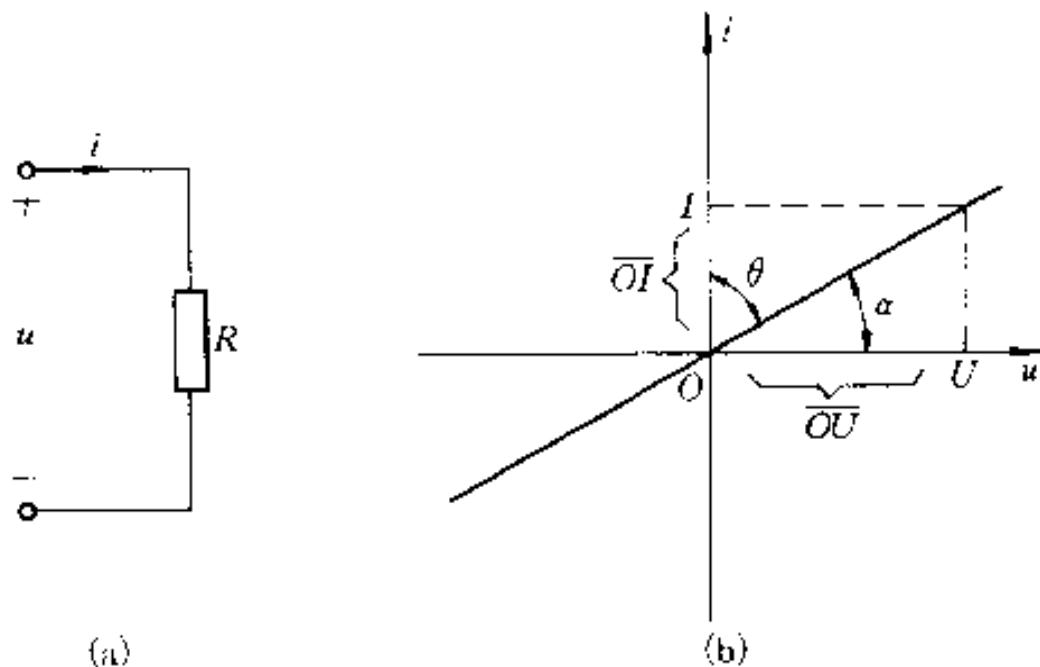


图 1-6 电阻元件及其伏安特性

令 $G = \frac{1}{R}$, 式(1-3)变成

$$i = Gu \quad (1-4)$$

式中 G 称为电阻元件的电导。电导的单位是 S(西门子,简称西)。 R 和 G 都是电阻元件的参数。

由于电压和电流的单位是 V 和 A,因此电阻元件的特性称为伏安特性。图 1-6(b)画出线性电阻元件的伏安特性,它是通过原点的一条直线。直线的斜率与元件的电阻 R 有关。如果在作图时,电压坐标的标尺为 m_u (m_u 为坐标轴上每单位长度代表的电压值),电流坐标的标尺为 m_i (m_i 为坐标轴上每单位长度代表的电流值),则有:

$$R = \frac{u}{i} = \frac{m_u \overline{OU}}{m_i \overline{OI}} = \frac{m_u}{m_i} \tan \theta$$

$$G = \frac{i}{u} = \frac{m_i \overline{OI}}{m_u \overline{OU}} = \frac{m_i}{m_u} \tan \alpha$$

式中 \overline{OU} 、 \overline{OI} 分别为电压 u 与电流 i 相应的 u 轴和 i 轴上的线段长度。

图 1-7(a)、(b)画出 $R = 1 \Omega$ 电阻的伏安特性,其中电流标尺均取 $m_i = 1 \text{ A/cm}$;图(a)中 $m_u = 1 \text{ V/cm}$,而图(b)中 $m_u = 0.5 \text{ V/cm}$,可得出图(a)中 $\tan \theta = \frac{m_i}{m_u} R = 1$,故 $\theta = 45^\circ$,而图(b)中, $\tan \theta' = 2$, $\theta' = 63.4^\circ$ 。

当一个线性电阻元件的端电压不论为何值时,流过它的电流恒为零值,就把

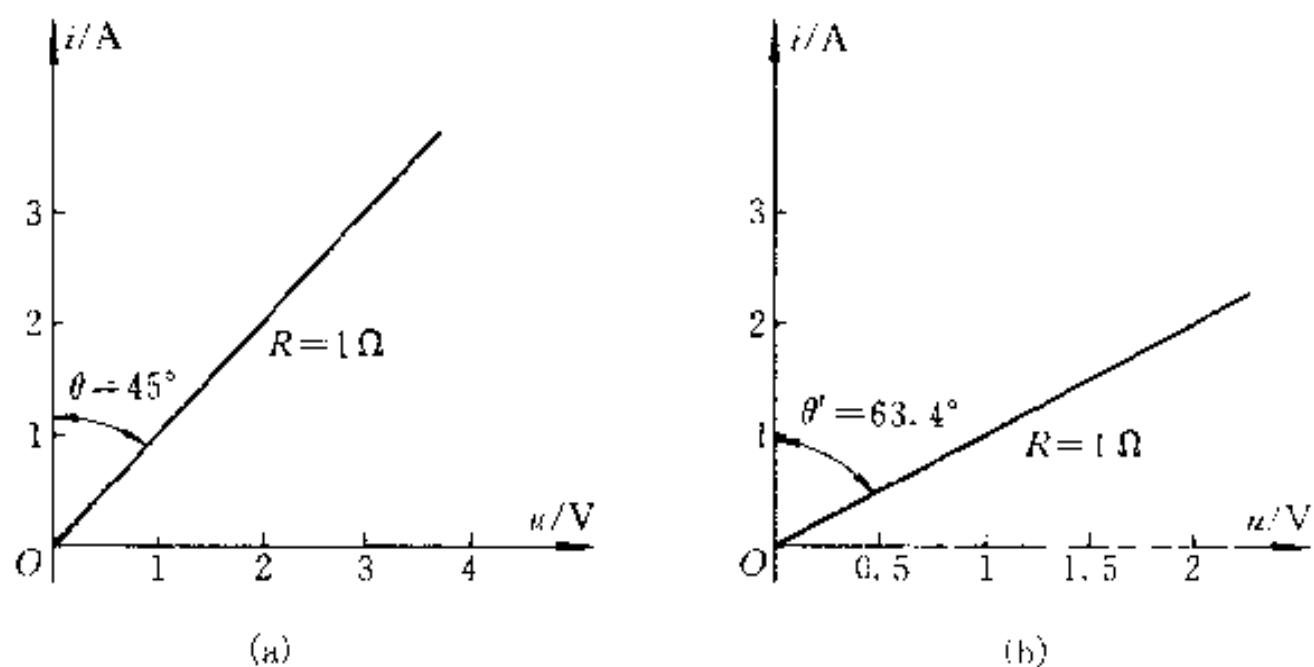


图 1-7 不同标尺对电阻的伏安特性

它称为“开路”。开路的伏安特性在 $u-i$ 平面上与电压轴重合, 它相当于 $R=\infty$ 或 $G=0$, 如图 1-8(a)。当流过一个线性电阻元件的电流不论为何值时, 它的端电压恒为零值, 就把它称为“短路”。短路的伏安特性在 $u-i$ 平面上与电流轴重合, 它相当于 $R=0$ 或 $G=\infty$, 如图 1-8(b)。如果电路中的一对端子 $1-1'$ 之间呈断开状态, 如图 1-8(c), 这相当于 $1-1'$ 间接有 $R=\infty$ 的电阻, 此时称 $1-1'$ 处于“开路”。如果把端子 $1-1'$ 用理想导线(电阻为零)连接起来, 称这对端子 $1-1'$ 被短路, 如图 1-8(d)。

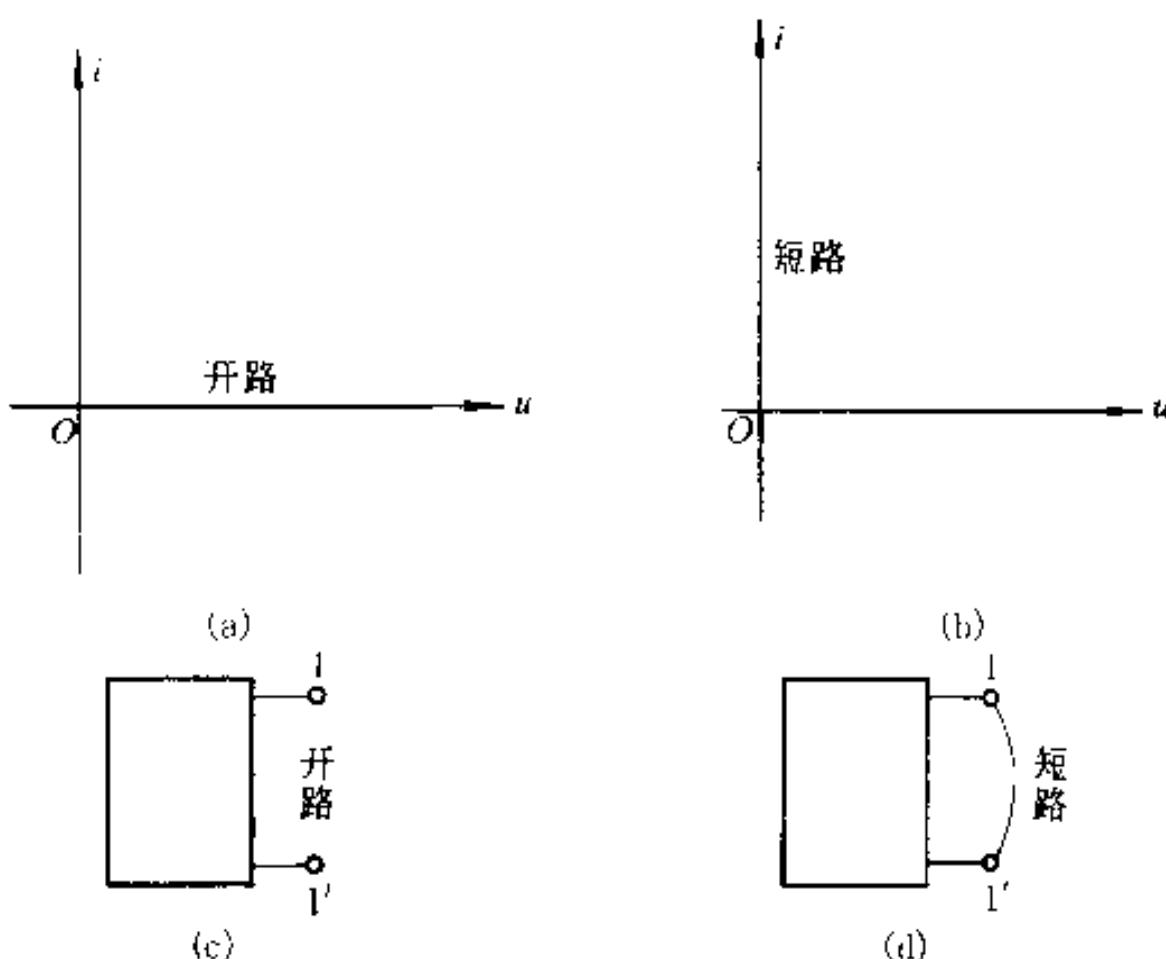


图 1-8 开路和短路的伏安特性

当电压 u 和电流 i 取关联参考方向时, 电阻元件消耗的功率为

$$\begin{aligned}
 p &= ui = R i^2 = \frac{u^2}{R} \\
 &= Gu^2 = \frac{i^2}{G}
 \end{aligned} \tag{1-5}$$

R 和 G 是正实常数,故功率 p 恒为非负值。所以线性电阻元件是一种无源元件。

电阻元件从 t_0 到 t 的时间内吸收的电能为

$$W = \int_{t_0}^t R i^2(\xi) d\xi$$

电阻元件一般把吸收的电能转换成热能消耗掉。

由于制作材料的电阻率与温度有关,(实际)电阻器通过电流后因发热会使温度改变,因此,严格说,电阻器带有非线性因素。但是在一定条件下,许多实际部件如金属膜电阻器、线绕电阻器等,它们的伏安特性近似为一条直线。所以用线性电阻元件作为它们的理想模型是合适的。

非线性电阻元件的伏安特性不是一条通过原点的直线。非线性电阻元件的电压电流关系一般可写为

$$u = f(i) \quad [\text{或} \quad i = h(u)]$$

如果一个电阻元件具有以下的电压电流关系

$$u(t) = R(t)i(t) \quad [\text{或} \quad i(t) = G(t)u(t)]$$

这里 u 与 i 仍是比例关系,但比例系数 R 是随时间变化的,故称为时变电阻元件。

线性电阻元件的伏安特性位于第一、三象限。如果一个线性电阻元件的伏安特性位于第二、四象限,则此元件的电阻为负值,即 $R < 0$ 。线性负电阻元件实际上是一个发出电能的元件。如果要获得这种元件,一般需要专门设计。

今后,为了叙述方便,把线性电阻元件简称为电阻,所以本书中“电阻”这个术语以及它的相应符号 R 一方面表示一个电阻元件,另一方面也表示此元件的参数。

§ 1-6 电容元件

在工程技术中,电容器的应用极为广泛。电容器虽然品种、规格各异,但就其构成原理来说,电容器都是由间隔以不同介质(如云母、绝缘纸、电解质等)的两块金属极板组成。当在极板上加以电压后,极板上分别聚集起等量的正、负电荷,并在介质中建立电场而具有电场能量。将电源移去后,电荷可继续聚集在极板上,电场继续存在。所以电容器是一种能储存电荷或者说储存电场能量的部件。电容元件就是反映这种物理现象的电路模型。

线性电容元件的图形符号如图 1-9(a), 图中电压的正(负)极性所在极板上储存的电荷为 $+q$ ($-q$), 两者的极性一致。此时有

$$q = Cu \quad (1-6)$$

式中 C 是电容元件的参数, 称为电容。 C 是一个正实常数。当电荷和电压的单位分别用 C 和 V 表示时, 电容的单位为 F(法拉, 简称法)。图 1-9(b)中以 q 和 u 为坐标轴, 画出了电容元件的库伏特性。线性电容的库伏特性是一条通过原点的直线。

如果电容元件的电流 i 和电压 u 取关联参考方向, 如图 1-9(a), 则有

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (1-7)$$

表明电流和电压的变化率成正比。当电容上电压发生剧变(即 $\frac{du}{dt}$ 很大)时, 电流很大。当电压不随时间变化时, 电流为零。故电容在直流情况下其两端电压恒定, 相当于开路, 或者说电容有隔断直流(简称隔直)的作用。

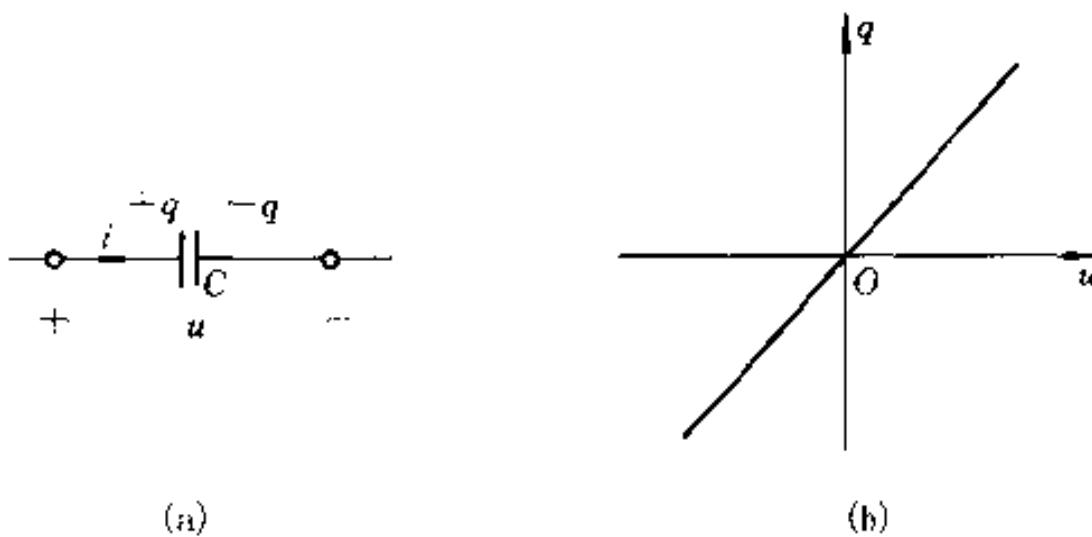


图 1-9 电容元件及其库伏特性

式(1-7)的逆关系为

$$q = \int i dt \quad (1-8)$$

这是一个不定积分, 可写成定积分的表达式

$$q = \int_{-\infty}^t i d\xi = \int_{-\infty}^{t_0} i d\xi + \int_{t_0}^t i d\xi = q(t_0) + \int_{t_0}^t i d\xi \quad (1-9)$$

式中 $q(t_0)$ 为 t_0 时刻电容所带电荷量。上式的物理意义是: t 时刻具有的电荷量等于 t_0 时的电荷量加以 t_0 到 t 时间间隔内增加的电荷量。如果指定 t_0 为时间的起点并设为零, 式(1-9)可写为

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i d\xi \quad (1-10)$$

对于电压, 由于 $u = \frac{q}{C}$, 因此有

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i d\xi \quad (1-11)$$

或

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i d\xi \quad (1-12)$$

将式(1-7)与式(1-3)比较可知,电容元件的电压 u 与电流 i 具有动态关系,因此,电容元件是一个动态元件。从式(1-12)可见,电容电压除与 0 到 t 的电流值有关外,还与 $u(0)$ 值有关,因此,电容元件是一种有“记忆”的元件。与之相比,电阻元件的电压仅与该瞬间的电流值有关,是无记忆的元件。

在电压和电流的关联参考方向下,线性电容元件吸收的功率为

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}$$

从 $t = -\infty$ 到 t 时刻,电容元件吸收的电场能量为

$$\begin{aligned} W_C &= \int_{-\infty}^t u(\xi) i(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t Cu(\xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= C \int_{u(-\infty)}^{u(t)} u(\xi) du(\xi) \\ &= \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(-\infty) \end{aligned}$$

电容元件吸收的能量以电场能量的形式储存在元件的电场中。可以认为在 $t = -\infty$ 时, $u(-\infty) = 0$, 其电场能量也为零。这样,电容元件在任何时刻 t 储存的电场能量 $W_C(t)$ 将等于它吸收的能量,可写为

$$W_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \quad (1-13)$$

从时间 t_1 到 t_2 ,电容元件吸收的能量

$$\begin{aligned} W_C &= C \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} u du = \frac{1}{2} Cu^2(t_2) - \frac{1}{2} Cu^2(t_1) \\ &= W_C(t_2) - W_C(t_1) \end{aligned}$$

电容元件充电时, $|u(t_2)| > |u(t_1)|$, $W_C(t_2) > W_C(t_1)$, 故在此时间内元件吸收能量;电容元件放电时, $W_C(t_2) < W_C(t_1)$, 元件释放电能。若元件原来没有充电,则在充电时吸收并储存起来的能量一定又在放电完毕时全部释放,它不消耗能量。所以,电容元件是一种储能元件。同时,电容元件也不会释放出多于它吸收或储存的能量,所以它又是一种无源元件。

如果电容元件的伏安特性在 $u-q$ 平面上不是通过原点的直线,此元件称为非线性电容元件,晶体二极管中的变容二极管就是一种非线性电容,其电容随所加电压而变。

一般的电容器除有储能作用外,也会消耗一部分电能,这时,电容器的模型就必须是电容元件和电阻元件的组合。由于电容器消耗的电功率与所加电压直接相关,因此其模型宜是两者的并联组合。

电容器是为了获得一定大小的电容特意制成的。但是,电容的效应在许多别的场合也存在,这就是分布电容和杂散电容。从理论上说,电位不相等的导体之间就会有电场,因此就有电荷聚集并有电场能量,即有电容效应存在。例如,在两根架空输电线之间,每一根输电线与地之间都有分布电容。在晶体三极管或二极管的电极之间,甚至一个线圈的线匝之间也存在着杂散电容。至于是否要在模型中计人这些电容,必须视工作条件下它们所起作用而定,当工作频率很高时,一般不应忽略其作用,而应以适当的方式在模型中反映出来。

为了叙述方便,把线性电容元件简称为电容,所以本书中“电容”这个术语以及与它相应的符号 C 一方面表示一个电容元件,另一方面也表示这个元件的参数。

§ 1-7 电感元件

在工程中广泛应用用导线绕制的线圈,例如,在电子电路中常用的空心或带有铁粉心的高频线圈,电磁铁或变压器中含有在铁心上绕制的线圈等等。当一个线圈通以电流后产生的磁场随时间变化时,在线圈中就产生感应电压。

图 1-10 示出一个线圈,其中的电流 i 产生的磁通 Φ_L 与 N 帚线圈交链,则磁通链 $\Psi_L = N\Phi_L$ 。由于磁通 Φ_L 和磁通链 Ψ_L 都是由线圈本身的电流 i 产生的,所以称为自感磁通和自感磁通链。 Φ_L 和 Ψ_L 的方向^① 与 i 的参考方向成右螺旋关系,如图中所示。当磁通链 Ψ_L 随时间变化时,在线圈的端子间产生感应电压。如果感应电压 u 的参考方向与 Ψ_L 成右螺旋关系(即从端子 A 沿导线到端子 B 的方向与 Ψ_L 成右螺旋关系),则根据电磁感应定律,有

$$u = \frac{d\Psi_L}{dt} \quad (1-14)$$

由该式确定感应电压的真实方向时,与楞次定律^② 的结果是一致的。

^① 习惯上,将穿过某面积的磁力线的指向称为磁通 Φ 或磁通链 Ψ 的方向。

^② 楞次定律指出,线圈中磁通变化引起的感应电动势,其真实方向总是使其产生的感应电流试图阻止磁通的变化。图 1-10 中,当 $\frac{di}{dt} > 0$,因而 $\frac{d\Psi_L}{dt} > 0$ 时,按式(1-14)可知 $u > 0$,即端子 A 的电位高于端子 B 的电位,此时如将 A、B 端子与外电路接通,则有感应电流自 A 通过外电路流回 B,再经线圈回到 A,显然这一电流产生的磁场阻止 Ψ_L 的增长,与楞次定律相符。对于 $\frac{di}{dt} < 0$,即 $\frac{d\Psi_L}{dt} < 0$ 的情况,读者可自行证实两者相符。

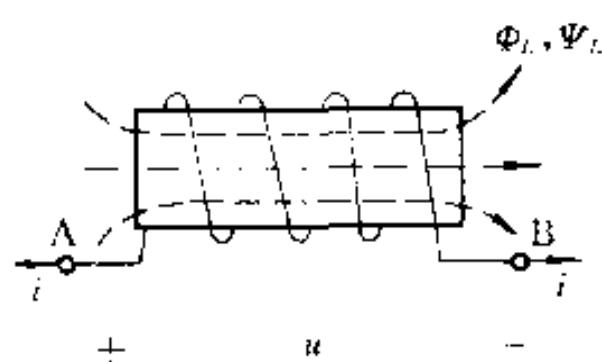


图 1-10 磁通链与感应电压

电感元件是实际线圈的一种理想化模型,它反映了电流产生磁通和磁场能量储存这一物理现象。线性电感元件的图形符号见图 1-11(a)。一般在图中不必也难以画出磁通 Φ_L 的参考方向,但规定 Φ_L 与电流 i 的参考方向满足右螺旋关系。线性电感元件的自感磁通链 Ψ_L 与元件中的电流存在以下关系

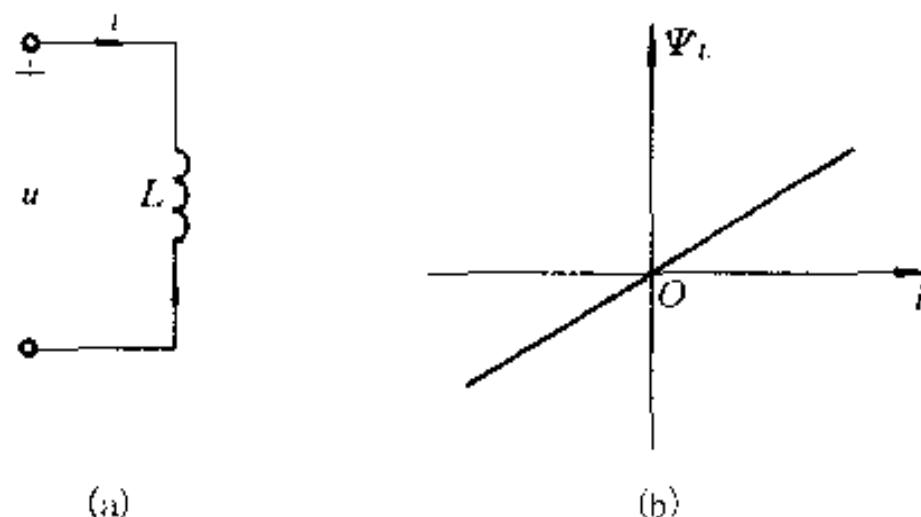


图 1-11 电感元件及其韦安特性

$$\Psi_L = Li$$

其中 L 称为该元件的自感(系数)或电感。 L 是一个正实常数。

在国际单位制(SI)中,磁通和磁通链的单位是 Wb(韦伯,简称韦);当电流的单位采用 A 时,则自感或电感的单位是 H(亨利,简称亨)。

线性电感元件的韦安特性是 $\Psi_L - i$ 平面上的一条通过原点的直线,见图 1-11(b)。

把 $\Psi_L = Li$ 代入式(1-14),可以得到电感元件的电压和电流关系如下

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (1-15)$$

式中 u 和 i 为关联参考方向,且与 Ψ_L 成右螺旋关系。

上式的逆关系为

$$i = \frac{1}{L} \int u dt \quad (1-16)$$

写成定积分形式为

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u d\xi + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u d\xi = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u d\xi \quad (1-17)$$

或

$$\Psi_L = \Psi_L(t_0) + \int_{t_0}^t u d\xi \quad (1-18)$$

可以看出,电感元件是动态元件,也是记忆元件。

在电压和电流的关联参考方向下,线性电感元件吸收的功率为

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} \quad (1-19)$$

由于在 $t = -\infty$ 时, $i(-\infty) = 0$, 电感元件无磁场能量。因此,从 $-\infty$ 到 t 的时间段内电感吸收的磁场能量

$$\begin{aligned} W_L(t) &= \int_{-\infty}^t p d\xi = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{d\xi} d\xi = \int_0^{i(t)} Lidi \\ &= \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2} \frac{\Psi_L^2(t)}{L} \end{aligned} \quad (1-20)$$

这就是线性电感元件在任何时刻的磁场能量表达式。

从时间 t_1 到 t_2 内,线性电感元件吸收的磁场能量

$$\begin{aligned} W_L &= L \int_{i(t_1)}^{i(t_2)} idi = \frac{1}{2} Li^2(t_2) - \frac{1}{2} Li^2(t_1) \\ &= W_L(t_2) - W_L(t_1) \end{aligned}$$

当电流 $|i|$ 增加时, $W_L > 0$, 元件吸收能量; 当电流 $|i|$ 减小时, $W_L < 0$, 元件释放能量。可见电感元件不把吸收的能量消耗掉,而是以磁场能量的形式储存在磁场中。所以电感元件是一种储能元件,同时,它也不会释放出多于它吸收或储存的能量,因此它又是一种无源元件。

空心线圈是以线性电感元件为模型的典型例子。当线圈导线电阻的损耗不可忽略时,就需要用线性电感元件和电阻元件的串联组合作为其模型。

如果电感元件的韦安特性不是通过 $\Psi_L - i$ 平面上原点的一条直线,它就是非线性电感元件。非线性电感元件的韦安特性可以用下列公式表示

$$\Psi_L = f(i)$$

或

$$i = h(\Psi_L)$$

带铁心的电感线圈是以非线性电感元件为模型的典型例子。但如线圈在铁磁材料的非饱和状态下工作,那么 Ψ_L 与 i 仍近似于线性关系,在这种情况下,铁心线圈仍可以当作线性电感元件处理。

为了叙述方便,把线性电感元件简称为电感,所以本书中“电感”这个术语以

及与它相应的符号 L ,一方面表示一个电感元件,另一方面也表示这个元件的参数。

§ 1-8 电压源和电流源

实际电源有电池、发电机、信号源等。电压源和电流源是从实际电源抽象得到的电路模型,它们是二端有源元件。

电压源是一个理想电路元件,它的端电压 $u(t)$ 为

$$u(t) = u_s(t)^{\textcircled{1}}$$

式中 $u_s(t)$ 为给定的时间函数,而电压 $u(t)$ 与通过元件的电流无关,总保持为给定的时间函数。电压源中电流的大小由外电路决定。电压源的图形符号见图 1-12(a)。当 $u_s(t)$ 为恒定值时,这种电压源称为恒定电压源或直流电压源,有时用图 1-12(b)所示图形符号表示,其中长划表示电源的“+”端,电压值则用 U_s 表示。

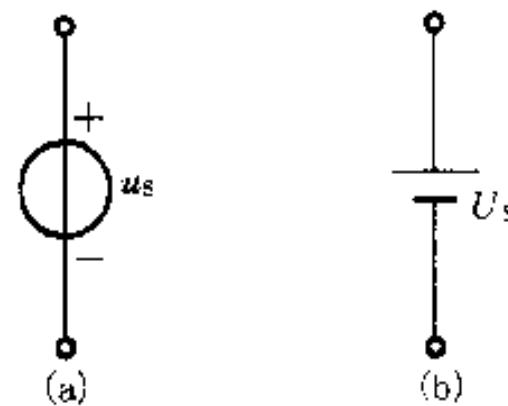


图 1-12 电压源

图 1-13(a)示出电压源接外电路的情况。端子 1、2 之间的电压 $u(t)$ 等于 $u_s(t)$,不受外电路的影响。图 1-13(b)示出电压源在 t_1 时刻的伏安特性,它是一条不通过原点且与电流轴平行的直线。当 $u_s(t)$ 随时间改变时,这条平行于电流轴的直线也将随之改变其位置。图 1-13(c)是直流电压源的伏安特性,它不随时间改变。

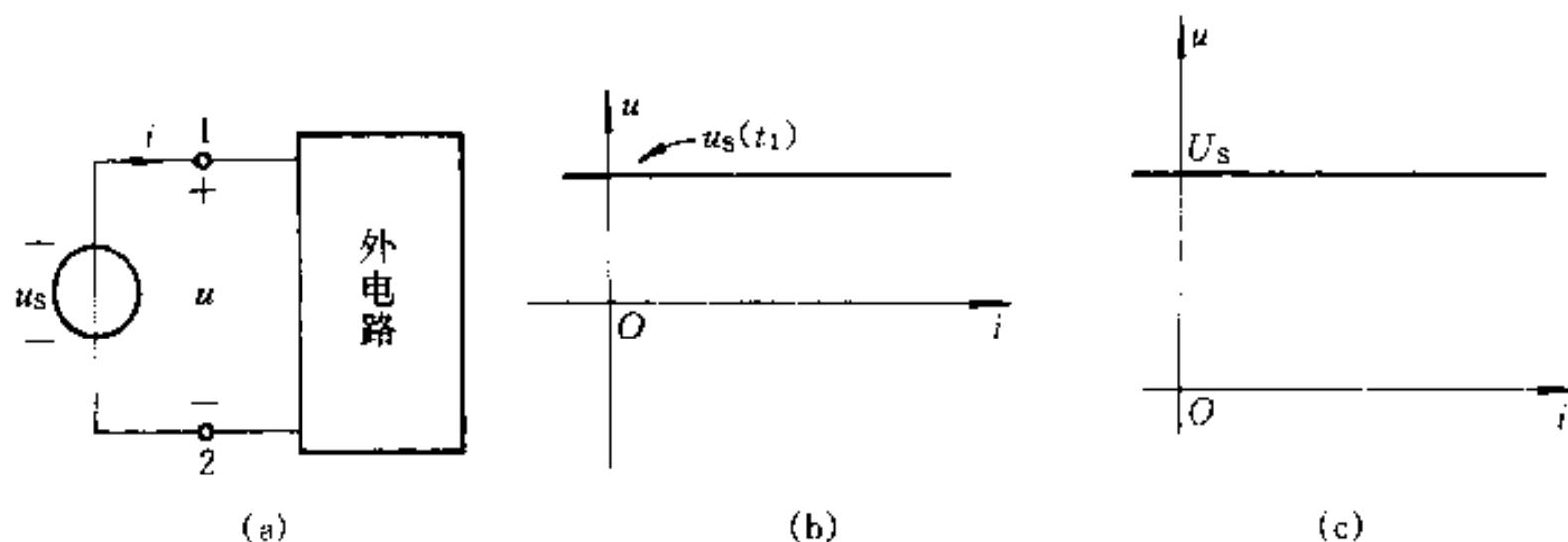


图 1-13 电压源的伏安特性

从图 1-13(a)可见,电压源的电压和通过电压源的电流的参考方向通常取

① 这里 $u_s(t)$ [或 $u(t)$]实际上是用来表示所考虑时间范围内的“波形曲线”或整个函数。 $u(t)$ 或 $u_s(t)$ 也表示某一瞬间的电压值,即所谓瞬时值。严格说,这两者是有区别的。

为非关联参考方向,此时,电压源发出的功率为

$$p(t) = u_s(t)i(t)$$

它也是外电路吸收的功率。

电压源不接外电路时,电流 i 总为零值,这种情况称为“电压源处于开路”。如果令一个电压源的电压 $u_s = 0$,则此电压源的伏安特性为 $i - u$ 平面上的电流轴,它相当于短路。把电压源短路是没有意义的,因为短路时端电压 $u = 0$,这与电压源的特性不相容。

电流源是一个理想电路元件。电流源发出的电流 $i(t)$ 为

$$i(t) = i_s(t)$$

式中 $i_s(t)$ 为给定时间函数,而电流 $i(t)$ 与元件的端电压无关,并总保持为给定的时间函数。电流源的端电压由外电路决定。电流源的图形符号示于图 1-14(a),图 1-14(b)示出了电流源接外电路的情况。图 1-14(c)为电流源在 t_1 时刻的伏安特性,它是一条不通过原点且与电压轴平行的直线。当 $i_s(t)$ 随时间改变时,这条平行于电压轴的直线将随之而改变位置。图 1-14(d)示出直流电流源的伏安特性,它不随时间改变。

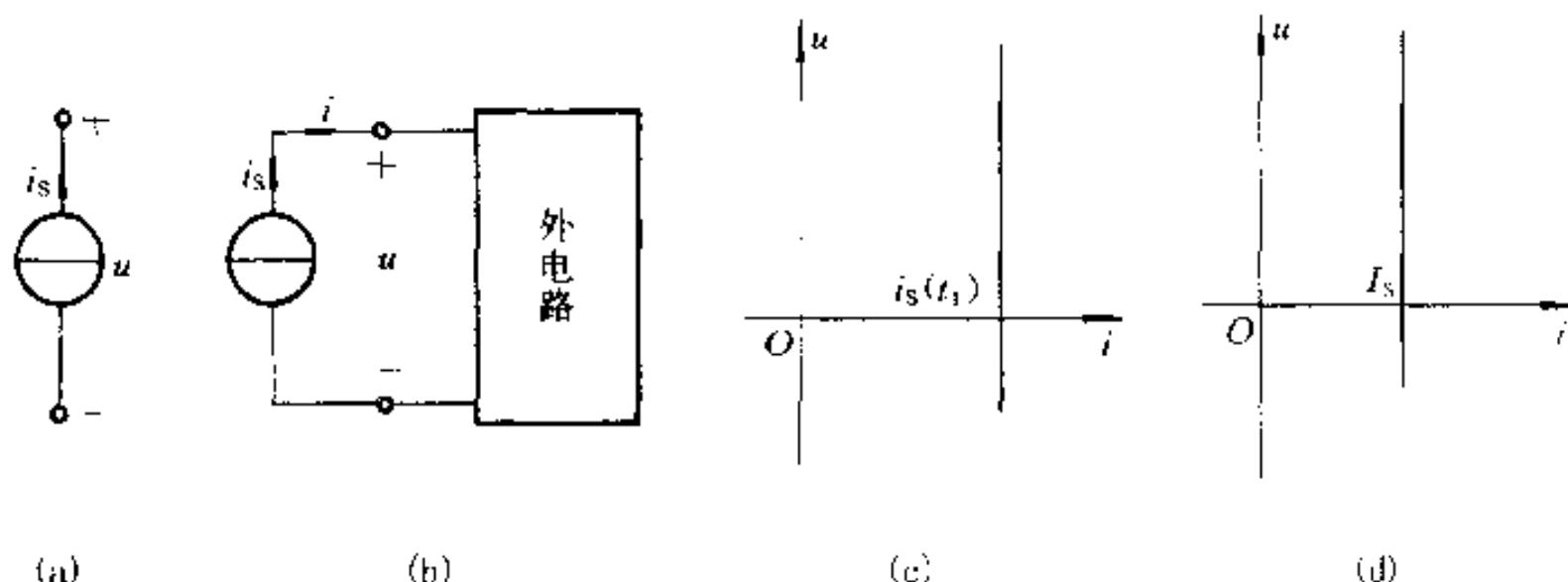


图 1-14 电流源及其伏安特性

在图 1-14(b)中,电流源电流和电压的参考方向为非关联参考方向,所以电流源发出的功率为

$$p(t) = u(t)i_s(t)$$

它也是外电路吸收的功率。

电流源两端短路时,其端电压 $u = 0$,而 $i = i_s$,电流源的电流即为短路电流。如果令一个电流源的 $i_s = 0$,则此电流源的伏安特性为 $i - u$ 平面上的电压轴,它相当于开路。电流源的“开路”是没有意义的,因为开路时发出的电流 i 必须为零,这与电流源的特性不相容。

当电压源的电压 $u_s(t)$ 或电流源的电流 $i_s(t)$ 随时间作正弦规律变化时,则

称为正弦电压源或正弦电流源。以正弦电压源为例,有

$$\begin{aligned} u_s(t) &= U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right) \\ &= U_m \cos(2\pi ft + \psi) \\ &= U_m \cos(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

式中 U_m 为正弦电压的最大值, T 为正弦函数的周期, $f = \frac{1}{T}$ 为其频率, 单位为 Hz,(赫兹,简称赫), $\omega = 2\pi f$ 为角频率, ψ 为正弦函数的初相角。正弦电压也可以用 sine 函数表示(见第 8 章)。

常见实际电源(如发电机、蓄电池等)的工作机理比较接近电压源,其电路模型是电压源与电阻的串联组合。像光电池一类器件,工作时的特性比较接近电流源,其电路模型是电流源与电阻的并联组合。另外,有专门设计的电子电路可作实际电流源用。

上述电压源和电流源常常被称为“独立”电源,“独立”二字是相对于下一节要介绍的“受控”电源来说的。

§ 1-9 受控电源

受控(电)源又称“非独立”电源。受控电压源的电压或受控电流源的电流与独立电压源的电压或独立电流源的电流有所不同,后者是独立量,前者则受电路中某部分电压或电流控制。

晶体管的集电极电流受基极电流控制,运算放大器的输出电压受输入电压控制,所以这类器件的电路模型中要用到受控源。

受控电压源或受控电流源因控制量是电压或电流可分为电压控制电压源(VCVS)、电压控制电流源(VCCS)、电流控制电压源(CCVS)和电流控制电流源(CCCS)^①。这 4 种受控源的图形符号见图 1-15。为了与独立电源相区别,用菱形符号表示其电源部分。图中 u_1 和 i_1 分别表示控制电压和控制电流, μ 、 r 、 g 和 β 分别是有关的控制系数,其中 μ 和 β 是量纲为一的量, r 和 g 分别具有电阻和电导的量纲。这些系数为常数时,被控制量和控制量成正比,这种受控源为线性受控源。本书只考虑线性受控源,故一般将略去“线性”二字。

在图 1-15 中把受控源表示为具有 4 个端子的电路模型,其中受控电压源或受

^① VCVS—Voltage Controlled Voltage Source
VCCS—Voltage Controlled Current Source
CCVS—Current Controlled Voltage Source
CCCS—Current Controlled Current Source

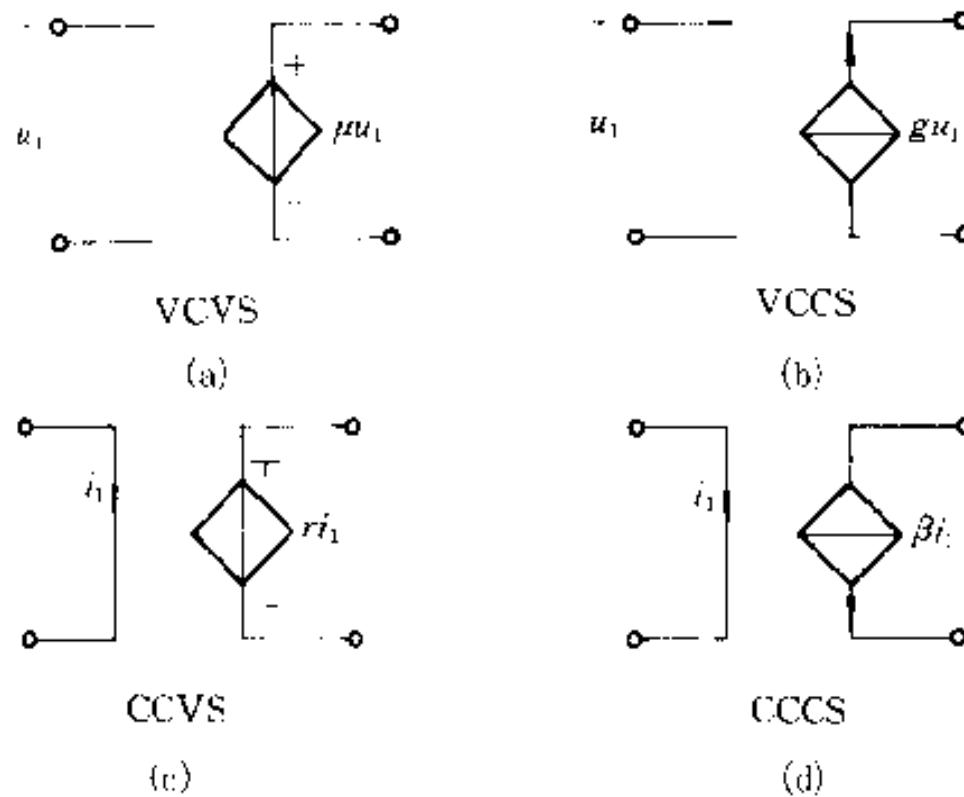


图 1-15 受控电源

控电流源具有一对端子,另一对端子则为开路,或为短路,分别对应于控制量是开路电压或短路电流。这样处理有时会带来方便。所以可以把受控源看作是一种四端元件,但在一般情况下,不一定要在图中专门标出控制量所在处的端子。

独立电源是电路中的“输入”,它表示外界对电路的作用,电路中电压和电流是由于独立电源起的“激励”作用产生的。受控源则不同,它是用来反映电路中某处的电压或电流能控制另一处的电压或电流这一现象,或表示一处的电路变量与另一处电路变量之间的一种耦合关系。在求解具有受控源的电路时,可以把受控电压(电流)源作为电压(电流)源处理,但必须注意前者的电压(电流)是取决于控制量的。

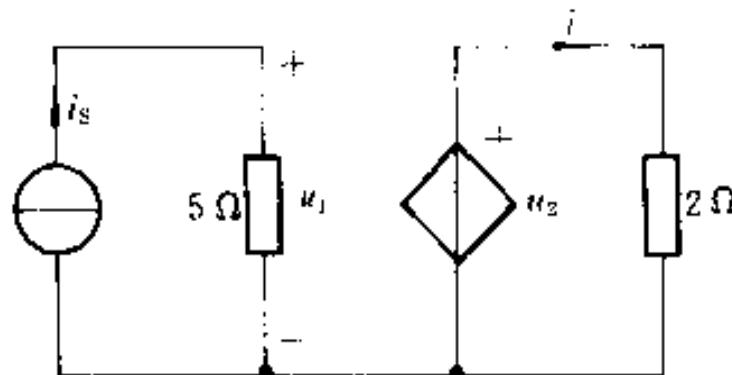


图 1-16 例 1-1 图

例 1-1 求图 1-16 所示电路中电流 i ,其中 VCVS 的电压 $u_2 = 0.5u_1$,电流源的 $i_s = 2 \text{ A}$ 。

解 先求出控制电压 u_1 ,从左方电路可得 $u_1 = 2 \times 5 \text{ V} = 10 \text{ V}$,故有

$$i = \frac{0.5u_1}{2} = \frac{0.5 \times 10}{2} \text{ A} = 2.5 \text{ A}$$

§ 1-10 基尔霍夫定律

集总电路由集总元件相互连接而成。为了说明基尔霍夫定律,有必要介绍支路、结点和回路等概念。为了简化说明,在本节中把组成电路的每一个二端元件称为一条支路,把支路的连接点称为结点,这样,每一个二端元件是连接于两个结点之间的一条支路。图 1-17 为一个具有 6 个元件相互连接而成的电路。此电路共有 4 个结点和 6 条支路,各结点和支路的编号如图所示。由支路构成的闭合路径称为回路,如图中支路(2,3,4,6)。同理,支路(1,3,4,6)、(2,3,5,6)、(1,3,5,6)也都分别构成回路。支路(1,2)、(4,5)也分别构成回路。(关于结点、支路和回路等概念的进一步介绍见 § 3-1)。

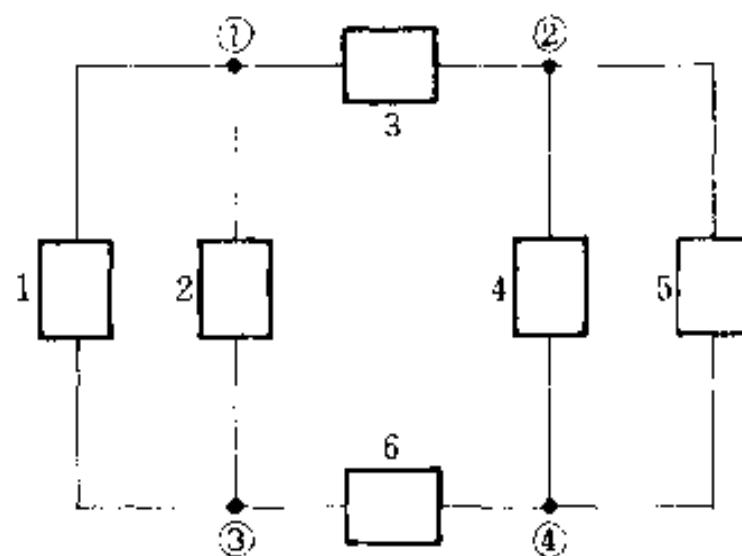


图 1-17 结点、支路和回路

电路中的各个支路的电流和支路的电压(简称支路电流和支路电压)受到两类约束。一类是元件的特性造成的约束。例如,线性电阻元件的电压和电流必须满足 $u = Ri$ 的关系。这种关系称为元件的组成关系或电压电流关系(VCR)^①。另一类是元件的相互连接给支路电流之间和支路电压之间带来的约束关系,有时称为“拓扑”约束,这类约束由基尔霍夫定律体现。

基尔霍夫定律是集总电路的基本定律,它包括电流定律和电压定律。

基尔霍夫电流定律(KCL)^②指出:“在集总电路中,任何时刻,对任一结点,所有流出结点的支路电流的代数和恒等于零”。此处,电流的“代数和”是根据电流是流出结点还是流入结点判断的。若流出结点的电流前面取“+”号,则流入结点的电流前面取“-”号;电流是流出结点还是流入结点,均根据电流的参考方向判断。所以对任一结点有

① VCR—Voltage Current Relation

② KCL—Kirchhoff's Current Law

$$\sum i = 0$$

上式取和是对连接于该结点的所有支路电流进行的。

例如,以图 1-18 所示电路为例,对结点①应用 KCL,有(各支路电流的参考方向见图)

$$i_1 + i_4 - i_6 = 0$$

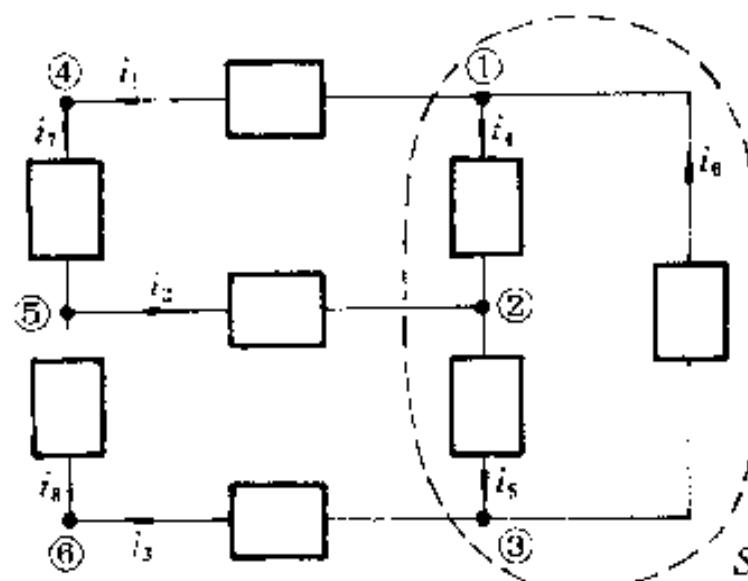


图 1-18 KCL

上式可改写为

$$i_1 + i_4 = i_6$$

此式表明,流出结点①的支路电流等于流入该结点的支路电流。它可理解为,任何时刻,流出任一结点的支路电流等于流入该结点的支路电流。

KCL 通常用于结点,但对包围几个结点的闭合面也是适用的。对图 1-18 所示电路,用虚线表示的闭合面 S 内有 3 个结点,即结点①、②和③。对这些结点分别有:

$$i_1 + i_4 - i_6 = 0$$

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0$$

$$i_3 - i_5 + i_6 = 0$$

以上 3 式相加后,得对闭合面 S 的电流代数和

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

其中 i_1 和 i_3 流出闭合面, i_2 流入闭合面。

所以,通过一个闭合面的支路电流的代数和总是等于零;或者说,流出闭合面的电流等于流入同一闭合面的电流。这称为电流连续性。KCL 是电荷守恒的体现。

基尔霍夫电压定律(KVL)^①指出：“在集总电路中，任何时刻，沿任一回路，所有支路电压的代数和恒等于零”。

所以，沿任一回路有

$$\sum u = 0$$

上式取和时，需要任意指定一个回路的绕行方向，凡支路电压的参考方向与回路的绕行方向一致者，该电压前面取“+”号，支路电压参考方向与回路绕行方向相反者，前面取“-”号。

以图 1·19 所示电路为例，对支路(1, 2, 3, 4)构成的回路列写 KVL 方程时，需要先指定各支路电压的参考方向和回路的绕行方向。绕行方向用虚线及箭头表示，有关支路电压分别用 u_1 、 u_2 、 u_3 、 u_4 表示，它们的参考方向如图示。

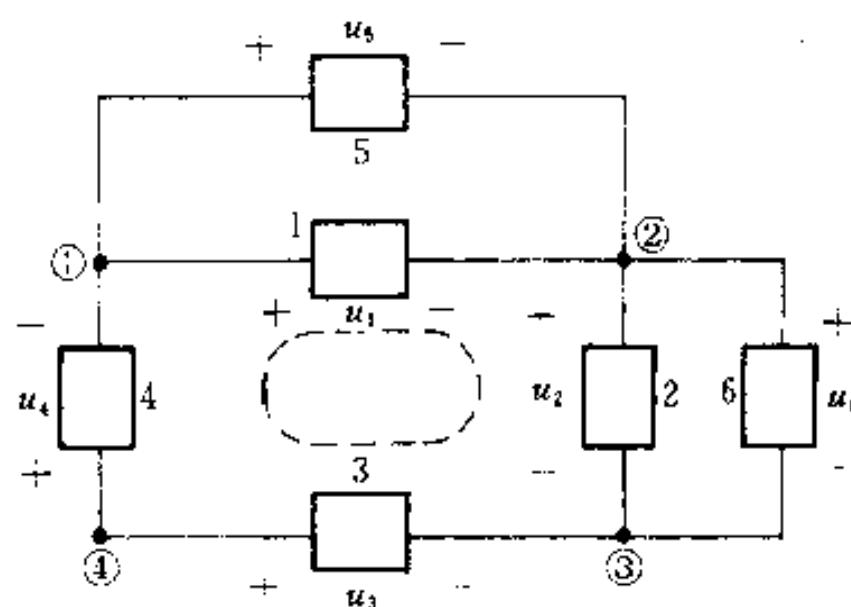


图 1·19 KVL

根据 KVL，对指定的回路有

$$u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0$$

由上式可得

$$u_3 = u_1 + u_2 + u_4$$

上式表明，结点③、④之间的电压是单值的，不论沿支路 3 或沿支路 1、2、4 构成的路径，此两结点间的电压值是相等的。KVL 实质上是电压与路径无关这一性质的反映。

KCL 在支路电流之间施加线性约束关系；KVL 则对支路电压施加线性约束关系。这两个定律仅与元件的相互连接有关，而与元件的性质无关。不论元件是线性的还是非线性的，时变的还是时不变的，KCL 和 KVL 总是成立的。KCL 和 KVL 是集总电路的两个公设。

^① KVL—Kirchhoff's Voltage Law

对一个电路应用 KCL 和 KVL 时,应对各结点和支路编号,并指定有关回路的绕行方向,同时指定各支路电流和支路电压的参考方向,一般两者取关联参考方向。

例 1-4 图 1-20 所示电路中,已知 $u_1 = u_3 = 1 \text{ V}$, $u_2 = 4 \text{ V}$, $u_4 = u_5 = 2 \text{ V}$, 求电压 u_x 。

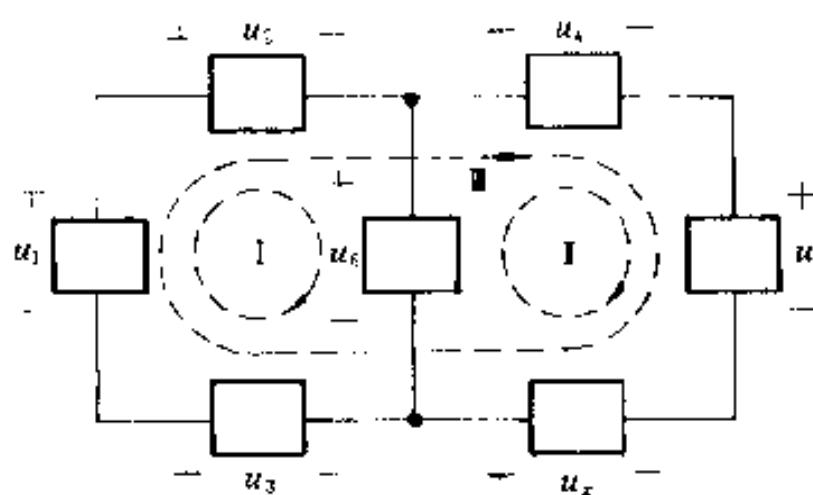


图 1-20 例 1-4 图

解 对回路 I 与 II 分别列出 KVL 方程(支路的参考方向和回路的绕行方向见图示):

$$-u_1 + u_2 + u_6 - u_3 = 0$$

$$-u_6 + u_4 + u_5 - u_1 = 0$$

u_6 在方程中出现二次,一次前面为“+”号(与 I 绕行方向相同)、一次为“-”号(与 II 绕行方向相反)。将两个方程相加消去 u_6 ,得

$$u_x = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5 \text{ ①} = 6 \text{ V}$$

例 1-5 图 1-21 所示电路中,电阻 $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $U_{S1} = 3 \text{ V}$, $U_{S2} = 1 \text{ V}$ 。求电阻 R_1 两端的电压 U_1 。

解 各支路电流和电压的参考方向见图示。求解本题时,除了应用 KCL 和 KVL,还需要应用元件的 VCR。对回路 I(绕行方向见图示)应用 KVL,有

$$-U_1 + U_{S2} + U_2 = 0$$

得

$$U_2 = U_1 - U_{S2} = U_1 - 1 \text{ V}$$

对回路 II 应用 KVL,有

$$U_3 + U_1 - U_{S1} = 0$$

得

① 若沿图中的回路 III 列出 KVL 方程,可得 $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5 - u_6 = 0$

§ 1-10 基尔霍夫定律

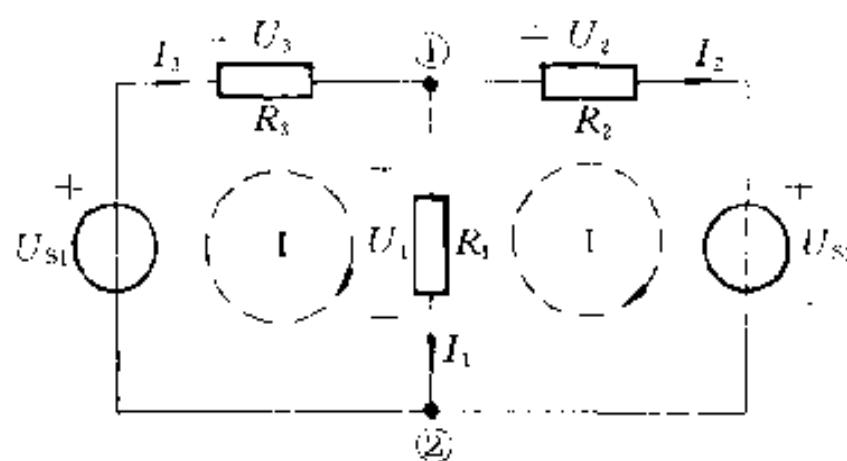


图 1-21 例 1-5 图

$$U_1 = U_{S1} - U_1 = 3 \text{ V} - U_1$$

对结点①应用 KCL，有

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

代入 VCR 得

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_3}{R_3} = 0$$

代入 U_2 和 U_3 的表达式及各电阻值，有

$$U_1 + \frac{U_1 - 1}{2} - \frac{3 - U_1}{3} = 0$$

解得

$$U_1 = \frac{9}{11} \text{ V} = 0.8182 \text{ V}$$

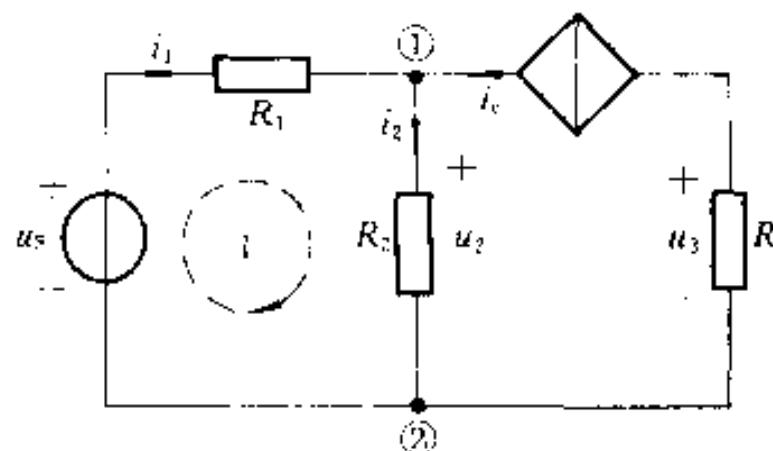


图 1-22 例 1-6 图

例 1-6 图 1-22 电路中，已知 $R_1 = 0.5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$, $u_s = 10 \text{ V}$, 电流控制电流源的电流 $i_c = 50i_1$ 。求电阻 R_3 两端的电压 u_3 。

解 这是一个有受控源的电路，宜选择控制量 i_1 作为未知量，求得 i_1 后再求 u_3 。可分以下步骤进行：

1. 对结点①按 KCL 得流过 R_2 的电流 i_2 为

$$i_2 = i_1 + i_c \approx 51i_1$$

2. 对回路 L (绕行方向见图示)应用 KVL, 有

$$-u_s + R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0$$

代入 u_s 、 R_1 、 R_2 的数值及 i_2 表达式, 有

$$i_1 = \frac{10}{51.5 \times 10^3} \text{ A}$$

3. R_3 两端的电压 u_3 为

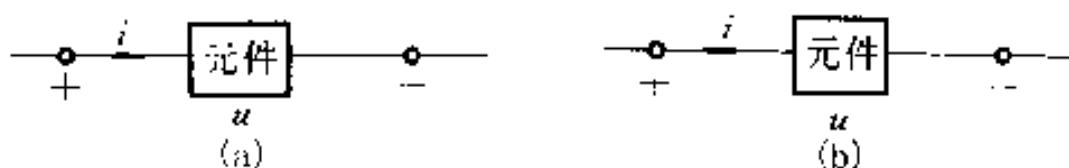
$$\begin{aligned} u_3 &= -2 \times 10^3 i_1 = -2 \times 10^3 \times 50i_1 \\ &\approx -19.4 \text{ V} \end{aligned}$$

以上例题主要是为了说明 KCL 和 KVL 的应用。如何根据这两个定律和元件的 VCR 列出电路方程进而求解将在第 3 章中介绍。

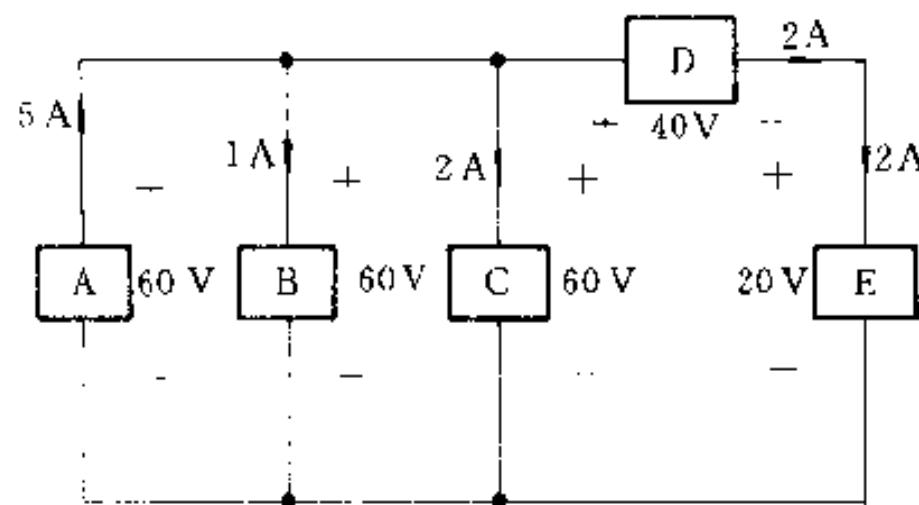
习 题

1-1 说明图(a)、(b)中:

- (1) u 、 i 的参考方向是否关联?
- (2) ui 乘积表示什么功率?
- (3) 如果在图(a)中 $u > 0, i < 0$; 图(b)中 $u > 0, i > 0$, 元件实际发出还是吸收功率?



题 1-1 图



题 1-3 图

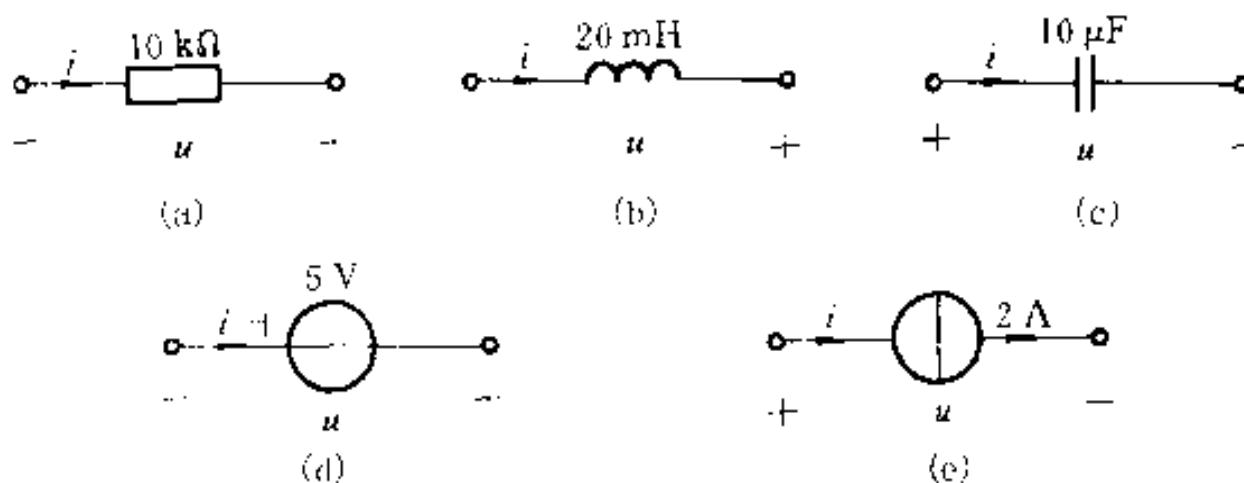
1-2 若某元件端子上的电压和电流取关联参考方向, 而 $u = 170\cos(100\pi t)$ V, $i = 7\sin(100\pi t)$ A。求:

- (1) 该元件吸收功率的最大值;
- (2) 该元件发出功率的最大值。

1-3 试校核图中电路所得解答是否满足功率平衡。(提示: 求解电路以后, 校核所得结

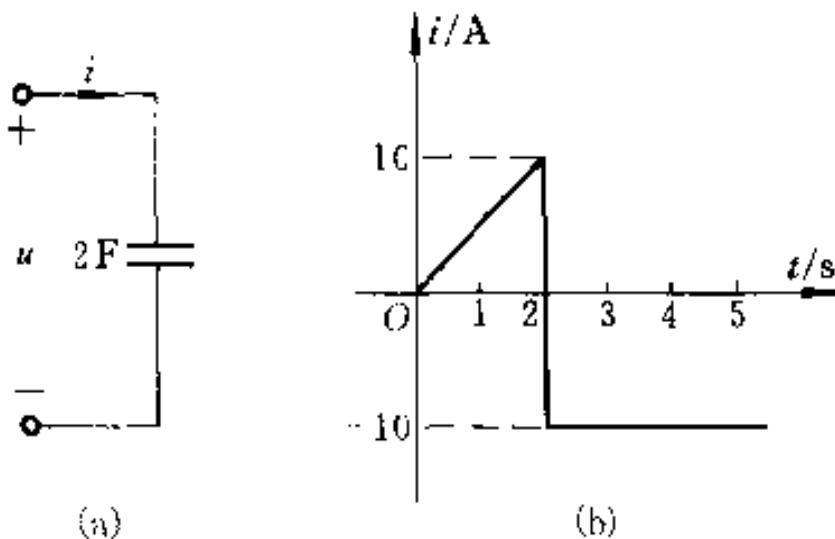
果的方法之一是核对电路中所有元件的功率平衡,即元件发出的总功率应等于其他元件吸收的总功率)。

1-4 在指定的电压 u 和电流 i 参考方向下,写出各元件 u 和 i 的约束方程(元件的组成关系)。



题 1-4 图

1-5 图(a)电容中电流 i 的波形如图(b)所示,现已知 $u_C(0)=0$,试求 $t=1\text{ s}$, $t=2\text{ s}$ 和 $t=4\text{ s}$ 时电容电压 u_C 。



题 1-5 图

1-6 图(a)中 $L=4\text{ H}$,且 $i(0)=0$,电压的波形如图(b)所示。试求当 $t=1\text{ s}$, $t=2\text{ s}$, $t=3\text{ s}$ 和 $t=4\text{ s}$ 时电感电流 i 。

1-7 若已知显像管行偏转线圈中的周期性行扫描电流如图所示,现已知线圈电感为 0.01 H ,电阻略而不计,试求电感线圈所加电压的波形。

1-8 $2\text{ }\mu\text{F}$ 的电容上所加电压 u 的波形如图所示。求:

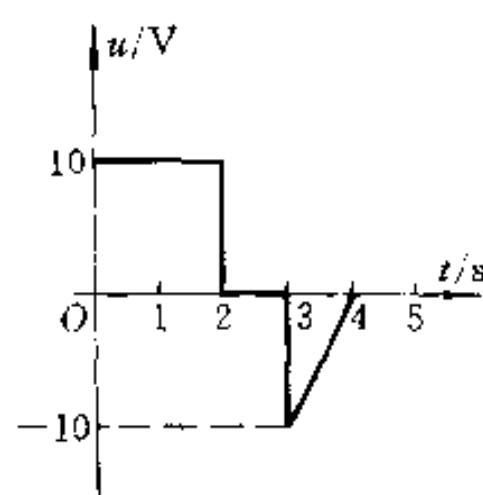
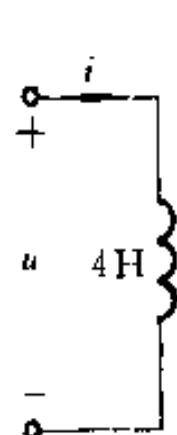
- (1) 电容电流 i ;
- (2) 电容电荷 q ;
- (3) 电容吸收的功率 p 。

1-9 电路如图所示,其中 $R=2\Omega$, $L=1\text{ H}$, $C=0.01\text{ F}$, $u_C(0)=0$ 。若电路的输入电流为:

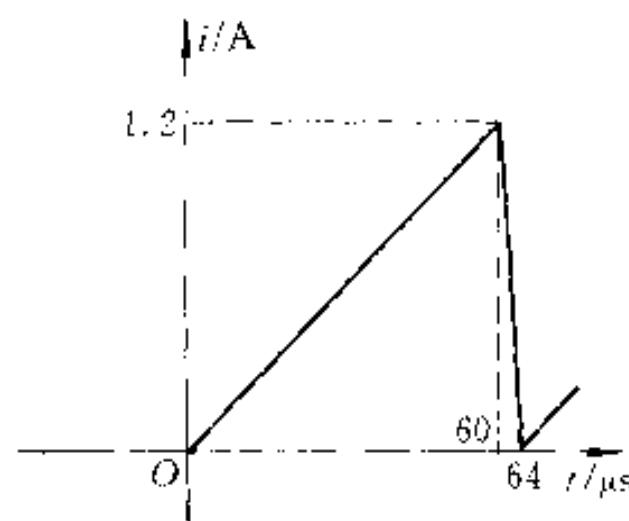
$$(1) i=2\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\text{ A};$$

$$(2) i=e^{-t}\text{ A};$$

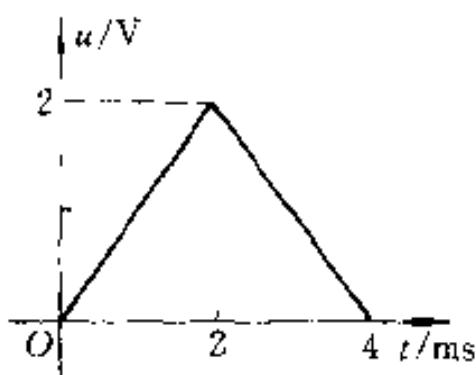
试求两种情况下,当 $t>0$ 时的 u_R , u_L 和 u_C 值。



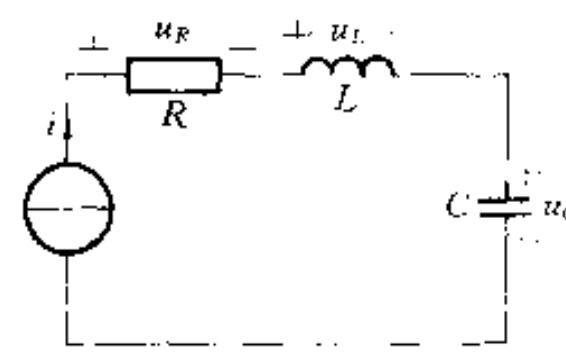
题 1-6 图



题 1-7 图

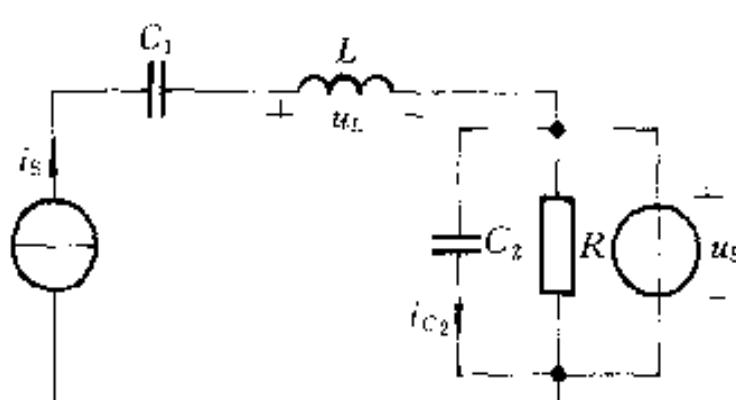


题 1-8 图

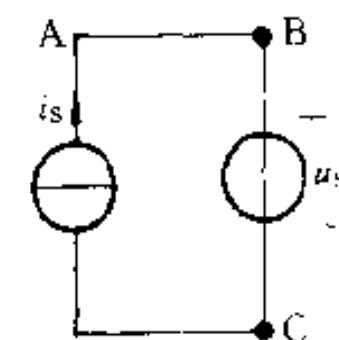


题 1-9 图

1-10 电路如图所示,设 $u_s(t) = U_m \cos(\omega t)$, $i_s(t) = I e^{-\alpha t}$,试求 $u_L(t)$ 和 $i_{C_2}(t)$



题 1-10 图



题 1-11 图

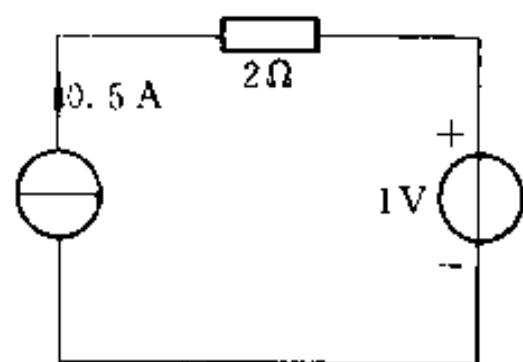
1-11 电路如图所示,其中 $i_s = 2 \text{ A}$, $u_s = 10 \text{ V}$ 。

- (1) 求 2 A 电流源和 10 V 电压源的功率;
- (2) 如果要求 2 A 电流源的功率为零,在 AB 线段内应插入何种元件? 分析此时各元件的功率;
- (3) 如果要求 10 V 电压源的功率为零,则应在 BC 间并联何种元件? 分析此时各元件的功率。

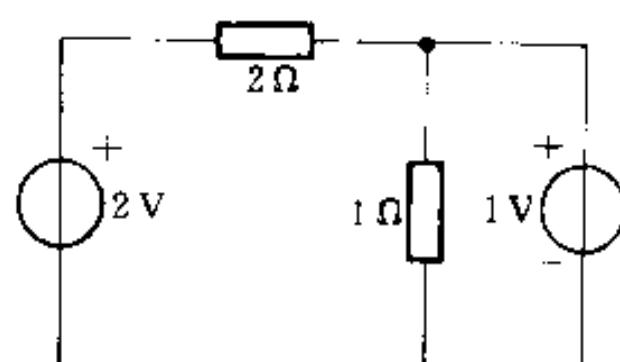
1-12 试求图示电路中每个元件的功率。

1-13 试求图中各电路的电压 U ,并讨论其功率平衡。

1-14 电路如图所示,试求:(1)电流 i_1 和 u_{ab} [图(a)];(2)电压 u_{ab} [图(b)]。

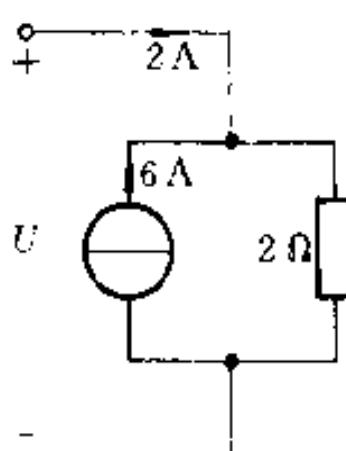


(a)

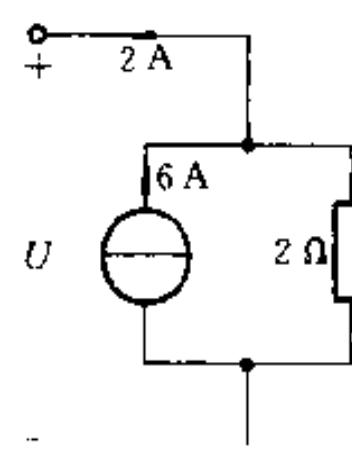


(b)

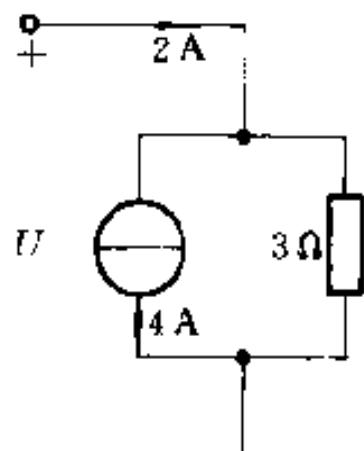
题 1-12 图



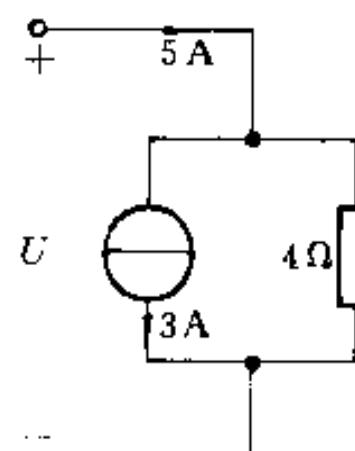
(a)



(b)

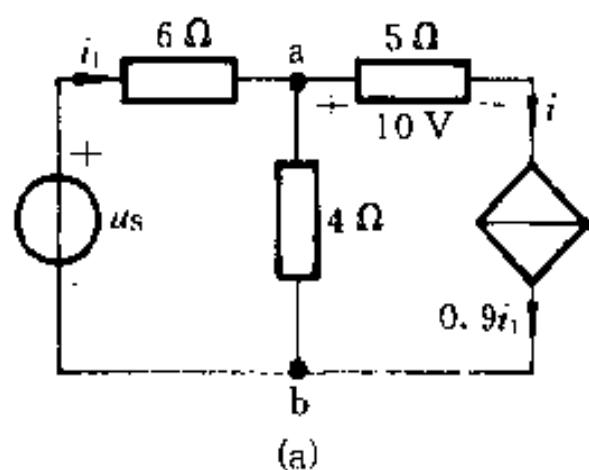


(c)

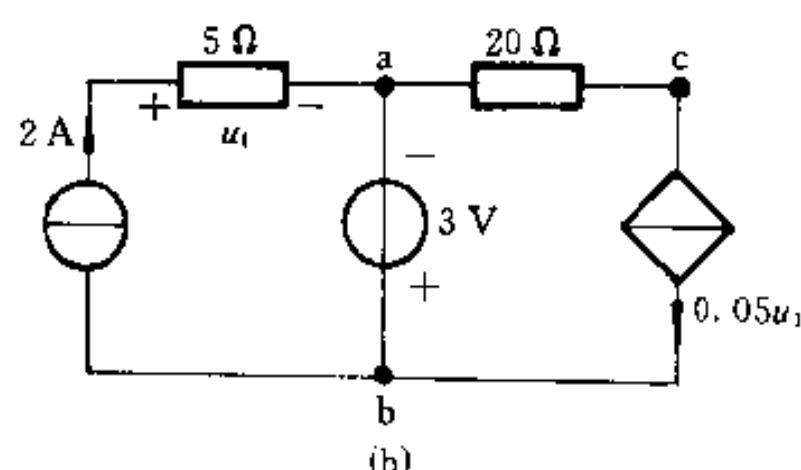


(d)

题 1-13 图



(a)

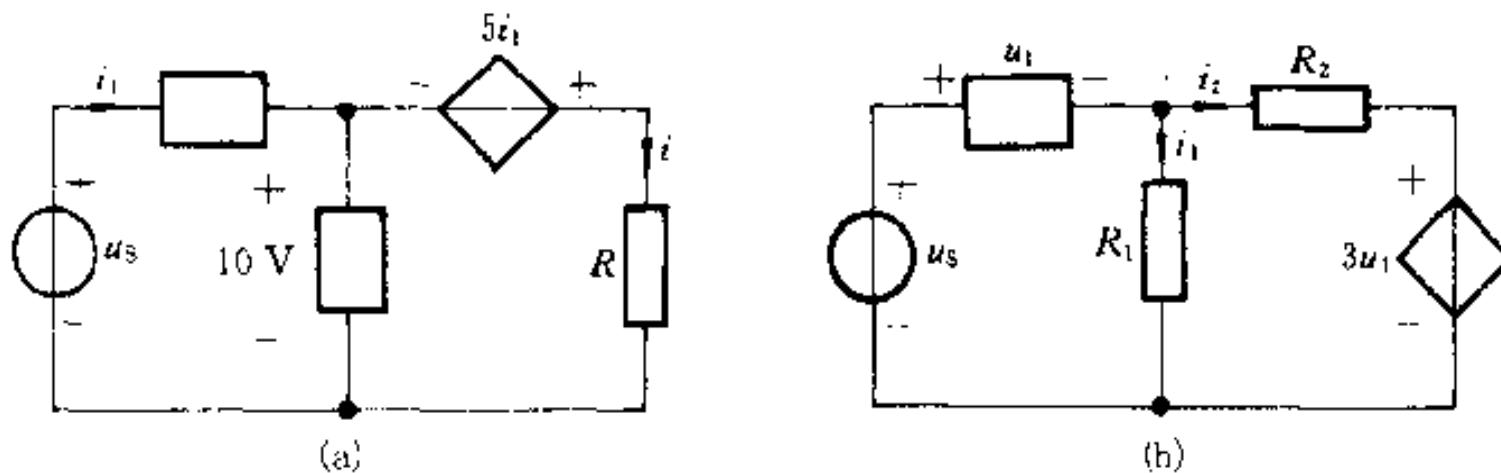


(b)

题 1-14 图

1-15 对图示电路:

- (1) 已知图(a)中, $R = 2 \Omega$, $i_1 = 1 A$, 求电流 i ;
 (2) 已知图(b)中, $u_s = 10 V$, $i_1 = 2 A$, $R_1 = 4.5 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, 求 i_2 。

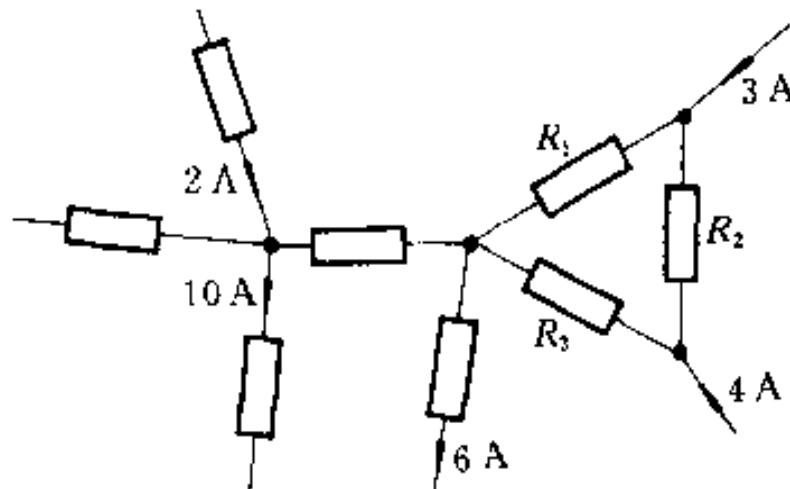


题 1-15 图

1-16 对图示电路,若:

- (1) R_1, R_2, R_3 值不定;
 (2) $R_1 = R_2 = R_3$ 。

在以上两种情况下,尽可能多地确定其他各电阻中的未知电流。



题 1-16 图

1-17 在图示电路中,已知 $u_{12} = 2 V$, $u_{23} = 3 V$, $u_{25} = 5 V$, $u_{37} = 3 V$, $u_{67} = 1 V$, 尽可能多地确定其他各元件的电压。

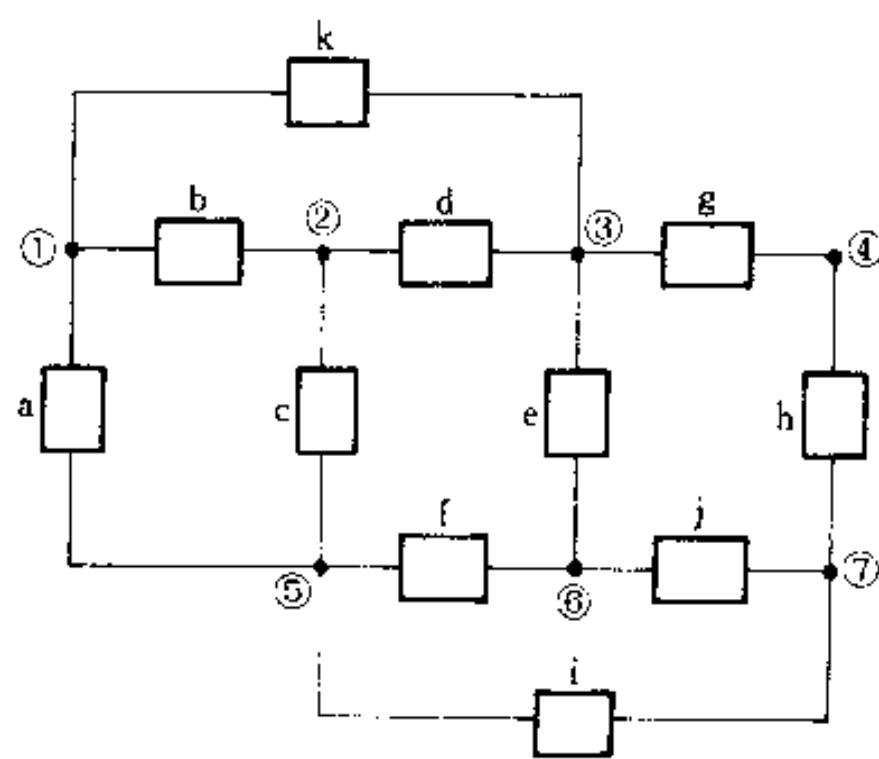
1-18 对上题所示电路,指定各支路电流的参考方向,然后列出所有结点处的 KCL 方程,并说明这些方程中有几个是独立的。

1-19 电路如图所示,按指定的电流参考方向列出所有可能的回路的 KVL 方程。这些方程都独立吗?

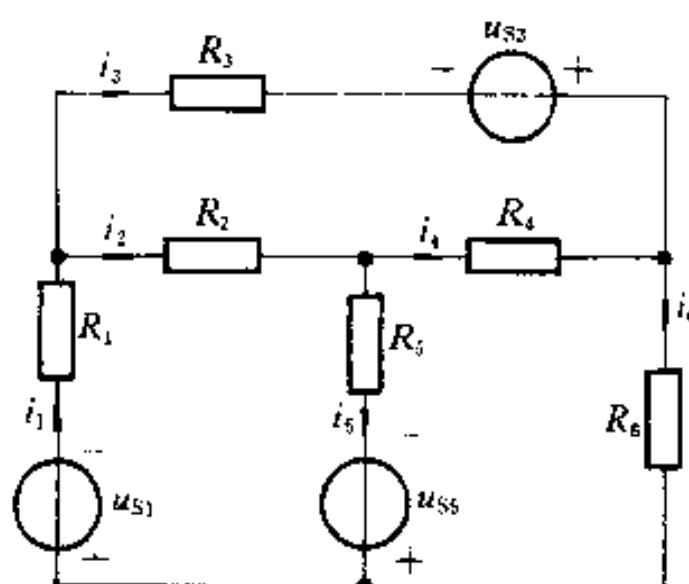
1-20 利用 KCL 和 KVL 求解图示电路中的电压 u_o 。

1-21 试求图示电路中控制量 I_1 及 U_o 。

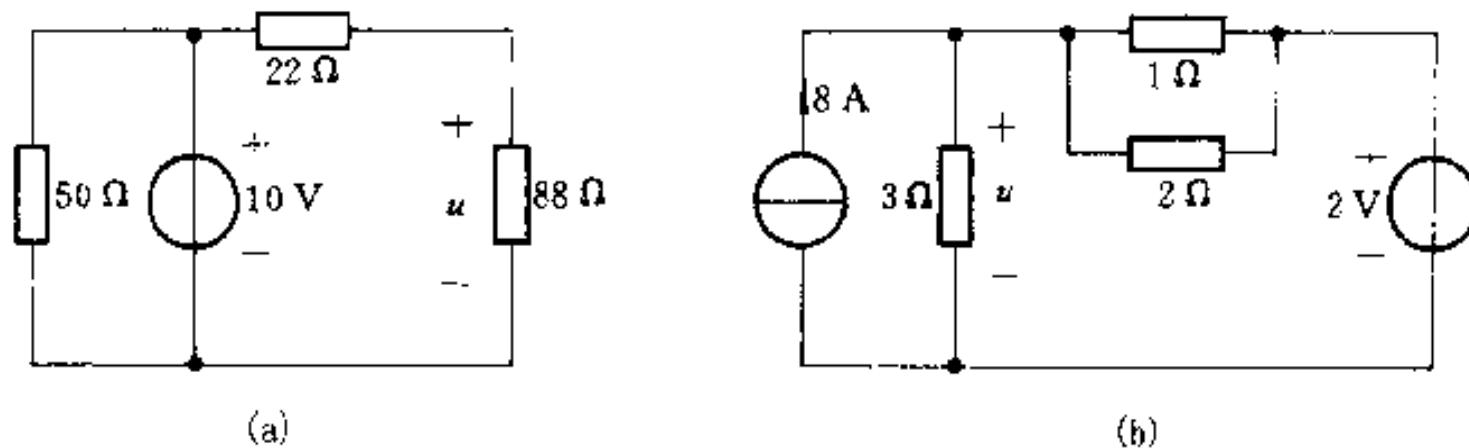
1-22 试求图示电路中控制量 u_1 及 u_o 。



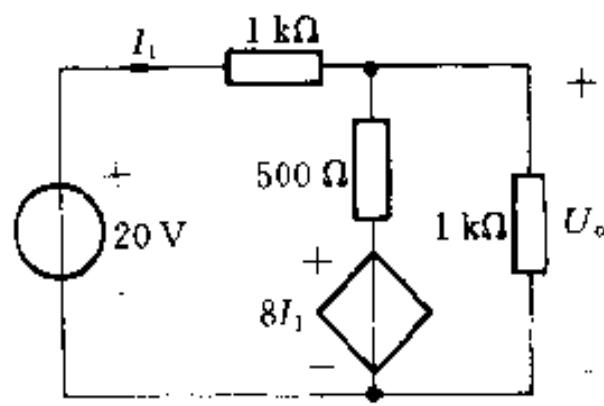
题 1-17 图



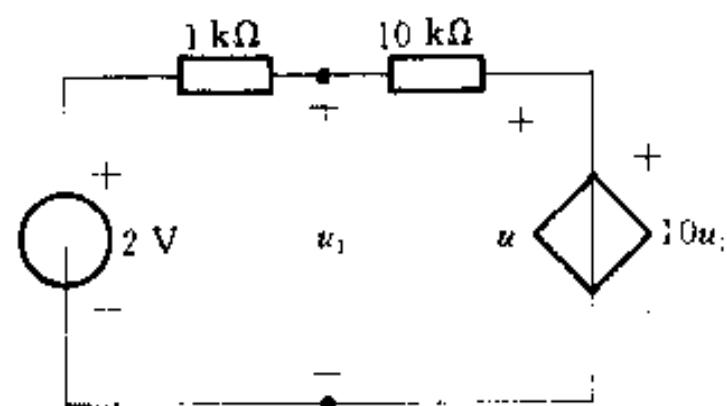
题 1-19 图



题 1-20 图



题 1-21 图



题 1-22 图

第二章

电阻电路的等效变换

·———— 内容提要 ———·

本章介绍电路的等效变换的概念。内容包括：电阻和电源的串、并联，电源的等效变换、一端口输入电阻的计算。

§ 2-1 引言

由时不变线性无源元件、线性受控源和独立电源组成的电路，称为时不变线性电路，本书简称线性电路。本书的大部分内容是线性电路的分析。

如果构成电路的无源元件均为线性电阻，则称为线性电阻性电路（或简称电阻电路）。本书第二、三、四章介绍电阻电路的分析。电路中电压源的电压或电流源的电流，可以是直流，也可以随时间按某种规律变化；当电路中的独立电源都是直流电源时，这类电路简称为直流电路。

本章为简单电阻电路的分析与计算，着重介绍等效变换的概念。

§ 2-2 电路的等效变换

对电路进行分析和计算时，有时可以把电路中某一部分简化，即用一个较为简单的电路替代原电路。在图 2-1(a) 中，右方虚线框中由几个电阻构成的电路可以用一个电阻 R_{eq} [见图 2-1(b)] 替代，使整个电路得以简化。进行替代的条件是使图 2-1(a)、(b) 中，端子 1-1' 以右的部分有相同的伏安特性。电阻 R_{eq} 称为等效电阻，其值决定于被替代的原电路中各电阻的值以及它们的连接方式。

另一方面，当图 2-1(a) 中端子 1-1' 以右电路被 R_{eq} 替代后，1-1' 以左部

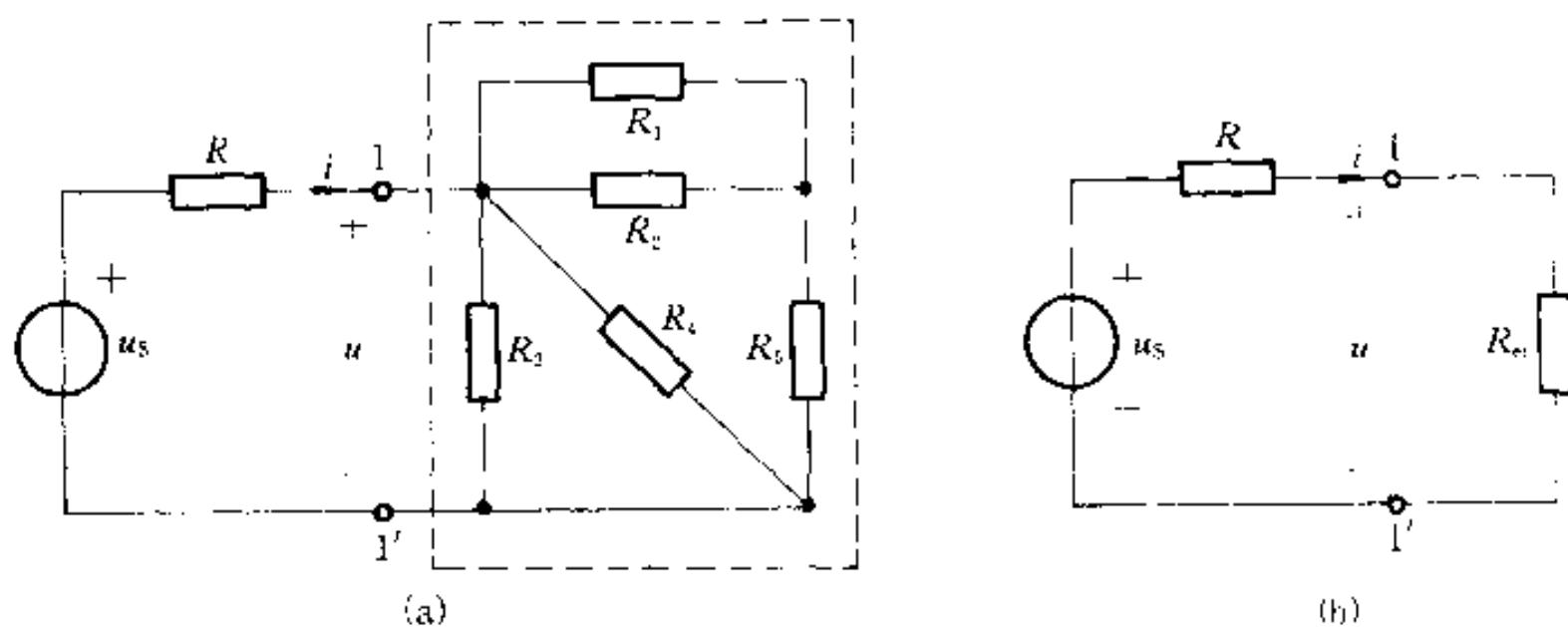


图 2-1 等效电阻

分电路的任何电压和电流都将维持与原电路相同。这就是电路的“等效概念”。更一般地说，当电路中某一部分用其等效电路替代后，未被替代部分的电压和电流均应保持不变。用等效电路的方法求解电路时，电压和电流保持不变的部分仅限于等效电路以外，这就是“对外等效”的概念。等效电路与被它代替的那部分电路显然是不同的，例如，把图 2-1(a)所示电路简化后，不难按图 2-1(b)求得端子 $1-1'$ 以左部分的电流 i 和端子 $1-1'$ 的电压 u ，它们分别等于原电路中的电流 i 和电压 u 。如果要求得图 2-1(a)中虚线方框内的各电阻的电流，就必须回到原电路，根据已求得的电流 i 和电压 u 求解。“对外等效”也就是对外部特性等效。

§2-3 电阻的串联和并联

图 2-2(a)所示电路为 n 个电阻 $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_n$ 的串联组合, 电阻串联时, 每个电阻中的电流为同一电流。

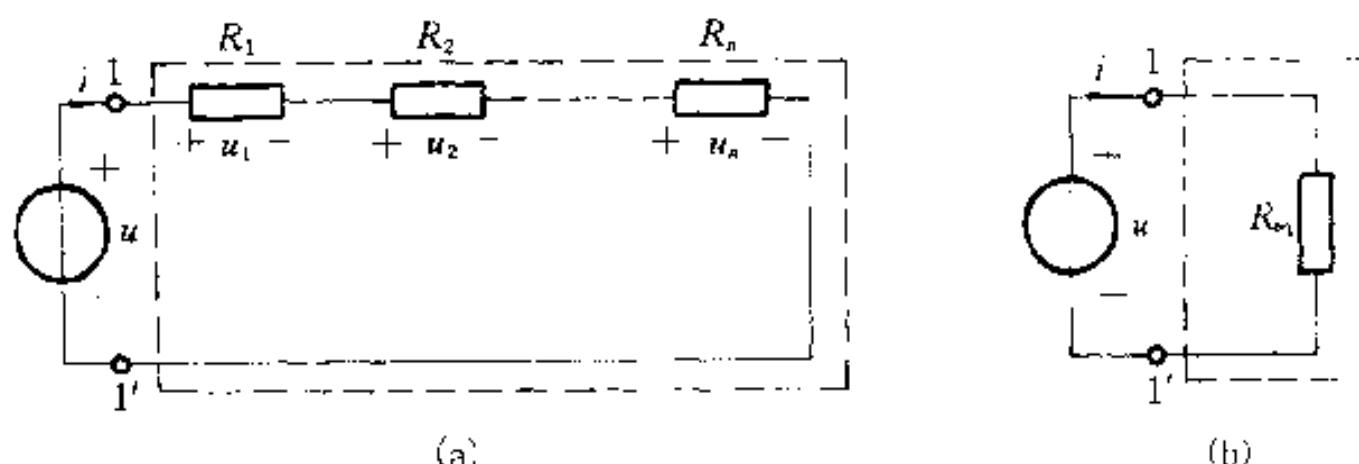


图 2-2 电阻的串联

应用KVL,有

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

§ 2-3 电阻的串联和并联

33

由于每个电阻的电流均为 i , 有 $u_1 = R_1 i, u_2 = R_2 i, u_3 = R_3 i, \dots, u_k = R_k i, \dots, u_n = R_n i$, 代入上式, 得

$$u = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k + \dots + R_n) i = R_{\text{eq}} i$$

其中

$$R_{\text{eq}} \stackrel{\text{def}^{\text{(1)}}}{=} \frac{u}{i} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k + \dots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k \quad (2-1)$$

电阻 R_{eq} 是这些串联电阻的等效电阻。显然, 等效电阻必大于任一个串联的电阻。

电阻串联时, 各电阻上的电压为

$$u_k = R_k i = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u, k = 1, 2, \dots, n \quad (2-2)$$

可见, 串联的每个电阻, 其电压与电阻值成正比。或者说, 总电压根据各个串联电阻的值进行分配。式(2-2)称为电压分配公式, 或称分压公式。

图 2-3(a)示出 n 个电阻的并联组合, 电阻并联时, 各电阻的电压为同一电压。由于电压相等, 总电流 i 可根据 KCL 写作

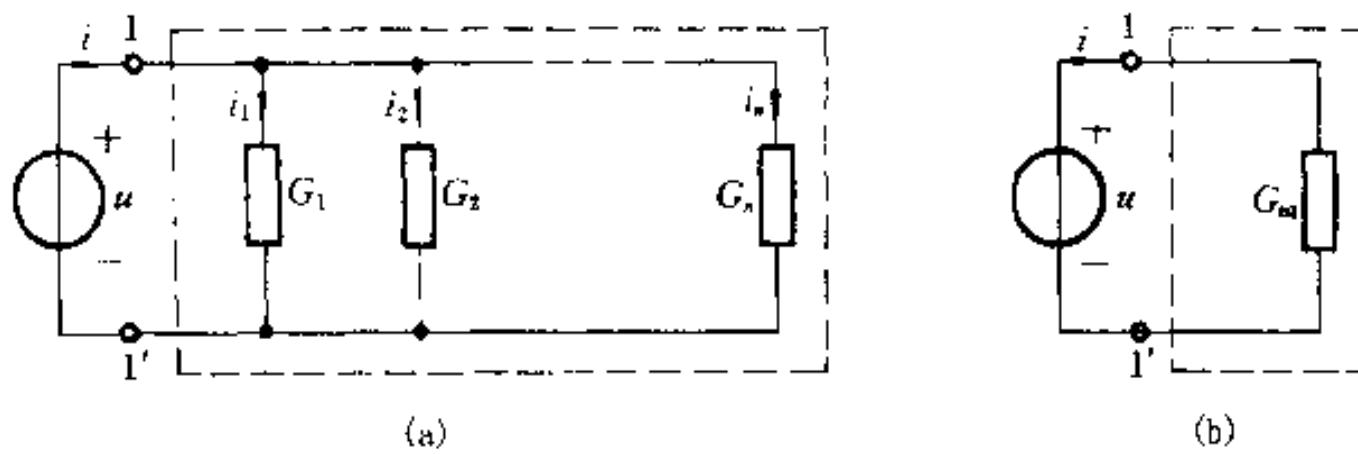


图 2-3 电阻的并联

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n \\ &= G_1 u + G_2 u + \dots + G_k u + \dots + G_n u \\ &= (G_1 + G_2 + \dots + G_k + \dots + G_n) u = G_{\text{eq}} u \end{aligned} \quad (2-3)$$

式中 $G_1, G_2, \dots, G_k, \dots, G_n$ 为电阻 $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_n$ 的电导, 而

$$G_{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{u} = G_1 + G_2 + \dots + G_k + \dots + G_n = \sum_{k=1}^n G_k \quad (2-4)$$

G_{eq} 是 n 个电阻并联后的等效电导。并联后的等效电阻 R_{eq} 为

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{G_{\text{eq}}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n G_k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

① 符号“ $\stackrel{\text{def}}{=}$ ”表示“按定义等于”。

或

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

不难看出,等效电阻小于任一个并联的电阻。

电阻并联时,各电阻中的电流为

$$i_k = G_k u = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}} i \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

可见,各个并联电阻中的电流与它们各自的电导值成正比。上式称为电流分配公式,或称分流公式。

当 $n = 2$ 时,即 2 个电阻的并联,如图 2-4(a),等效电阻为

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

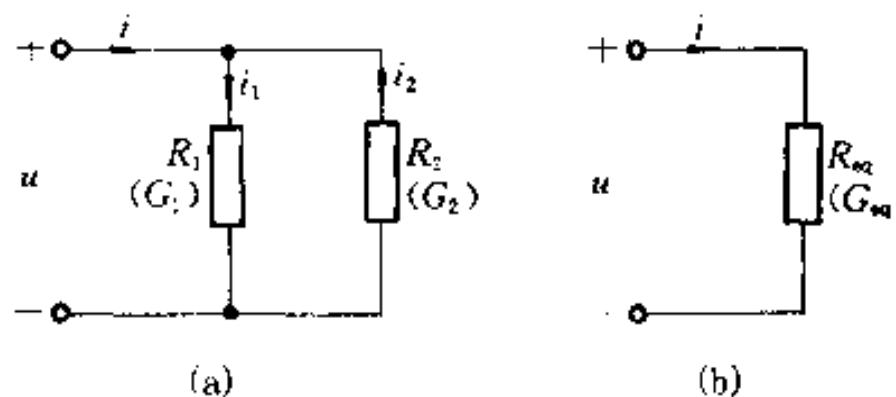


图 2-4 2 个电阻并联

两并联电阻的电流分别为:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_{\text{eq}}} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_{\text{eq}}} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

例 2-1 图 2-5 所示电路中, $I_s = 16.5 \text{ mA}$, $R_s = 2 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 25 \text{ k}\Omega$, 求 I_1 , I_2 和 I_3 。

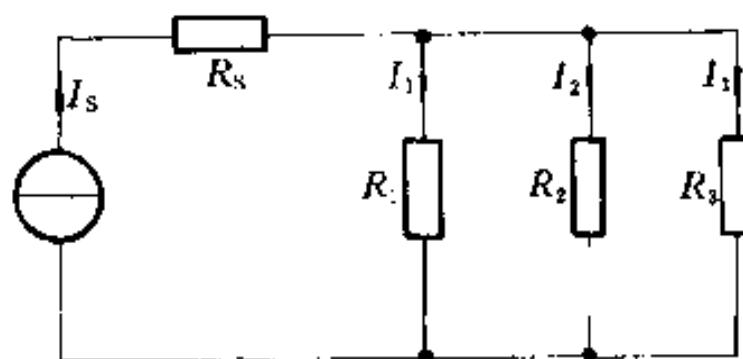


图 2-5 例 2-1 图

解 R_s 不影响 R_1, R_2, R_3 中电流的分配。现在 $G_1 = \frac{1}{R_1} = 0.025 \text{ mS}$, $G_2 = \frac{1}{R_2} = 0.1 \text{ mS}$, $G_3 = \frac{1}{R_3} = 0.04 \text{ mS}$ 。按电流分配公式, 有:

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} I_s = \frac{0.025}{0.025 + 0.1 + 0.04} \times 16.5 \text{ mA} \\ = 2.5 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} I_s = \frac{0.1}{0.025 + 0.1 + 0.04} \times 16.5 \text{ mA} \\ = 10 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} I_s = \frac{0.04}{0.025 + 0.1 + 0.04} \times 16.5 \text{ mA} \\ = 4 \text{ mA}$$

当电阻的连接中既有串联又有并联时, 称为电阻的串、并联, 或简称混联。图 2-6(a)、(b) 所示电路均为混联电路。在图 2-6(a) 中, R_3 与 R_4 串联后与 R_2 并联, 再与 R_1 串联。故有

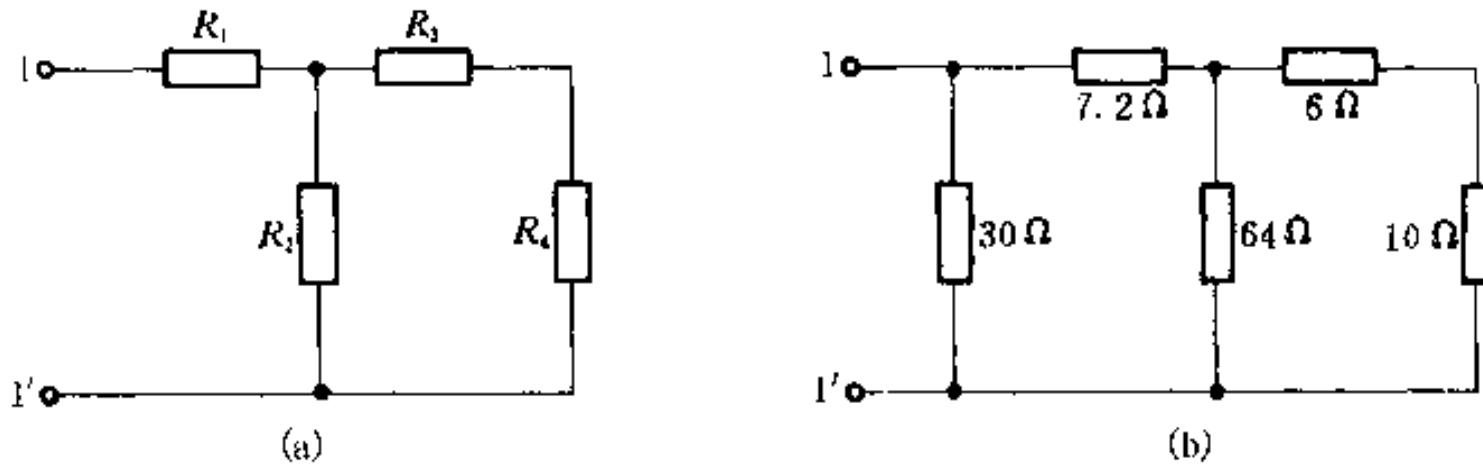


图 2-6 电阻的混联

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

对于图 2-6(b) 中电路, 读者可自行求得 $R_{eq} = 12 \Omega$ 。

§ 2-4 电阻的 Y 形连接和△形连接的等效变换

图 2-7 所示是一种具有桥形结构的电路, 它是测量中常用的一种电桥电路, 其中的电阻既非串联又非并联。 R_1, R_3 和 R_5 构成一个 Y 形连接(或星形连接); 电阻 R_1, R_2 和 R_4 构成一个△形连接(或三角形连接)。在 Y 形连接中, 各个电阻都有一端接在一个公共结点上, 另一端则分别接到 3 个端子上; 在△形连接中, 各个电阻分别接在 3 个端子的每两个之间。

Y形连接和 Δ 形连接都是通过3个端子与外部相连。图2-8(a)、(b)分别示出接于端子1、2、3的Y形连接和 Δ 形连接的3个电阻。

端子1、2、3与电路的其他部分相连,图中没有画出电路的其他部分。当两种连接的电阻之间满足一定关系时,它们在端子1、2、3以外的特性可以相同,就是说它们可以互相等效变换。如果在它们的对应端子之间具有相同的电压 u_{12} 、 u_{23} 和 u_{31} ,而流入对应端子的电流分别相等,即 $i_1 = i'_1$, $i_2 = i'_2$, $i_3 = i'_3$,在这种条件下,它们彼此等效。这就是Y- Δ 等效变换的条件。

对于 Δ 连接电路,各电阻中电流为:

$$i_{12} = \frac{u_{12}}{R_{12}}, \quad i_{23} = \frac{u_{23}}{R_{23}}, \quad i_{31} = \frac{u_{31}}{R_{31}}$$

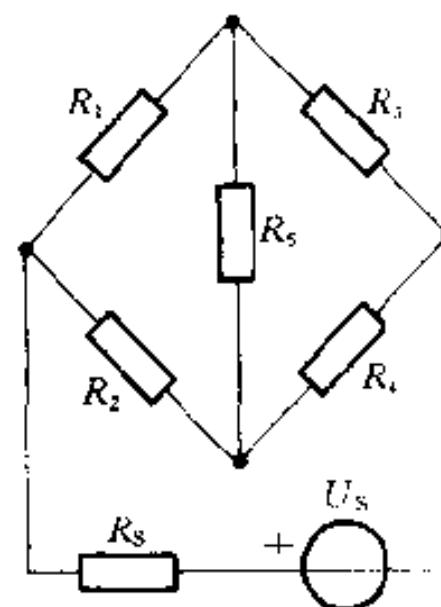
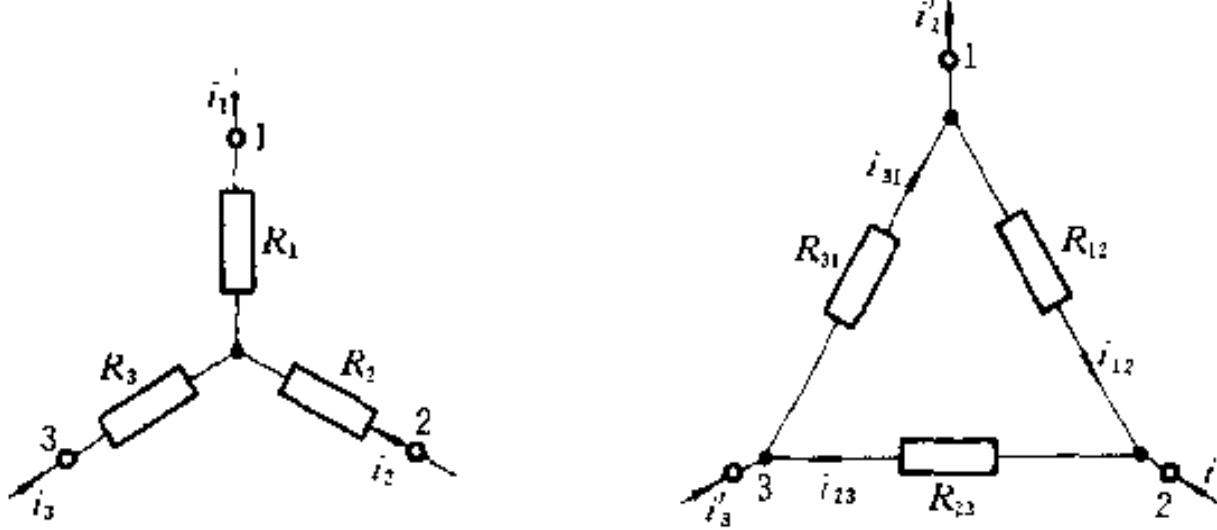


图2-7 电桥电路



(a)

(b)

图2-8 Y连接和 Δ 连接的等效变换

根据KCL,端子电流分别为

$$\left. \begin{aligned} i'_1 &= \frac{u_{12}}{R_{12}} - \frac{u_{31}}{R_{31}} \\ i'_2 &= \frac{u_{23}}{R_{23}} - \frac{u_{12}}{R_{12}} \\ i'_3 &= \frac{u_{31}}{R_{31}} - \frac{u_{23}}{R_{23}} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

对于Y连接电路,应根据KCL和KVL求出端子电压与电流之间的关系,方程为:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$R_1 i_1 - R_2 i_2 = u_{12}$$

$$R_2 i_2 - R_3 i_3 = u_{23}$$

可以解出电流

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{R_3 u_{12}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} - \frac{R_2 u_{31}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ i_2 &= \frac{R_1 u_{23}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} - \frac{R_3 u_{12}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ i_3 &= \frac{R_2 u_{31}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} - \frac{R_1 u_{23}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

由于不论 u_{12} 、 u_{23} 、 u_{31} 为何值,两个等效电路的对应的端子电流均相等,故式(2-5)与式(2-6)中电压 u_{12} 、 u_{23} 和 u_{31} 前面的系数应该对应地相等。于是得到

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

式(2-7)就是根据 Y 连接的电阻确定△连接的电阻的公式。

将式(2-7)中三式相加,并在右方通分可得

$$R_{12} + R_{23} + R_{31} = \frac{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)^2}{R_1 R_2 R_3}$$

代入 $R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 = R_{12} R_3 = R_{31} R_2$ 就可得到 R_1 的表达式。同理可求得 R_2 和 R_3 ,于是得到

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

式(2-8)就是根据△连接的电阻确定 Y 连接的电阻的公式。

为了便于记忆,以上互换公式可归纳为:

$$Y \text{ 形电阻} = \frac{\Delta \text{ 形相邻电阻的乘积}}{\Delta \text{ 形电阻之和}}$$

$$\Delta \text{ 形电阻} = \frac{Y \text{ 形电阻两两乘积之和}}{Y \text{ 形不相邻电阻}}$$

注意这些公式的量纲和端子 1、2、3 的互换性有助于记忆。

若 Y 连接中 3 个电阻相等,即 $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$,则等效△连接中 3 个电阻也相等,它们等于

$$R_{\Delta} = R_{12} = R_{23} = R_{31} = 3R_Y$$

或

$$R_Y = \frac{1}{3} R_{\Delta}$$

式(2-7)、(2-8)也可用电导表示,例如式(2-7)可写成:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

例 2-2 求图 2-9(a)所示桥形电路的总电阻 R_{12} 。

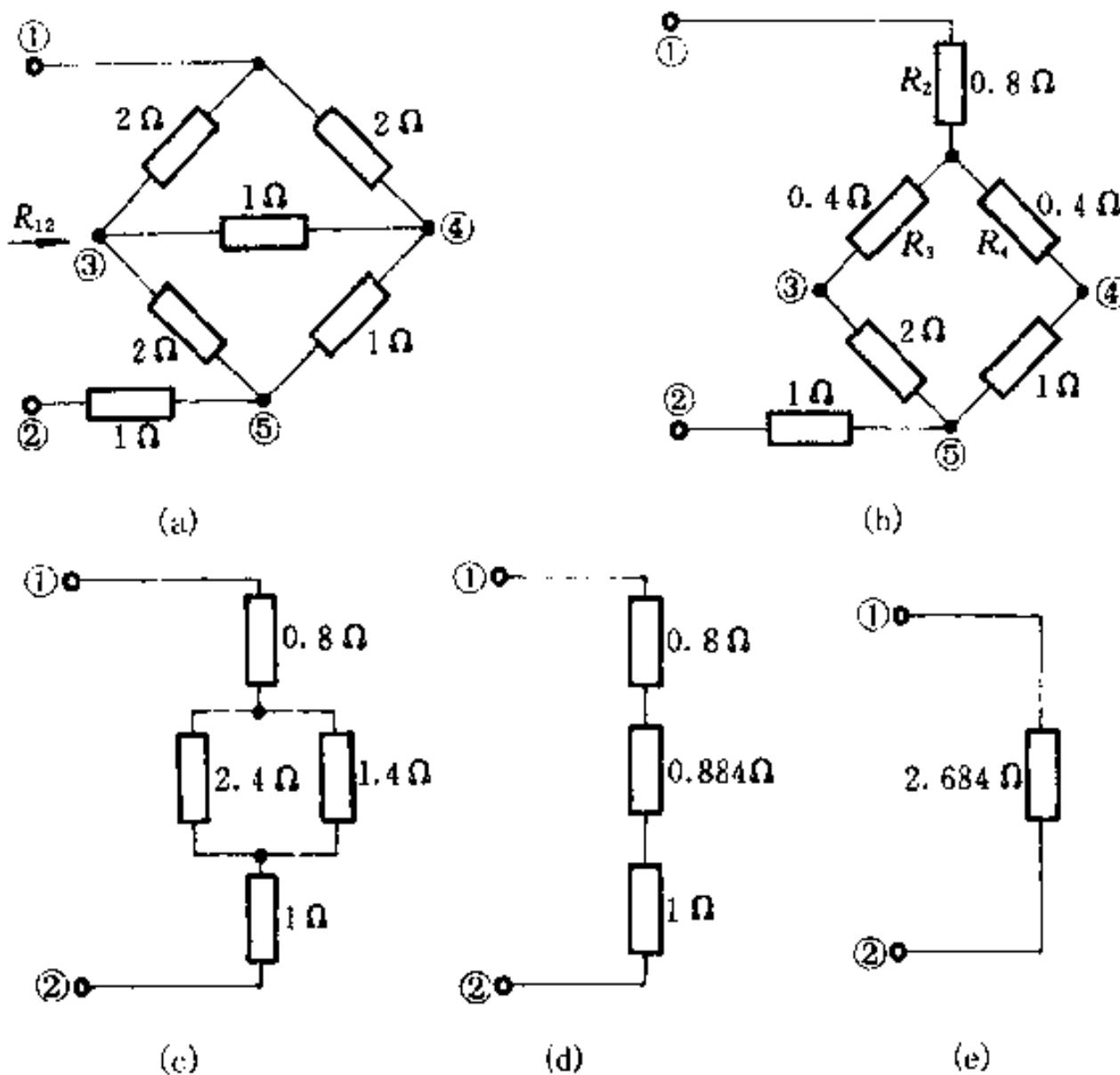


图 2-9 例 2-2 图

解 将结点①、③、④内的 Δ 形电路用等效 Y 形电路替代, 得到图(b)电路, 其中:

$$R_2 = \frac{2 \times 2}{2+2+1} \Omega = 0.8 \Omega$$

$$R_3 = \frac{2 \times 1}{2+2+1} \Omega = 0.4 \Omega$$

$$R_4 = \frac{2 \times 1}{2 + 2 + 1} \Omega = 0.4 \Omega$$

然后用串、并联的方法,得到图(c)、(d)、(e)电路,从而得到

$$R_{12} = 2.684 \Omega$$

另一种方法是用 Δ 形电路替代结点①、④、⑤内的Y形电路(以结点③为Y形的公共点),如图2-10所示,求解过程见图。

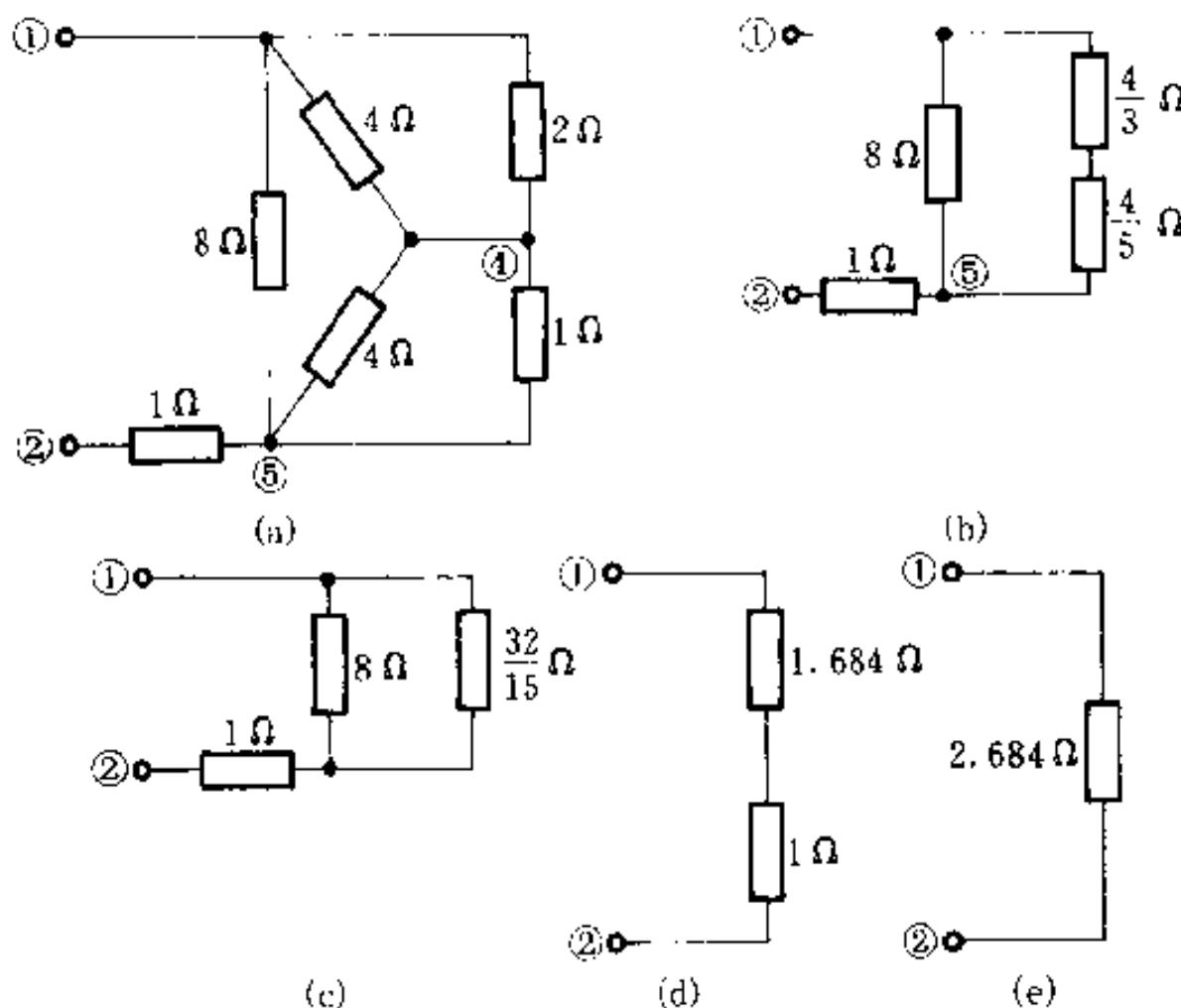


图 2-10 求解例 2-2 的另一种方法

§ 2-5 电压源、电流源的串联和并联

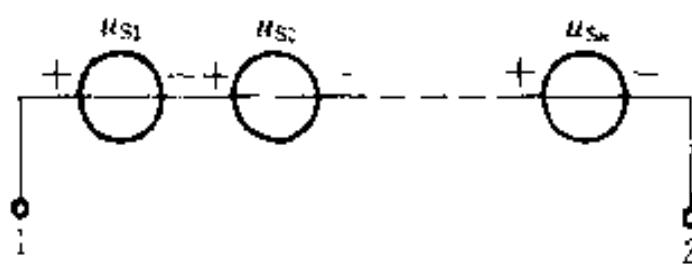
图 2-11(a)为 n 个电压源的串联,可以用一个电压源等效替代如图(b),这个等效电压源的电压为

$$u_s = u_{s1} + u_{s2} + \cdots + u_{sn} = \sum_{k=1}^n u_{sk}$$

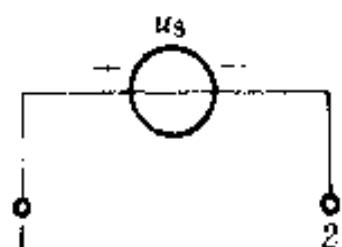
如果 u_{sk} 的参考方向与图(b)中 u_s 的参考方向一致时,式中 u_{sk} 的前面取“+”号,不一致时取“-”号。

图 2-12(a)为 n 个电流源的并联,可以用一个电流源等效替代。等效电流源的电流为

$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum_{k=1}^n i_{sk}$$



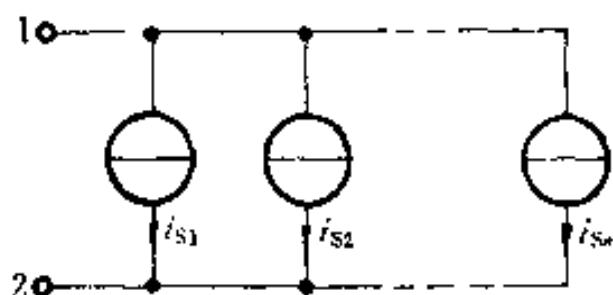
(a)



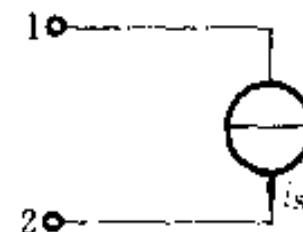
(b)

图 2-11 电压源的串联

如果 i_{Sk} 的参考方向与图(b)中 i_s 的参考方向一致时, 式中 i_{Sk} 的前面取“+”号; 不一致时取“-”号。



(a)



(b)

图 2-12 电流源的并联

只有电压相等极性一致的电压源才允许并联, 否则违背 KVL。其等效电路为其中任一电压源, 但是这个并联组合向外部提供的电流在各个电压源之间如何分配则无法确定。

只有电流相等且方向一致的电流源才允许串联, 否则违背 KCL。其等效电路为其中任一电流源, 但是这个串联组合的总电压如何在各个电流源之间分配则无法确定。

§ 2-6 实际电源的两种模型及其等效变换

图 2-13(a)所示为一个实际直流电源, 例如一个电池; 图(b)是它的输出电压 u 与输出电流 i 的伏安特性。可见电压 u 随电流 i 增大而减少, 而且不成线性关系。电流 i 不可超过一定的限值, 否则会导致电源损坏。不过在一段范围内电压和电流的关系近似为直线。如果把这一条直线加以延长, 如图 2-13(c)所示, 可以看出, 它在 u 轴和 i 轴上各有一个交点, 前者相当于 $i=0$ 时的电压, 即开路电压 U_∞ ; 后者相当于 $u=0$ 时的电流, 即短路电流 I_∞ 。根据此伏安特性, 可以用电压源

和电阻的串联组合或电流源和电导的并联组合作为实际电源的电路模型。

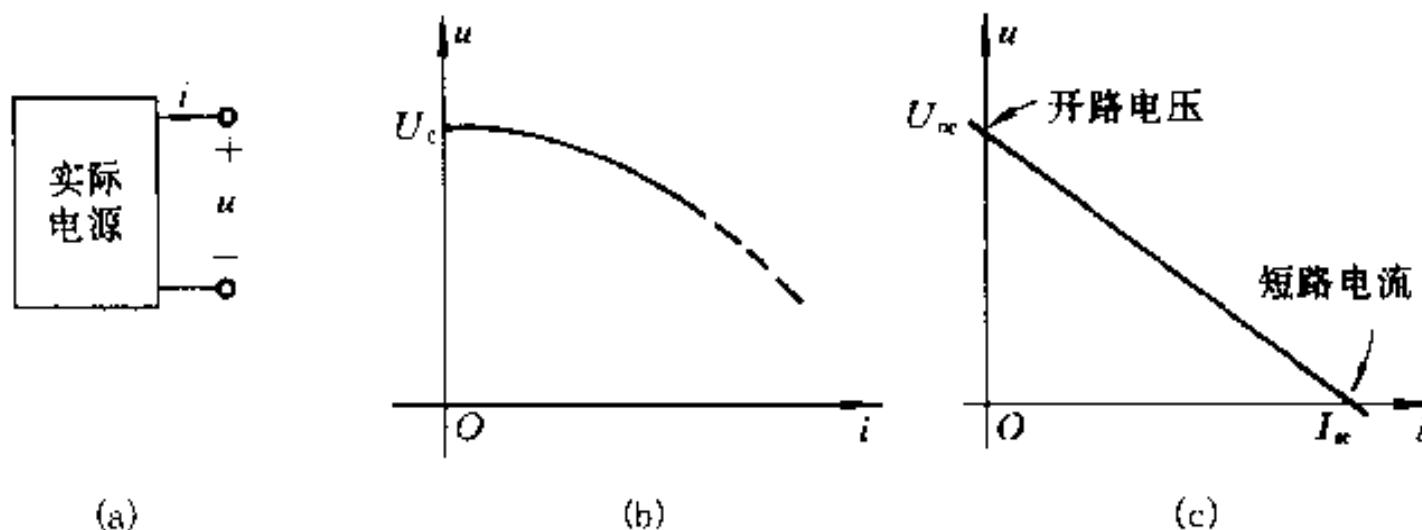


图 2-13 实际电源的伏安特性

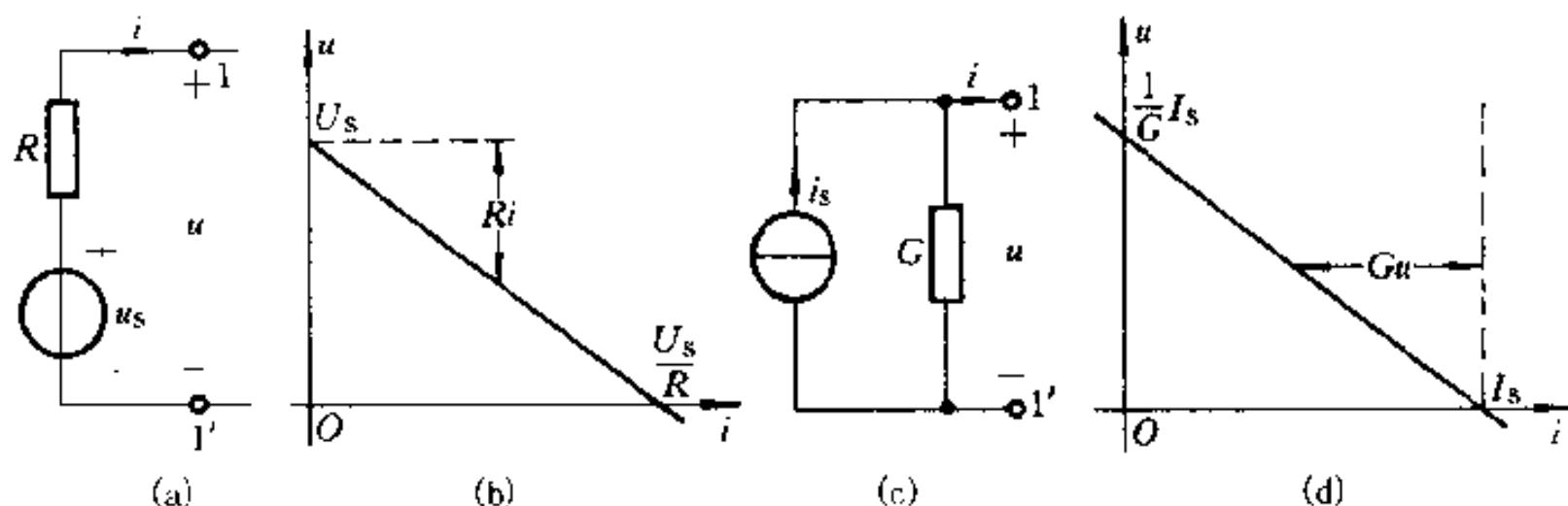


图 2-14 电源的两种电路模型

图 2-14(a)所示为电压源 u_s 和电阻 R 的串联组合, 在端子 $1-1'$ 处的电压与(输出)电流 i (外电路在图中没有画出)的关系为

$$u = u_s - Ri \quad (2-9)$$

图 2-14(c)所示为电流源 i_s 与电导 G 的并联组合, 在端子 $1-1'$ 处的电压 u 与(输出)电流 i 的关系为

$$i = i_s - Gu \quad (2-10)$$

如果令

$$G = \frac{1}{R} \quad , \quad i_s = Gu_s \quad (2-11)$$

式(2-9)和(2-10)所示的两个方程将完全相同,也就是在端子 $1-1'$ 处的 u 和 i 的关系将完全相同。式(2-11)就是这两种组合彼此对外等效必须满足的条件(注意 u_s 和 i_s 的参考方向, i_s 的参考方向由 u_s 的负极指向正极)。

当 $i = 0$ 时, 端子 $1-1'$ 处的电压为开路电压 u_{∞} , 而 $u_{\infty} = u_s$ 。当 $u = 0$ 时, i 为把端子 $1-1'$ 短路后的短路电流 i_{∞} , 而 $i_{\infty} = i_s$ 。同时有 $u_{\infty} = Ri_{\infty}$, 或 $i_{\infty} = Gu_{\infty}$ 。

图 2-14(b)和(d)分别示出当 u_s 和 i_s 为直流电压源 U_s 和直流电流源 I_s 时在 $i - u$ 平面上的伏安特性, 它们都是一条直线。当式(2-11)的条件满足时, 它们将是同一条直线。

这种等效变换仅保证端子 1-1' 外部电路的电压、电流和功率相同(即只是对外部等效), 对内部并无等效可言。例如, 端子 1-1' 开路时, 两电路对外均不发出功率, 但此时电压源发出的功率为零, 电流源发出功率为 $\frac{i_s^2}{G}$ 。反之, 短路时, 电压源发出的功率为 $\frac{u_s^2}{R}$, 电流源发出的功率为零。

利用 §2-3、§2-5 和本节的等效变换, 就可以求解由电压源、电流源和电阻组成的串、并联电路。

例 2-3 求图 2-15(a)所示电路中电流 i 。

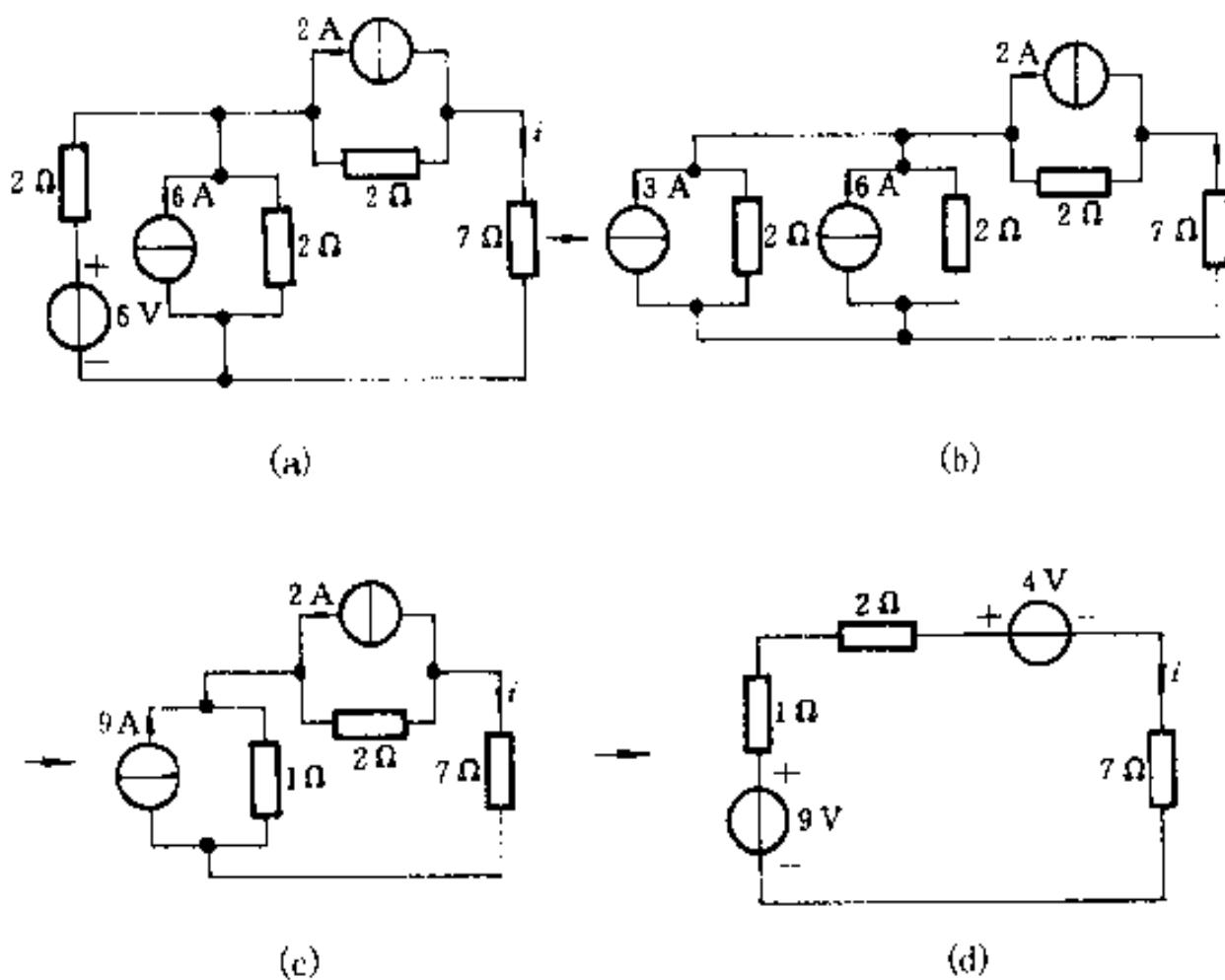


图 2-15 例 2-3 图

解 图 2-15 (a) 电路可简化为图(d)所示单回路电路。简化过程如图(b)、(c)、(d)所示。由化简后的电路可求得电流为

$$i = \frac{9 - 4}{1 + 2 + 7} A = 0.5 A$$

受控电压源、电阻的串联组合和受控电流源、电导的并联组合也可以用上述方法进行变换。此时应把受控电源当作独立电源处理, 但应注意在变换过程中保存控制量所在支路, 而不要把它消掉。

例 2-4 图 2-16(a)所示电路中, 已知 $u_s = 12 V$, $R = 2 \Omega$, VCCS 的电流

i_c 受电阻 R 上的电压 u_R 控制, 且 $i_c = gu_R$, $g = 2 \text{ S}$ 。求 u_R 。

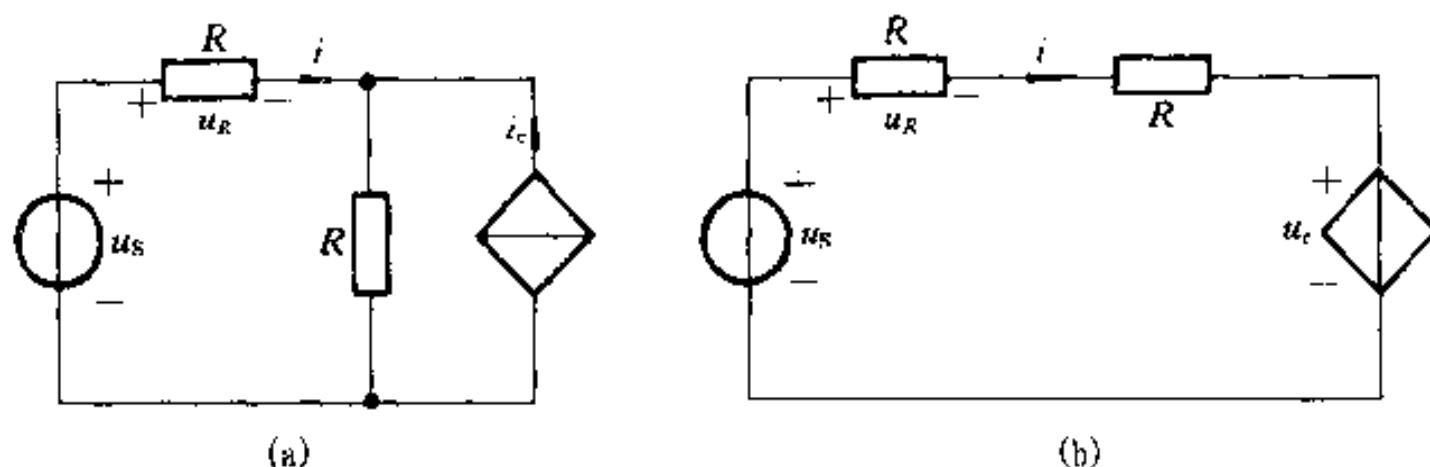


图 2·16 例 2·4 图

解 利用等效变换, 把电压控制电流源和电导的并联组合变换为电压控制电压源和电阻的串联组合, 如图 2·16(b), 其中 $u_c = Ri_c = 2 \times 2 \times u_R = 4u_R$, 而 $u_R = Ri$ 。按 KVL, 有:

$$Ri + Ri + u_c = u_s$$

$$2u_R + 4u_R = u_s$$

$$u_R = \frac{u_s}{6} = 2 \text{ V}$$

§ 2·7 输入电阻

电路或网络的一个端口是它向外引出的一对端子, 这对端子可以与外部电源或其他电路相连接。对一个端口来说, 从它的一个端子流入的电流一定等于从另一个端子流出的电流。这种具有向外引出一对端子的电路或网络称为一端口(网络)或二端网络。图 2·17(a)所示是一个一端口的图形表示。

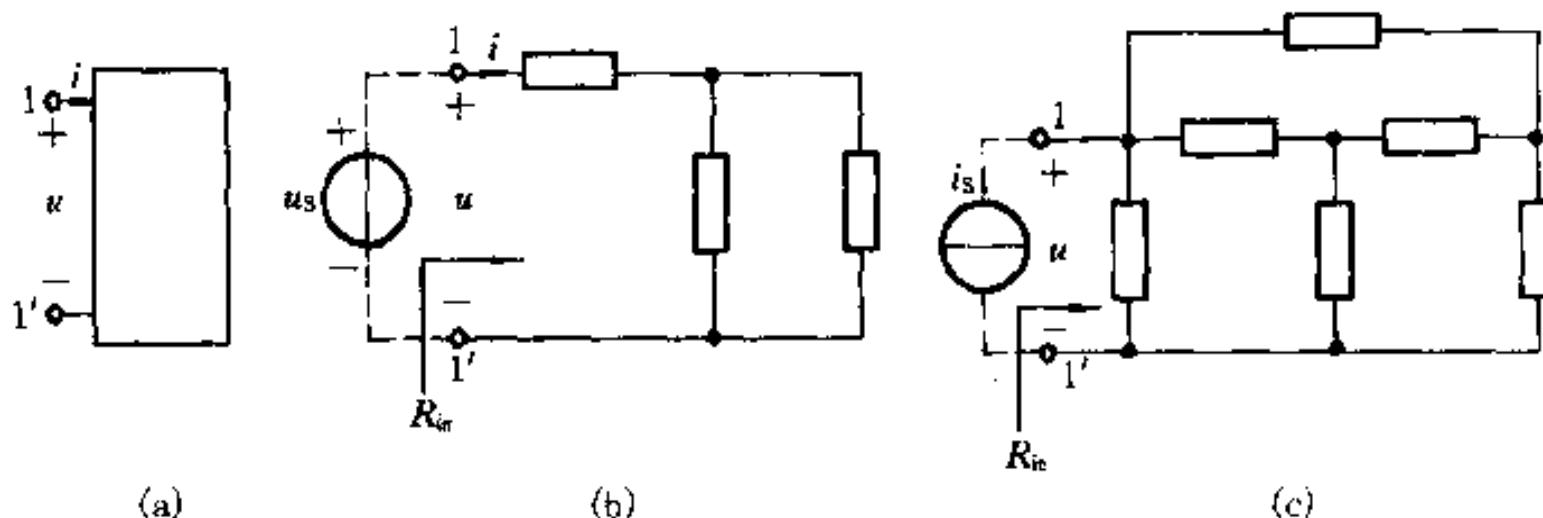


图 2·17 一端口的输入电阻

如果一个一端口内部仅含电阻, 则应用电阻的串、并联和 Y-△ 变换等方法, 可以求得它的等效电阻。如果一端口内部除电阻以外还含有受控源, 但不含

任何独立电源,可以证明(见§4-3),不论内部如何复杂,端口电压与端口电流成正比[图2-17(a)],因此,定义此一端口的输入电阻 R_{in} 为

$$R_{in} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{i} \quad (2-12)$$

端口的输入电阻也就是端口的等效电阻,但两者的含意有区别。求端口等效电阻的一般方法称为电压、电流法,即在端口加以电压源 u_s ,然后求出端口电流 i ;或在端口加以电流源 i_s ,然后求出端口电压 u 。根据式(2-12), $R_{in} = \frac{u_s}{i} = \frac{u}{i_s}$ 。测量一个电阻器的电阻就可以采用这种方法。

图2-17(b)中一端口的输入电阻可通过电阻串、并联化简求得,图(c)电路具有桥形结构,应用Y-Δ变换才能简化,也可以用电压、电流法求此两图的输入电阻,如图2-17(b)、(c)所示。

例2-5 求图2-18(a)所示一端口的输入电阻。

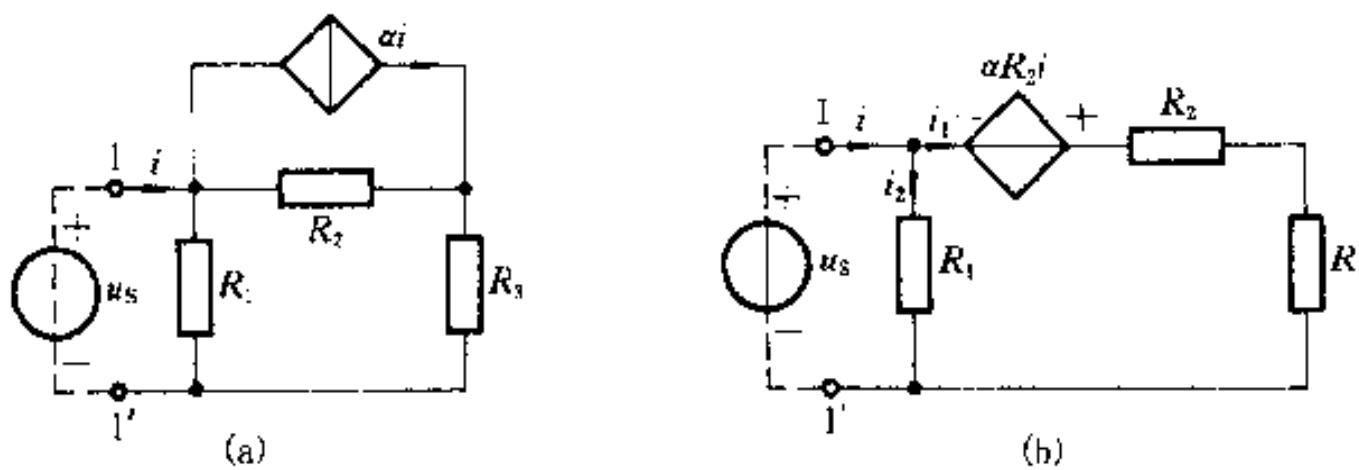


图2-18 例2-5图

解 在端口 $1-1'$ 处加电压 u_s ,求出 i ,再由式(2-12)求输入电阻 R_{in} 。

将CCCS和电阻 R_2 的并联组合等效变换为CCVS和电阻的串联组合,如图(b)所示。根据KVL,有

$$u_s = -R_2 \alpha i + (R_2 + R_3) i_1 \quad (1)$$

$$u_s = R_1 i_2 \quad (2)$$

再由KCL, $i = i_1 + i_2$,可得 $i_1 = i - i_2 = i - \frac{u_s}{R_1}$,代入(1)式,整理后,有

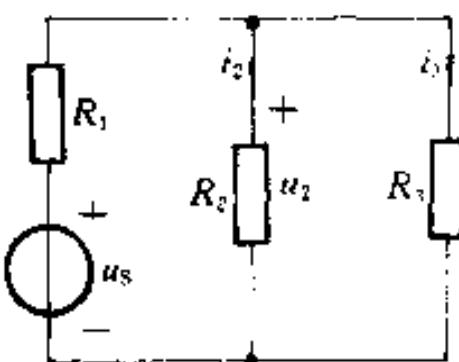
$$R_{in} = \frac{u_s}{i} = \frac{R_1 R_3 + (1 - \alpha) R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

上式分子中有负号出现,因此,在一定的参数条件下, R_{in} 有可能是零,也有可能是负值。例如,当 $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $\alpha = 5$ 时, $R_{in} = -0.5\Omega$ 。§1-5中曾指出负电阻元件实际是一个发出功率的元件。本例中一端口向外发出功率是由于受控源发出功率。

习 题

2-1 电路如图所示,已知 $u_s = 100 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$ 。若:(1) $R_3 = 8 \text{ k}\Omega$;(2) $R_3 = \infty$ (R_3 处开路);(3) $R_3 = 0$ (R_3 处短路)。试求以上 3 种情况下电压 u_2 和电流 i_2 、 i_3 。

2-2 电路如图所示,其中电阻、电压源和电流源均为已知,且为正值。求:(1)电压 u_2 和电流 i_2 ;(2)若电阻 R_1 增大,对哪些元件的电压、电流有影响? 影响如何?

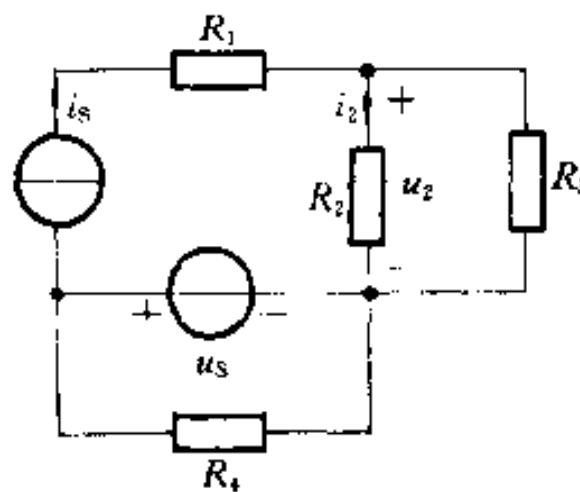


题 2-1 图

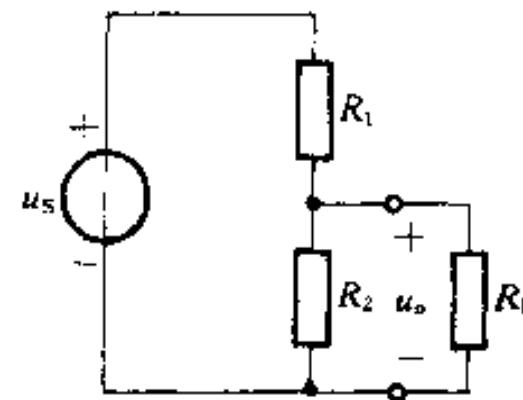
2-3 电路如图所示。(1)求 $\frac{u_o}{u_s}$; (2)当 $R_L \gg R_1 // R_2$ 时, $\frac{u_o}{u_s}$ 可近似为 $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$, 此时引起的相对误差为

$$\frac{\frac{u_o}{u_s} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{u_o}{u_s}} \times 100\%$$

当 R_L 为 $(R_1 // R_2)$ 的 100 倍、10 倍时, 分别计算此相对误差。



题 2-2 图



题 2-3 图

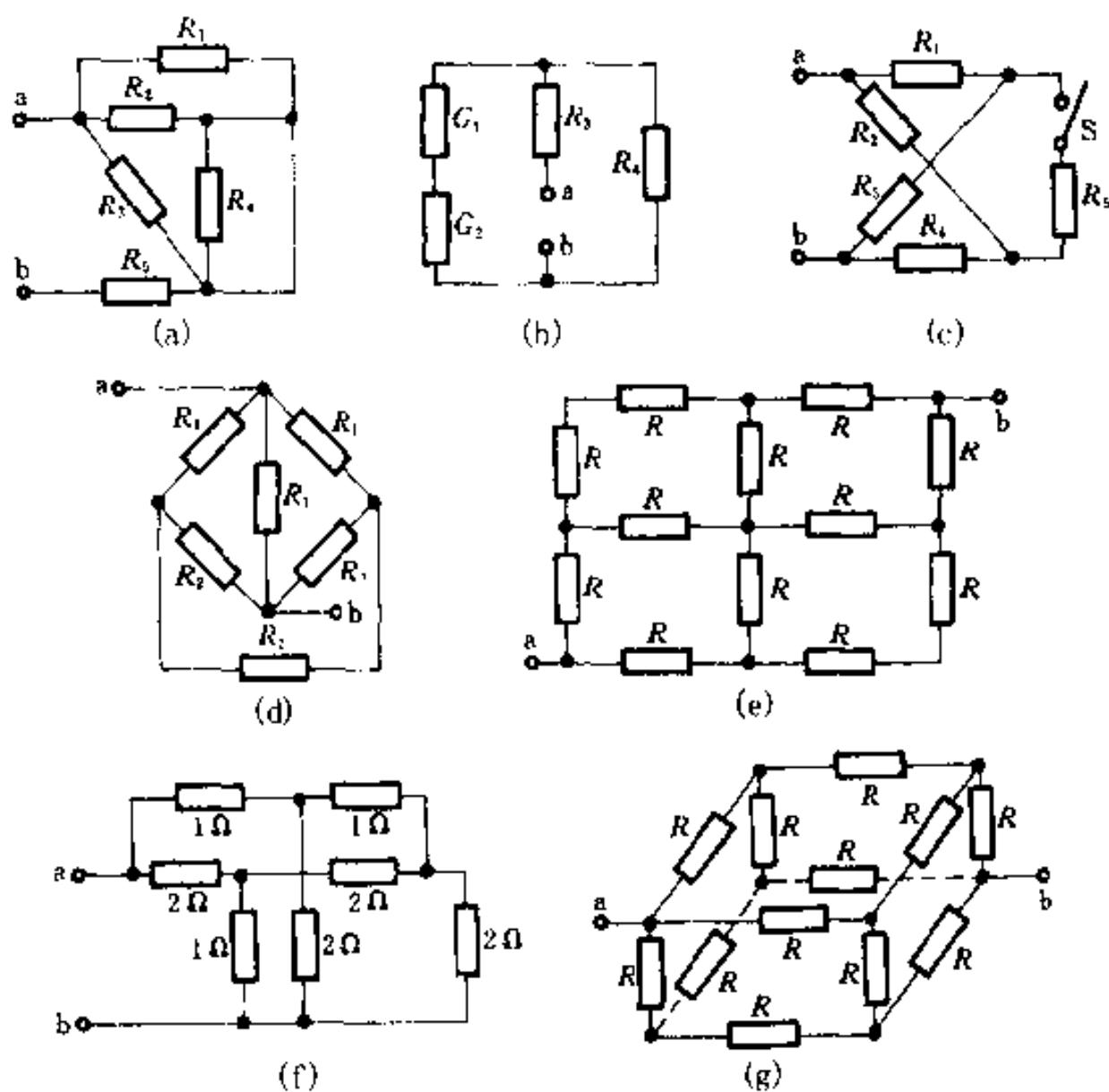
2-4 求图示各电路的等效电阻 R_{ab} , 其中 $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 4 \Omega$, $G_1 = G_2 = 1 \text{ S}$, $R = 2 \Omega$ 。

2-5 在图(a)电路中, $u_{s1} = 24 \text{ V}$, $u_{s2} = 6 \text{ V}$, $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$ 。图(b)为经电源变换后的等效电路。

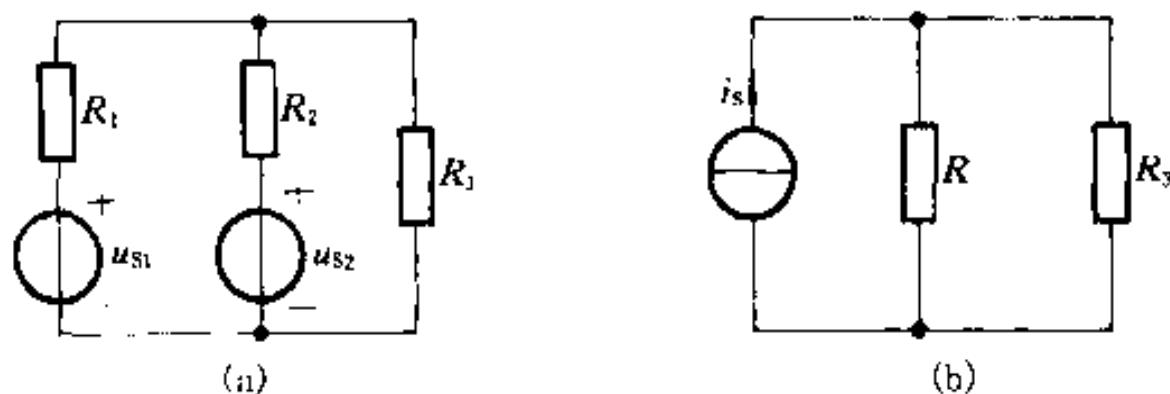
- (1)求等效电路的 i_s 和 R ;
- (2)根据等效电路求 R_3 中电流和消耗功率;
- (3)分别在图(a)、(b)中求出 R_1 、 R_2 及 R_3 消耗的功率;
- (4)试问 u_{s1} 、 u_{s2} 发出的功率是否等于 i_s 发出的功率? R_1 、 R_2 消耗的功率是否等于 R 消耗的功率? 为什么?

2-6 对图示电桥电路,应用 $Y-\Delta$ 等效变换求:

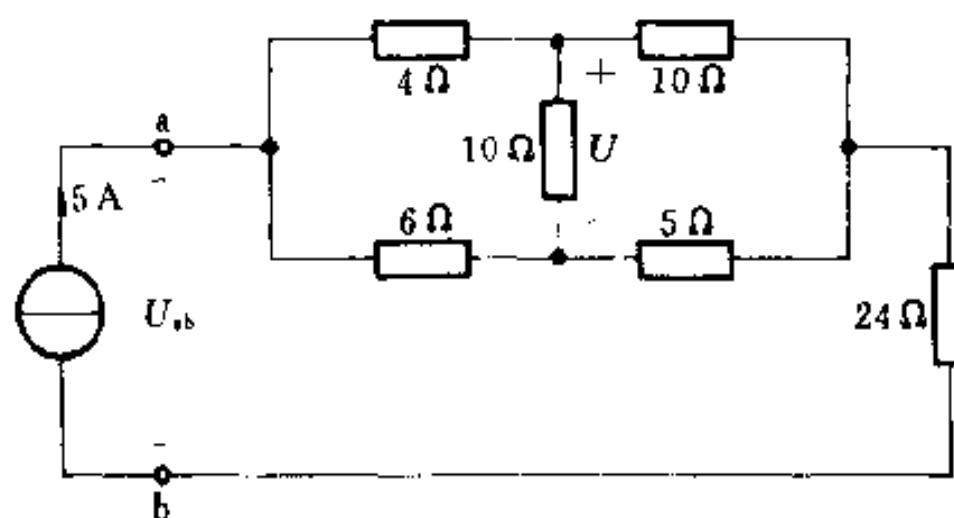
- (1)对角线电压 U ;



题 2-4 图



题 2-5 图



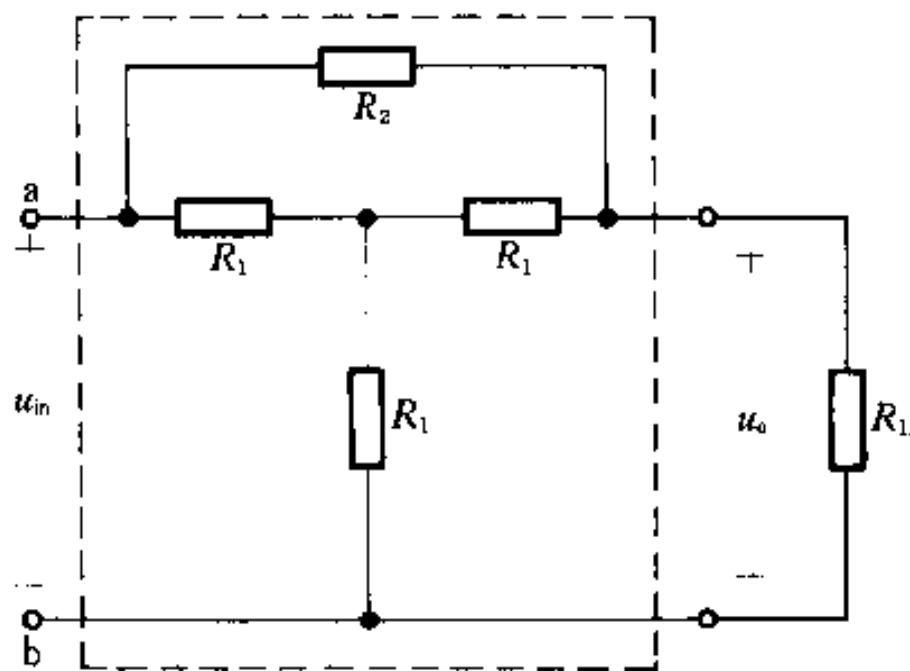
题 2-6 图

(2) 电压 U_{ab} 。

2-7 图示为由桥 T 电路构成的衰减器。

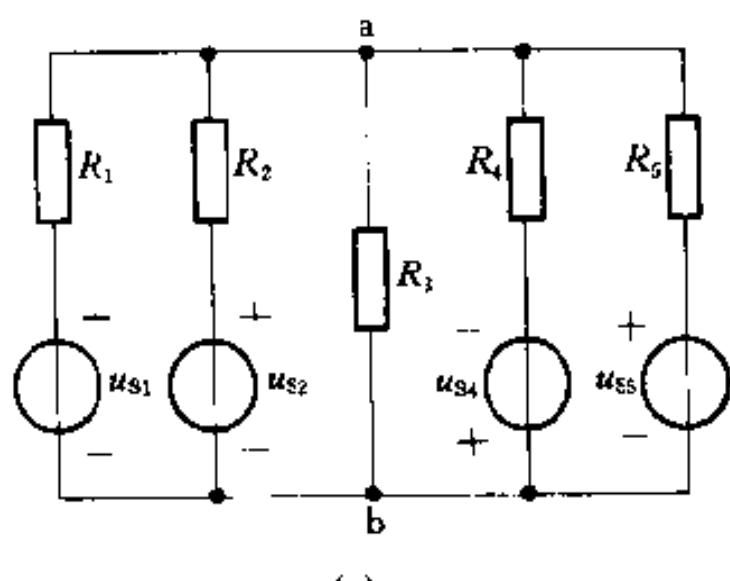
(1) 试证明当 $R_2 = R_1 = R_L$ 时, $R_{ab} = R_L$, 且有 $u_o/u_{in} = 0.5$ 。

(2) 试证明当 $R_2 = \frac{2R_1R_L^2}{3R_1^2 - R_L^2}$ 时, $R_{ab} = R_L$, 并求此时电压比 $\frac{u_o}{u_{in}}$ 。

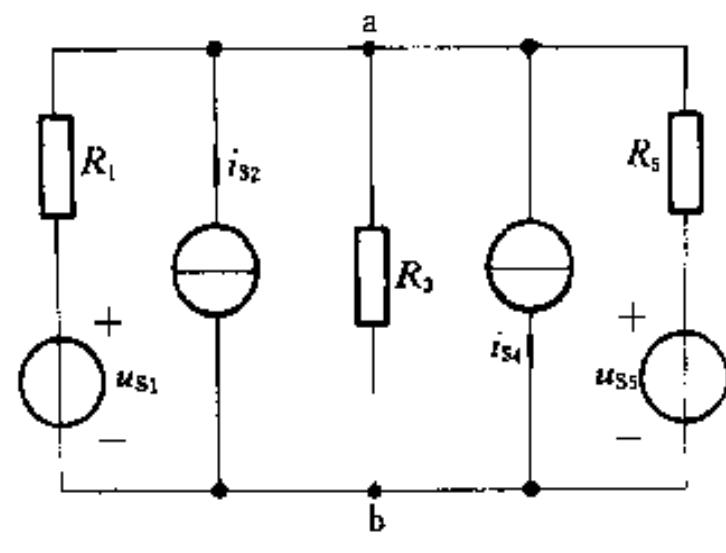


题 2-7 图

2-8 在图(a)中, $u_{S1} = 45V$, $u_{S2} = 20V$, $u_{S4} = 20V$, $u_{S5} = 50V$; $R_1 = R_3 = 15\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_4 = 50\Omega$, $R_5 = 8\Omega$; 在图(b)中 $u_{S1} = 20V$, $u_{S3} = 30V$, $i_{S2} = 8A$, $i_{S4} = 17A$, $R_1 = 5\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_5 = 10\Omega$ 。利用电源的等效变换求图(a)和(b)中电压 u_{ab} 。



(a)

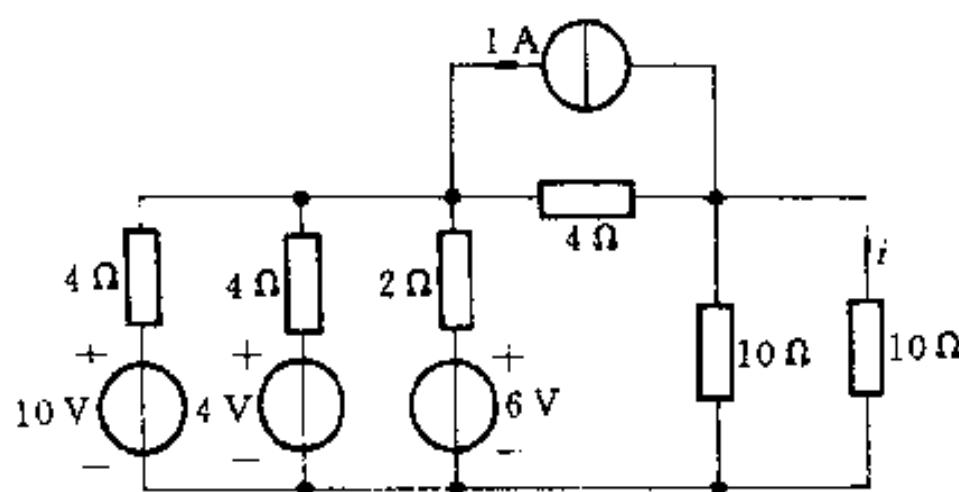


(b)

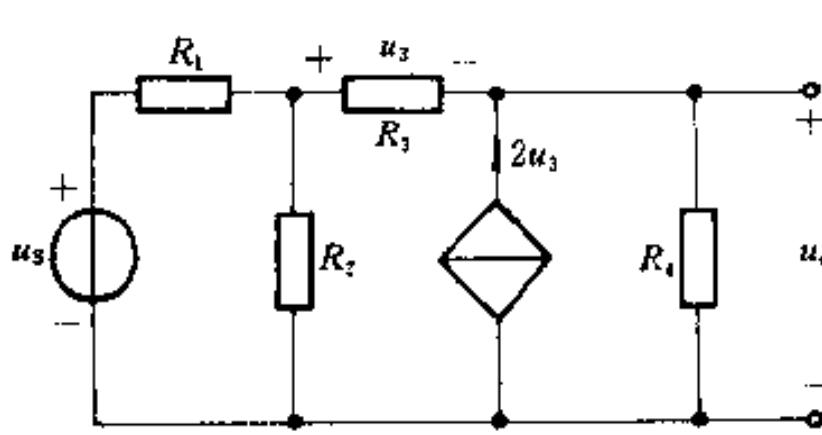
题 2-8 图

2-9 利用电源的等效变换, 求图示电路的电流 i 。

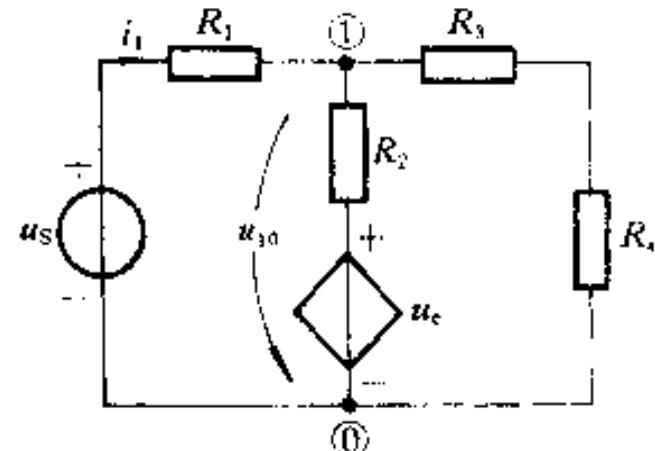
2-10 利用电源的等效变换, 求图示电路中电压比 $\frac{u_o}{u_s}$ 。已知 $R_1 = R_2 = 2\Omega$, $R_3 = R_4 = 1\Omega$ 。



题 2-9 图



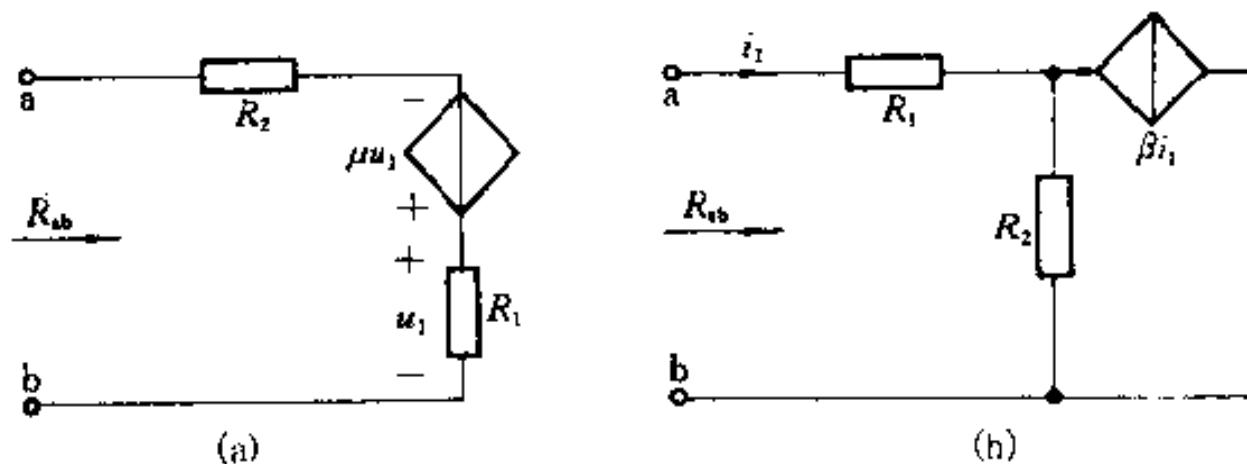
题 2-10 图



题 2-11 图

2-11 图示电路中 $R_1 = R_3 = R_4$, $R_2 = 2R_1$, CCVS 的电压 $u_c = 4R_1 i_1$, 利用电源的等效变换求电压 u_{10} 。

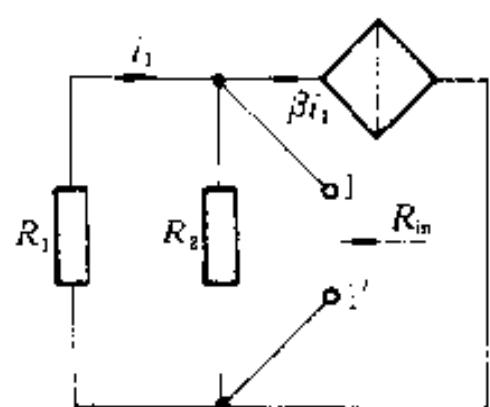
2-12 试求图(a)和(b)的输入电阻 R_{ab} 。



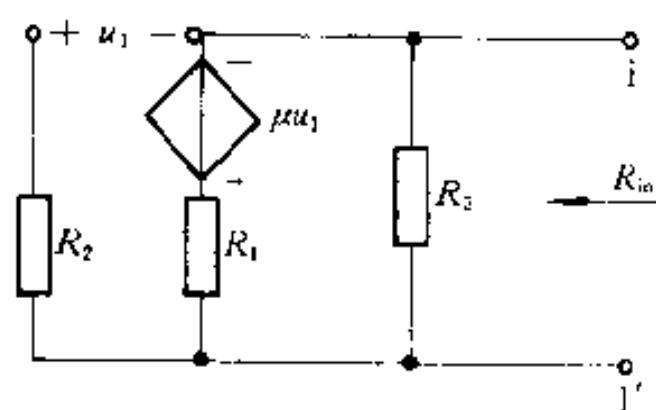
题 2-12 图

2-13 试求图(a)和(b)的输入电阻 R_{ab} 。

2-14 图示电路中全部电阻均为 1Ω , 求输入电阻 R_{ab} 。

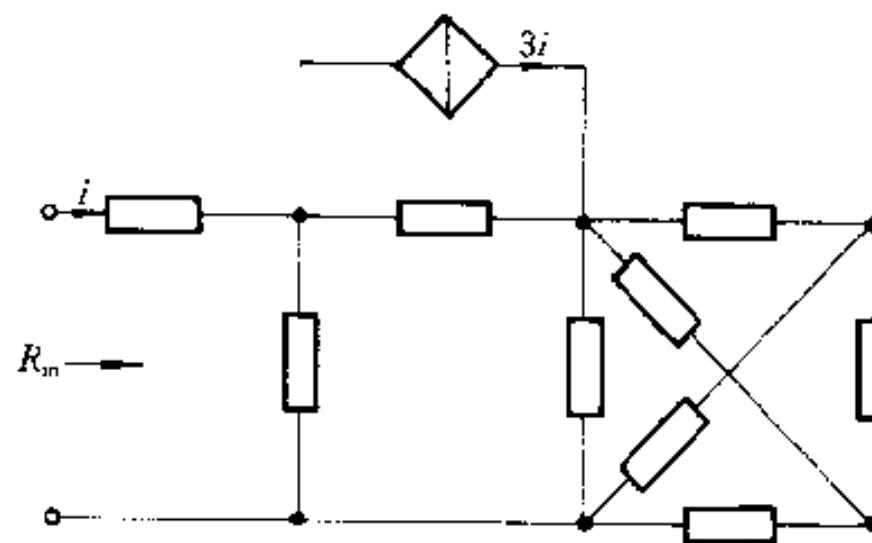


(a)



(b)

題 2-13 圖



題 2-14 圖

第三章

电阻电路的一般分析

·———— 内容提要 ———·

本章介绍线性电阻电路方程的建立方法。内容包括：电路图论的初步概念，支路电流法，网孔法，回路法和结点法。通过本章的学习，要求会用手写法列出电路方程。

§ 3-1 电路的图

本章介绍求解电路的一般方法，这种方法不要求改变电路的结构。首先，选择一组合适的电路变量（电流和/或电压），根据 KCL 和 KVL 及元件的电压电流关系（VCR）建立该组变量的独立方程组，即电路方程，然后从方程中解出电路变量。对于线性电阻电路，电路方程是一组线性代数方程。利用计算机建立电路方程的系统化方法的原理将在第十五章中介绍。

本节介绍一些有关图论的初步知识，主要目的是研究电路的连接性质并讨论应用图的方法选择电路方程的独立变量。

一个图^① G 是结点和支路^② 的一个集合，每条支路的两端都连到相应的结点上。这里的支路是一个抽象的线段，把它画成直线或曲线都无关紧要。应当指出，在图的定义中，结点和支路各自是一个整体，但任一条支路必须终止在结点上。移去一条支路并不意味着同时把它连接的结点也移去，所以允许有孤立结点的存在。若移去一个结点，则应当把与该结点连接的全部支路都同时移去。电路的“图”是指把电路中每一条支路画成抽象的线段形成的一个结点和支路的

^① 图(Graph)，是数学中的专用名词，与通常意义有所不同。

^② 在图论中一般用术语“顶点”和“边”表示，此处用“结点”和“支路”表示。前者属图的术语，后者属电路图的术语。为避免引入过多术语，本书仍用“结点”和“支路”表示图中的点和线。

集合,显然,此线段也就是图的支路。可见,电路中由具体元件构成的支路以及结点与上述图论中关于支路和结点的概念有些差别,电路的支路是实体,结点只是支路的汇集点,它是由支路形成的。

图 3-1(a)中画出了一个具有 6 个电阻和 2 个独立电源的电路。如果认为每一个二端元件构成电路的一条支路,则图 3-1(b)就是该电路的“图”,它共有 5 个结点和 8 条支路。有时为了需要,可以把元件的串联组合作为一条支路处理,并以此为根据画出电路的图。例如,图 3-1(b)中电压源 u_{s1} 和电阻 R_1 的串联组合可以作为一条支路,这个电路的图将如图 3-1(c)所示,它共有 4 个结点和 7 条支路。有时还可以把元件的并联组合作为一条支路^①,例如,电流源 i_{s2} 和电阻 R_6 的并联组合。这样,图 3-1(c)将成为图 3-1(d),它共有 4 个节点和 6 条支路。所以,当用不同的元件结构定义电路的一条支路时,该电路以及它的图的结点数和支路数将随之而不同。

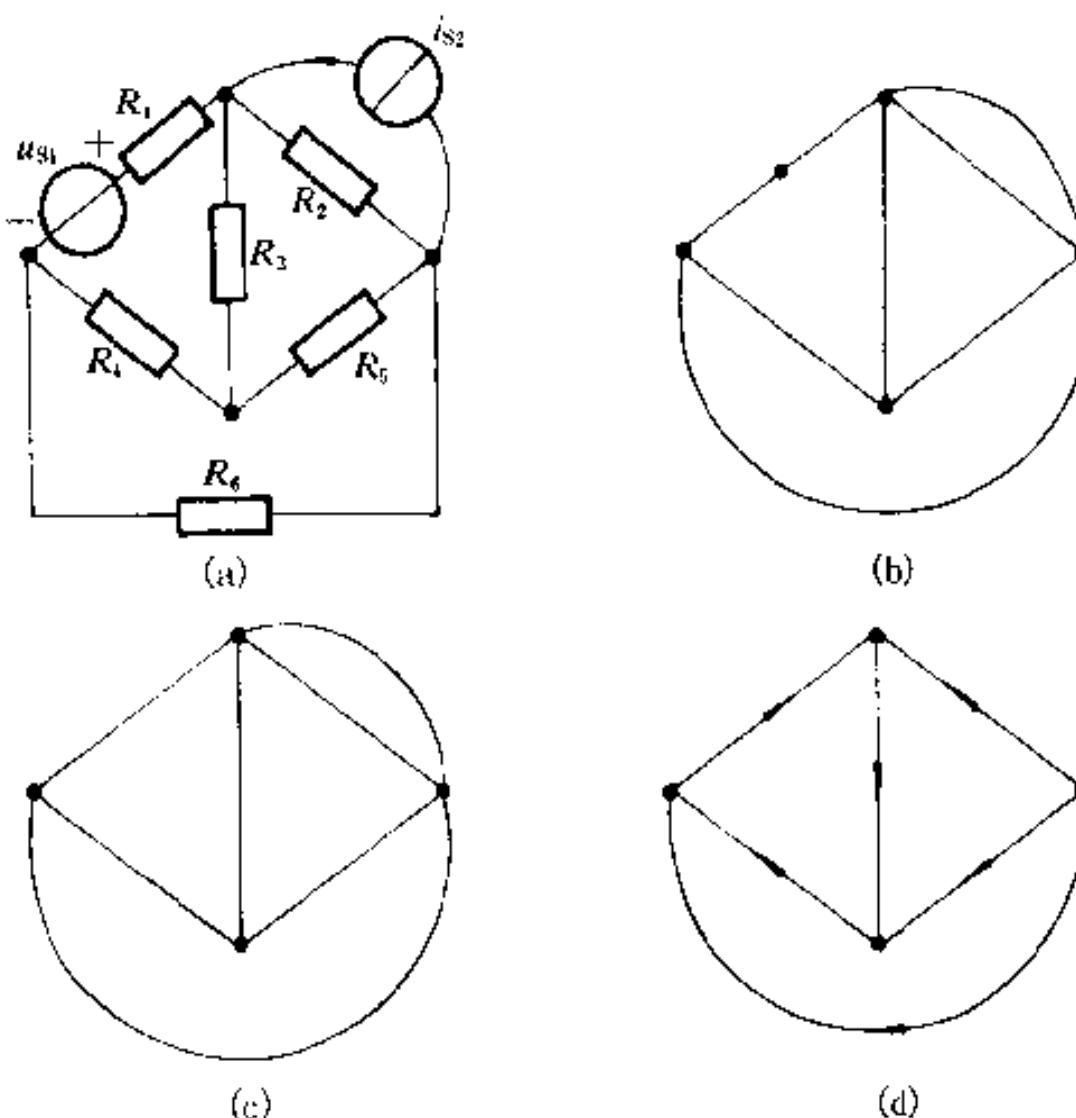


图 3-1 电路的图

在电路中通常指定每一条支路中的电流参考方向,电压一般取关联参考方向。电路的图的每一条支路也可以指定一个方向,此方向即该支路电流(和电压)的参考方向。赋予支路方向的图称为“有向图”,未赋予支路方向的图称为

^① 按照传统的讲法,支路是电路的一个分支,所以元件的并联组合一般不能作为一条支路。

“无向图。图 3-1(b)、(c)为无向图,(d)为有向图。

KCL 和 KVL 与支路的元件性质无关,因此可以利用电路的图讨论如何列出 KCL 和 KVL 方程,并讨论它们的独立性。

§ 3-2 KCL 和 KVL 的独立方程数

图 3-2 示出一个电路的图,它的结点和支路都已分别加以编号,并给出了支路的方向,该方向也即支路电流和与之关联的支路电压的参考方向。

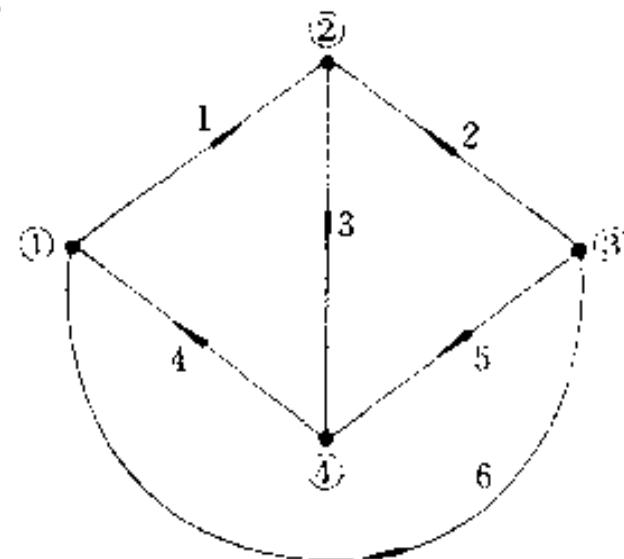
对结点①、②、③、④分别列出 KCL 方程,有:

$$i_1 - i_4 - i_6 = 0$$

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$i_2 + i_5 + i_6 = 0$$

$$-i_3 + i_4 - i_5 = 0$$



由于对所有结点都列写了 KCL 方程,而每—支路无例外地与 2 个结点相连,且每个支路电
流必然从其中一个结点流出,流入另一个结点。因此,在所有 KCL 方程中,每个支路电流必然出现 2 次,一次为正,另一次为负(指每项前面的“+”或“-”)。若把以上 4 个方程相加,必然得出等号两边为零的结果。这就是说,这 4 个方程不是相互独立的,但上列 4 个方程中的任意 3 个是独立的。可以证明,对于具有 n 个结点的电路,在任意 $(n-1)$ 个结点上可以得出 $(n-1)$ 个独立的 KCL 方程。相应的 $(n-1)$ 个结点称为独立结点。

讨论关于 KVL 独立方程数时要用到独立回路的概念。回路和独立回路的概念与支路的方向无关,因此可以用无向图的概念叙述。

从一个图 G 的某一结点出发,沿着一些支路移动,从而到达另一结点(或回到原出发点),这样的一系列支路构成图 G 的一条路径。一条支路本身也算为路径。当 G 的任意两个结点之间至少存在一条路径时,G 就称为连通图^①。例如,图 3-2 所示是连通图。如果一条路径的起点和终点重合,且经过的其他结点都相异,这条闭合路径就构成 G 的一个回路。例如,对图 3-3 所示图 G,支路 $(1, 5, 8), (2, 5, 6), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 6, 8)$ 等都是回路;其他还有支路 $(4, 7, 8), (3, 6, 7), (1, 5, 7, 4), (3, 4, 8, 6), (2, 3, 7, 5), (1, 2, 6, 7, 4), (1, 2, 3, 7, 8), (2, 3,$

^① 本章所涉及的电路的图都是连通的,所有结论都是针对连通图来说的。

$4,8,5),(1,5,6,3,4)$ 等构成的 9 个回路;总共有 13 个不同的回路。但是独立回路数远少于总的回路数。

对每个回路可以应用 KVL 列出有关支路电压的 KVL 方程。例如,对图 3·3 所示图 G,如果按支路 $(1,5,8)$ 和支路 $(2,5,6)$ 分别构成的 2 个回路列出 2 个 KVL 方程,不论支路电压和绕行方向怎样指定,支路 5 的电压将在这 2 个方程中出现,因为该支路是这 2 个回路的共有支路。把这 2 个方程相加或相减总可以把支路 5 的电压消去,而得到的支路电压将是按支路 $(1,2,6,8)$ 构成回路的 KVL 方程。可见这 3 个回路(方程)是相互不独立的,因为其中任何一个回路(方程)可以由其他 2 个回路(方程)导出。因此,这 3 个回路中只有 2 个独立回路。

一个图的回路数很多,如何确定它的一组独立回路有时不太容易。利用“树”的概念有助于寻找一个图的独立回路组,从而得到独立的 KVL 方程组。树是这样定义的:一个连通图 G 的树 T 包含 G 的全部结点和部分支路,而树 T 本身是连通的且又不包含回路。

对于图 3·3 所示图 G,符合上述定义的树有很多,图 3·4(a)、(b)、(c)绘出其中的 3 个。图(d)、(e)不是该图的树,因为(d)中包含了回路;(e)则是非连通的。树中包含的支路称为该树的树支,而其他支路则称为对应于该树的连支。例如图 3·4(a)的树 T_1 ,它具有树支 $(5,6,7,8)$;相应的连支为 $(1,2,3,4)$ 。对图 3·4(b)所示树 T_2 ,其树支为 $(1,3,5,6)$;相应的连支为 $(2,4,7,8)$ 。树支和连支一起构成图 G 的全部的支路。

图 3·3 的图 G 有 5 个结点,图 3·4(a)、(b)、(c)所示 G 的每一个树具有 4 条支路;图 3·4(d)有 5 条支路,它不是树,图 3·4(e)只有 3 条支路,它也不是树。这个图 G 有许多不同的树,但不论是哪一个树,树支数总是 4。可以证明,任一个具有 n 个结点的连通图,它的任何一个树的树支数为 $(n-1)^{(1)}$ 。

由于连通图 G 的树支连接所有结点又不形成回路,因此,对于 G 的任意一个树,加入一个连支后,就会形成一个回路,并且此回路除所加连支外均由树支组成,这种回路称为单连支回路或基本回路。对于图 3·5(a)所示图 G,取支路 $(1,4,5)$ 为树,在图(b)中以实线表示,相应的连支为 $(2,3,6)$ 。对应于这一树的基本回路是 $(1,3,5), (1,2,4,5)$ 和 $(4,5,6)$ 。每一个基本回路仅含一个连支,且这一连支并不出现在其他基本回路中。由全部连支形成的基本回路构成基本回

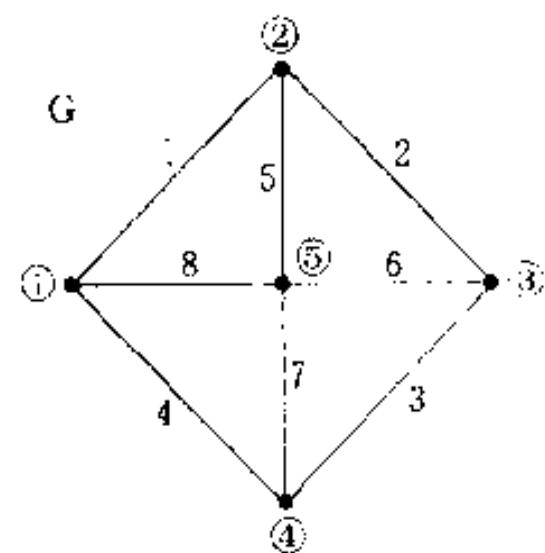


图 3·3 回路

① 证明从略,可以参考有关图论的书。

路组。显然,基本回路组是独立回路组。根据基本回路列出的 KVL 方程组是独立方程。所以,对一个结点数为 n ,支路数为 b 的连通图,其独立回路数 $l = (b - n + 1)^{\textcircled{1}}$ 。选择不同的树,就可以得到不同的基本回路组。图 3-5(c)、(d)、(e)是以支路(1,4,5)为树相对应的基本回路组。

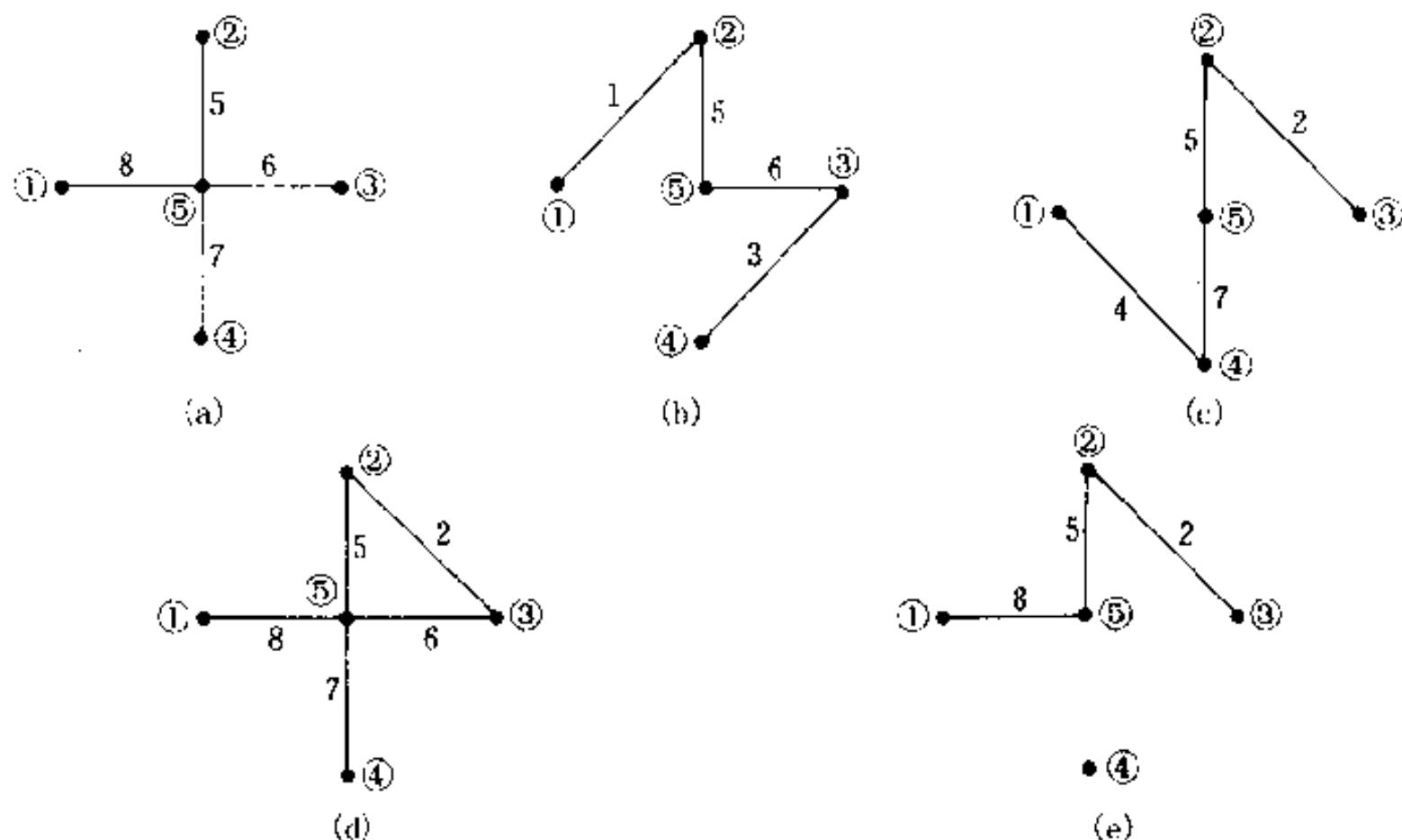


图 3-4 树

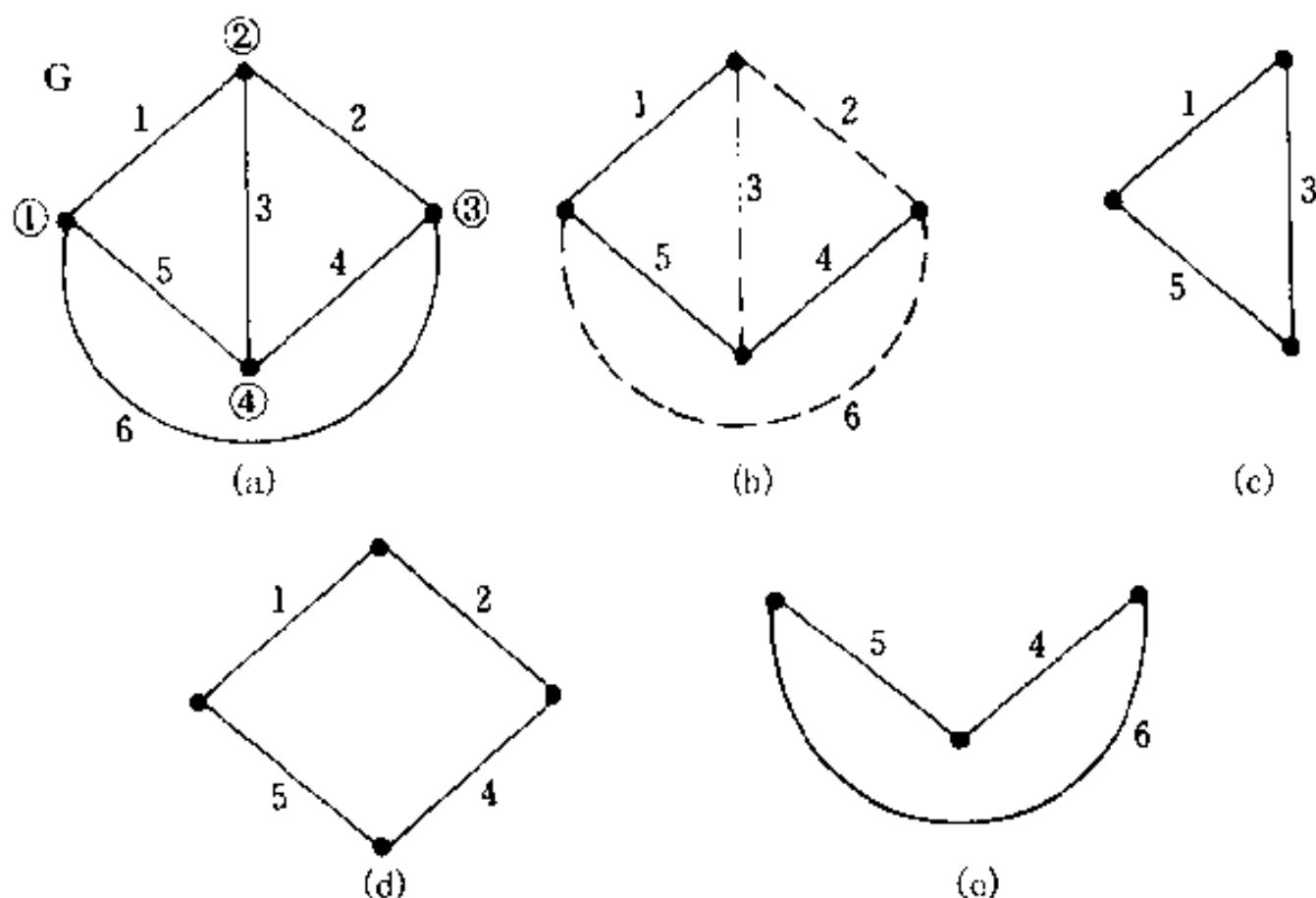


图 3-5 基本回路

^① 其他回路均可由基本回路相加(去掉公共支路)而得到,故不再有新的独立回路。

如果把一个图画在平面上,能使它的各条支路除连接的结点外不再交叉,这样的图称为平面图,否则称为非平面图。图 3-6(a)是一个平面图,图 3-6(b)则是典型的非平面图。对于一个平面图,可以引入网孔的概念。平面图的一个网孔是它的一个自然的“孔”,它限定的区域内不再有支路。对图 3-6(a)所示的平面图,支路(1,3,5),(2,3,7),(4,5,6),(4,7,8),(6,8,9)都是网孔^①;支路(1,2,8,6),(2,3,4,8)等不是网孔。平面图的全部网孔是一组独立回路,所以平面图的网孔数也就是独立回路数。图 3-6(a)的平面图有 5 个结点,9 条支路,独立回路数 $L = (b - n + 1) = 5$,而它的网孔数正好也是 5 个。

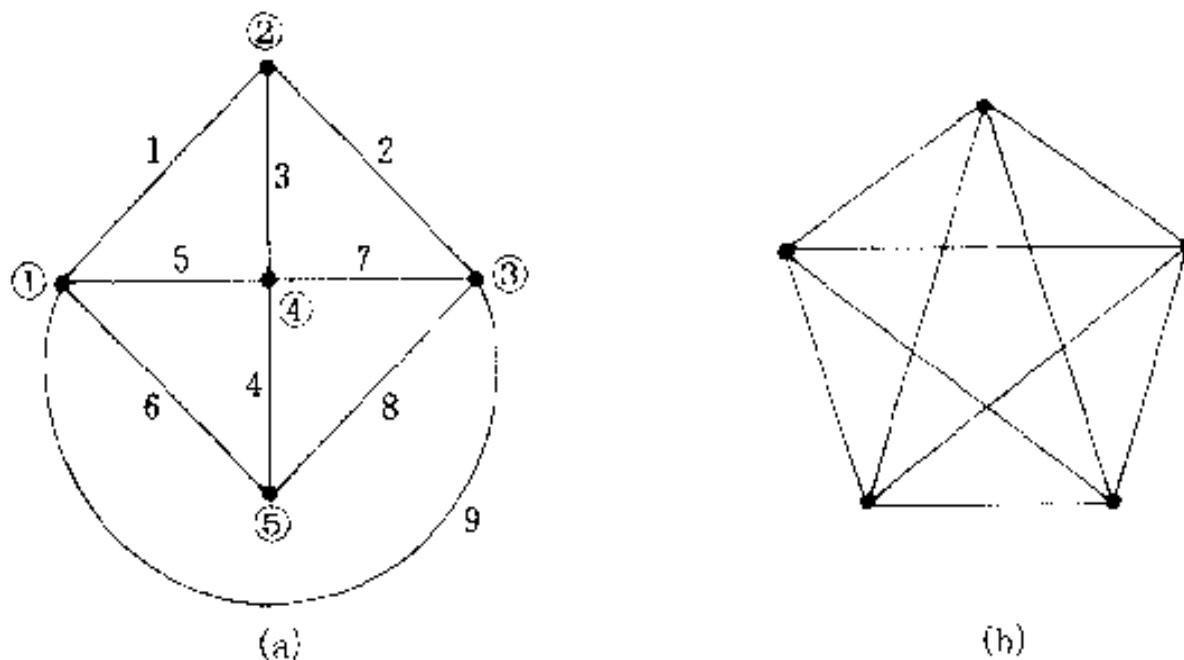


图 3-6 平面图与非平面图

一个电路的 KVL 独立方程数等于它的独立回路数。以图 3-7(a)所示电路的图[即 3-5(a)]为例,如果取支路(1,4,5)为树,则 3 个基本回路示于图(b)。按图中的电压和电流的参考方向及回路绕行方向,计及支路及回路的编

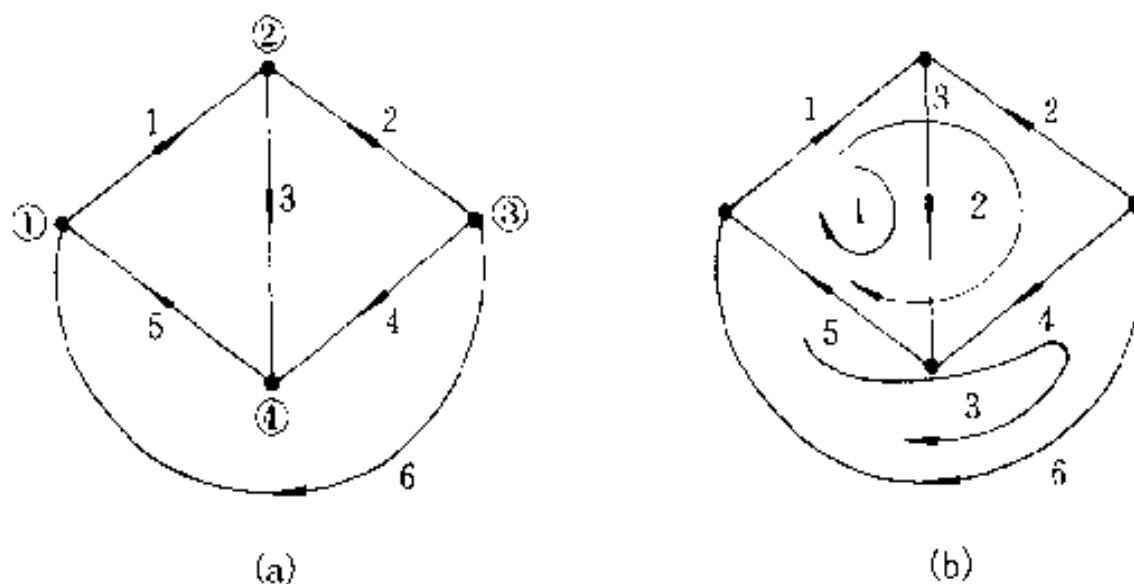


图 3-7 基本回路的 KVL 方程

^① 这些都是“内网孔”。平面图周界形成的回路有时称为“外网孔”。本书涉及的“网孔”不包括外网孔。

号,可以列出 KVL 方程如下:

$$\text{回路 1} \quad u_1 + u_3 + u_5 = 0$$

$$\text{回路 2} \quad u_1 - u_2 + u_4 + u_5 = 0$$

$$\text{回路 3} \quad -u_4 - u_5 + u_6 = 0$$

这是一组独立方程。

§ 3-3 支路电流法

对一个具有 b 条支路和 n 个结点的电路,当以支路电压和支路电流为电路变量列写方程时,总计有 $2b$ 个未知量。根据 KCL 可以列出 $(n-1)$ 个独立方程、根据 KVL 可以列出 $(b-n+1)$ 个独立方程,根据元件的 VCR 又可列出 b 个方程。总计方程数为 $2b$,与未知量数相等。因此,可由 $2b$ 个方程解出 $2b$ 个支路电压和支路电流。这种方法称为 $2b$ 法。

为了减少求解的方程数,可以利用元件的 VCR 将各支路电压以支路电流表示,然后代入 KVL 方程,这样,就得到以 b 个支路电流为未知量的 b 个 KCL 和 KVL 方程。方程数从 $2b$ 减少至 b 。这种方法称为支路电流法。

现在以图 3-8(a)所示电路为例说明支路电流法。把电压源 u_{S1} 和电阻 R_1 的串联组合作为一条支路;把电流源 i_{S5} 和电阻 R_5 的并联组合作为一条支路,这样电路的图就如同图(b)所示,其结点数 $n=4$,支路数 $b=6$,各支路的方向和

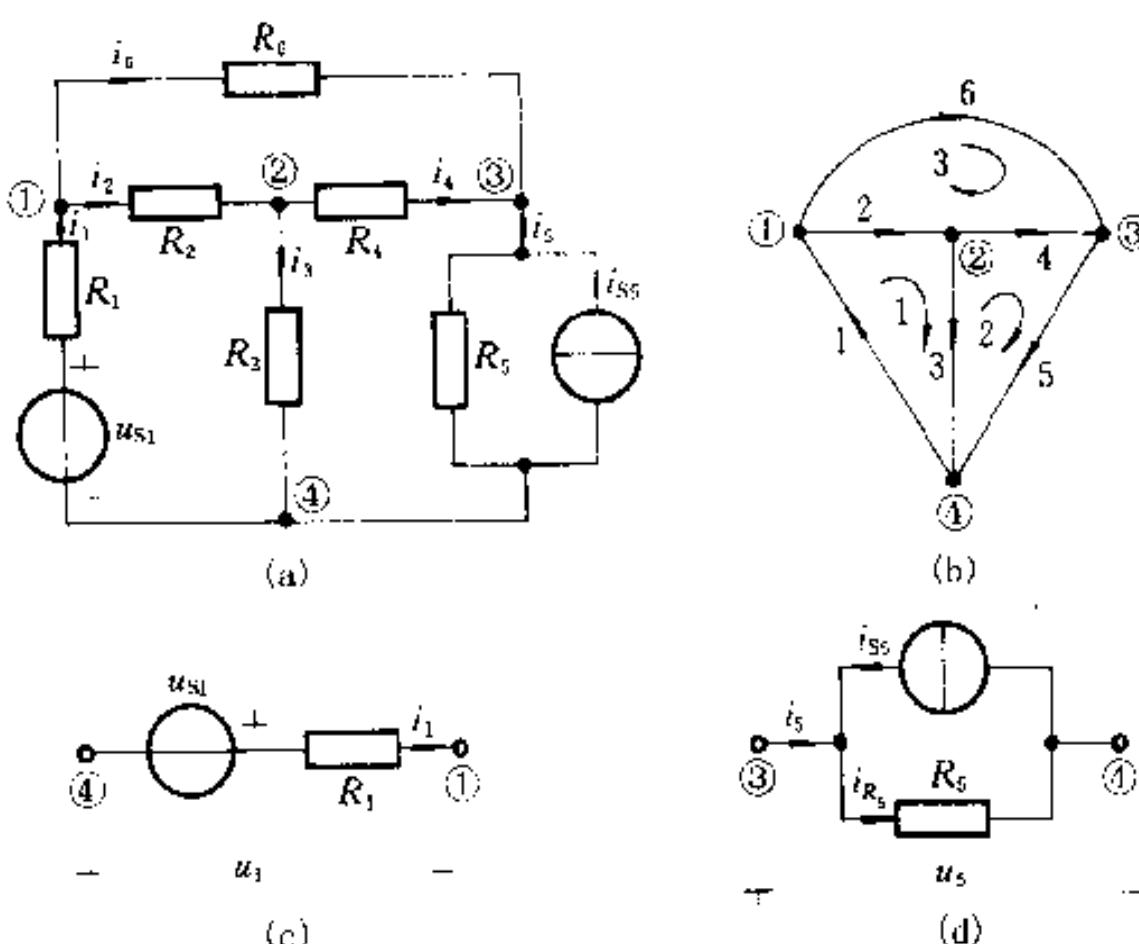


图 3-8 支路电流法

编号也示于图中。求解变量为 i_1, i_2, \dots, i_6 。先利用元件的 VCR, 将支路电压 u_1, u_2, \dots, u_6 以支路电流 i_1, i_2, \dots, i_6 表示。图 3-8(c)、(d) 给出支路 1 和支路 5 的结构, 有

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = -u_{s1} + R_1 i_1 \\ u_2 = R_2 i_2 \\ u_3 = R_3 i_3 \\ u_4 = R_4 i_4 \\ u_5 = R_5 i_5 + R_5 i_{ss} \\ u_6 = R_6 i_6 \end{array} \right\} \quad (3-1)$$

对独立结点①、②、③列出 KCL 方程, 有

$$\left. \begin{array}{l} -i_1 + i_2 + i_6 = 0 \\ -i_2 + i_3 + i_4 = 0 \\ -i_4 + i_5 - i_6 = 0 \end{array} \right\} \quad (3-2)$$

选择网孔作为独立回路, 按图 3-8(b) 所示回路绕行方向列出 KVL 方程

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ -u_3 + u_4 + u_5 = 0 \\ u_2 - u_4 + u_6 = 0 \end{array} \right\} \quad (3-3)$$

将式(3-1)代入式(3-3), 得:

$$\begin{aligned} & -u_{s1} + R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 = 0 \\ & -R_3 i_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5 + R_5 i_{ss} = 0 \\ & -R_2 i_2 - R_4 i_4 + R_6 i_6 = 0 \end{aligned}$$

把上式中的 u_{s1} 和 $R_5 i_{ss}$ 项移到方程的右边, 有

$$\left. \begin{array}{l} R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 = u_{s1} \\ -R_3 i_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5 = -R_5 i_{ss} \\ -R_2 i_2 - R_4 i_4 + R_6 i_6 = 0 \end{array} \right\} \quad (3-4)$$

式(3-2)和式(3-4)就是以支路电流 i_1, i_2, \dots, i_6 为未知量的支路电流法方程。

式(3-4)可归纳为

$$\sum R_k i_k = \sum u_{sk} \quad (3-5)$$

式中 $R_k i_k$ 为回路中第 k 个支路的电阻上的电压, 和式遍及回路中的所有支路, 且当 i_k 参考方向与回路方向一致时, 前面取“+”号; 不一致时, 取“-”号; 右方 u_{sk} 为回路中第 k 支路的电源电压, 电源电压包括电压源, 也包括电流源引起的电压。例如在支路 5 中并无电压源, 仅为电流源和电阻的并联组合, 但可将其等

效变换为电压源与电阻的串联组合,其等效电压源为 $R_s i_{ss}$,串联电阻为 R_s 。在取代数和时,当 u_{sk} 与回路方向一致时前面取“-”号(因移在等号另一侧), u_{sk} 与回路方向不一致时,前面取“+”号。此式实际上是 KVL 的另一种表达式,即任一回路中,电阻电压的代数和等于电压源电压的代数和。

列出支路电流法的电路方程的步骤如下:

- (1) 选定各支路电流的参考方向;
- (2) 根据 KCL 对 $(n - 1)$ 个独立结点列出方程;
- (3) 选取 $(b - n + 1)$ 个独立回路,指定回路的绕行方向,按照式(3-5)列出 KVL 方程。

支路电流法要求 b 个支路电压均能以支路电流表示,即存在式(3-1)形式的关系。当一条支路仅含电流源而不存在与之并联的电阻时,就无法将支路电压以支路电流表示。这种无并联电阻的电流源称为无伴电流源。当电路中存在这类支路时,必须加以处理后才能应用支路电流法^①。

如果将支路电流用支路电压表示,然后代入 KCL 方程,连同支路电压的 KVL 方程,可得到以支路电压为变量的 b 个方程。这就是支路电压法。

§ 3-4 网孔电流法

网孔电流法是以网孔电流作为电路的独立变量,它仅适用于平面电路。以下通过图 3-9(a)所示电路说明。图(b)是此电路的图,该电路共有 3 条支路,给定的支路编号和参考方向如图所示。

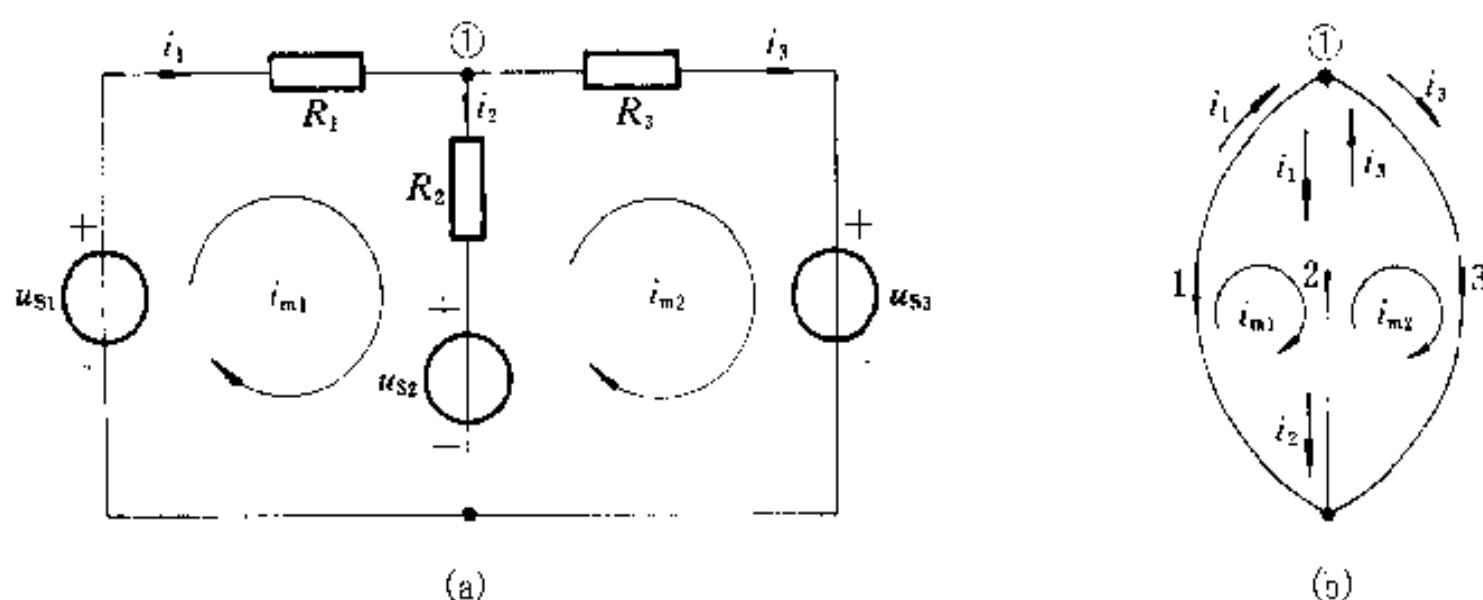


图 3-9 网孔电流法

在结点①应用 KCL,有

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

^① 处理方法见 § 3-5。

或

$$i_2 = i_1 - i_3$$

可见 i_2 不是独立的, 它由 i_1 、 i_3 决定, 可以分为两部分, 即 i_1 和 i_3 。现在假想有两个电流 i_{m1} ($= i_1$) 和 i_{m2} ($= i_3$) 分别沿此平面电路的两个网孔连续流动。由于支路 1 只有电流 i_{m1} 流过, 支路电流仍为 i_1 ; 支路 3 只有电流 i_{m2} 流过, 支路电流仍等于 i_3 ; 但是支路 2 有 2 个网孔电流同时流过, 支路电流将是 i_{m1} 和 i_{m2} 的代数和, 即 $i_2 = i_{m1} - i_{m2} = i_1 - i_3$ 。沿着网孔 1 和网孔 2 流动的假想电流 i_{m1} 和 i_{m2} 称为网孔电流。由于把各支路电流当作有关网孔电流的代数和, 必自动满足 KCL。所以用网孔电流作为电路变量时, 只需按 KVL 列出电路方程。以网孔电流为未知量, 根据 KVL 对全部网孔列出方程, 由于全部网孔是一组独立网路, 这组方程将是独立的。这种方法称为网孔电流法。

现以图 3-9(a) 所示电路为例, 对网孔 1 和 2 列出 KVL 方程, 列方程时, 以各自的网孔电流方向为绕行方向, 有

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 0 \\ -u_2 + u_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (3-6)$$

式中 u_1 、 u_2 、 u_3 为支路电压。

各支路的 VCR 为

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = -u_{S1} + R_1 i_1 = -u_{S1} + R_1 i_{m1} \\ u_2 = R_2 i_2 + u_{S2} = R_2 (i_{m1} - i_{m2}) + u_{S2} \\ u_3 = R_3 i_3 + u_{S3} = R_3 i_{m2} + u_{S3} \end{array} \right\}$$

代入式(3-6), 经整理后有

$$\left. \begin{array}{l} (R_1 + R_2) i_{m1} - R_2 i_{m2} = u_{S1} - u_{S2} \\ -R_2 i_{m1} + (R_2 + R_3) i_{m2} = u_{S2} - u_{S3} \end{array} \right\} \quad (3-7)$$

式(3-7)即是以网孔电流为求解对象的网孔电流方程。

现在用 R_{11} 和 R_{22} 分别代表网孔 1 和网孔 2 的自阻, 它们分别是网孔 1 和网孔 2 中所有电阻之和, 即 $R_{11} = R_1 + R_2$, $R_{22} = R_2 + R_3$; 用 R_{12} 和 R_{21} 代表网孔 1 和网孔 2 的互阻, 即两个网孔的共有电阻, 本例中 $R_{12} = R_{21} = -R_2$ 。上式可改写为

$$\left. \begin{array}{l} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} = u_{S1} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} = u_{S2} \end{array} \right\} \quad (3-8)$$

此方程可理解为: $R_{11} i_{m1}$ 项代表网孔电流 i_{m1} 在网孔 1 内各电阻上引起的电压之和, $R_{22} i_{m2}$ 项代表网孔电流 i_{m2} 在网孔 2 内各电阻上引起的电压之和。由于网孔绕行方向和网孔电流取为一致, 故 R_{11} 和 R_{22} 总为正值。 $R_{12} i_{m2}$ 项代表网孔电流 i_{m2} 在网孔 1 中引起的电压, 而 $R_{21} i_{m1}$ 项代表网孔电流 i_{m1} 在网孔 2 中引起的电

压。当两个网孔电流在共有电阻上的参考方向相同时, i_{m2} (i_{mt}) 引起的电压与网孔 1(2) 的绕行方向一致, 应当为正; 反之为负。为了使方程形式整齐, 把这类电压前的“+”或“-”号包括在有关的互阻中。这样, 当通过网孔 1 和网孔 2 的共有电阻上的两个网孔电流的参考方向相同时, 互阻 (R_{12} , R_{21}) 取正; 反之则取负。故在本例中 $R_{12} = R_{21} = -R_3$ 。

对具有 m 个网孔的平面电路, 网孔电流方程的一般形式可以由式(3-8)推广而得, 即有

$$\left. \begin{array}{l} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + R_{13} i_{m3} + \cdots + R_{1m} i_{mm} = u_{S11} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + R_{23} i_{m3} + \cdots + R_{2m} i_{mm} = u_{S22} \\ \vdots \\ R_{m1} i_{m1} + R_{m2} i_{m2} + R_{m3} i_{m3} + \cdots + R_{mm} i_{mm} = u_{Smr} \end{array} \right\} \quad (3-9)$$

式中具有相同下标的电阻 $R_{11}、R_{22}、R_{33}$ 等是各网孔的自阻;有不同下标的电阻 $R_{12}、R_{13}、R_{23}$ 等是网孔间的互阻。自阻总是正的,互阻的正负则视两网孔电流在共有支路上参考方向是否相同而定。方向相同时为正,方向相反时为负。显然,如果两个网孔之间没有共有支路,或者有共有支路但其电阻为零(例如共有支路间仅有电压源),则互阻为零。如果将所有网孔电流都取为顺(或逆)时针方向,则所有互阻总是负的。在不含受控源的电阻电路的情况下, $R_{ik} = R_{ki}$ 。方程右方 $u_{s11}、u_{s22}、\dots$ 等为网孔 1、2、…等的总电压源的电压,各电压源的方向与网孔电流一致时,前面取“+”号,反之取“-”号。

例 3-1 在图 3-10 所示直流电路中, 电阻和电压源均为已知, 试用网孔电流法求各支路电流。

解 电路为平面电路,共有3个网孔。

(1) 选取网孔电流 I_1, I_2, I_3 , 如图所示

(2) 列网孔电流方程

1

$$R_{\text{in}} = (60 + 20) \Omega = 80 \Omega$$

$$R_{\text{eq}} = (20 + 40) \Omega = 60 \Omega$$

$$R_{12} = (40 + 40) \Omega = 80 \Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = -20 \Omega$$

$$R_{13} = R_{31} = 0$$

$$R_{22} \equiv R_{33} \equiv -40 \Omega$$

$$U_{\text{ext}} = (50 \pm 10) \text{ V} = 40 \text{ V}$$

$$U_{\text{bias}} = 10 \text{ V}$$

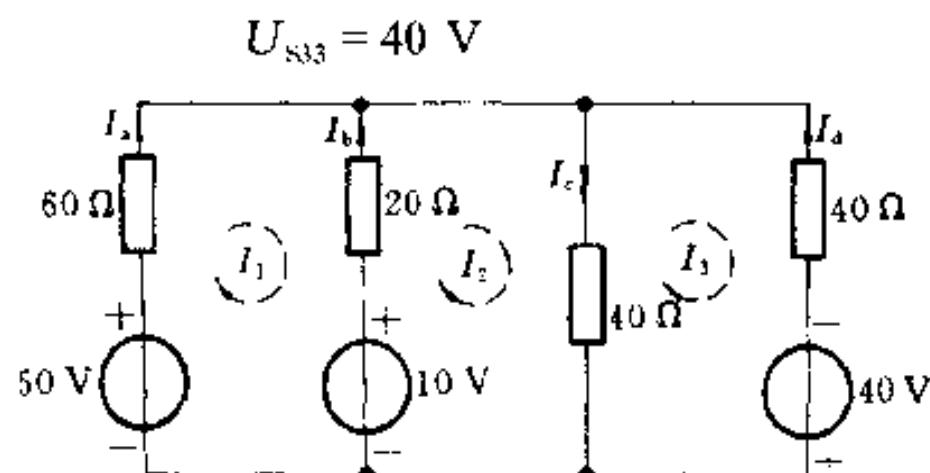


图 3-10 例 3-1 图

故网孔电流方程为：

$$\begin{aligned} 80I_1 - 20I_2 &= 40 \\ -20I_1 + 60I_2 - 40I_3 &= 10 \\ -40I_2 + 80I_3 &= 40 \end{aligned}$$

(3) 用消去法或行列式法,解得:

$$I_1 = 0.786 \text{ A}$$

$$I_2 = 1.143 \text{ A}$$

$$I_3 = 1.071 \text{ A}$$

(4) 指定各支路电流如图,有:

$$I_a = I_1 = 0.786 \text{ A}$$

$$I_b = -I_1 + I_2 = 0.357 \text{ A}$$

$$I_c = I_2 - I_3 = 0.072 \text{ A}$$

$$I_d = -I_3 = -1.071 \text{ A}$$

(5) 校验

取一个未用过的回路,例如取由 60Ω 、 40Ω 电阻及 50V 、 40V 电压源构成的外网孔,沿顺时针绕行方向写 KVL 方程,有

$$60I_a - 40I_d = 50 + 40$$

把 I_a 、 I_d 值代入得 $90 = 90$, 故答案正确。

当电路中有电流源和电阻的并联组合时,可将它等效变换成电压源和电阻的串联组合,再按上述方法进行分析。如果有无伴电流源或是有受控源时,参见 § 3-5。

§ 3-5 回路电流法

网孔电流法仅适用于平面电路,回路电流法则无此限制,它适用于平面或非

平面电路。回路电流法是一种适用性较强并获得广泛应用的分析方法。

如同网孔电流是在网孔中连续流动的假想电流，回路电流是在一个回路中连续流动的假想电流。回路电流法是以一组独立回路电流为电路变量的求解方法。通常选择基本回路作为独立回路，这样，回路电流就将是相应的连支电流。

以图 3-11 所示电路(的图)为例，如果选支路(4,5,6)为树(在图中用粗线画出)，可以得到以支路(1,2,3)为单连支的 3 个基本回路，它们是独立回路。把连支电流 i_1 、 i_2 、 i_3 分别作为在各自单连支回路中流动的假想回路电流 i_{1l} 、 i_{2l} 、 i_{3l} 。支路 4 为回路 1 和 2 所共有，而其方向与回路 1 的绕行方向相反，与回路 2 的绕行方向相同，所以有

$$i_4 = -i_{1l} + i_{2l}$$

同理，可以得出支路 5 和支路 6 的电流 i_5 和 i_6 为：

$$i_5 = -i_{1l} - i_{3l}$$

$$i_6 = -i_{1l} + i_{2l} - i_{3l}$$

从以上 3 式可见，树支电流可以通过连支电流或回路电流表达，即全部支路电流可以通过回路电流表达。

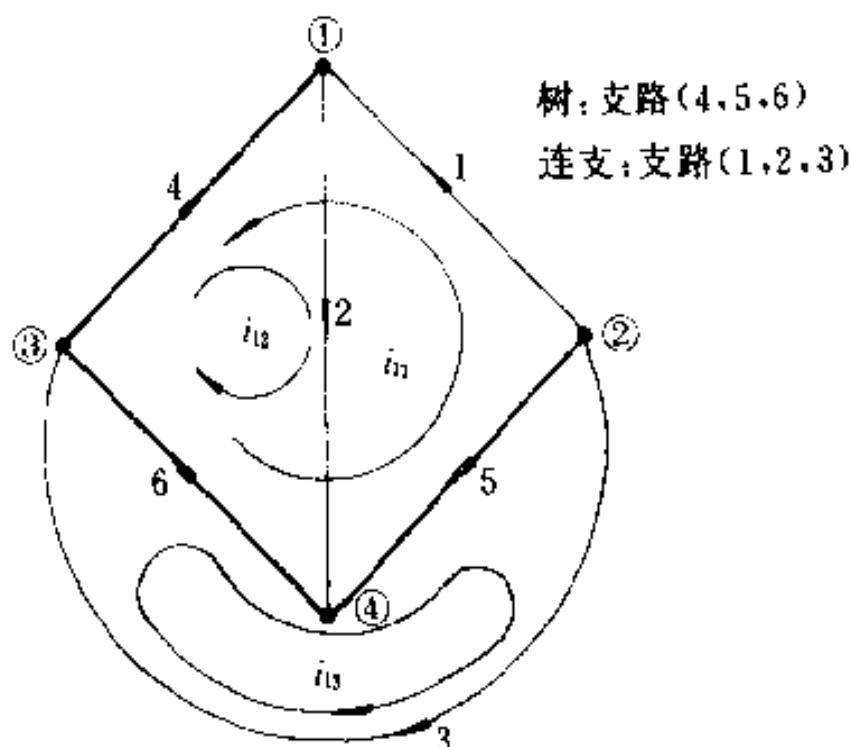


图 3-11 回路电流

另一方面，如果对结点①、②、③分别列出 KCL 方程，有：

$$i_4 = -i_1 + i_2 = -i_{1l} + i_{2l}$$

$$i_5 = -i_1 - i_3 = -i_{1l} - i_{3l}$$

$$i_6 = -i_1 + i_2 - i_3 = -i_{1l} + i_{2l} - i_{3l}$$

它们与前 3 式相同，可见回路电流的假定自动满足 KCL 方程。

① 回路电流 i_l 的下标“l”表示 loop。

具有 b 个支路和 n 个结点的电路, b 个支路电流受 $(n-1)$ 个 KCL 方程的约束, 仅有 $(b-n+1)$ 个支路电流是独立的。连支数恰好是 $(b-n+1)$, 所以(基本)回路电流可以作为电路的独立变量。如果选择的独立回路不是基本(单连支)回路, 上述结论同样成立。在回路电流法中, 只需按 KVL 列方程, 不必再用 KCL。

对于 b 个支路、 n 个结点的电路, 回路电流数 $l = (b - n + 1)$ 。KVL 方程中, 支路中各电阻上的电压都可表示为这些回路电流作用的结果。与网孔电流法方程(3-9)相似, 可写出回路电流方程的一般形式

$$\left. \begin{aligned} R_{11}i_{11} + R_{12}i_{12} + R_{13}i_{13} + \cdots + R_{1l}i_{1l} &= u_{S11} \\ R_{21}i_{11} + R_{22}i_{22} + R_{23}i_{23} + \cdots + R_{2l}i_{2l} &= u_{S22} \\ R_{31}i_{11} + R_{32}i_{22} + R_{33}i_{33} + \cdots + R_{3l}i_{3l} &= u_{S33} \\ \cdots & \\ R_{11}i_{11} + R_{12}i_{12} + R_{13}i_{13} + \cdots + R_{1l}i_{1l} &= u_{S1l} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

式中有相同下标的电阻 $R_{11}、R_{22}、R_{33}$ 等是各回路的自阻, 有不同下标的电阻 $R_{12}、R_{13}、R_{23}$ 等是回路间的互阻。自阻总是正的, 互阻取正还是取负, 则由相关两个回路共有支路上两回路电流的方向是否相同而决定, 相同时取正, 相反时取负。显然, 若两个回路间无共有电阻, 则相应的互阻为零。方程右方的 $u_{S11}、u_{S22}、\dots$ 等分别为各回路 1、2、…等中的电压源的代数和, 取和时, 与回路电流方向一致的电压源前应取“-”号, 否则取“+”号。

例 3-2 给定直流电路如图 3-12(a), 其中 $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega, R_4 = R_5 = R_6 = 2 \Omega, u_{S1} = 4 \text{ V}, u_{S5} = 2 \text{ V}$ 。试选择一组独立回路, 并列出回路电流方程。

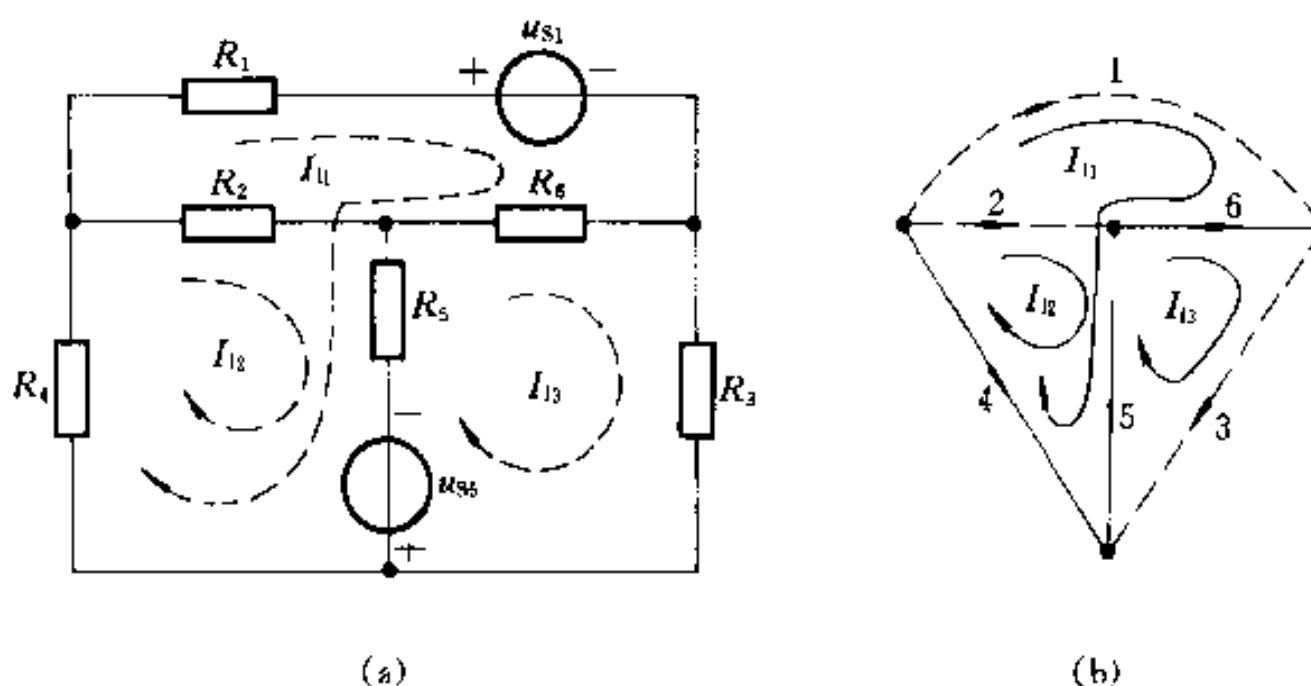


图 3-12 例 3-2 图

解 电路的图如图 3-12(b), 选择支路 4, 5, 6 为树, 3 个独立回路(基本回路)绘于图中。连支电流 I_1, I_2, I_3 即为回路电流 I_{11}, I_{12}, I_{13} 。有:

$$R_{11} = R_1 + R_6 + R_5 + R_4 = 7 \Omega$$

$$R_{22} = R_2 + R_4 + R_5 = 5 \Omega$$

$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_6 = 5 \Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = R_4 + R_5 = 4 \Omega$$

$$R_{13} = R_{31} = -(R_5 + R_6) = -4 \Omega$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -2 \Omega$$

$$u_{S11} = -u_{S1} + u_{S5} = -2 \text{ V}$$

$$u_{S22} = u_{S5} = 2 \text{ V}$$

$$u_{S33} = -u_{S5} = -2 \text{ V}$$

故回路电流方程为：

$$7I_{11} + 4I_{12} - 4I_{13} = -2$$

$$4I_{11} + 5I_{12} - 2I_{13} = 2$$

$$-4I_{11} - 2I_{12} + 5I_{13} = -2$$

解出 I_{11} 、 I_{12} 、 I_{13} 后，可根据以下各式计算支路电流：

$$I_1 = I_{11}$$

$$I_2 = I_{12}$$

$$I_3 = I_{13}$$

$$I_4 = I_{11} - I_{12}$$

$$I_5 = I_{11} + I_{12} - I_{13}$$

$$I_6 = -I_{11} + I_{13}$$

如果电路中有电流源和电阻的并联组合，可经等效变换成为电压源和电阻的串联组合后再列回路电流方程。但当电路中存在无伴电流源时，就无法进行等效变换。此时可采用下述方法处理。除回路电流外，将无伴电流源两端的电压作为一个求解变量列入方程。这样，虽然多了一个变量，但是无伴电流源所在支路的电流为已知，故增加了一个回路电流的附加方程。

例 3-3 图 3-13 所示电路中 $U_{S1} = 50 \text{ V}$, $U_{S3} = 20 \text{ V}$, $I_{S2} = 1 \text{ A}$ ，此电流源为无伴电流源。试用回路法列出电路的方程。

解 把电流源两端的电压 U 作为附加变量。该电路有 3 个独立回路，假设回路电流^① I_{11} 、 I_{12} 、 I_{13} 如图 3-14 所示。沿各自回路的 KVL 方程为

$$\left. \begin{aligned} (20 + 15 + 10)I_{11} - 10I_{12} - 15I_{13} &= 0 \\ -10I_{11} + (10 + 30)I_{12} + U &= 50 \\ -15I_{11} - U + (40 + 15)I_{13} &= -20 \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

① 为了简化讨论，实际上取的是网孔电流。

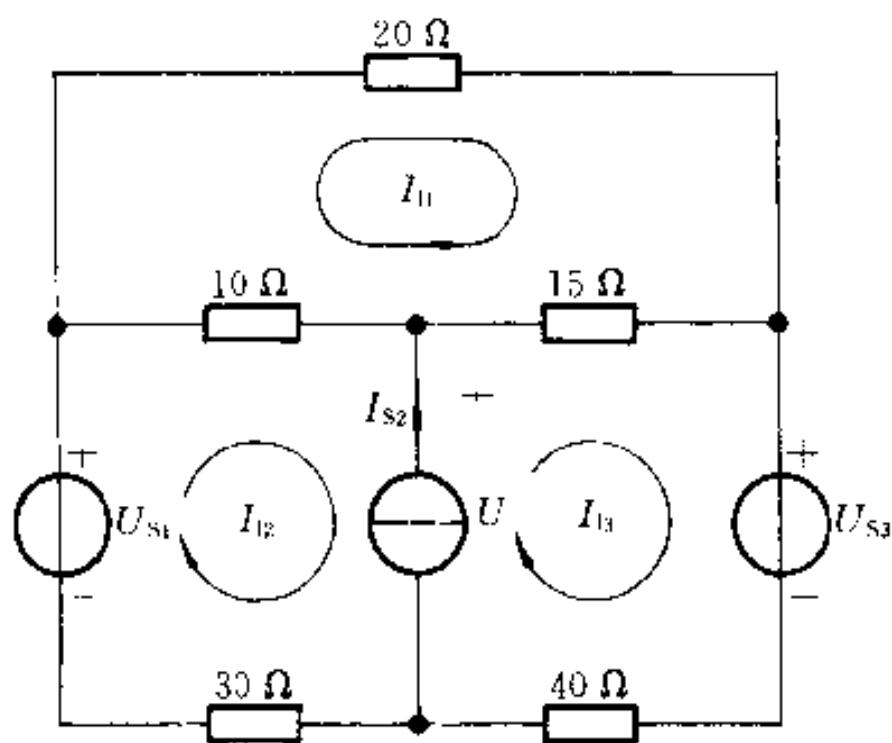


图 3-13 例 3-3 图

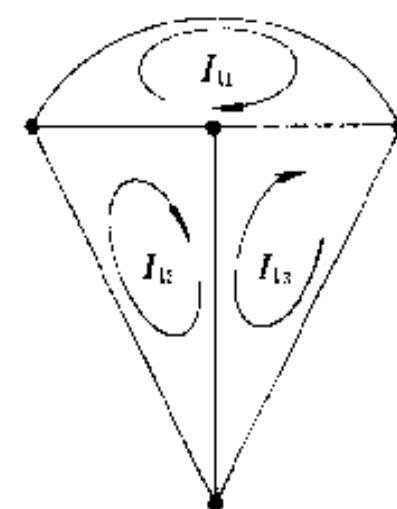


图 3-14 例 3-3 图

无伴电流源所在支路有 I_{12} 和 I_{13} 通过, 故附加方程为

$$I_{13} + I_{12} = 1 \quad (3-12)$$

方程数和未知变量数相等。

当电路中含有受控电压源时, 把它作为电压源暂时列于 KVL 方程的右边, 同时把控制量用回路电流表示, 然后把用回路电流表示的受控源电压移到方程的左边。当受控源是受控电流源时, 可参照前面处理独立电流源的方法进行(见下例)。

例 3-4 图 3-15 所示电路中有无伴电流源 i_{s1} , 无伴电流控制电流源 $i_c = \beta i_2$, 电压控制电压源 $u_c = u_2 u_3$, 电压源 u_{s2} 。列出回路电流方程。

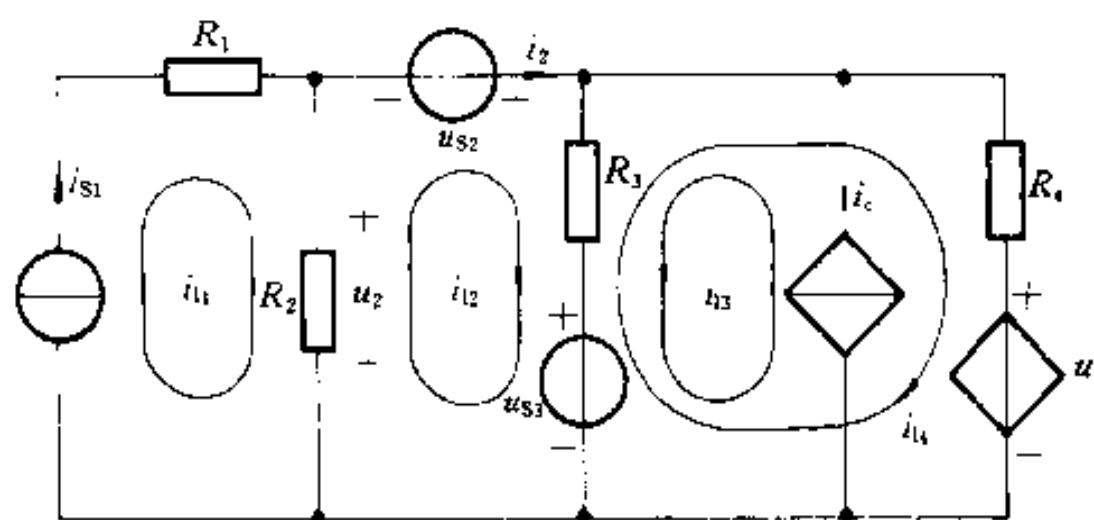


图 3-15 例 3-4 图

解 取独立回路如图, 使无伴电流源和无伴受控电流源都只有一个回路电流流过, 前者为 i_{11} , 后者为 i_{13} , 这样就可不再列回路 1 和回路 3 的 KVL 方程。把控制量用有关回路电流表示, 有:

$$i_2 = i_{12}$$

$$u_2 = R_2(i_{11} - i_{12})$$

直接应用一般公式(3-10)列出回路2和回路4的KVL方程比较困难,可以沿绕行方向逐段写出有关电压:

$$\text{回路2: } -u_2 - u_{s2} + R_3(i_{21} + i_{31} - i_{41}) + u_{s3} = 0$$

$$\text{回路4: } -u_{s3} + R_3(i_{12} - i_{11} + i_{32}) + R_4i_{41} + u_c = 0$$

代入 $u_2 = R_2(i_{11} - i_{12})$, $u_c = \alpha u_2$, 有:

$$-R_2(i_{11} - i_{12}) - R_3(i_{21} + i_{31} - i_{41}) - u_{s2} - u_{s3}$$

$$R_3(i_{41} - i_{11} + i_{32}) + R_4i_{41} + \alpha R_2(i_{11} - i_{12}) - u_{s3}$$

经整理后,得:

$$-R_2i_{11} + (R_2 + R_3)i_{12} + R_3i_{31} - R_3i_{41} = u_{s2} - u_{s3}$$

$$\alpha R_2i_{11} + (\alpha R_2 + R_3)i_{12} - R_3i_{32} + (R_3 + R_4)i_{41} = u_{s3}$$

附加方程为:

$$i_{11} = i_{s1}$$

$$i_{31} = \beta i_{12}$$

如果把 i_{11} 、 i_{31} 代入前 2 个方程,可得到仅含 i_{12} 和 i_{41} 的两个方程。

回路电流法的步骤可归纳如下:

- (1) 根据给定的电路,通过选择一个树确定一组基本回路,并指定各回路电流(即连支电流)的参考方向;
- (2) 按一般公式(3-10)列出回路电流方程,注意自阻总是正的,互阻的正负由相关的两个回路电流通过共有电阻时,两者的参考方向是否相同而定。并注意该式右边项取代数和时各有关电压源前面的“+”、“-”号;
- (3) 当电路中有受控源或无伴电流源时,需另行处理;
- (4) 对于平面电路可用网孔法。

§ 3-6 结点电压法

在电路中任意选择某一结点为参考结点,其他结点与此参考结点之间的电压称为结点电压。结点电压的参考极性是以参考结点为负,其余独立结点为正。结点电压法以结点电压为求解变量,并对独立结点用 KCL 列出用结点电压表达的有关支路电流方程。由于任一支路都连接在两个结点上,根据 KVL,不难断定支路电压是两个结点电压之差。例如,对于图 3-16 所示电路及其图,结点的编号和支路的编号及参考方向均示于图中。电路的结点数为 4, 支路数为 6。以结点①为参考,并令结点①、②、③的结点电压分别用 u_{n1} 、 u_{n2} 、 u_{n3} ^① 表示。根

① 下标 n 表示结点“node”。

据 KVL, 不难得出

$$u_4 + u_2 - u_1 = 0$$

其中 u_1, u_2, u_4 分别为支路 1、2、4 的支路电压。由于 $u_{n1} = u_1, u_{n2} = u_2$, 因此有 $u_4 = u_1 - u_2 = u_{n1} - u_{n2}$ 。可见, 支路电压 u_4 等于它连接的两个结点的电压之差。这是 KVL 的体现。同理, 有 $u_5 = u_{n2} - u_{n3}, u_6 = u_{n1} - u_{n3}, u_3 = u_{n3}$ 。全部支路电压可以通过结点电压表示。由于 KVL 已自动满足, 所以结点电压法中不必再列 KVL 方程。

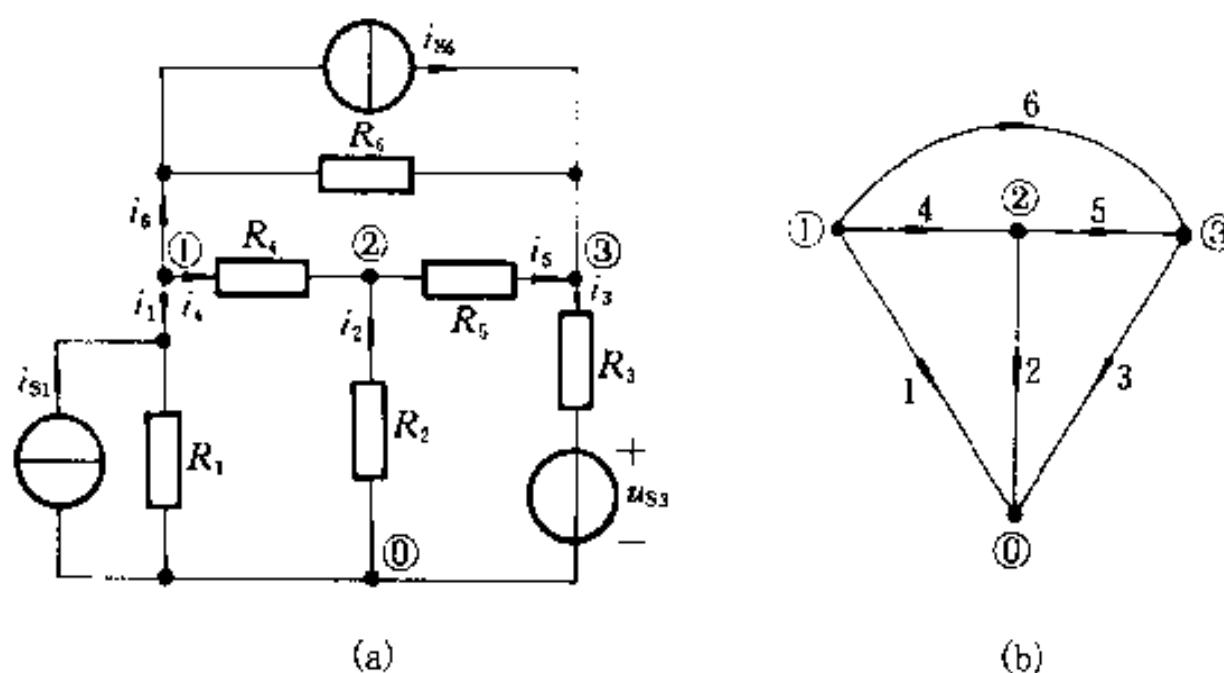


图 3-16 结点电压法

支路电流 i_1, i_2, \dots, i_6 可以分别用有关结点电压表示

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1}{R_1} - i_{S1} = \frac{u_{n1}}{R_1} - i_{S1} \\ i_2 &= \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_{n2}}{R_2} \\ i_3 &= \frac{u_3 - u_{S3}}{R_3} = \frac{u_{n3} - u_{S3}}{R_3} \\ i_4 &= \frac{u_4}{R_4} = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} \\ i_5 &= \frac{u_5}{R_5} = \frac{u_{n2} - u_{n3}}{R_5} \\ i_6 &= \frac{u_6}{R_6} + i_{S6} = \frac{u_{n1} - u_{n3}}{R_6} + i_{S6} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

对结点①、②、③, 应用 KCL, 有

$$\left. \begin{array}{l} i_1 + i_4 + i_6 = 0 \\ i_2 + i_4 + i_5 = 0 \\ i_3 + i_5 + i_6 = 0 \end{array} \right\} \quad (3-14)$$

将支路电流表达式(3-13)代入式(3-14),并经整理,就可得到以结点电压为变量的方程

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) u_{n1} - \frac{1}{R_4} u_{n2} - \frac{1}{R_6} u_{n3} = i_{s1} - i_{s6} \\ - \frac{1}{R_4} u_{n1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) u_{n2} - \frac{1}{R_5} u_{n3} = 0 \\ - \frac{1}{R_6} u_{n1} - \frac{1}{R_5} u_{n2} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) u_{n3} = i_{s6} + \frac{u_{s3}}{R_3} \end{array} \right\} \quad (3-15)$$

式(3-15)可写为

$$\left. \begin{array}{l} (G_1 + G_4 + G_6) u_{n1} - G_4 u_{n2} - G_6 u_{n3} = i_{s1} - i_{s6} \\ G_4 u_{n1} + (G_2 + G_4 + G_5) u_{n2} - G_5 u_{n3} = 0 \\ - G_6 u_{n1} - G_5 u_{n2} + (G_3 + G_5 + G_6) u_{n3} = i_{s6} + G_3 u_{s3} \end{array} \right\} \quad (3-16)$$

式中 G_1, G_2, \dots, G_6 为支路 1, 2, …, 6 的电导。列结点电压方程时,可以根据观察按 KCL 直接写出式(3-15)或式(3-16),不必按照前述步骤进行。为归纳出更为一般的结点电压方程,可令 $G_{11} = G_1 + G_4 + G_6$, $G_{22} = G_2 + G_4 + G_5$, $G_{33} = G_3 + G_5 + G_6$, 分别为结点①、②、③的自导,自导总是正的,它等于连于各结点支路电导之和;令 $G_{12} = G_{21} = -G_4$, $G_{13} = G_{31} = -G_6$, $G_{23} = G_{32} = -G_5$, 分别为①、②,①、③和②、③这 3 对结点间的互导。互导总是负的,它们等于连接于两结点间支路电导的负值。方程右方写为 $i_{s11}, i_{s22}, i_{s33}$ 。分别表示结点①、②、③的注入电流。注入电流等于流向结点的电流源的代数和,流入结点者前面取“+”号,流出结点者前面取“-”号。注入电流源还应包括电压源和电阻串联组合经等效变换形成的电流源。在上例中,结点③除了有 i_{s6} 流入外,还有电压源 u_{s3} 形成的等效电流源 $\frac{u_{s3}}{R_3}$ 。3 个独立结点的结点电压方程成为

$$\left. \begin{array}{l} G_{11} u_{n1} + G_{12} u_{n2} + G_{13} u_{n3} = i_{s11} \\ G_{21} u_{n1} + G_{22} u_{n2} + G_{23} u_{n3} = i_{s22} \\ G_{31} u_{n1} + G_{32} u_{n2} + G_{33} u_{n3} = i_{s33} \end{array} \right\} \quad (3-17)$$

式(3-17)不难推广到具有 $(n-1)$ 个独立结点的电路,有

$$\begin{aligned}
G_{11} u_{n1} + G_{12} u_{n2} + G_{13} u_{n3} + \cdots + G_{1(n-1)} u_{n(n-1)} &= i_{S11} \\
G_{21} u_{n1} + G_{22} u_{n2} + G_{23} u_{n3} + \cdots + G_{2(n-1)} u_{n(n-1)} &= i_{S22} \\
\vdots & \\
G_{(n-1)1} u_{n1} + G_{(n-1)2} u_{n2} + G_{(n-1)3} u_{n3} + \cdots + G_{(n-1)(n-1)} u_{n(n-1)} &= i_{S(n-1)(n-1)}
\end{aligned} \tag{3-18}$$

求得各结点电压后,可以根据 VCR 求出各支路电流。列结点电压方程时,不需要事先指定支路电流的参考方向。结点电压方程本身已包含了 KVL,而以 KCL 的形式写出,故如要检验答案,应按支路电流用 KCL 进行。

例 3-5 图示电路中 $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = 1 \Omega$, $R_3 = R_4 = R_7 = R_8 = 0.5 \Omega$, $i_{S4} = 2 \cos t \text{ A}$, $i_{S13} = 4 \text{ A}$, $u_{S3} = 4 \cos t \text{ V}$, $u_{S7} = 3 \text{ V}$ 。列出电路的结点电压方程。

解 指定参考结点，并对其他结点编号，设结点电压 $u_{n1}, u_{n2}, u_{n3}, u_{n4}$ 。结点电压方程为：

$$\begin{aligned}
& (G_1 + G_4 + G_8) u_{n1} - G_1 u_{n2} - G_4 u_{n4} \\
= & - i_{S13} + i_{S4} \\
& - G_1 u_{n1} + (G_1 + G_2 + G_5) u_{n2} - \\
& G_2 u_{n3} = 0 \\
& - G_2 u_{n2} + (G_2 + G_3 + G_6) u_{n3} - \\
& G_3 u_{n4} = i_{S13} - G_3 u_{S3} \\
& - G_4 u_{n1} - G_3 u_{n3} + (G_3 + G_4 + G_7) u_{n4}
\end{aligned}$$

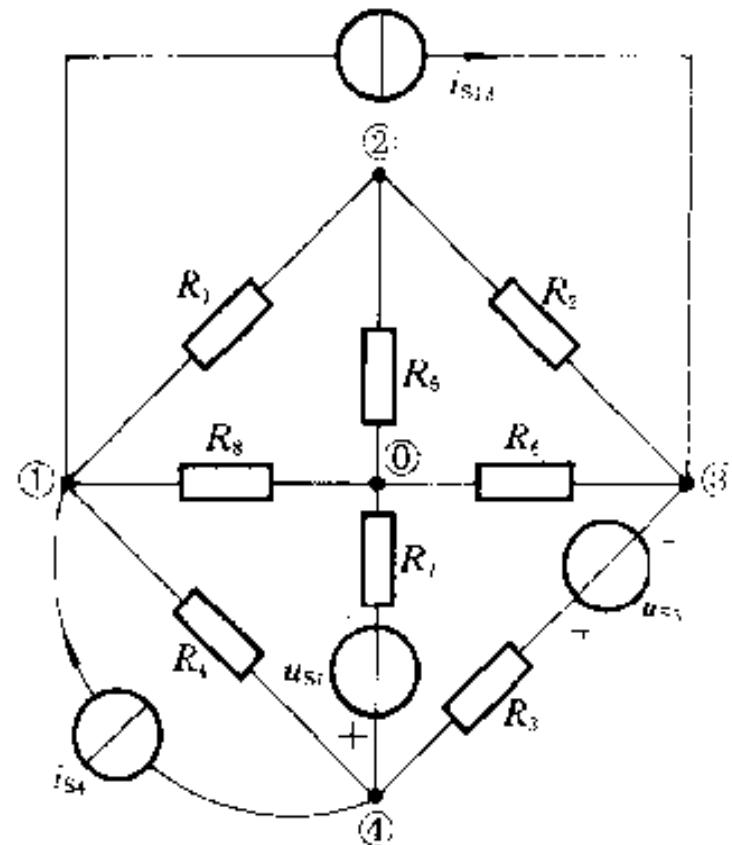


图 3-17 例 3-5 图

代入数据后,得:

$$\begin{aligned}5u_{n1} - u_{n2} - 2u_{n4} &= -4 + 2\cos t \\- u_{n1} + 3u_{n2} - u_{n3} &= 0 \\- u_{n2} + 4u_{n3} - 2u_{n4} &= 4 - 8\cos t \\2u_{n1} - 2u_{n3} + 6u_{n4} &= 6\cos t - 6\end{aligned}$$

例 3-6 电路如图 3-18 所示,用结点电压法求各支路电流及输出电压 U_{o_0}

解 取参考结点如图,其他3个结点的结点电压分别为 U_{n1} 、 U_{n2} 、 U_{n3} ,结点电压方程为:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)U_{n1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)U_{n2} = -\frac{15}{3}$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)U_{n2} - \frac{1}{2}U_{n3} &= \frac{15}{3} - 5 + 10 \\ -\frac{1}{2}U_{n2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_{n3} &= 5 \end{aligned}$$

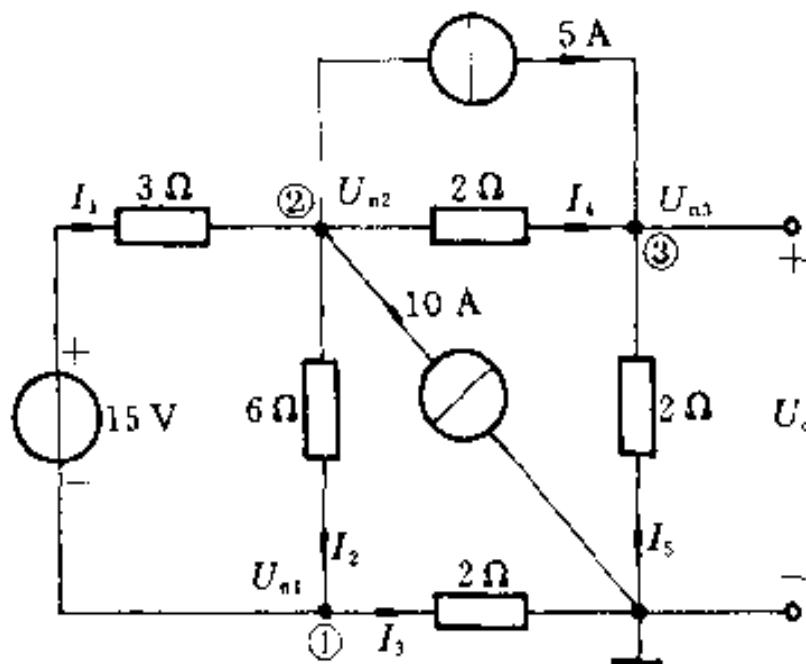


图 3-18 例 3-6 图

整理得：

$$\begin{aligned} U_{n1} - 0.5U_{n2} &= -5 \\ -0.5U_{n1} + U_{n2} - 0.5U_{n3} &= 10 \\ -0.5U_{n2} + U_{n3} &= 5 \end{aligned}$$

可解得：

$$U_{n1} = 5 \text{ V}$$

$$U_{n2} = 20 \text{ V}$$

$$U_{n3} = 15 \text{ V}$$

假定支路电流 I_1, I_2, \dots, I_5 如图中所示，有：

$$I_1 = \frac{15 - (U_{n2} - U_{n1})}{3} = 0$$

$$I_2 = \frac{U_{n2} - U_{n1}}{6} = 2.5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{n1}}{2} = 2.5 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{n2} - U_{n3}}{2} = 2.5 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{U_{n3}}{2} = 7.5 \text{ A}$$

在参考结点满足 KCL，求解正确。

输出电压为

$$U_n = U_{n3} = 15 \text{ V}$$

无电阻与之串联的电压源称为无伴电压源。当无伴电压源作为一条支路连接于两个结点之间时,该支路的电阻为零,即电导等于无限大,支路电流不能通过支路电压表示,结点电压方程的列出就遇到困难。当电路中存在这类支路时,有几种方法可以处理,下面介绍一种。把无伴电压源的电流作为附加变量列入KCL方程,每引入这样一个变量,同时也增加了一个结点电压与无伴电压源电压之间的一个约束关系。把这些约束关系和结点电压方程合并成一组联立方程,其方程数仍将与变量数相同。

例 3-7 图3-19所示电路中, u_{s1} 为无伴电压源的电压。试列出此电路的结点电压方程。

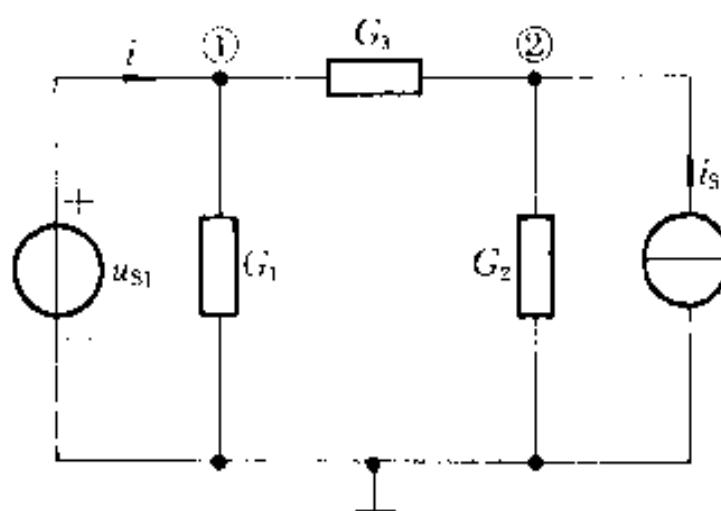


图 3-19 例 3-7 图

解 设无伴电压源支路的电流为 i , 电路的结点电压方程为:

$$(G_1 + G_3)u_{n1} - i - G_3u_{n2} = 0$$

$$-G_3u_{n1} + (G_2 + G_3)u_{n2} = i_{s2}$$

补充的约束关系为

$$u_{n1} = u_{s1}$$

由上列 3 个方程,可以联立解得 u_{n1} 、 u_{n2} 和 i 。

这种方法实际上采用了混合变量,除了结点电压外,还把无伴电压源支路的电流作为变量。在回路电流法中,处理无伴电流源时也采用了混合变量(见例 3-3)。

当电路中有受控电流源时,在建立结点电压方程时,先把控制量用结点电压表示,并暂时把它当作独立电流源,按上述方法列出结点电压方程,然后把用结点电压表示的受控电流源电流移到方程的左边。当电路中存在有伴受控电压源时,把控制量用有关结点电压表示并变换为等效受控电流源。如果有无伴受控电压源,可参照无伴独立电压源的处理方法。

例 3-8 图 3-20 所示电路含有 VCCS, 其电流 $i_e = gu_2$, 其中 u_2 为电阻

R_2 上的电压。

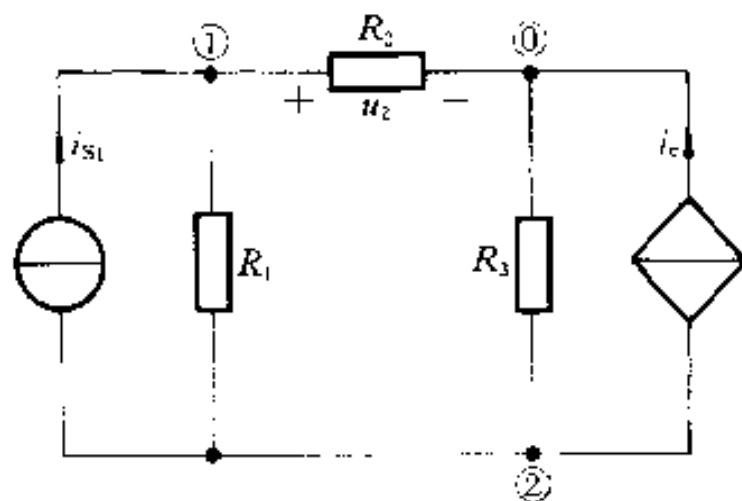


图 3-20 例 3-8 图

解 根据控制量为 u_{21} , 取③点为参考点, 于是 $i_c = g u_{21}$ 。

结点电压方程为:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_{n1} - \frac{1}{R_1} u_{n2} &= i_{S1} \\ -\frac{1}{R_1} u_{n1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) u_{n2} &= -g u_{21} - i_{S1} \end{aligned}$$

把上式中的“ $g u_{21}$ ”项移到方程左边, 得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_{n1} - \frac{1}{R_1} u_{n2} &= i_{S1} \\ \left(-\frac{1}{R_1} + g \right) u_{21} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) u_{n2} &= -i_{S1} \end{aligned}$$

这就是该电路的结点电压方程。由上式可见 $G_{12} \neq G_{21}$, 这是电路中存在受控源的结果。这个特点可以推广到具有受控源的一般电路, 就是说, 对含受控源的电阻电路, 结点电压方程中有些互导 $G_{jk} \neq G_{kj}$, 方程的系数行列式不再对称。同理, 对含受控源的电阻电路, 回路电流方程中, 也有些互阻 $R_{jk} \neq R_{kj}$, 方程的系数行列式不再对称。

结点电压法的步骤可以归纳如下:

- (1) 指定参考结点, 其余结点对参考结点之间的电压就是结点电压。通常以参考结点为各结点电压的负极性;
- (2) 按一般公式(3-18)列出结点电压方程, 注意自导总是正的, 互导总是负的; 并注意各结点注入电流前面的“+”, “-”号;
- (3) 当电路中有受控源或无伴电压源时需另行处理。

本章介绍了分析线性电阻电路的支路电流法, 回路电流法(含网孔电流法)和结点电压法。并提到了 $2b$ 法和支路电压法。就方程数目说, $2b$ 法为支路数 b 的 2 倍; 支路电流(电压)法为支路数 b ; 结点电压法为独立结点数($n-1$) (n

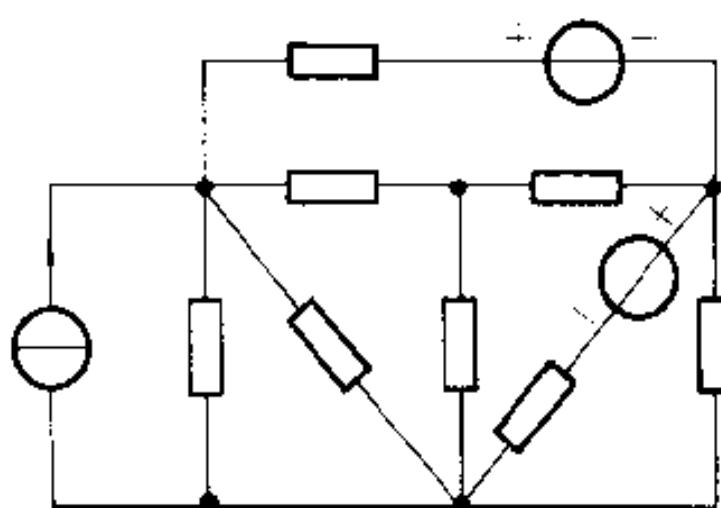
为结点数);回路电流法为独立回路数($b - n + 1$);其中以 $2b$ 法为最多。支路电流法要求每个支路电压能以支路电流表示,这就使该方法的应用受到一定的限制,例如对于无伴电流源就需要另行处理。支路电压法也有类似问题存在。 $2b$ 法就比较灵活,因为只要求写出每个支路的VCR,对任何元件都不难做到。回路电流法存在与支路电流法类似的限制。结点电压法的优点是结点电压容易选择,不存在选取独立回路的问题。用网孔电流法时,选取独立回路简便、直观,但仅适用于平面电路。

自电子计算机普及后,高阶代数方程的求解已不是难事,本书第十五章和附录B将简要介绍应用计算机辅助电路分析的基本知识。

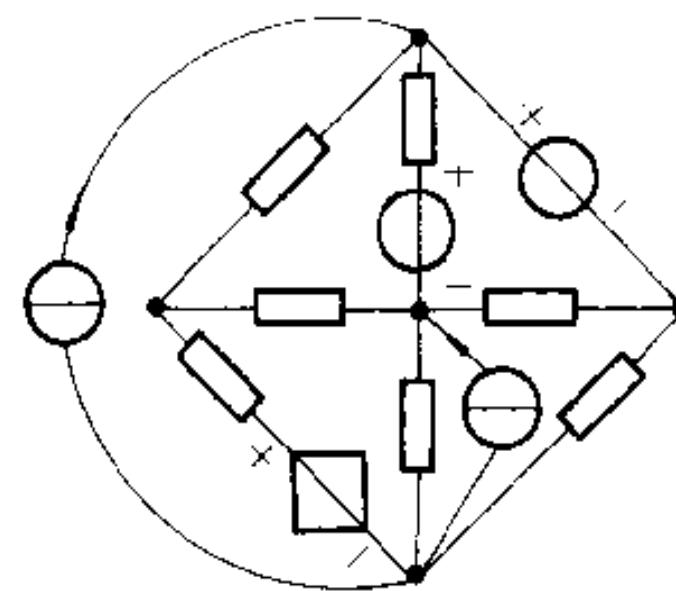
线性电阻电路方程是一组线性代数方程。无论用以上哪一种方法,都可以获得一组未知数和方程数相等的代数方程。从数学上说,只要方程的系数行列式不等于零,方程有解且是唯一解。线性电阻电路方程一般总是有解的,但是在某些特定条件以及特殊情况下,线性电阻电路方程可能无解,也可能存在多解。

习 题

3-1 在以下两种情况下,画出图示电路的图,并说明其结点数和支路数:(1) 每个元件作为一条支路处理;(2) 电压源(独立或受控)和电阻的串联组合,电流源和电阻的并联组合作为一条支路处理。



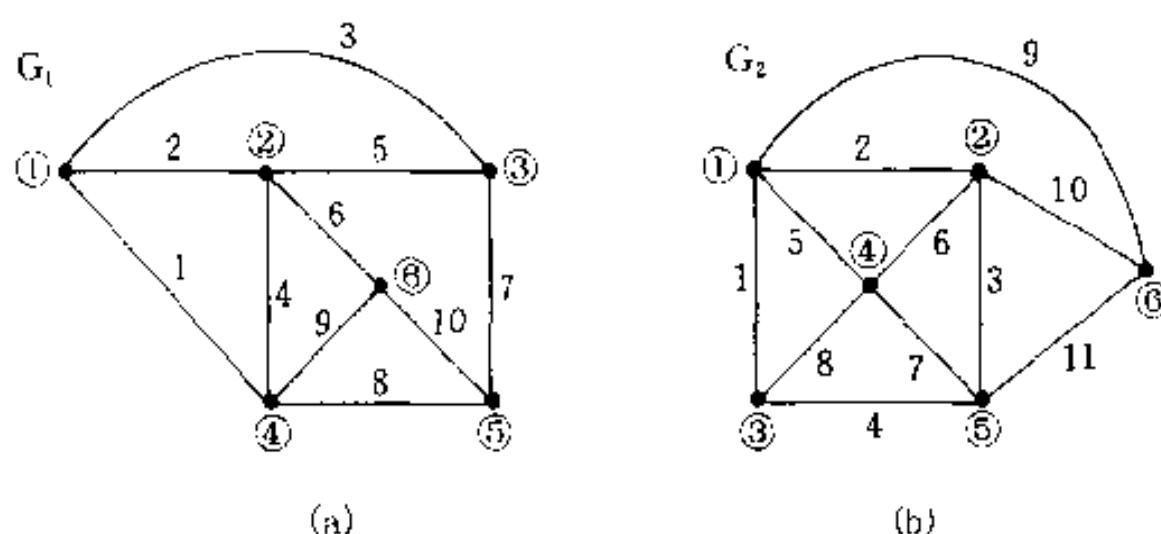
(a)



(b)

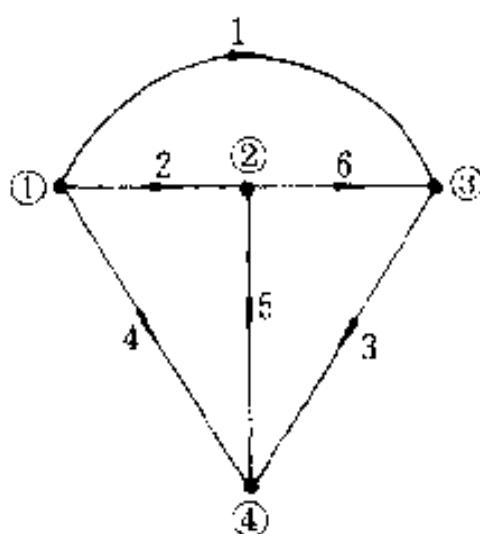
题 3-1 图

- 3-2 指出题3-1中两种情况下,KCL、KVL独立方程各为多少?
- 3-3 对题图(a)和(b)所示G,各画出4个不同的树,树支数各为多少?
- 3-4 图示桥形电路共可画出16个不同的树,试一一列出(由于结点数为4,故树支数为3,可按支路号递增的方法列出所有可能的组合,如123,124,⋯,126,134,135,⋯等,从中选出树)。
- 3-5 对题图3-3所示的G₁和G₂,任选一树并确定其基本回路组,同时指出独立回路数和网孔数各为多少?

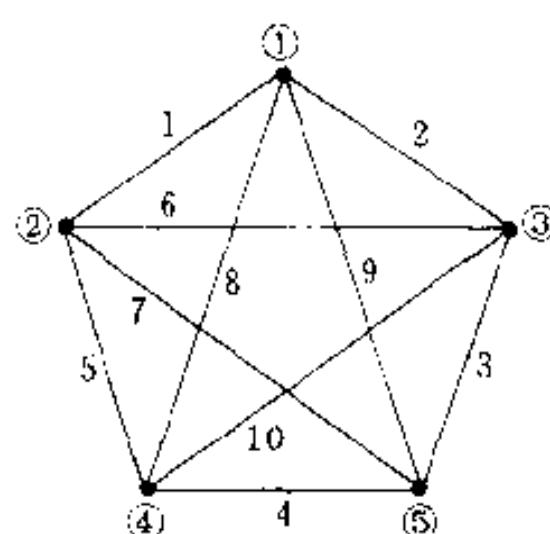


题 3-3 图

3-6 对图示非平面图,设:(1)选择支路(1,2,3,4)为树;(2)选择支路(5,6,7,8)为树。问独立回路各有多少?求其基本回路组。

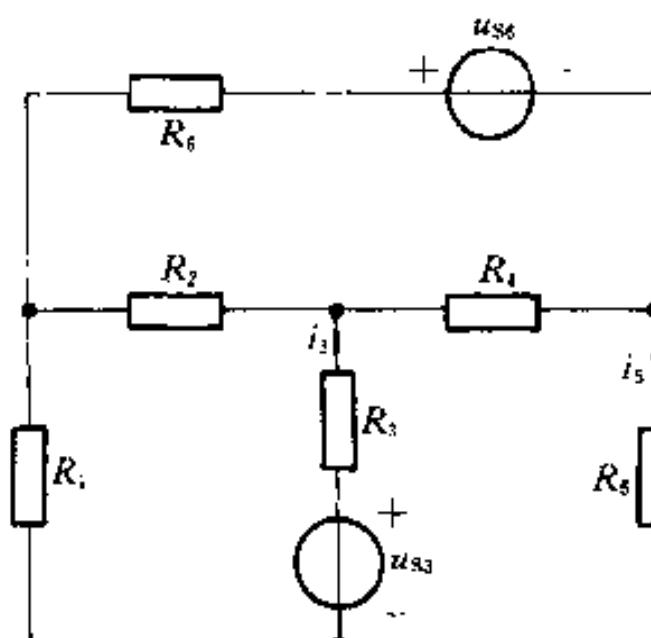


题 3-4 图



题 3-6 图

3-7 图示电路中 $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = R_5 = 8 \Omega$, $R_6 = 2 \Omega$, $u_{S1} = 20 \text{ V}$, $u_{S2} = 40 \text{ V}$, 用支路电流法求解电流 i_{S1}

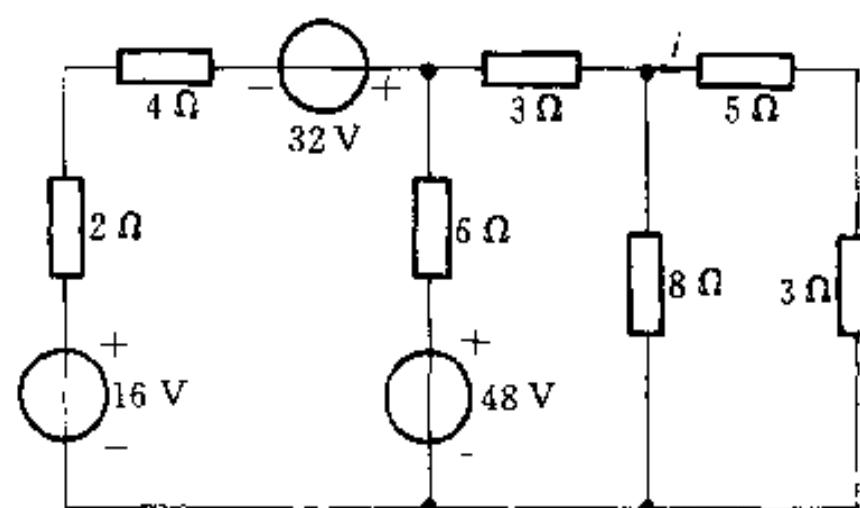


题 3-7 图

3-8 用网孔电流法求解题图 3-7 中电流 i_5 。

3-9 用回路电流法求解题图 3-7 中电流 i_{3c}

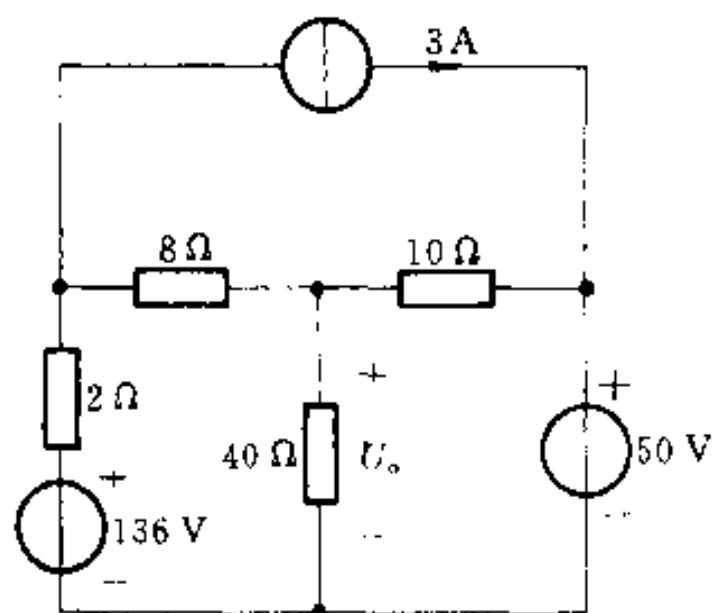
3-10 用回路电流法求解题图中 5 Ω 电阻中的电流 i_a



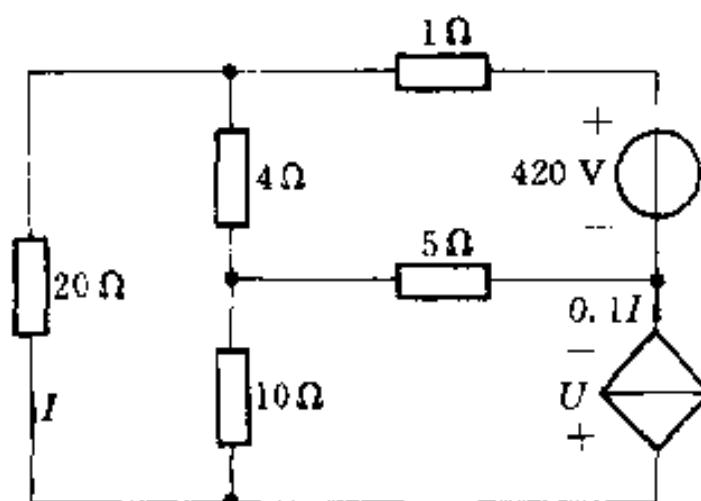
题 3-10 图

3-11 用回路电流法求解图示电路中电压 U_o

3-12 用回路电流法求解图示电路中电压 U

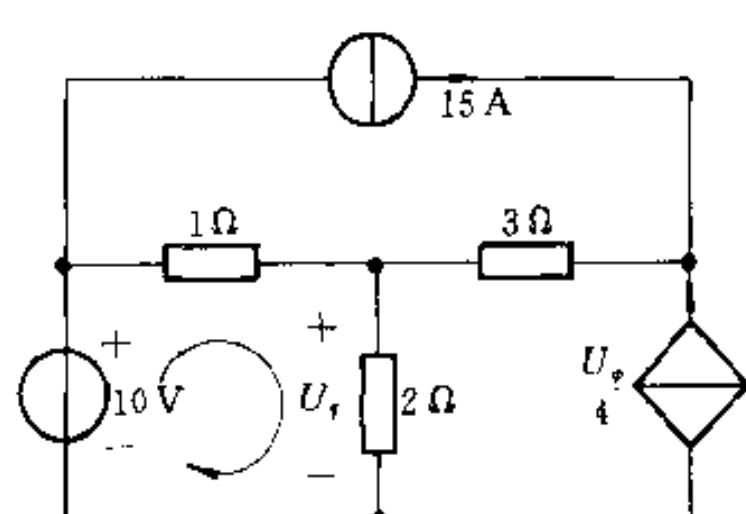


题 3-11 图

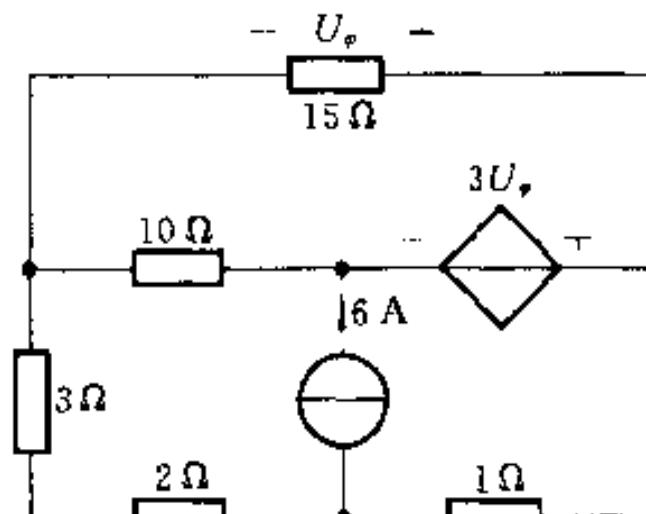


题 3-12 图

3-13 用回路电流法求解图(a)、(b)两电路中每个元件的功率，并作功率平衡检验。



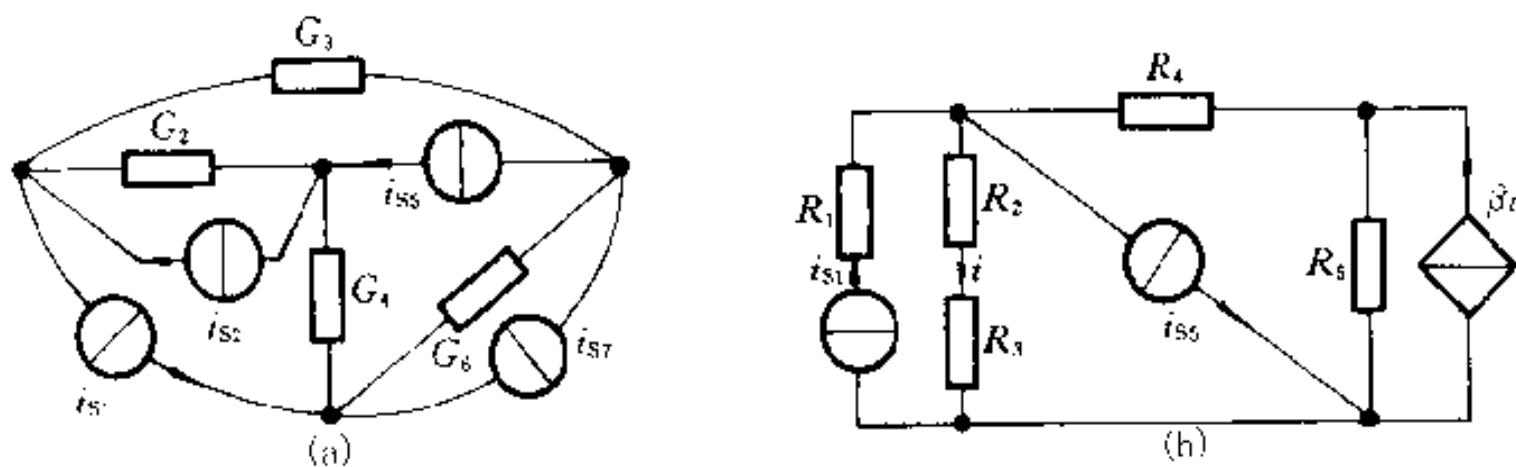
(a)



(b)

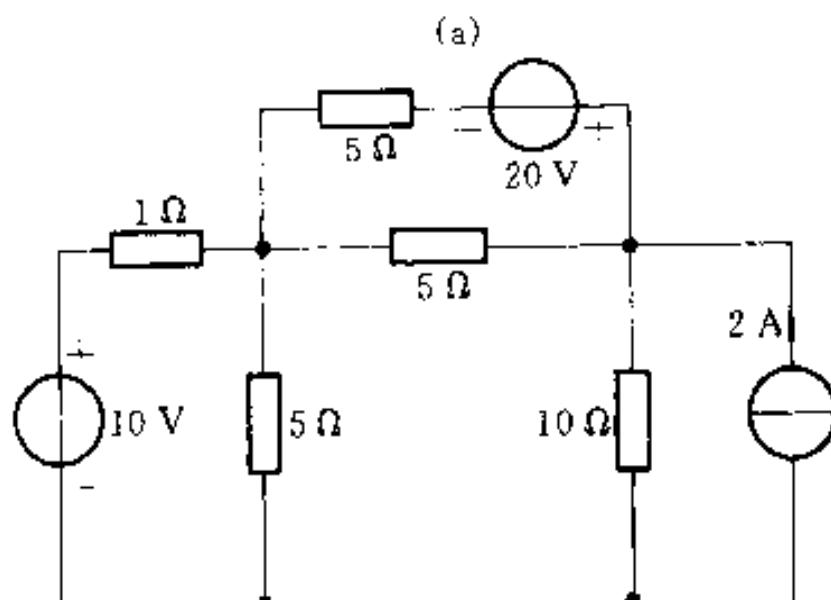
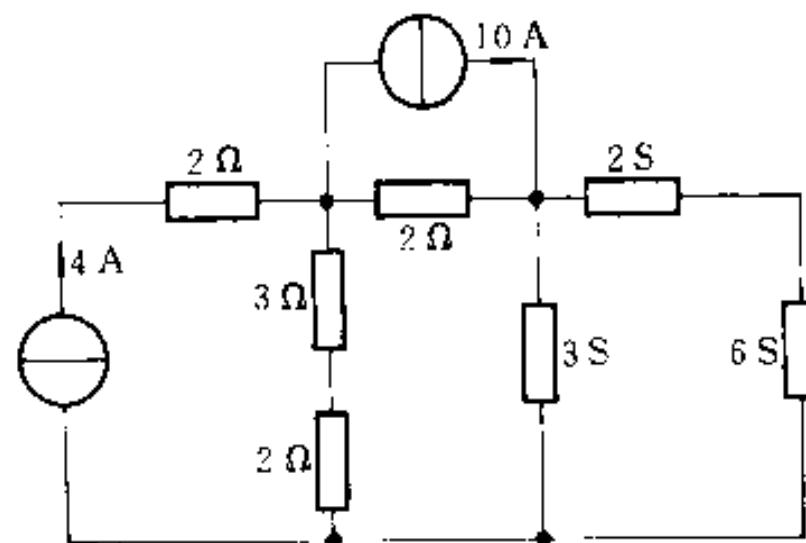
题 3-13 图

3-14 列出图(a)、(b)中电路的结点电压方程。



题 3-14 图

3-15 列出图(a)、(b)中电路的结点电压方程。



(b)

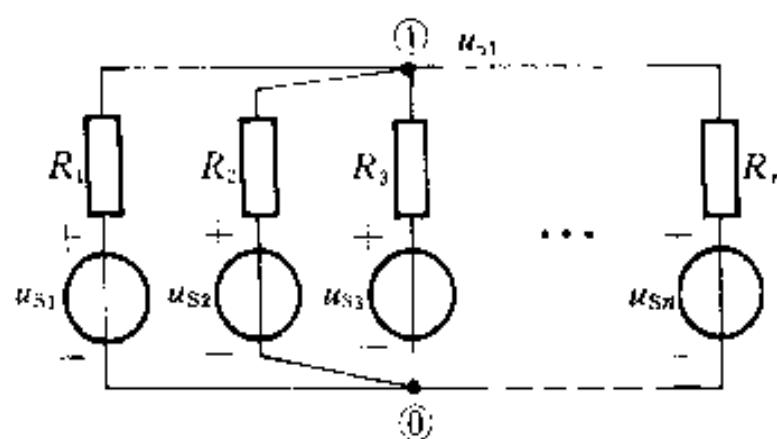
题 3-15 图

3-16 图示为由电压源和电阻组成的一个独立结点的电路,用结点电压法证明其结点电压为

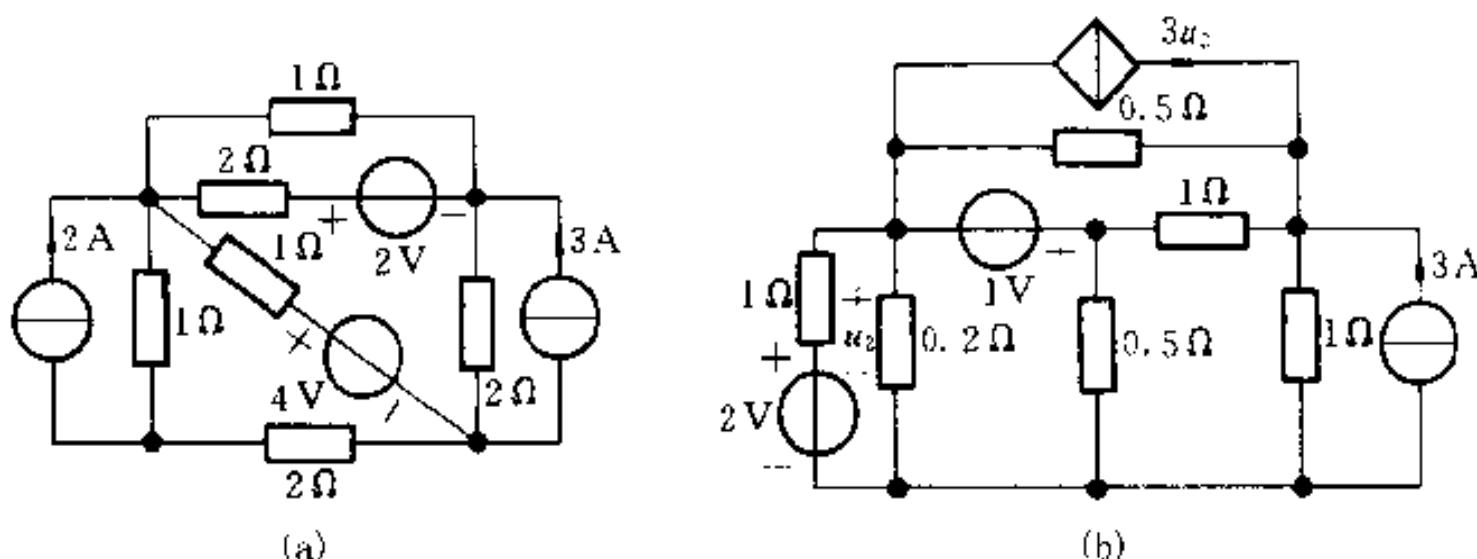
$$u_{nl} = \frac{\sum G_k u_{nk}}{\sum G_k}$$

此式又称弥尔曼定理。

3-17 列出图(a)、(b)电路的结点电压方程。

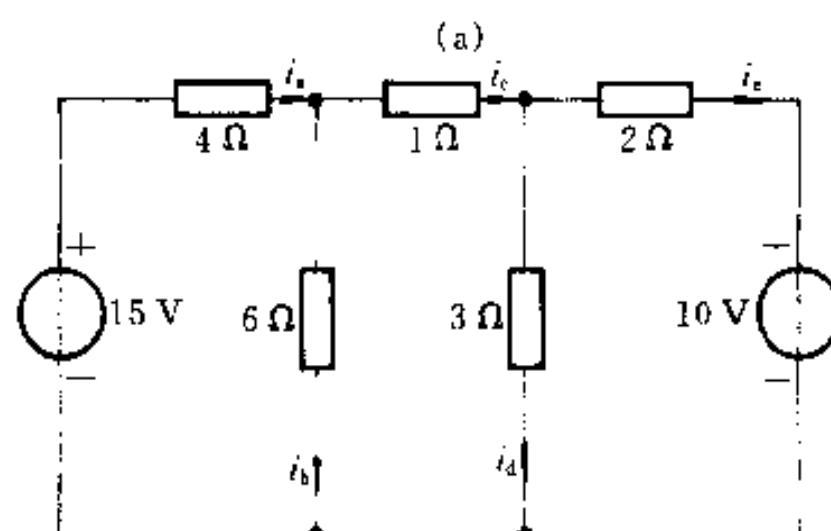
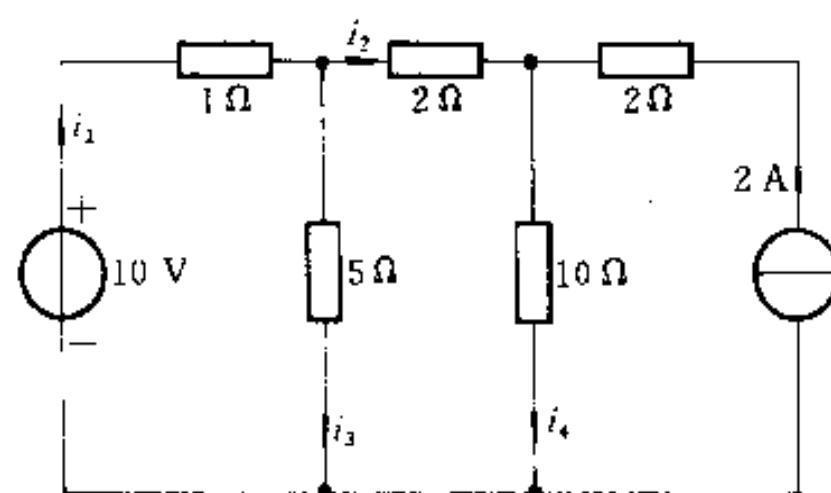


题 3-16 图



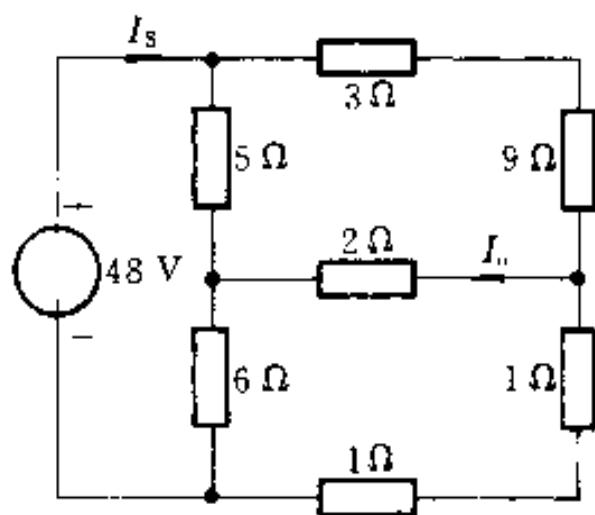
题 3-17 图

3-18 用结点电压法求解图示电路中各支路电流。

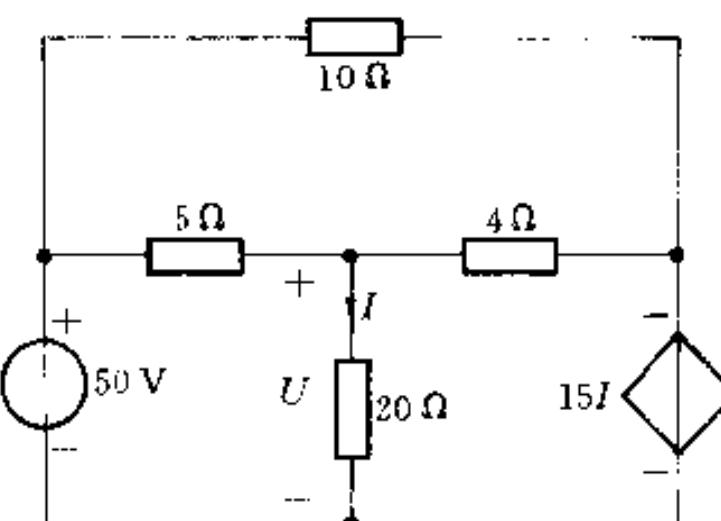
(b)
题 3-18 图

3-19 图示电路中电源为无伴电压源,用结点电压法求解电流 I_s 和 I_o 。

3-20 用结点电压法求解图示电路中电压 U 。

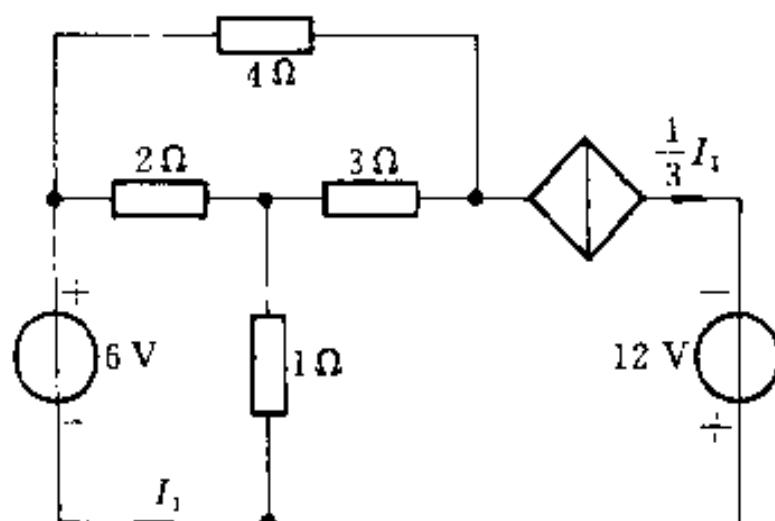


题 3-19 图



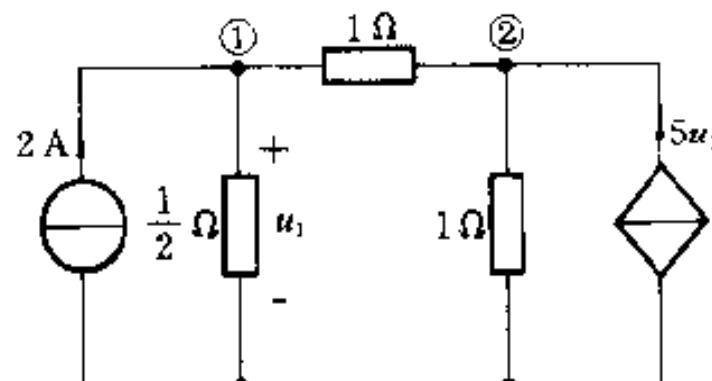
题 3-20 图

3-21 用结点电压法求解图示电路后,求各元件的功率并检验功率是否平衡。



题 3-21 图

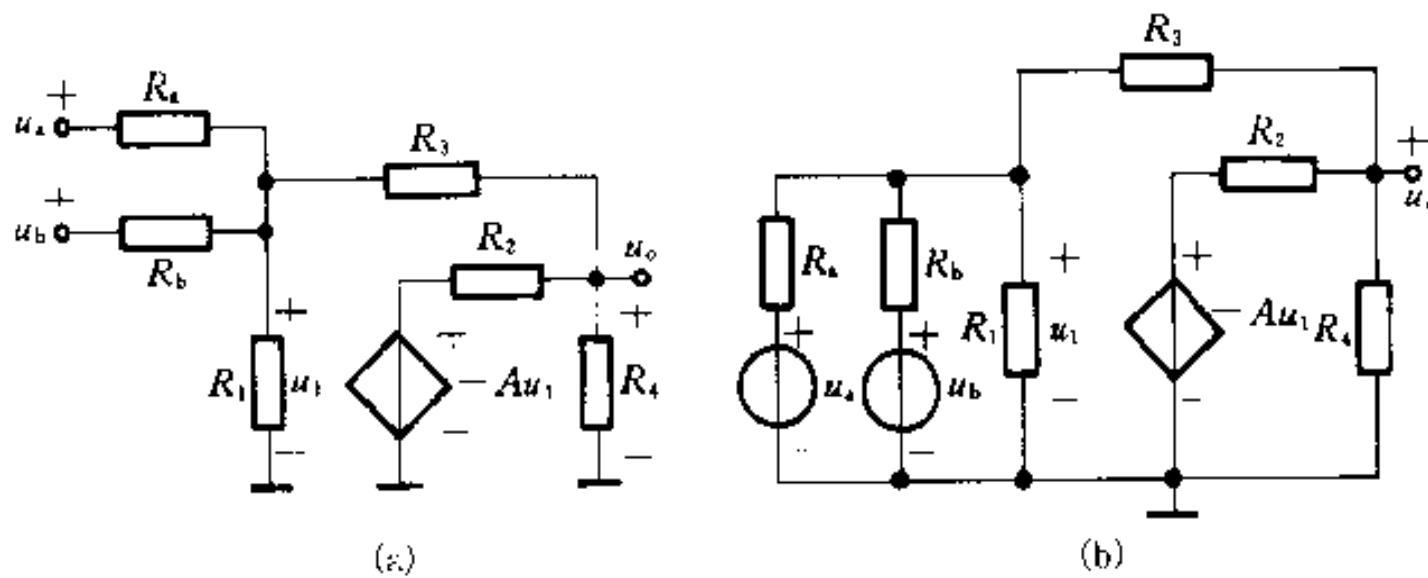
3-22 用结点电压法求解图示电路中 u_{n1} 和 u_{n2} 。你对此题有什么看法?



题 3-22 图

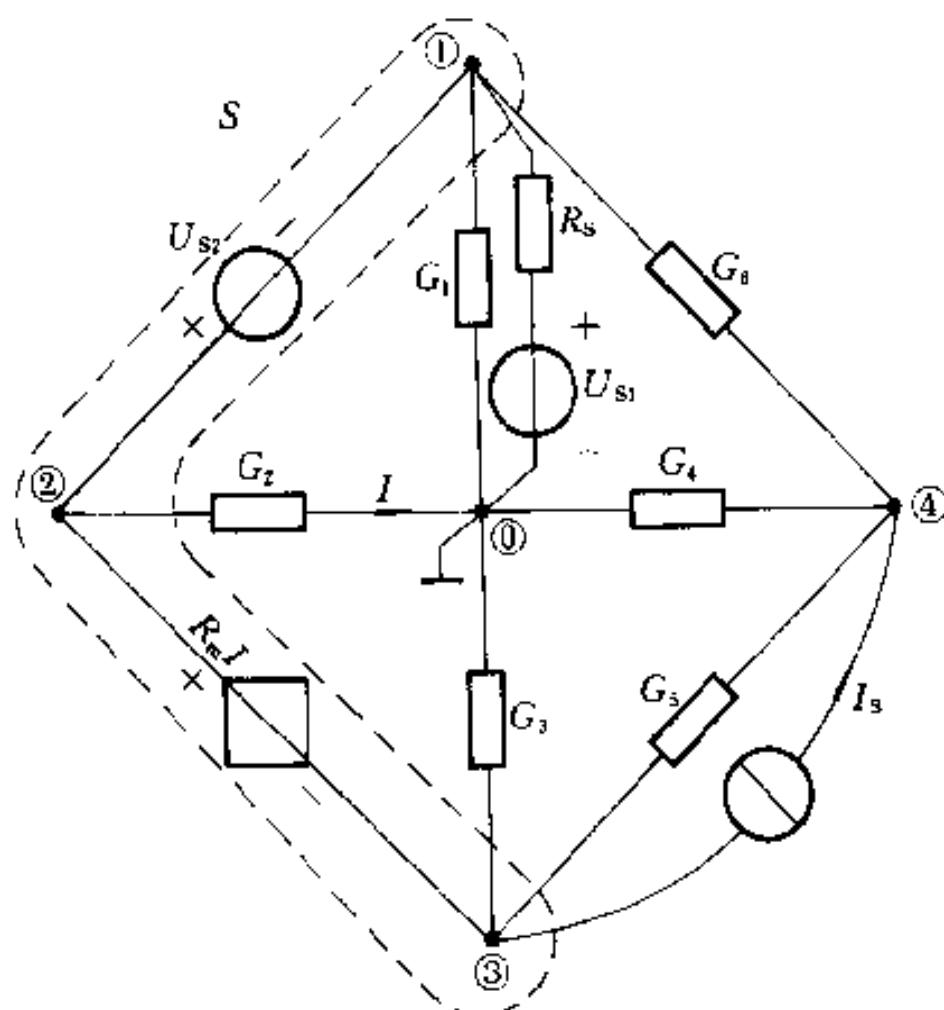
3-23 图(a)所示电路是电子电路中的一种习惯画法,其中未画出电压源,只标出与电

压源相连各点对参考结点(或地)的电压,即电位值。图(a)可改画为图(b)。试用结点电压法求电压 u_o (对参考结点)。



题 3-23 图

3-24 列出图示电路的结点电压方程。如果 $R_s = 0$, 则方程又如何? (提示: 为避免引入过多附加电流变量, 对连有无伴电压源的结点部分, 可在包含无伴电压源的封闭面 S 上写出 KCL 方程)。



题 3-24 图

第四章

电 路 定 理

— 内 容 提 要 —

本章介绍一些重要的电路定理,其中有叠加定理(包括齐性定理)、替代定理、戴维宁定理、诺顿定理、特勒根定理、互易定理。还扼要地介绍了有关对偶原理的概念。

§ 4-1 叠加定理

叠加定理是线性电路的一个重要定理。图 4-1(a)所示电路中有两个独立电源(激励),现在要求解电路中电流 i_2 和电压 u_1 (响应)。

根据 KCL 和 KVL 可以列出方程 $u_s = R_1(i_2 - i_s) + R_2 i_2$, 解得 i_2 , 再求得 u_1 , 有

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= \frac{u_s}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 i_s}{R_1 + R_2} \\ u_1 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

从式(4-1)可看出, i_2 和 u_1 分别是 u_s 和 i_s 的线性组合。将其改写为

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= i_2^{(1)} + i_2^{(2)} \\ u_1 &= u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

其中:

$$i_2^{(1)} = i_2 \Big|_{i_s=0}, \quad u_1^{(1)} = u_1 \Big|_{i_s=0}$$

$$i_2^{(2)} = i_2 \Big|_{u_s=0}, \quad u_1^{(2)} = u_1 \Big|_{u_s=0}$$

即 $i_2^{(1)}$ 和 $u_1^{(1)}$ 为原电路中将电流源 i_s 置零时的响应,也即是激励 u_s 单独作用时产生的响应; $i_2^{(2)}$ 和 $u_1^{(2)}$ 为原电路中将电压源置零时的响应,也即是激励 i_s

单独作用时产生的响应。电流源置零时相当于开路;电压源置零时相当于短路..故激励 u_s 与 i_s 分别单独作用时电路如图 4·1(b)和(c)所示,称为 u_s 和 i_s 分别作用时的分电路。从分电路图(b)可求得:

$$i_2^{(1)} = \frac{u_s}{R_1 + R_2}$$

$$u_1^{(1)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$$

而从分电路图(c)可求得:

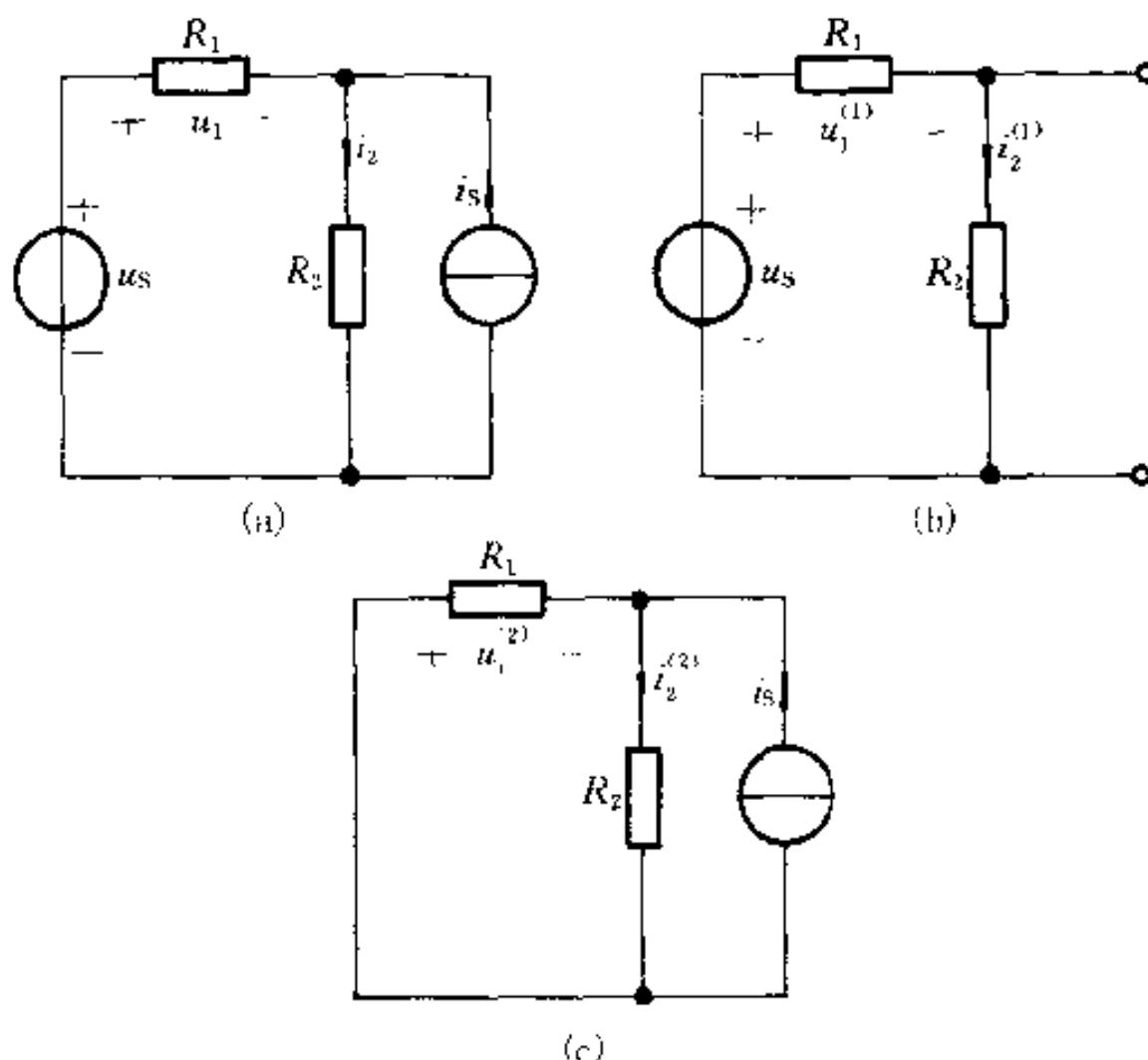


图 4·1 叠加定理

$$i_2^{(2)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s$$

$$u_1^{(2)} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

与式(4·1)和式(4·2)一致。

对于一个具有 b 条支路, n 个结点的电路,可以用回路电流或是结点电压等作为变量列出电路方程。此种方程具有以下形式

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N = b_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N = b_{22} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{NN}x_N = b_{NN} \end{array} \right\} \quad (4 \cdot 3)$$

式中求解变量以 x 表示, 右方系数 b 是电路中激励的线性组合。当此方程是回路电流方程时, x 是回路电流 i_l , 系数 a 是自阻或互阻, b 则是回路中电压源电压和由电流源等效变换所得电压源的线性组合。当此方程是结点电压方程时, x 是结点电压 u_n , 系数 a 是自导或互导, b 是结点上的电流源的注入电流和电压源等效变换所得电流源的线性组合。式(4-3)的解的一般形式为

$$x_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} b_{11} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} b_{22} + \cdots + \frac{\Delta_{Nk}}{\Delta} b_{NN}$$

式中, Δ 为 a 系数构成的行列式, Δ_{jk} 是 Δ 的第 j 行第 k 列的余因式。由于 b_{11}, b_{22}, \dots 等都是电路中激励的线性组合, 而每个解答 x 又是 b_{11}, b_{22}, \dots 等的线性组合, 故任意一个解(电压或电流)都是电路中所有激励的线性组合。当电路中有 g 个电压源和 h 个电流源时, 任意一处电压 u_f 或电流 i_f 都可以写为以下形式

$$\begin{aligned} u_f &= k_{f1} u_{S1} + k_{f2} u_{S2} + \cdots + k_{fk} u_{Sg} + K_{f1} i_{S1} + K_{f2} i_{S2} \\ &\quad + \cdots K_{fh} i_{Sh} = \sum_{m=1}^g k_{fm} u_{Sm} + \sum_{m=1}^h K_{fm} i_{Sm} \\ i_f &= k'_{f1} u_{S1} + k'_{f2} u_{S2} + \cdots + k'_{fk} u_{Sg} + K'_{f1} i_{S1} + K'_{f2} i_{S2} \\ &\quad + \cdots + K'_{fh} i_{Sh} = \sum_{m=1}^g k'_{fm} u_{Sm} + \sum_{m=1}^h K'_{fm} i_{Sm} \end{aligned} \quad (4-4)$$

叠加定理可表述为: 线性电阻电路中, 任一电压或电流都是电路中各个独立电源单独作用时, 在该处产生的电压或电流的叠加。

叠加定理在线性电路的分析中起着重要的作用, 它是分析线性电路的基础。线性电路中很多定理都与叠加定理有关。直接应用叠加定理计算和分析电路时, 可将电源分成几组, 按组计算以后再叠加, 有时可简化计算。

当电路中存在受控源时, 叠加定理仍然适用。受控源的作用反映在回路电流或结点电压方程中的自阻和互阻或自导和互导中, 所以任一处的电流或电压仍可按照各独立电源作用时在该处产生的电流或电压的叠加计算。所以对含有受控源的电路应用叠加定理, 在进行各分电路计算时, 仍应把受控源保留在各分电路之中^①。

^① 受控源不同于独立电源, 它不直接起“激励”作用, 但是又带有“电源”性质。在列电路方程时, 往往把受控源的电流或电压“暂时”列于方程的右边, 如同独立电源。如果在应用叠加定理时, 把受控源当作独立电源处理, 不把受控源保留在各分电路中, 而另外设仅含受控源的分电路也是可行的, 但是受控源的控制量不是该分电路中的控制量, 而应保持为原电路中的控制量。最终进行叠加时, 应包含受控源分电路的分量。这种处理方法的不足之处是原电路的控制量为待求量, 需要按各分电路叠加求得。严格地说, 叠加性质是针对各独立电源的。

使用叠加定理时应注意以下几点：

- (1) 叠加定理适用于线性电路，不适用于非线性电路；
- (2) 在叠加的各分电路中，不作用的电压源置零，在电压源处用短路代替；不作用的电流源置零，在电流源处用开路代替。电路中所有电阻都不予更动，受控源则保留在各分电路中；
- (3) 叠加时各分电路中的电压和电流的参考方向可以取为与原电路中的相同。取和时，应注意各分量前的“+”、“-”号；
- (4) 原电路的功率不等于按各分电路计算所得功率的叠加，这是因为功率是电压和电流的乘积。

例 4-1 试用叠加定理计算图 4-2(a)所示电路中 I 和 U 。

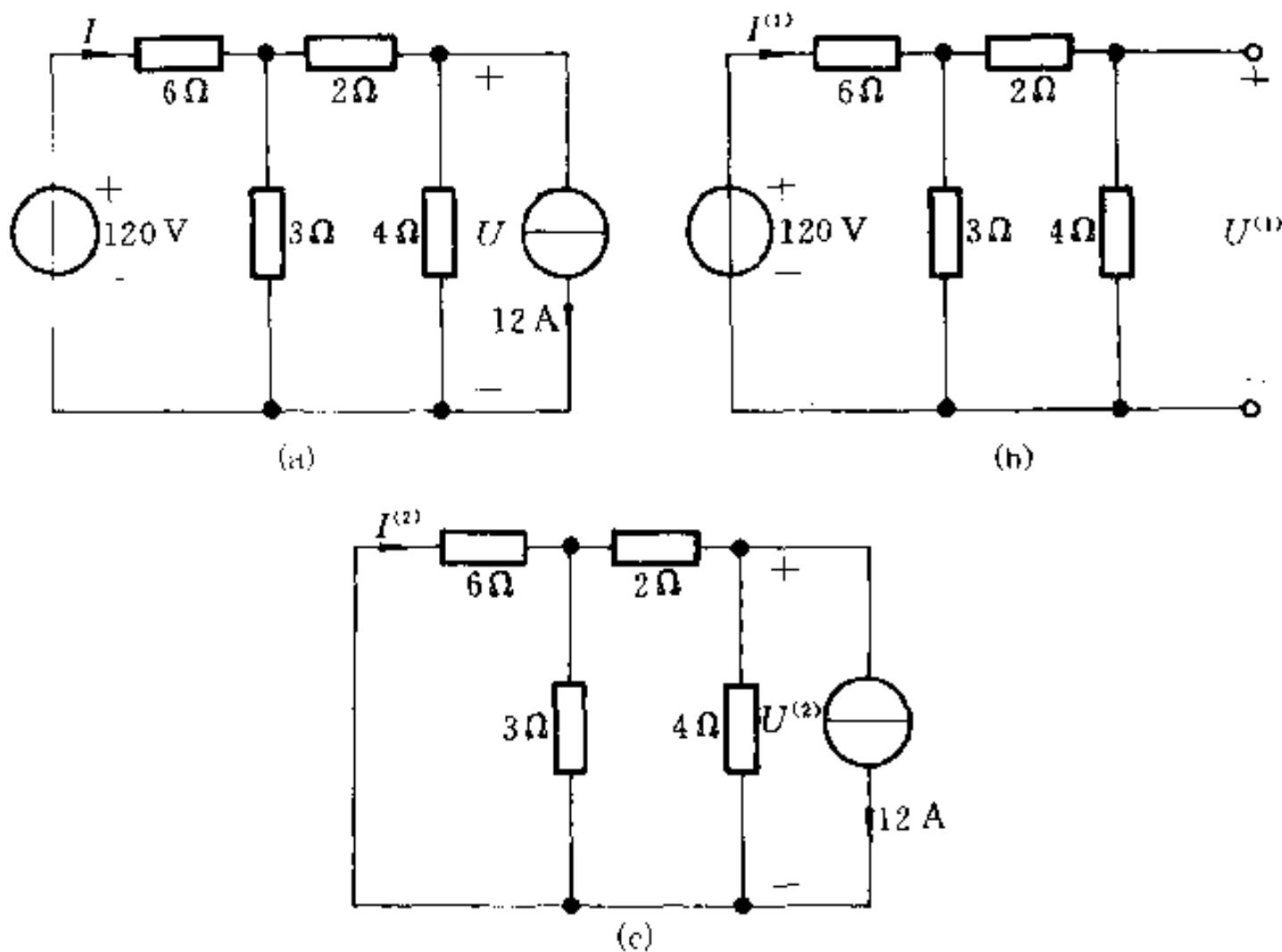


图 4-2 例 4-1 图

解 画出两个电源分别作用的分电路如图(b)和(c)所示。对图(b)有：

$$I^{(1)} = \frac{120}{6 + \frac{3 \times (2+4)}{3+2+4}} \text{ A} = \frac{120}{8} \text{ A} = 15 \text{ A}$$

$$U^{(1)} = 15 \times \frac{3 \times 4}{3+2+4} \text{ V} = 20 \text{ V}$$

对图(c)，用电阻串、并联化简方法，可求得：

$$I^{(2)} = 2 \text{ A}$$

$$U^{(2)} = -24 \text{ V}$$

原电路的 I 和 U 为:

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 17 \text{ A}$$

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} = -4 \text{ V}$$

例 4-2 电路如图 4-3(a)所示,其中 CCVS 的电压受流过 6Ω 电阻的电流控制。求电压 u_3 。

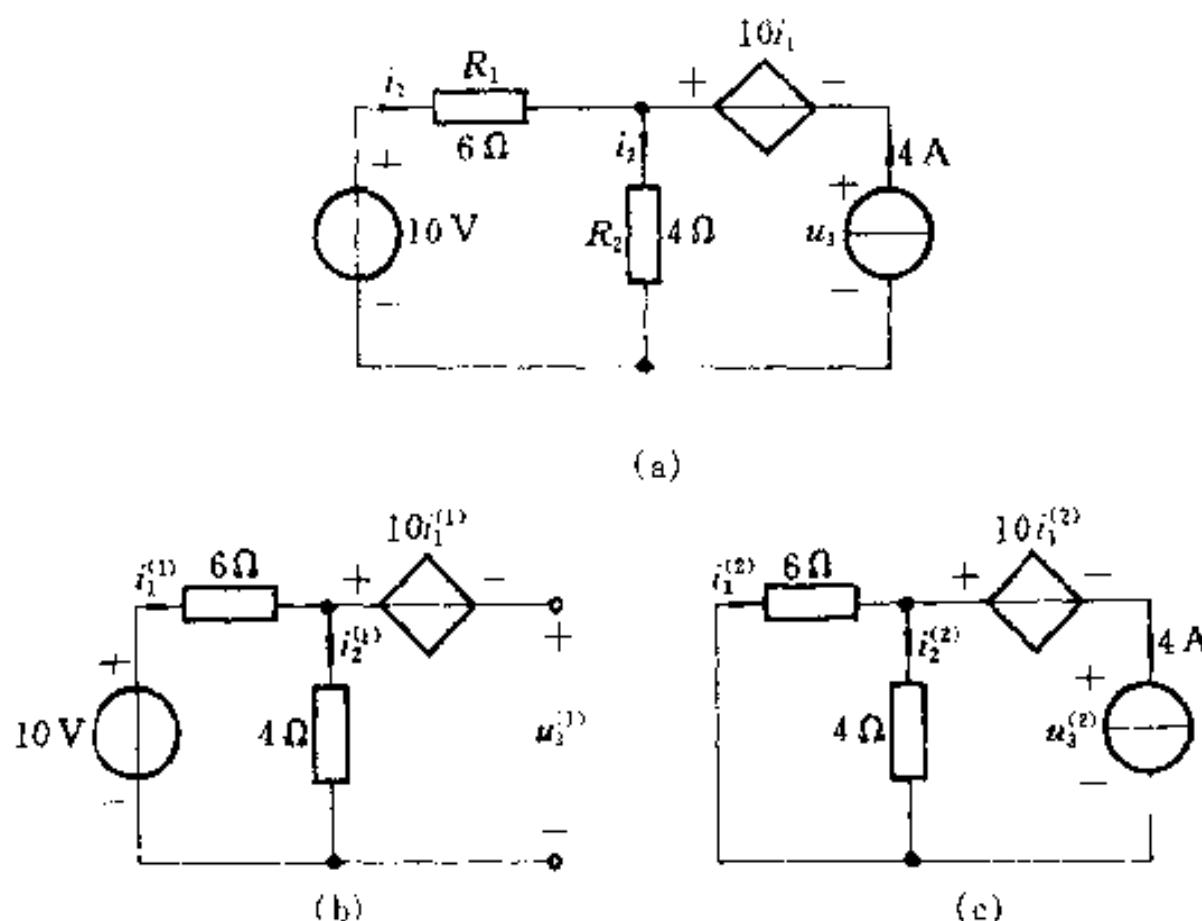


图 4-3 例 4-2 图

解 按叠加定理,作出 10 V 电压源和 4 A 电流源分别作用的分电路,见图(b)和(c)。受控源均保留在分电路中。在图(b)中有:

$$i_1^{(1)} = i_2^{(1)} = \frac{10}{6+4} \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$u_3^{(1)} = -10i_1^{(1)} + 4i_2^{(1)} = (-10 + 4) \text{ V} = -6 \text{ V}$$

在图(c)中有:

$$i_1^{(2)} = -\frac{4}{6+4} \times 4 \text{ A} = -1.6 \text{ A}$$

$$i_2^{(2)} = 4 + i_1^{(2)} = 2.4 \text{ A}$$

$$u_3^{(2)} = -10i_1^{(2)} + 4i_2^{(2)} = 25.6 \text{ V}$$

所以

$$u_3 = u_3^{(1)} + u_3^{(2)} = 19.6 \text{ V}$$

例 4-3 在图 4-3(a)电路中的电阻 R_2 处再串接一个 6 V 电压源,如图 4-4(a),重求电压 u_3 。

解 应用叠加定理,把 10 V 电压源和 4 A 电流源合为一组,所加 6 V 电压源为另一组,见图(b)与(c)。利用上例结果,图(b)的解为

$$u_3^{(1)} = 19.6 \text{ V}$$

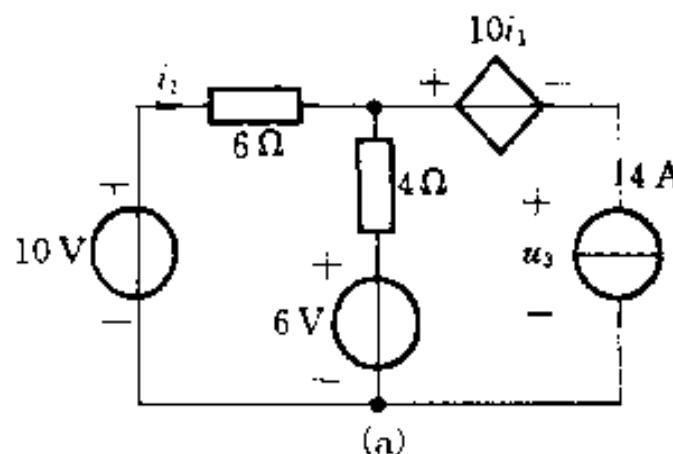
而在图(c)中：

$$i_1^{(2)} = i_2^{(2)} = \frac{-6}{6+4} \text{ A} = -0.6 \text{ A}$$

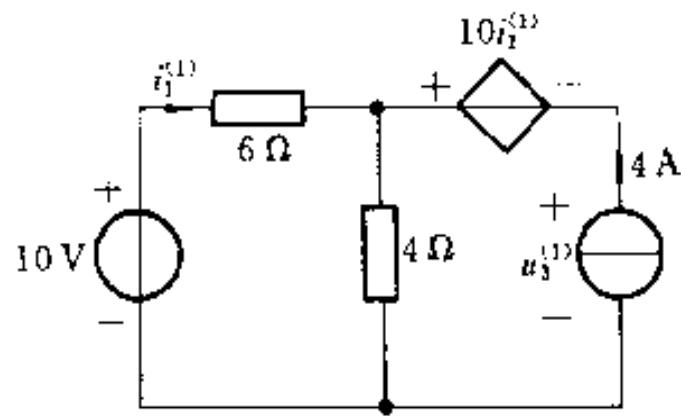
$$u_3^{(2)} = -10i_1^{(2)} + 4i_2^{(2)} + 6 = 9.6 \text{ V}$$

所以

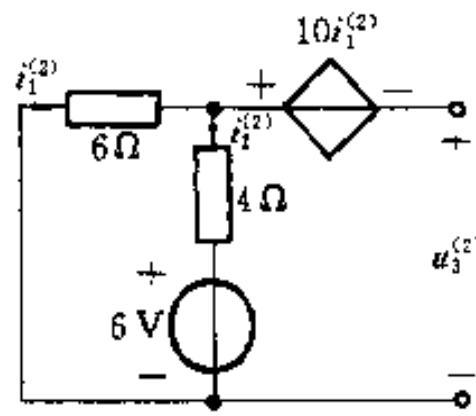
$$u_3 = u_3^{(1)} + u_3^{(2)} = 29.2 \text{ V}$$



(a)



(b)



(c)

图 4-4 例 4-3 图

在线性电路中,当所有激励(电压源和电流源)都同时增大或缩小 K 倍(K 为实常数)时,响应(电压和电流)也将同样增大或缩小 K 倍。这就是线性电路的齐性定理,它不难从叠加定理推得。应注意,这里的激励是指独立电源,并且必须全部激励同时增大或缩小 K 倍,否则将导致错误的结果。显然,当电路中只有一个激励时,响应必与激励成正比。

如果例 4-3 中电压源由 6 V 增至 8 V,则根据齐性定理,8 V 电压源单独作用产生的 $u_3^{(2)'}$ 为

$$u_3^{(2)'} = \frac{9.6 \times 8}{6} \text{ V} = 12.8 \text{ V}$$

故此时应有

$$\begin{aligned} u_3 &= u_3^{(1)} + u_3^{(2)'} \\ &= (19.6 + 12.8) \text{ V} = 32.4 \text{ V} \end{aligned}$$

用齐性定理分析梯形电路特别有效。

例 4-4 求图 4-5 梯形电路中各支路电流。

解 设 $i_s = i_s' = 1 \text{ A}$, 则:

$$u'_{BC} = (R_5 + R_6) i'_5 = 22 \text{ V}$$

$$i'_4 = \frac{u'_{BC}}{R_4} = 1.1 \text{ A}$$

$$i'_3 = i'_4 + i'_5 = 2.1 \text{ A}$$

$$u'_{AD} = R_3 i'_3 + u'_{BC} = 26.2 \text{ V}$$

$$i'_2 = \frac{u'_{AD}}{R_2} = 1.31 \text{ A}$$

$$i'_1 = i'_2 + i'_3 = 3.41 \text{ A}$$

$$u'_s = R_1 i'_1 + u'_{AD} = 33.02 \text{ V}$$

现给定 $u_s = 120 \text{ V}$, 相当于将以上激励 u'_s 增至 $\frac{120}{33.02}$ 倍, 即 $K = \frac{120}{33.02} = 3.63$, 故各支路电流应同时增至 3.63 倍:

$$i_1 = K i'_1 = 12.38 \text{ A}$$

$$i_2 = K i'_2 = 4.76 \text{ A}$$

$$i_3 = K i'_3 = 7.62 \text{ A}$$

$$i_4 = K i'_4 = 3.99 \text{ A}$$

$$i_5 = K i'_5 = 3.63 \text{ A}$$

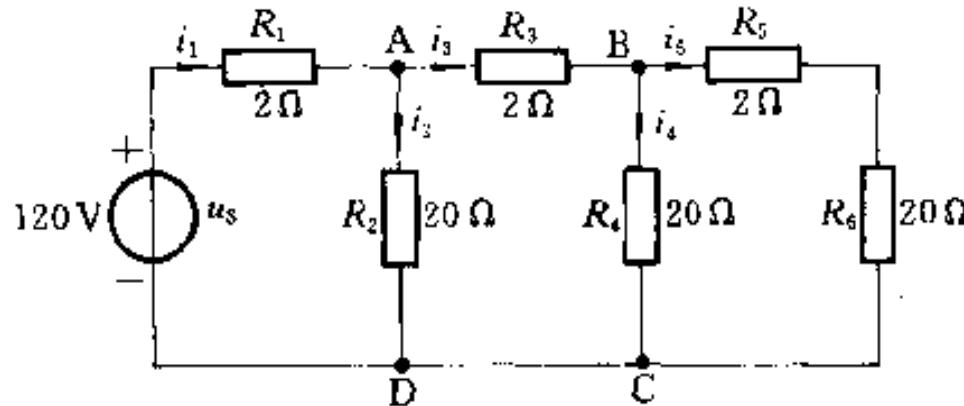


图 4-5 例 4-4 图

本例计算是先从梯形电路最远离电源的一端开始, 倒退至激励处。这种计算方法称为“倒退法”。先对某个电压或电流设一便于计算的值, 如本例设 $i'_s = 1 \text{ A}$, 最后再按齐性定理予以修正。

§ 4-2 替代定理

替代定理具有广泛的应用^①, 其内容可以叙述如下: “给定一个线性电阻电路, 其中第 k 支路的电压 u_k 和电流 i_k 为已知, 那么此支路就可以用一个电压等

^① 替代定理可以推广到非线性电路。

于 u_k 的电压源 u_s , 或一个电流等于 i_k 的电流源 i_s 替代, 替代后电路中全部电压和电流均将保持原值”。以上提到的第 k 支路可以是电阻、电压源和电阻的串联组合或电流源和电阻的并联组合。

图 4-6(a)所示线性电阻电路中, N 表示第 k 支路外的电路其余部分, 第 k 支路设为一个电压源和电阻的串联支路。用电压源 u_s 替代第 k 支路后[见图(b)], 改变后的新电路和原电路的连接相同, 所以两个电路的 KCL 和 KVL 方程也将相同。除第 k 支路外, 两个电路的全部支路的约束关系也相同。新电路中第 k 支路的电压被约束为 $u_s = u_k$, 即等于原电路的第 k 支路的电压, 其支路电流则可以是任意的(电压源的特点)。电路在改变前后, 各支路电压和电流都有唯一解, 而原电路的全部电压和电流又将满足新电路的全部约束关系, 因此也就是后者的唯一解。如果第 k 支路被一个电流源替代[见图(c)], 可作类似的证明。

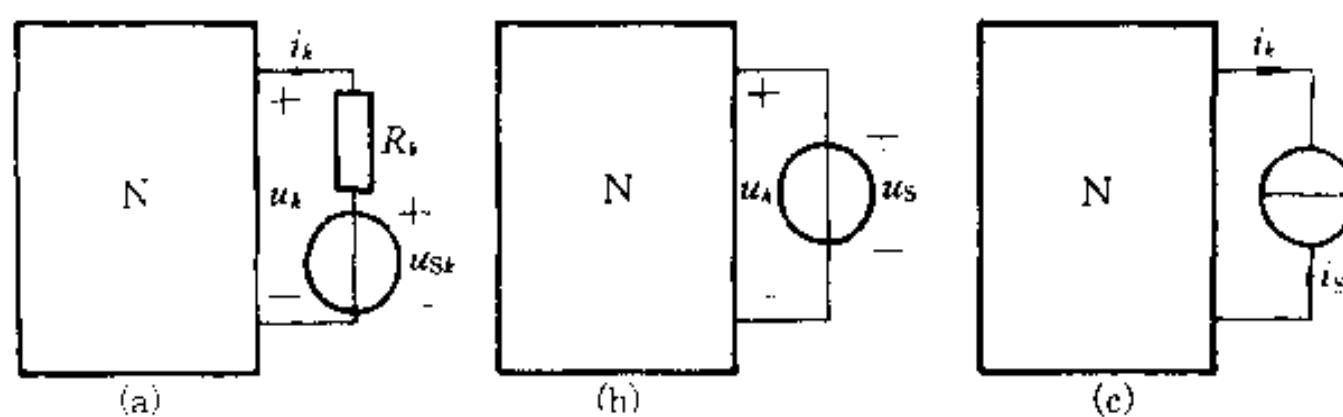


图 4-6 替代定理

如果第 k 支路中的电压或电流为 N 中受控源的控制量, 而替代后该电压或电流不复存在[例如图 4-6(a)中 R_k 两端的电压为控制量时], 则该支路不能被替代。

图 4-7 示出替代定理应用的实例。图(a)中, 可求得 $u_3 = 8 \text{ V}$, $i_3 = 1 \text{ A}$ 。现将支路 3 分别以 $u_s = u_3 = 8 \text{ V}$ 的电压源或 $i_s = i_3 = 1 \text{ A}$ 的电流源替代, 如图

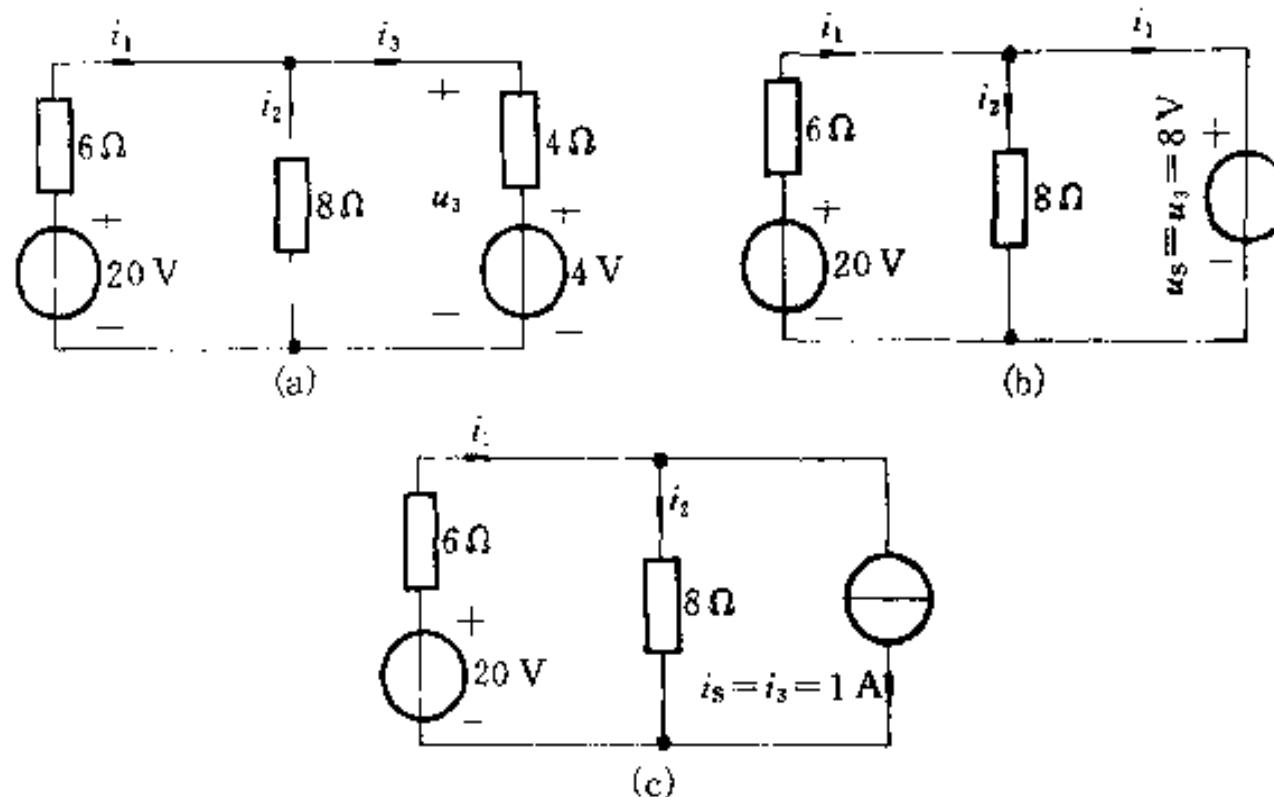


图 4-7 替代定理示例

(b)或(c)所示,不难求得,在图(a)、(b)、(c)中,其他部分的电压和电流均保持不变,即 $i_1 = 2 \text{ A}$, $i_2 = 1 \text{ A}$ 。

§ 4-3 戴维宁定理和诺顿定理^①

根据齐性定理可知,对于一个不含独立电源、仅含电阻和受控源的一端口,其端口输入电压和输入电流的比值为一个常量,这个比值就定义为该一端口的输入电阻(见 § 2-2)或等效电阻。所以这类一端口可以用一个电阻支路等效替换。对于一个既含独立电源又含电阻和受控源的一端口,它的等效电路是什么?本节介绍的戴维宁定理和诺顿定理将回答这个问题。为了叙述方便,将上述这类一端口简称为“含源一端口”,这里“含源”是指含独立电源。

图 4-8(a)所示 N_s 为一个含源一端口,有外电路与它连接。如果把外电路断开如图(b),此时由于 N_s 内部含有独立电源,一般在端口 $1 - 1'$ 处将出现电压,这个电压称为 N_s 的开路电压,用 u_{oc} 表示。设把 N_s 中的全部独立电源置零,即把 N_s 中的独立电压源用短路替代,独立电流源用开路替代,并用 N_0 表示得到的一端口。 N_0 可以用一个等效电阻 R_{eq} 表示,此等效电阻等于 N_0 在端口 $1 - 1'$ 的输入电阻[见图 4-8(c)]。

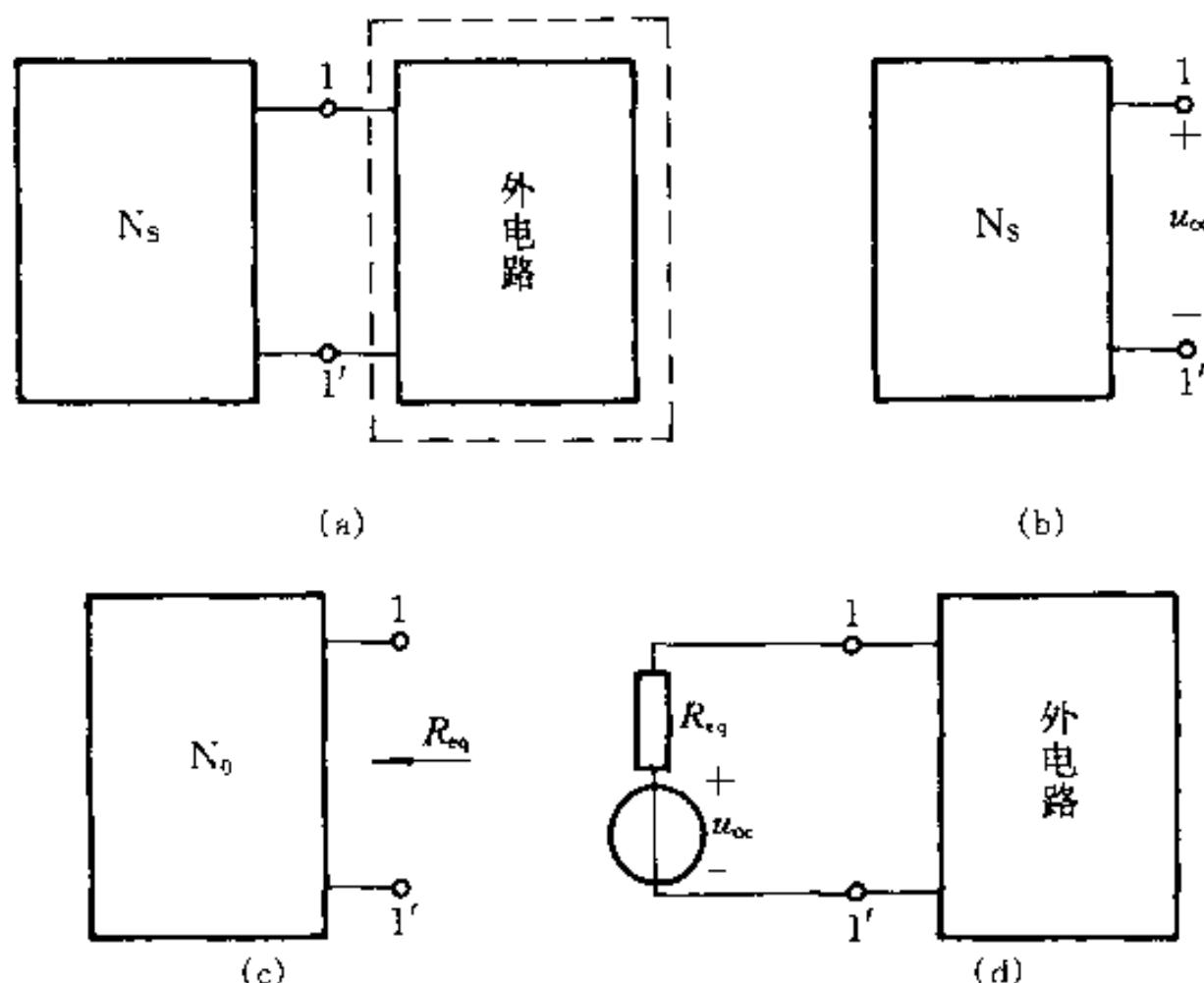


图 4-8 戴维宁定理

^① Thévenin's Theorem, Norton's Theorem.

戴维宁定理指出：“一个含独立电源、线性电阻和受控源^①的一端口，对外电路来说，可以用一个电压源和电阻的串联组合等效置换，此电压源的电压等于一端口的开路电压，电阻等于一端口的全部独立电源置零后的输入电阻”[见图4-8(d)]。

上述电压源和电阻的串联组合称为戴维宁等效电路，等效电路中的电阻有时称为戴维宁等效电阻。当一端口用戴维宁等效电路置换后，端口以外的电路（以后称为外电路）中的电压、电流均保持不变。这种等效变换称为对外等效。

戴维宁定理可以证明如下：图4-9(a)中 N_s 为含源一端口，设外电路为电阻 R_o （主要为了简化讨论），根据替代定理，用 $i_s = i$ 的电流源替代电阻 R_o ，替代后的电路如图4-9(b)。应用叠加定理，所得分电路如图(c)和(d)所示。在图(c)中，当电流源不作用而 N_s 中全部电源作用时， $u^{(1)} = u_{oc}$ ；在图(d)中，当*i*作用而 N_s 中全部电源置零时， N_s 成为 N_0 ， N_0 为 N_s 中全部独立电源置零后的一端口（受控源仍保留在 N_0 中）。此时有 $u^{(2)} = -R_{eq}i$ ，其中 R_{eq} 为从端口看入的 N_0 的等效电阻。按叠加定理，端口1-1'间的电压u应为

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = u_{oc} - R_{eq}i$$

故一端口的等效电路如图4-9(e)所示，戴维宁定理得证。

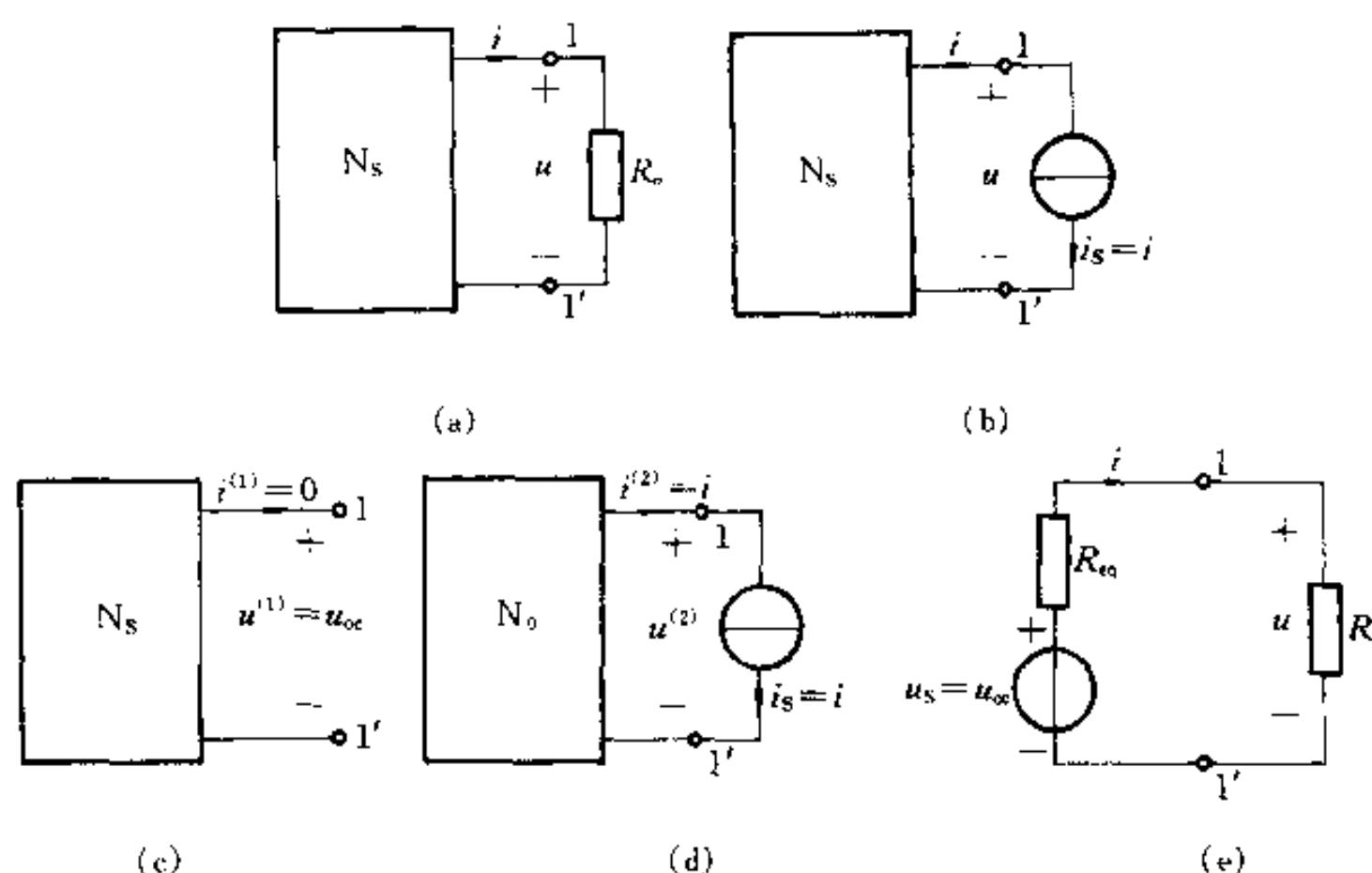


图 4-9 戴维宁定理的证明过程

^① 这些受控源只能受端口内部某些电压、电流的控制；同时，端口内的电压、电流也不能是端口以外电路中受控源的控制量。

如果把图 4-9 中的外部电阻 R_o 改为一个含源一端口,以上证明仍能成立^①。

应用戴维宁定理时,需要求出含源一端口的开路电压和戴维宁等效电阻,后者可以用求输入电阻的方法得到。

例 4-5 图 4-10 所示电路中,已知 $u_{S1} = 40 \text{ V}$, $u_{S2} = 40 \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $R_5 = 8 \Omega$, $R_6 = 2 \Omega$, 求通过 R_3 的电流 i_3 。

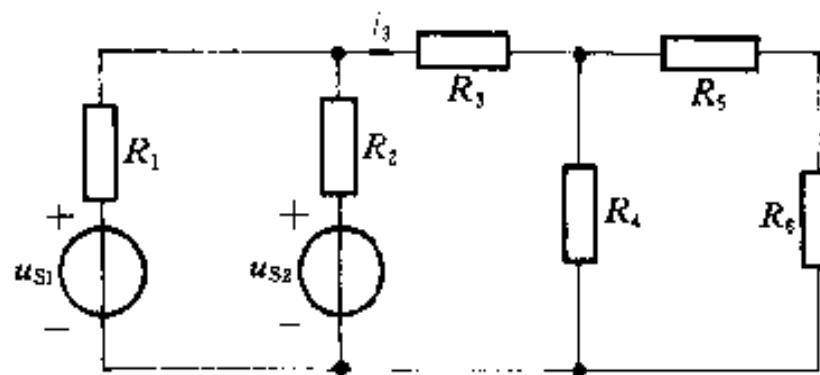


图 4-10 例 4-5 图

解 求解时分为两个步骤进行:

(1) 首先应用戴维宁定理把左方(u_{S1}, R_1)支路和(u_{S2}, R_2)支路组成的端口[图 4-11(a)]用戴维宁等效电路置换,如图 4-11(b)所示。其中:

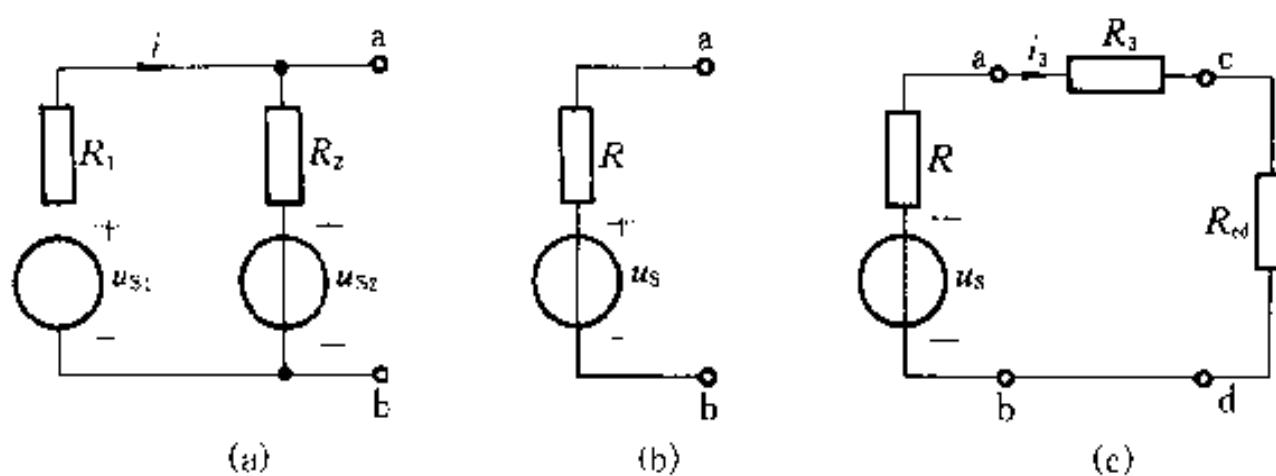


图 4-11 例 4-5 图

$$R \approx R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.33 \Omega$$

$$u_S = u_\infty = R_2 i + u_{S2} = \frac{u_{S1} - u_{S2}}{R_1 + R_2} R_2 + u_{S2} = 40 \text{ V}$$

(2) 其次,求电阻 R_4 、 R_5 和 R_6 组成的右方一端口的等效电阻 R_{eq}

$$R_{eq} = \frac{R_4 (R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6} = 5 \Omega$$

^① 如果外电路是非线性的,但只要端口内是线性电路,戴维宁定理仍适用。

(3) 图 4-10 可以简化为图 4-11(c) 所示电路。通过电阻 R_3 的电流为

$$i_3 = \frac{u_s}{R + R_3 + R_{\text{ad}}} = 3.53 \text{ A}$$

按图 4-9(e) 可见含源一端口 N_s 在端口 $1-1'$ 的外部伏安特性可写为(注意电流 i 的参考方向)

$$u = u_\infty - R_{\text{eq}} i$$

如果在 N_s 的 $1-1'$ 处加一个电压源 u 如图 4-12(a), 并求出在端口 $1-1'$ 的伏安特性如上式, 则从该式中可同时求得 u_∞ 和 R_{eq} 。令上式中 $i=0$, 即令端口 $1-1'$ 开路, 可求得 u_∞ ; 令上式中 $u=0$, 即把端口 $1-1'$ 短路[见图 4-12(b)], 可以求得短路电流 i_∞ , 而 $R_{\text{eq}} = \frac{u_\infty}{i_\infty}$, 所以戴维宁等效电阻等于含源一端口的开路电压与短路电流的比值。

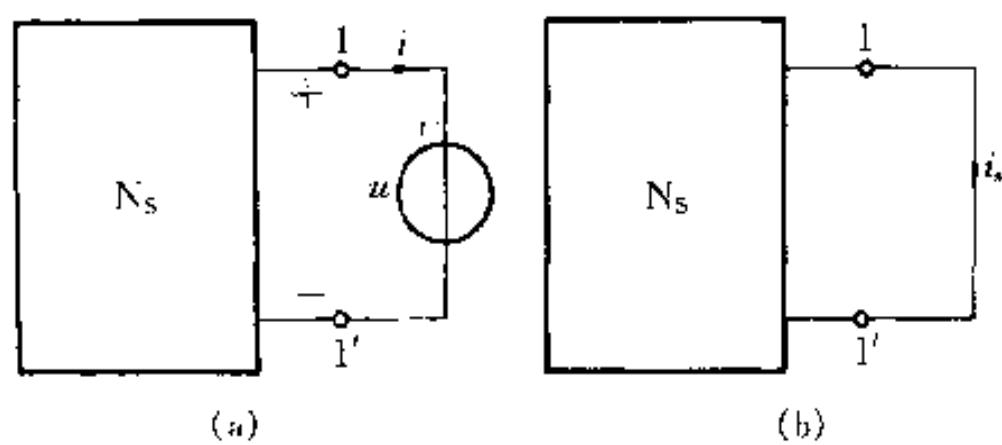


图 4-12 求解 R_{eq} 和 u_∞

例 4-6 求图 4-13(a) 所示含源一端口的戴维宁等效电路。已知 $u_{s1} = 25 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $i_{s2} = 3 \text{ A}$, $R_3 = 4 \Omega$ 。

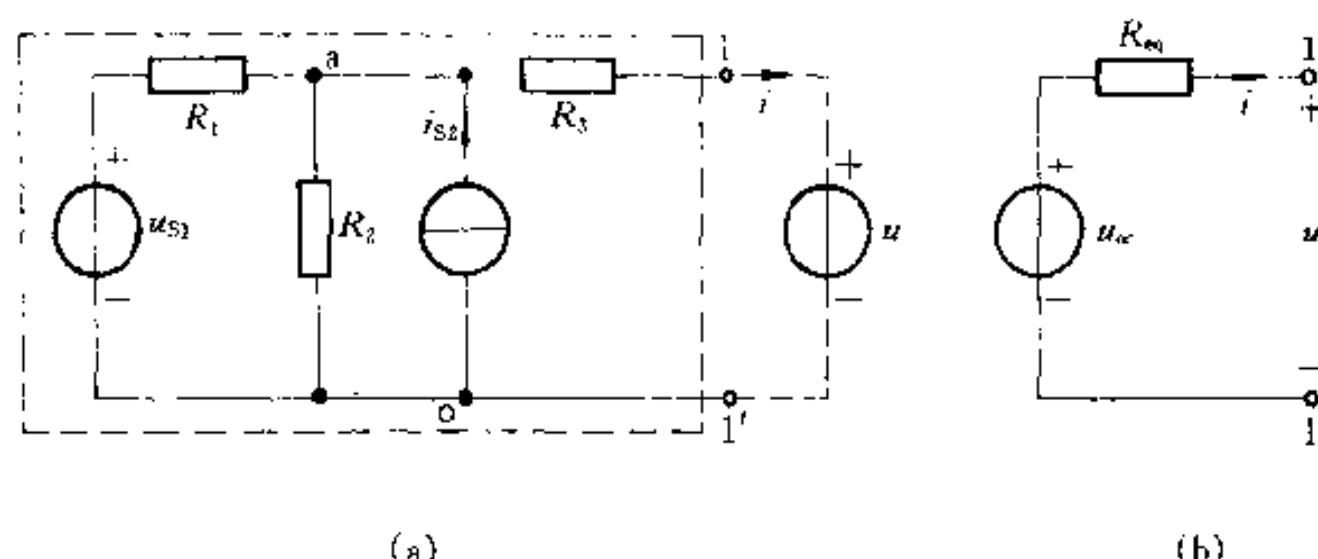


图 4-13 例 4-6 图

解 在端口 $1-1'$ 外加一个电压源 u 。求出在 $1-1'$ 的 $u-i$ 关系。用结点电压法, 并令结点电压为 u_∞ (见图), 有

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) u_{\infty} = \frac{u_{s1}}{R_1} + \frac{u}{R_3} + i_{sc}$$

代入数据后,解得

$$u_{\infty} = \frac{u}{2} + 16$$

而电流 i 为 $i = \frac{u_{\infty} - u}{R_3}$, 消去 u_{∞} 后可求得在端口 $1-1'$ 处的 $u-i$ 关系为

$$u = 32 - 8i$$

令 $i = 0$, 得 $u_{\infty} = 32$ V; 令 $u = 0$, 得 $i_{sc} = 4$ A, 即得 $R_{eq} = \frac{u_{\infty}}{i_{sc}} = 8 \Omega$ 。等效电路

如图(b)所示。

显然,为了求得端口 $1-1'$ 处的 $u-i$ 关系,也可以在 $1-1'$ 处加一个电流源 i , 而 i 的参考方向宜由端子 $1'$ 流入给定的一端口。

诺顿定理指出:“一个含独立电源、线性电阻和受控源的一端口,对外电路来说,可以用一个电流源和电导的并联组合等效变换,电流源的电流等于该一端口的短路电流,电导等于把该一端口全部独立电源置零后的输入电导”。此电流源和并联电导组合的电路称为诺顿等效电路。

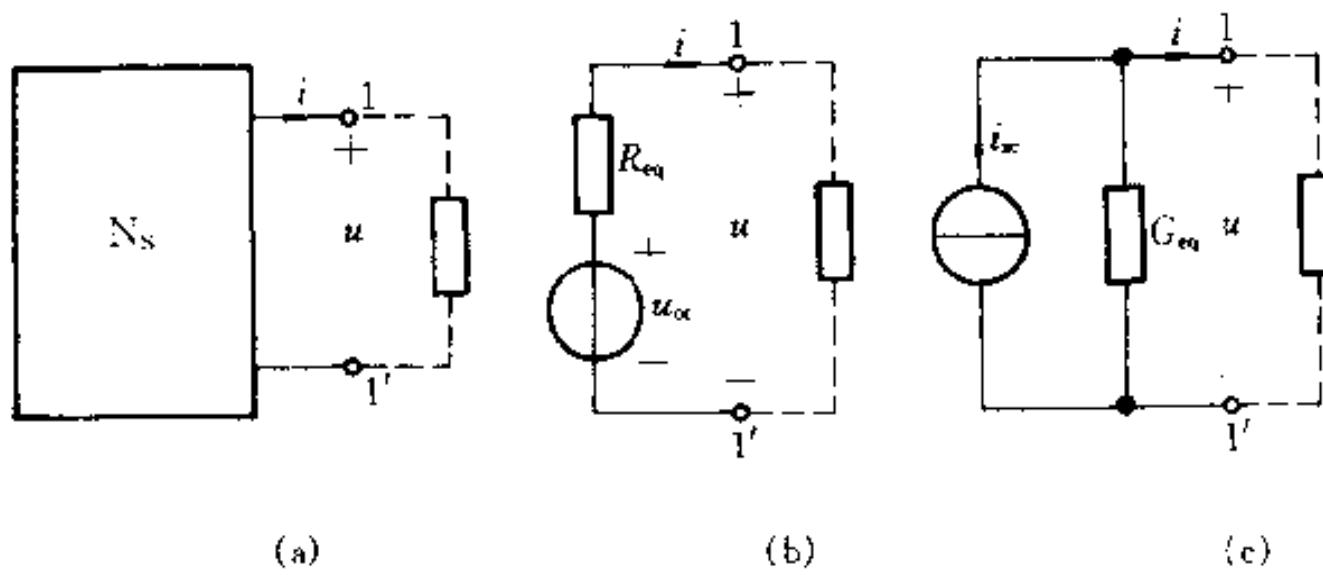


图 4-14 诺顿定理

应用电压源和电阻的串联组合与电流源和电导的并联组合之间的等效变换,可推得诺顿定理。见图 4-14(a)、(b)、(c)。诺顿等效电路和戴维宁等效电路这两种等效电路共有 u_{∞} 、 R_{eq} 、 i_{sc} 3 个参数,其关系为 $u_{\infty} = R_{eq} i_{sc}$ 。故求出其中任意 2 个就可求得另一量。戴维宁等效电路和诺顿等效电路统称为一端口的等效发电机。相应的两个定理也可统称为等效发电机定理。

例 4-7 求图 4-15(a)所示一端口电路的等效发电机。

解 由图 4-15(a)可知,求 i_{sc} 和 R_{eq} 比较容易。当 $1-1'$ 短路时,有

$$i_{sc} = \left(3 - \frac{60}{20} + \frac{40}{40} - \frac{40}{20} \right) A = -1 A$$

把一端口内部独立电源置零后,可以求得 R_{eq} , 它等于 3 个电阻的并联, 即有

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{20}} \Omega = 8 \Omega$$

诺顿等效电路将如图 4-15(b)。

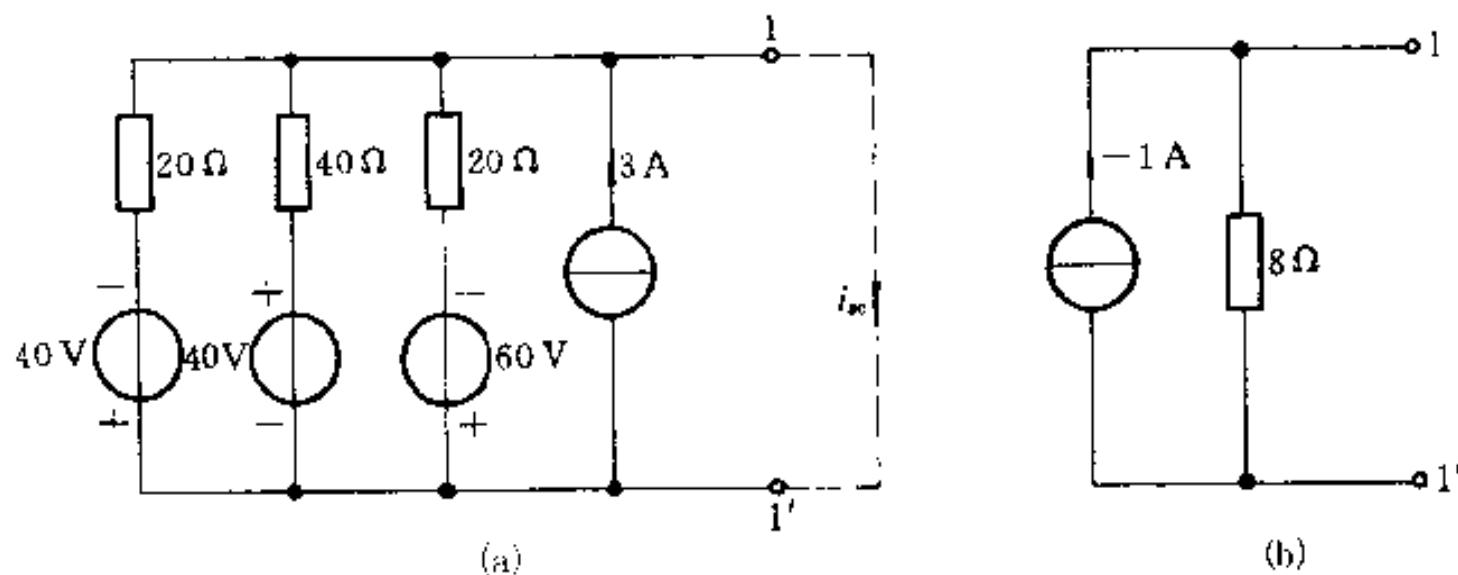


图 4-15 例 4-7 图

例 4-8 求图 4-16(a)所示含源一端口的戴维宁等效电路和诺顿等效电路。一端口内部有电流控制电流源, $i_c = 0.75 i_1$ 。

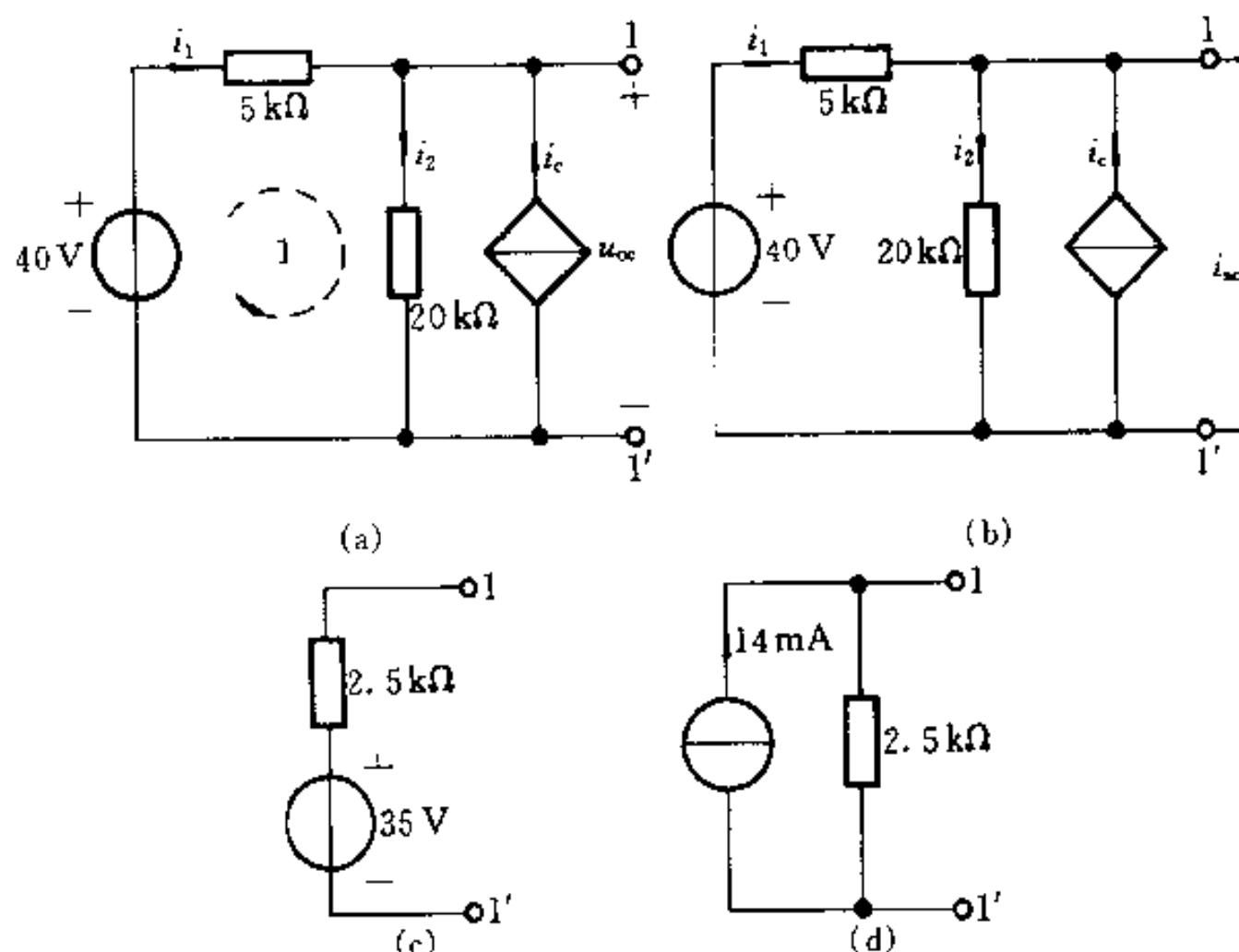


图 4-16 例 4-8 图

解 先求开路电压 u_{oc} 。当端口 $1-1'$ 开路时, 有

$$i_2 = i_1 + i_c = 1.75 i_1$$

对网孔 1 列 KVL 方程, 得

$$5 \times 10^3 \times i_1 + 20 \times 10^3 i_2 = 40$$

代入 $i_2 = 1.75 i_1$, 可以求得 $i_1 = 10 \text{ mA}$, 而开路电压

$$u_{oc} = 20 \times 10^3 \times i_2 = 35 \text{ V}$$

当 1-1' 短路时, 可求得短路电流 i_s [见图(b)]。此时

$$i_1 = \frac{40}{5 \times 10^3} \text{ A} = 8 \text{ mA}$$

$$i_s = i_1 + i_c = 1.75 i_1 = 14 \text{ mA}$$

故得

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_s} = 2.5 \text{ k}\Omega$$

对应的戴维宁等效电路和诺顿等效电路分别如图(c)和(d)所示。

当含源一端口内部含受控源时, 在它的内部独立电源置零后, 输入电阻或戴维宁等效电阻有可能为零或为无限大。当 $R_{eq} = 0$ 时, 等效电路成为一个电压源, 这种情况下, 对应的诺顿等效电路就不存在, 因为 $G_{eq} = \infty$ 。同理, 如果 $R_{eq} = \infty$ 即 $G_{eq} = 0$, 诺顿等效电路成为一个电流源, 这种情况下, 对应的戴维宁等效电路就不存在。通常情况下, 两种等效电路是同时存在的。 R_{eq} 也有可能是一个线性负电阻。

戴维宁定理和诺顿定理在电路分析中应用广泛。有时对线性电阻电路中部分电路的求解没有要求, 而这部分电路又构成一个含源一端口, 在这种情况下就可以应用这两个定理把这部分电路仅用 2 个电路元件的简单组合置换, 不影响电路其余部分的求解。特别是当仅对电路的某一元件感兴趣, 例如分析电路中某一电阻获得的最大功率, 或者分析测量仪表引起的测量误差等问题时, 这两个定理尤为适用。

例 4-9 图 4-17(a) 的含源一端口外接可调电阻 R , 当 R 等于多少时, 它可以从电路中获得最大功率? 求此最大功率。

解 一端口的戴维宁等效电路可用前述方法求得:

$$u_{oc} = 4 \text{ V}$$

$$R_{eq} = 20 \text{ k}\Omega$$

电路简化如图(b)。

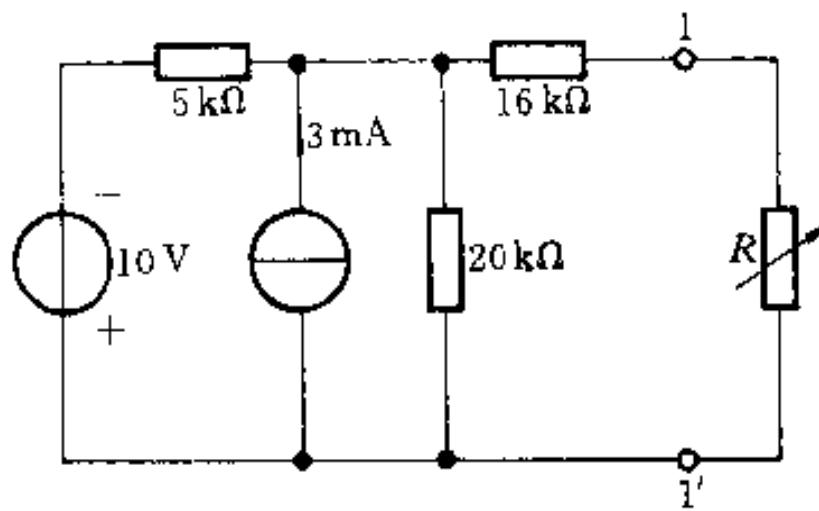
电阻 R 的改变不会影响原一端口的戴维宁等效电路, 由图(b)可求得 R 吸收的功率为

$$P = i^2 R = \frac{u_{oc}^2 R}{(R_{eq} + R)^2}$$

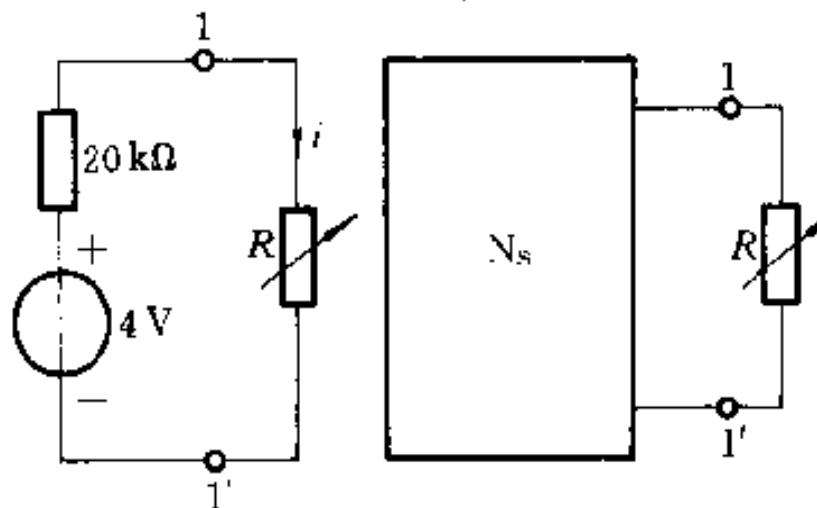
R 变化时,最大功率发生在 $\frac{dP}{dR} = 0$ 的条件下。不难得出,这时有 $R = R_{eq}$ 。本题中 $R_{eq} = 20 \text{ k}\Omega$, 故 $R = 20 \text{ k}\Omega$ 时才能获得最大功率, 其值为

$$P_{max} = \frac{U_{eq}^2}{4R_{eq}} = 0.2 \text{ mW}$$

这个例子中最大功率问题的结论可以推广到更一般的情况。图 4-17(c) 示出一个含源一端口, 外接电阻 R 的大小可以变动。当满足 $R = R_{eq}$ (R_{eq} 为一端口的输入电阻) 的条件时, 电阻 R 将获得最大功率。此时称电阻与一端口的输入电阻匹配。



(a)



(b)

(c)

图 4-17 例 4-9 图

例 4-10 对图 4-18 所示电路, 如果用具有内电阻 R_v 的直流电压表分别在端子 a、b 和 b、c 处测量电压, 试分析电压表内电阻引起的测量误差。

解 当用电压表测量端子 b、c 的电压时, 电压的真值是图 4-18(a) 中该处的开路电压。为了求得由于电压表内电阻 R_v 引起的误差, 需要求得实际的测量值。把图(a)中 b、c 左边的电路用戴维宁等效电路置换, 设 U_∞ 为 b、c 端子的开路电压, R_{eq} 为从 b、c 端看的输入电阻 [见图(b)]。令 U 为实际测量所得的电压, 它等于电阻 R_v 两端的电压, 即

$$U = \frac{R_v}{R_v + R_{eq}} U_\infty$$

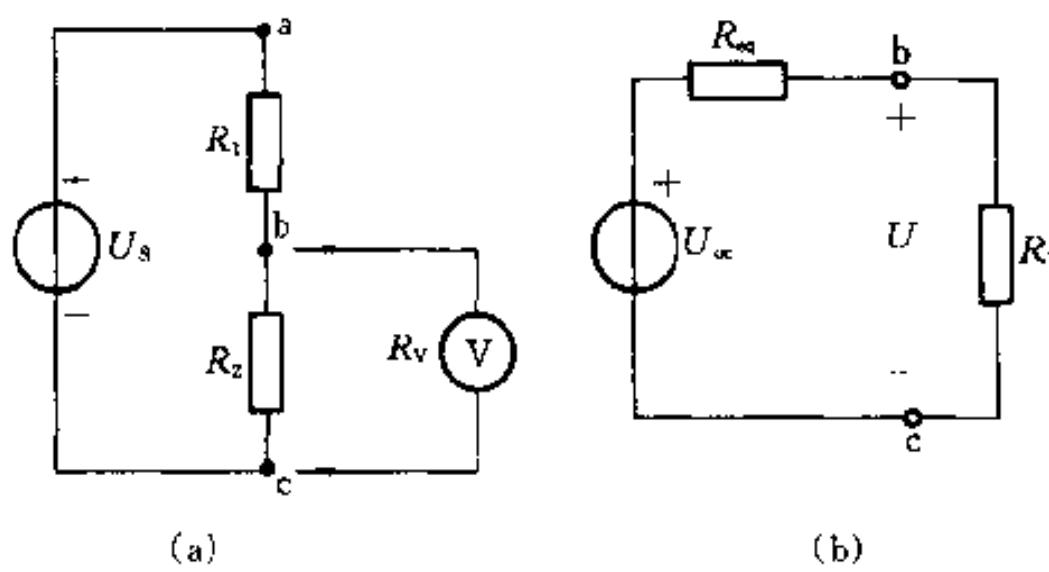


图 4-18 例 4-10 图

相对测量误差

$$\begin{aligned}\delta (\%) &= \frac{U - U_{\infty}}{U_{\infty}} = \frac{R_v}{R_v + R_{eq}} \approx 1 \\ &= - \frac{R_{eq}}{R_v + R_{eq}} \times 100 \%\end{aligned}$$

例如,当 $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$, $R_v = 500 \text{ k}\Omega$ 时, $\delta = -2.34\%$ 。

不难看出,如果在 a、b 端测量电压,则由于 R_{eq} 相同,故相对测量误差不变。

§ 4-4 特勒根定理^①

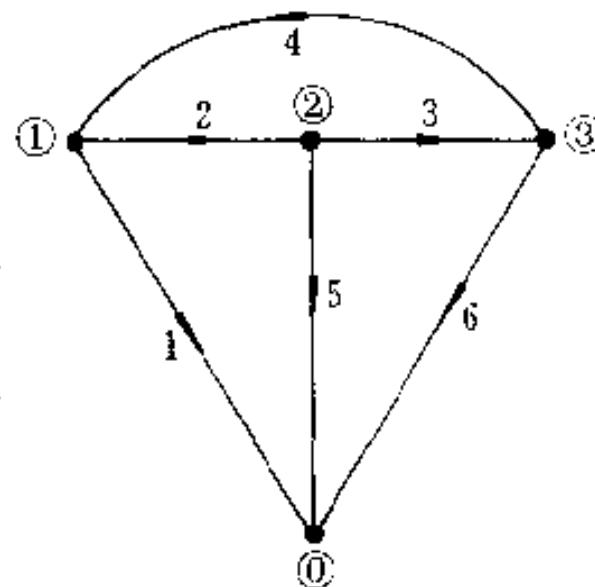
特勒根定理是电路理论中对集总电路普遍适用的基本定理;就这个意义上,它与基尔霍夫定律等价。

特勒根定理有两种形式。

特勒根定理 1:“对于一个具有 n 个结点和 b 条支路的电路,假设各支路电流和支路电压取关联参考方向,并令 (i_1, i_2, \dots, i_b) 、 (u_1, u_2, \dots, u_b) 分别为 b 条支路的电流和电压,则对任何时间 t ,有

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \quad (4-5)$$

此定理可通过图 4-19 所示电路的图证明。图 4-19 特勒根定理的证明
如下:令 u_{n1}, u_{n2}, u_{n3} 分别表示结点①、②、③的结点电压,按 KVL 可得出各支路电压结点电压之间的关系为



① Tellegen's Theorem

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_{n1} \\
 u_2 &= u_{n1} - u_{n2} \\
 u_3 &= u_{n2} - u_{n3} \\
 u_4 &= -u_{n1} + u_{n3} \\
 u_5 &= u_{n2} \\
 u_6 &= u_{n3}
 \end{aligned} \tag{4-6}$$

对结点①、②、③应用 KCL, 得

$$\left. \begin{aligned}
 i_1 + i_2 - i_4 &= 0 \\
 -i_2 + i_3 + i_5 &= 0 \\
 -i_3 + i_4 + i_6 &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4-7}$$

而

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 + u_6 i_6$$

把支路电压用结点电压表示后, 代入此式并经整理, 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^6 u_k i_k &= u_{n1} i_1 + (u_{n1} - u_{n2}) i_2 + (u_{n2} - u_{n3}) i_3 + (-u_{n1} \\
 &\quad + u_{n3}) i_4 + u_{n2} i_5 + u_{n3} i_6
 \end{aligned}$$

或

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = u_{n1} (i_1 + i_2 - i_4) + u_{n2} (-i_2 + i_3 + i_5) + u_{n3} (-i_3 + i_4 + i_6)$$

式中括号内的电流分别为结点①、②、③处电流的代数和, 故引用式(4-7), 即有

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = 0$$

上述证明可推广至任何具有 n 个结点和 b 条支路的电路, 即有

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \tag{4-8}$$

注意在证明过程中, 只根据电路的拓扑性质应用了基尔霍夫定律, 并不涉及支路的内容, 因此特勒根定理对任何具有线性、非线性、时不变、时变元件的集总电路都适用。这个定理实质上是功率守恒的数学表达式, 它表明任何一个电路的全部支路吸收的功率之和恒等于零。

特勒根定理 2: “如果有两个具有 n 个结点和 b 条支路的电路, 它们具有相同的图, 但由内容不同的支路构成。假设各支路电流和电压都取关联参考方向, 并分别用 (i_1, i_2, \dots, i_b) 、 (u_1, u_2, \dots, u_b) 和 $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_b)$ 、 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_b)$ 表示两电路中 b 条支路的电流和电压, 则在任何时间 t , 有

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0 \quad (4-9)$$

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0 \quad (4-10)$$

证明如下: 设两个电路的图如图 4-19。对电路 1, 用 KVL 可写出式(4-6); 对电路 2 应用 KCL, 有

$$\left. \begin{aligned} & \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{i}_4 = 0 \\ & - \hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_5 = 0 \\ & - \hat{i}_3 + \hat{i}_4 + \hat{i}_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

利用式(4-6)可得出

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k &= u_{a1} (\hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{i}_4) + u_{a2} (-\hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_5) \\ &\quad + u_{a3} (-\hat{i}_3 + \hat{i}_4 + \hat{i}_6) \end{aligned}$$

再引用式(4-11), 即可得出

$$\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k = 0$$

此证明可推广到任何具有 n 个结点和 b 条支路的两个电路, 只要它们具有相同的图。

定理的第二部分即式(4-10)可用类似方法证明。

值得注意的是, 定理 2 不能用功率守恒解释, 它仅是对两个具有相同拓扑的电路中, 一个电路的支路电压和另一个电路的支路电流, 或者可以是同一电路在不同时刻的相应支路电压和支路电流必须遵循的数学关系。由于它仍具有功率之和的形式, 所以有时又称为“拟功率定理”。应当指出, 定理 2 同样对支路内容没有任何限制, 这也是此定理普遍适用的特点。

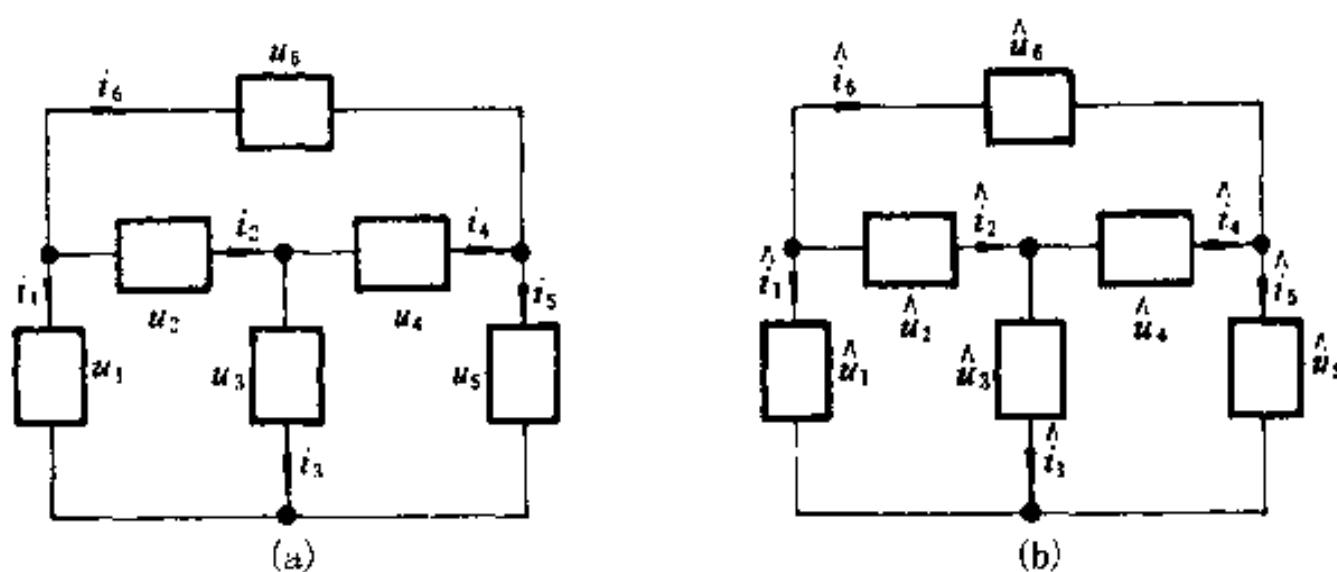


图 4-20 特勒根定理二

例如,对图 4-20 所示两个不同的电路,其支路内容可以完全不同。表 4-1 列出了两个电路在某一瞬间的支路电流和电压值,这些电流和电压分别满足 KCL 和 KVL。不难验证

表 4-1

支路 u, i	1	2	3	4	5	6
u_k/V	5	3	2	4	-2	7
i_k/A	-3	1	2	1	1	2
\hat{u}_k/V	7	2	5	6	1	8
\hat{i}_k/A	2	2	1	1	-3	4

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = -15 + 3 + 4 - 4 - 2 + 14 = 0$$

$$\sum_{k=1}^6 \hat{u}_k \hat{i}_k = -21 + 2 + 10 - 6 - 1 + 16 = 0$$

$$\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k = 10 + 6 + 2 + 4 + 6 - 28 = 0$$

$$\sum_{k=1}^6 \hat{u}_k i_k = 14 + 4 + 5 + 6 + 3 - 32 = 0$$

§ 4-5 互易定理

图 4-21(a)所示电路 N 在方框内部仅含线性电阻,不含任何独立电源和受控源。接在端子 1-1' 的支路 1 为电压源 u_s ,接在端子 2-2' 的支路 2 为短路,其中的电流为 i_2 ,它是电路中唯一的激励(即 u_s)产生的响应。如果把激励和响应互换位置,如图 4-20(b)中的 \hat{N} ,此时接于 2-2' 的支路 2 为电压源 \hat{u}_s ,而响应则是接于 1-1' 支路 1 中的短路电流 \hat{i}_1 。假设把图(a)和(b)中的电压源置零,则除 N 和 \hat{N} 的内部完全相同外,接于 1-1' 和 2-2' 的两个支路均为短路;就是说,在激励和响应互换位置的前后,如果把电压源置零,则电路保持不变。

对于图 4-21(a)和(b)应用特勒根定理,有:

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b \hat{u}_k \hat{i}_k = 0$$

$$\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b u_k i_k = 0$$

式中取和号遍及方框内所有支路,并规定所有支路中电流和电压都取关联参考

方向。

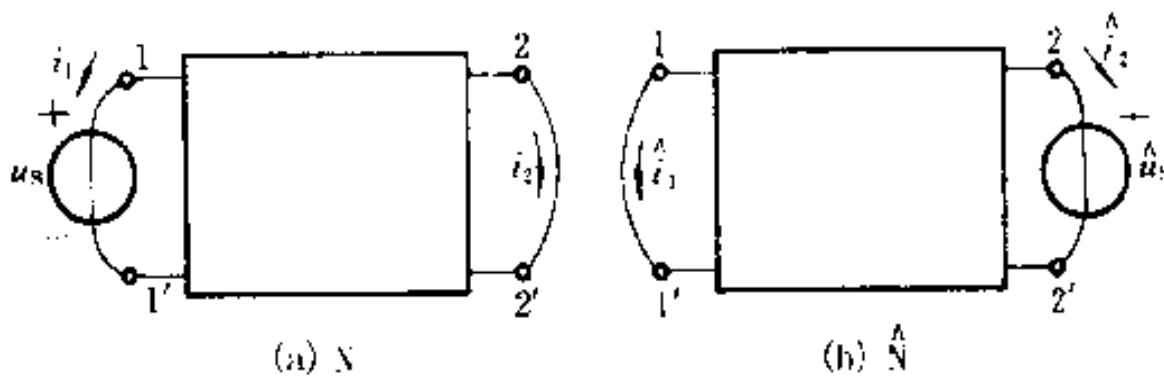


图 4-21 互易定理第一形式

由于方框内部仅为线性电阻,故 $u_k = R_k i_k$, $\hat{u}_k = \hat{R}_k \hat{i}_k$, $k = 3, \dots, b$ 。将它们分别代入上式后有:

$$\begin{aligned} u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b R_k i_k \hat{i}_k &= 0 \\ u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b \hat{R}_k \hat{i}_k i_k &= 0 \end{aligned}$$

故有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 \hat{i}_1 + \hat{u}_2 \hat{i}_2 \quad (4-12)$$

对图 4-21(a), $u_1 = u_s$, $u_2 = 0$; 对图(b), $u_1 = 0$, $u_2 = \hat{u}_s$, 代入上式得

$$u_s \hat{i}_1 = \hat{u}_s \hat{i}_2$$

即

$$\frac{i_2}{u_s} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_s}$$

如果 $u_s = \hat{u}_s$, 则 $i_2 = \hat{i}_1$ 。这就是互易定理的第一种形式, 即对一个仅含线性电阻的电路, 在单一电压源激励而响应为电流时, 当激励和响应互换位置时, 将不改变同一激励产生的响应。

在图 4-22(a)中, 接在 $1-1'$ 的支路 1 为电流源 i_s , 接在 $2-2'$ 的支路 2 为开

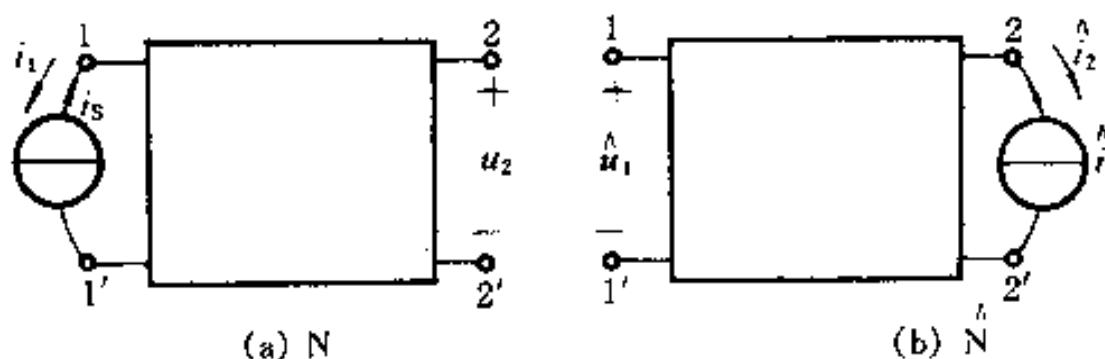


图 4-22 互易定理的第二种形式

路, 它的电压为 u_2 。如把激励和响应互换位置, 如图 4-22(b), 此时接于 $2-2'$

的支路 2 为电流源 $\overset{\wedge}{i_s}$, 接于 $1-1'$ 的支路 1 为开路, 其电压为 $\overset{\wedge}{u_1}$ 。假设把电流源置零, 则图(a)和图(b)的两个电路完全相同。

对图 4-22(a)和(b)应用特勒根定理, 不难得出与式(4-12)相同的下列关系式

$$\overset{\wedge}{u_1} \overset{\wedge}{i_1} + \overset{\wedge}{u_2} \overset{\wedge}{i_2} = \overset{\wedge}{u_1} \overset{\wedge}{i_1} + \overset{\wedge}{u_2} \overset{\wedge}{i_2}$$

代入 $\overset{\wedge}{i_1} = -\overset{\wedge}{i_s}$, $\overset{\wedge}{i_2} = 0$, $\overset{\wedge}{i_1} = 0$, $\overset{\wedge}{i_2} = -\overset{\wedge}{i_s}$, 有

$$\overset{\wedge}{u_2} \overset{\wedge}{i_s} = \overset{\wedge}{u_1} \overset{\wedge}{i_s}$$

即

$$\frac{\overset{\wedge}{u_2}}{\overset{\wedge}{i_s}} = \frac{\overset{\wedge}{u_1}}{\overset{\wedge}{i_s}}$$

如果 $\overset{\wedge}{i_s} = \overset{\wedge}{i_s}$, 则 $\overset{\wedge}{u_2} = \overset{\wedge}{u_1}$ 。这就是互易定理的第二种形式。

在图 4-23(a)中, 接在 $1-1'$ 的支路 1 为电流源 $\overset{\wedge}{i_s}$, 接在 $2-2'$ 的支路 2 为短路, 其电流为 $\overset{\wedge}{i_2}$ 。如果把激励改为电压源 $\overset{\wedge}{u_s}$, 且接于 $2-2'$, 接于 $1-1'$ 的为开路, 其电压为 $\overset{\wedge}{u_1}$, 见图 4-23(b)。假设把电流源和电压源置零, 不难看出激励和响应互换位置后, 电路保持不变。

对图 4-23(a)和(b)应用特勒根定理, 仍有

$$\overset{\wedge}{u_1} \overset{\wedge}{i_1} + \overset{\wedge}{u_2} \overset{\wedge}{i_2} = \overset{\wedge}{u_1} \overset{\wedge}{i_1} + \overset{\wedge}{u_2} \overset{\wedge}{i_2}$$

代入 $\overset{\wedge}{i_1} = -\overset{\wedge}{i_s}$, $\overset{\wedge}{u_2} = 0$, $\overset{\wedge}{i_1} = 0$, $\overset{\wedge}{u_2} = \overset{\wedge}{u_s}$, 得到

$$-\overset{\wedge}{u_1} \overset{\wedge}{i_s} + \overset{\wedge}{u_s} \overset{\wedge}{i_2} = 0$$

即

$$\frac{\overset{\wedge}{i_2}}{\overset{\wedge}{i_s}} = \frac{\overset{\wedge}{u_1}}{\overset{\wedge}{u_s}}$$

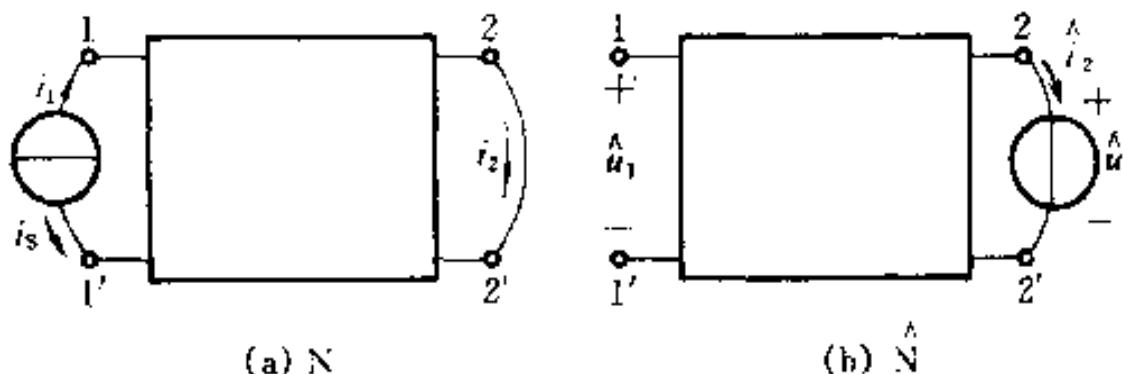


图 4-23 互易定理的第三种形式

如果在数值上 $i_s = u_s^A$, 则有 $i_2 = u_1^A$, 其中 i_2 和 i_s 以及 u_1 和 u_s 都分别取同样的单位。这是互易定理的第三种形式。

图 4-21, 4-22 和 4-23 所示为互易定理的 3 种不同形式, 其中激励和响应可能是电压或电流而有所不同, 但在它们互换位置前后, 如假设把电压源和电流源置零, 则电路保持不变。在满足这个条件下, 互易定理可以归纳如下: “对于一个仅含线性电阻的电路, 在单一激励下产生的响应, 当激励和响应互换位置时, 其比值保持不变”。

§ 4-6 对偶原理

电阻 R 的电压电流关系为 $u = Ri$, 电导 G 的电压电流关系为 $i = Gu$; 对于 CCVS 有 $u_2 = ri_1$, i_1 为控制电流, 对于 VCCS 有 $i_2 = gu_1$, u_1 为控制电压。在以上这些关系式中, 如果把电压 u 和电流 i 互换, 电阻 R 和电导 G 互换, r 和 g 互换, 则对应关系可以彼此转换。这些互换元素称为对偶元素。所以“电压”和“电流”, “电阻”和“电导”, “CCVS”和“VCCS”, “ r ”和“ g ”等都是对偶元素。

图 4-24(a) 为 n 个电阻的串联电路, 图(b) 为 n 个电导的并联电路。对图(a) 有:

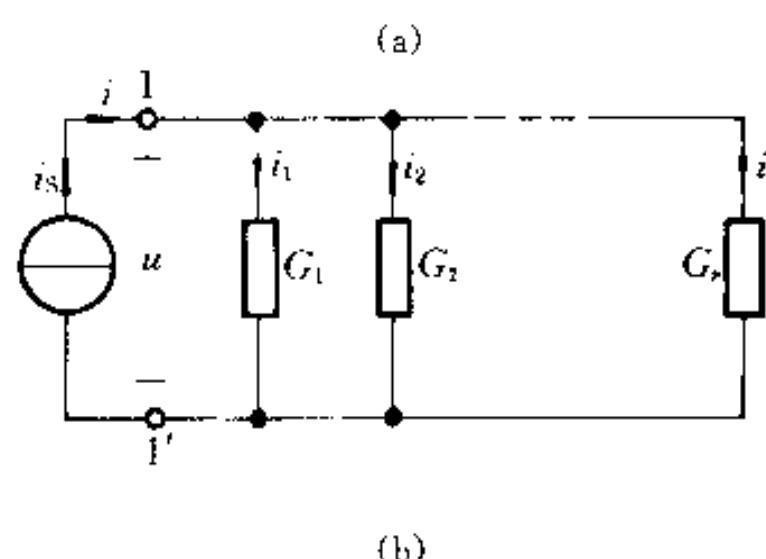
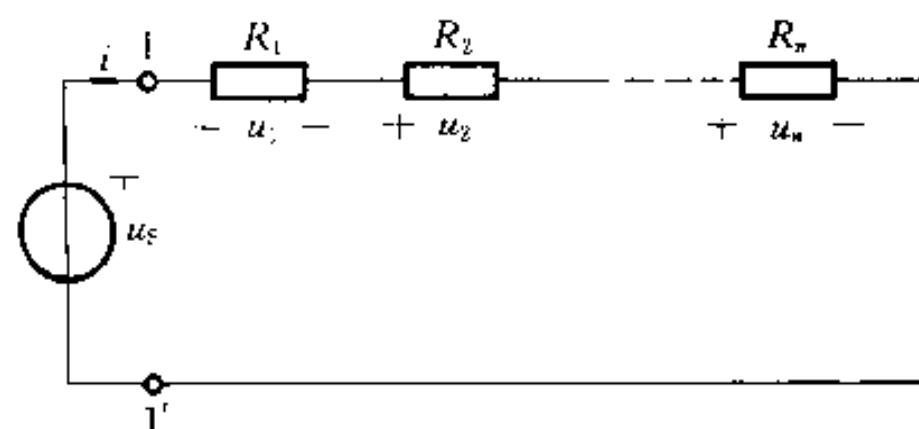


图 4-24 串联和并联的对偶

$$R = \sum_{k=1}^n R_k$$

$$i = \frac{u}{R}$$

$$u_k = \frac{R_k}{R} u$$

对图(b)有：

$$G = \sum_{k=1}^n G_k$$

$$u = \frac{i}{G}$$

$$i_k = \frac{G_k}{G} i$$

在以上诸关系式中,如把串联和并联互换,电压和电流互换,电阻和电导互换,则对应关系式可彼此转换。可见“串联”和“并联”也是对偶元素。

又如图 4-25(a)和(b)所示两个平面电路 N 和 \bar{N} ,电路 N 的网孔方程(规定网孔电流为顺时针方向)为：

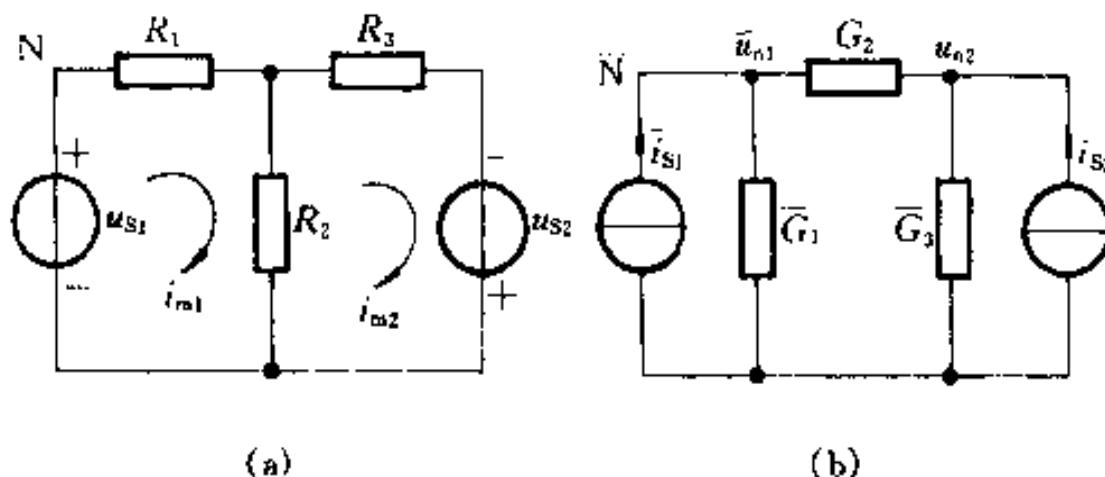


图 4-25 互为对偶的电路

$$(R_1 + R_2)i_{m1} - R_2 i_{m2} = u_{s1}$$

$$-R_2 i_{m1} + (R_2 + R_3)i_{m2} = u_{s2}$$

电路 \bar{N} 的结点电压方程为：

$$(G_1 + G_2)u_{n1} - G_2 u_{n2} = \bar{i}_{s1}$$

$$-G_2 \bar{u}_{n1} + (\bar{G}_2 + \bar{G}_3)\bar{u}_{n2} = \bar{i}_{s2}$$

如果把 R 和 \bar{G} , u_s 和 \bar{i}_s , 网孔电流 i_m 和结点电压 \bar{u}_n 等对应元素互换, 则上面两个方程也可以彼此转换。所以“网孔电流”和“结点电压”是对偶元素, 这两个平面电路称为对偶电路。

以上这些关系式或方程组所以能够彼此转换, 是它们的数学表示形式完全相似。两个关系式或两组方程通过对偶元素互换又能彼此转换, 这两个关系式或两组方程就互为对偶。电路中某些元素之间的关系(或方程)用它们的对偶元

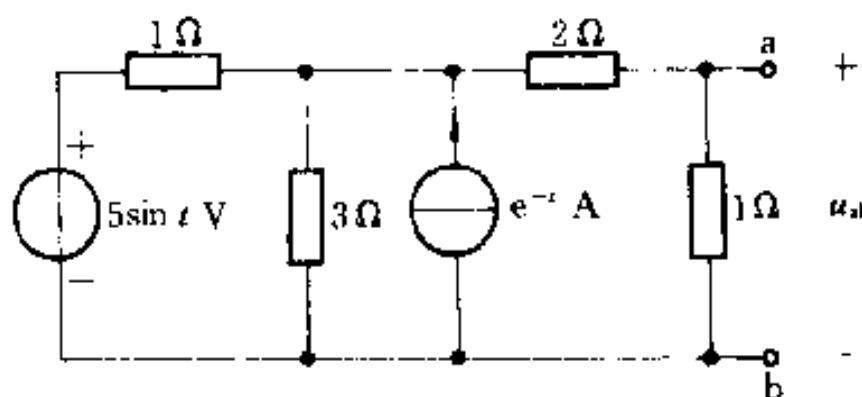
素对应地置换后,所得新关系(或新方程)也一定成立,后者和前者互为对偶,这就是对偶原理。

根据对偶原理,如果导出了某一关系式和结论,就等于解决了和它对偶的另一个关系式和结论。所以对偶原理有重要意义。应当注意:“对偶”和“等效”是两个不同的概念,不可混淆。

对偶原理不局限于电阻电路。例如,根据电容和电感的电压电流关系,容易看出它们互为对偶元素。其他如“短路”和“开路”,“KCL”和“KVL”,“树支电压”和“连支电流”等都分别互为对偶。

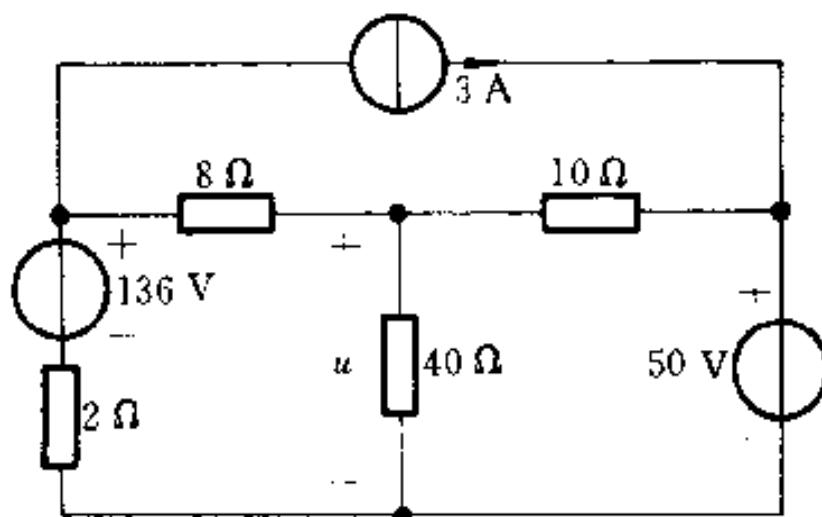
习 题

4-1 应用叠加定理求图示电路中电压 u_{ab} 。



题 4·1 图

4-2 应用叠加定理求图示电路中电压 u 。



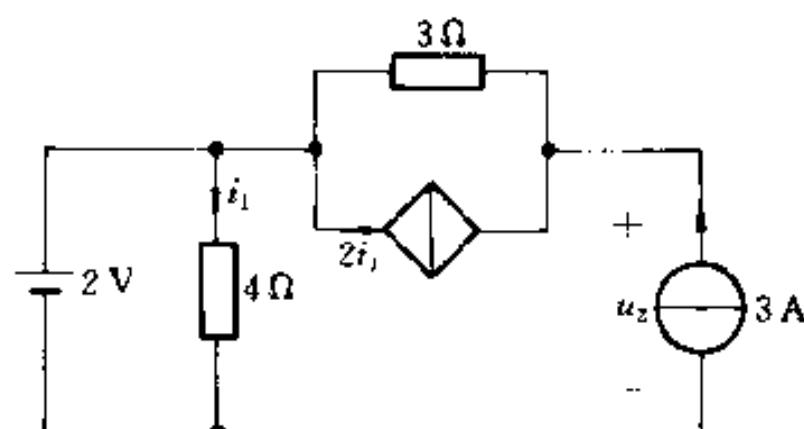
题 4·2 图

4-3 应用叠加定理求图示电路中电压 u_2 。

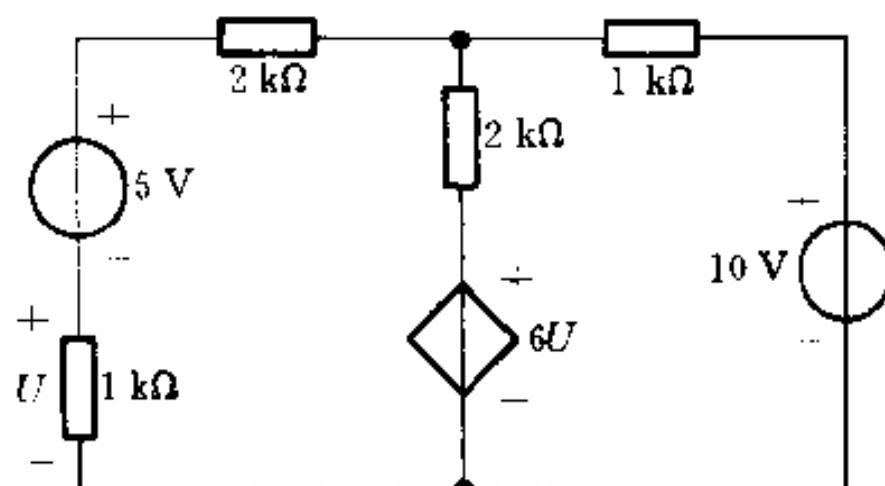
4-4 应用叠加定理求图示电路中电压 U_0 。

4-5 试求图示梯形电路中各支路电流、结点电压和 $\frac{u_o}{u_s}$ 。其中 $u_s = 10 \text{ V}$ 。

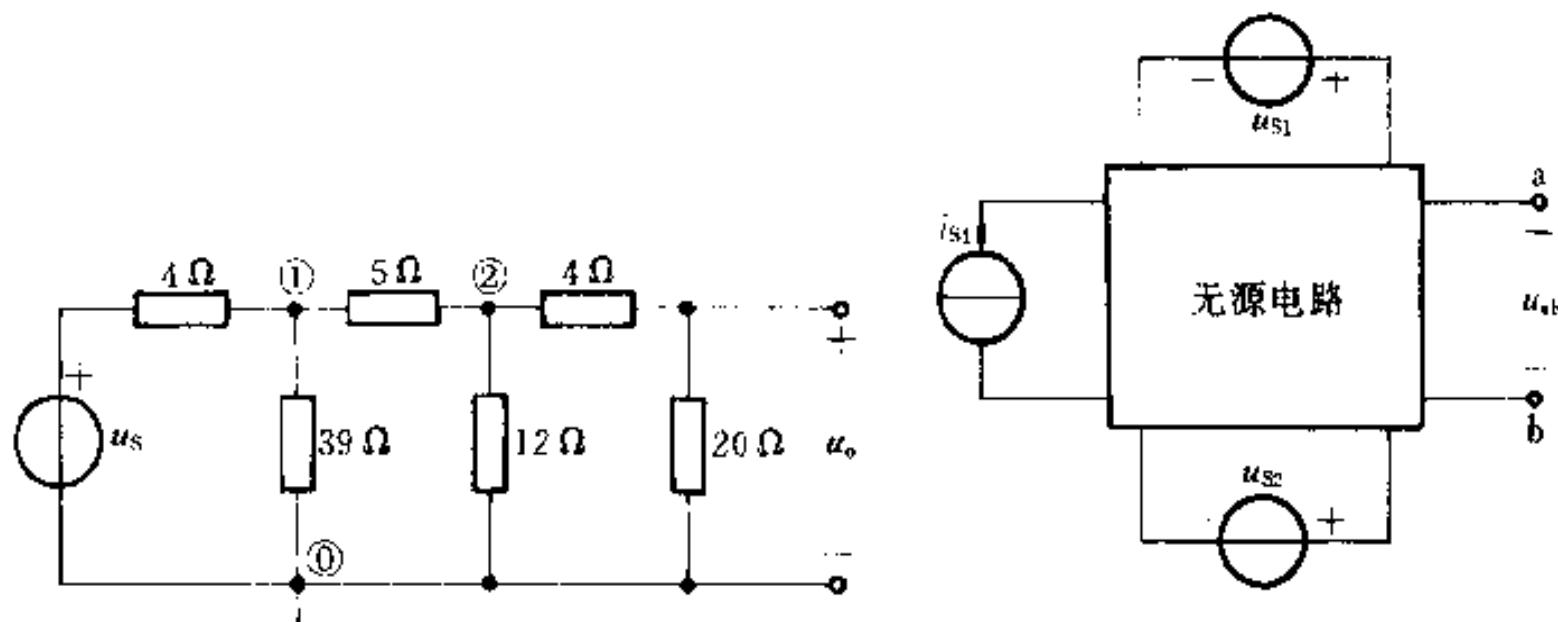
4-6 图示电路中,当电流源 i_{s1} 和电压源 u_{s1} 反向时(u_{s2} 不变),电压 u_{ab} 是原来的 0.5 倍;当 i_{s1} 和 u_{s2} 反向时(u_{s1} 不变),电压 u_{ab} 是原来的 0.3 倍。问:仅 i_{s1} 反向(u_{s1} , u_{s2} 均不变),电压 u_{ab} 应为原来的几倍?



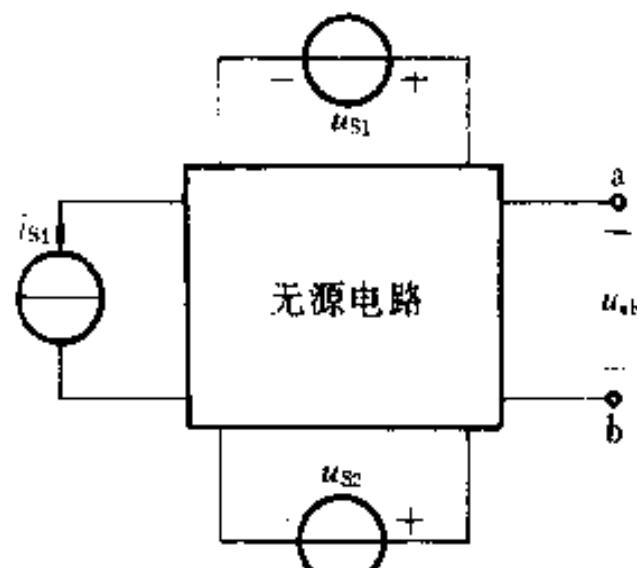
题 4-3 图



题 4-4 图

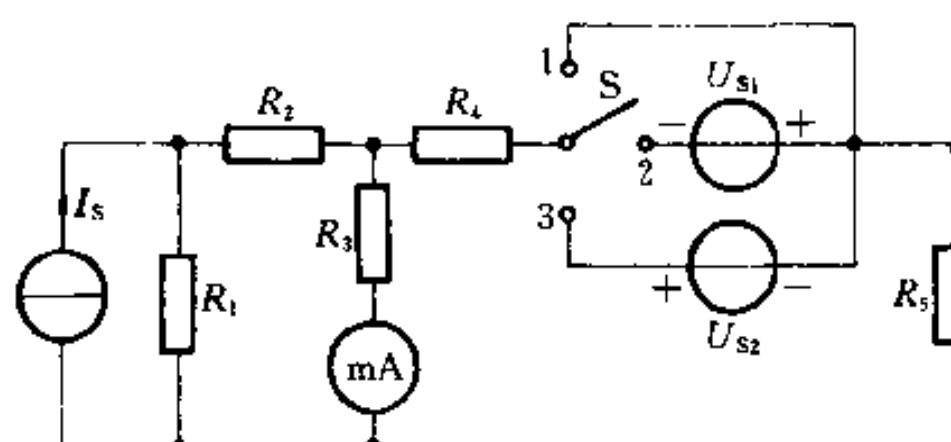


题 4-5 图



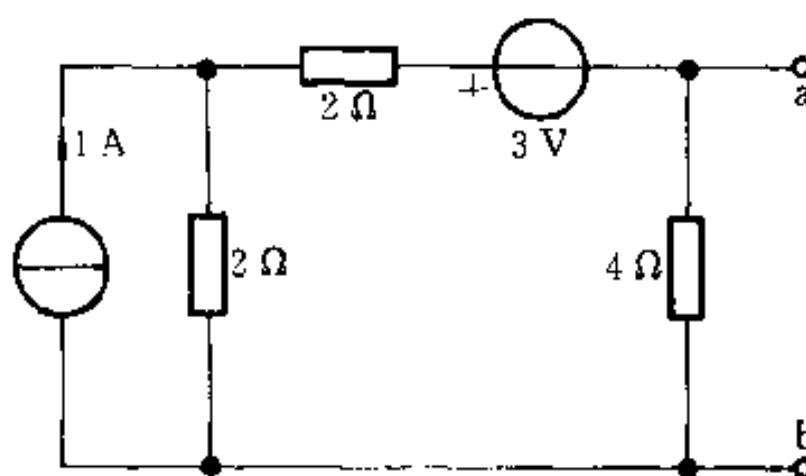
题 4-6 图

4-7 图示电路中 $U_{S1} = 10 \text{ V}$, $U_{S2} = 15 \text{ V}$, 当开关 S 在位置 1 时,毫安表的读数为 $I' = 40 \text{ mA}$;当开关 S 合向位置 2 时,毫安表的读数为 $I'' = -60 \text{ mA}$ 。如果把开关 S 合向位置 3, 则毫安表的读数为多少?



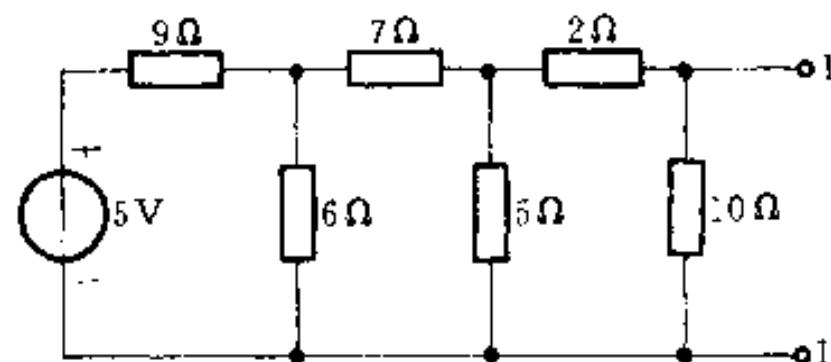
题 4-7 图

4-8 求图示电路的戴维宁和诺顿等效电路。



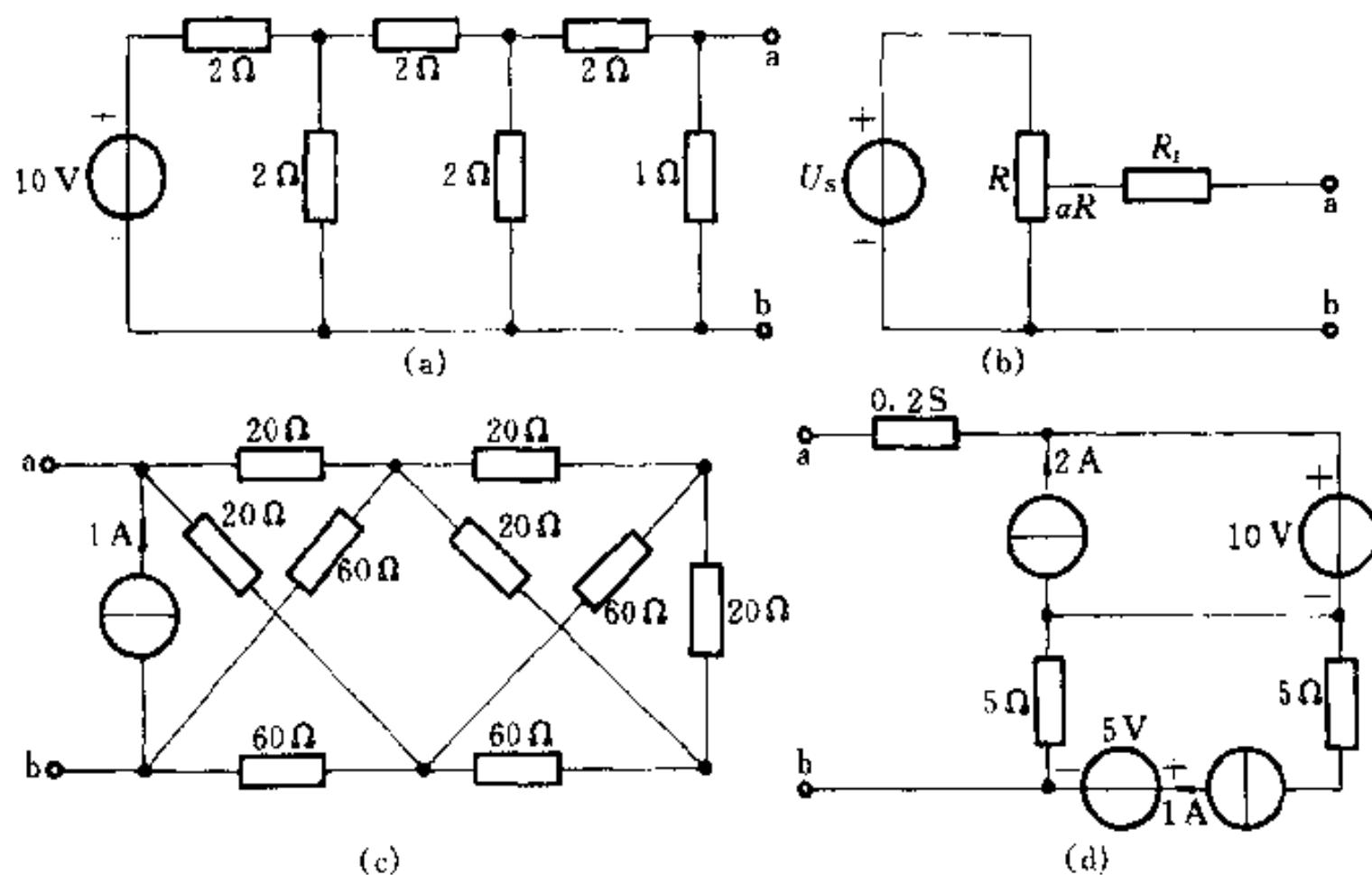
题 4-8 图

4-9 求图示电路的戴维宁等效电路。



题 4-9 图

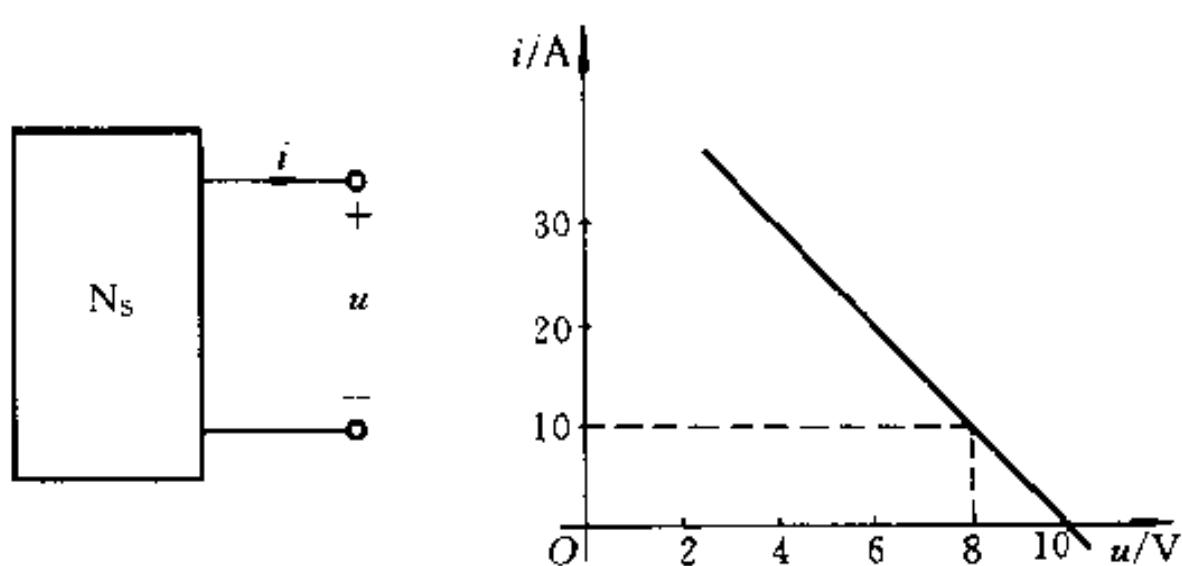
4-10 求图中各电路在 ab 端口的戴维宁等效电路或诺顿等效电路。



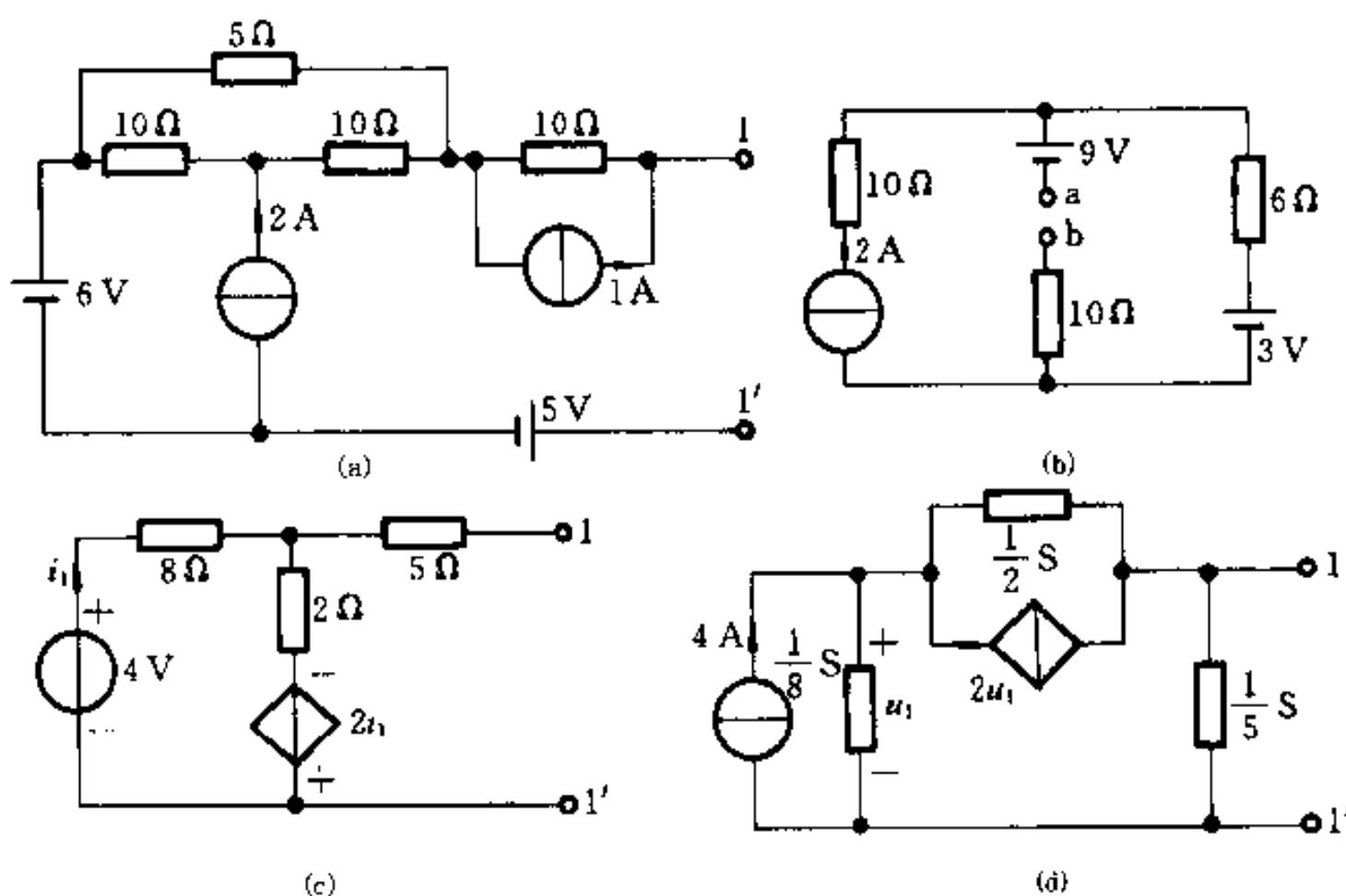
题 4-10 图

4-11 图(a)所示含源一端口的外特性曲线画于图(b)中,求其等效电源。

4-12 求图示各电路的等效戴维宁电路或诺顿电路。

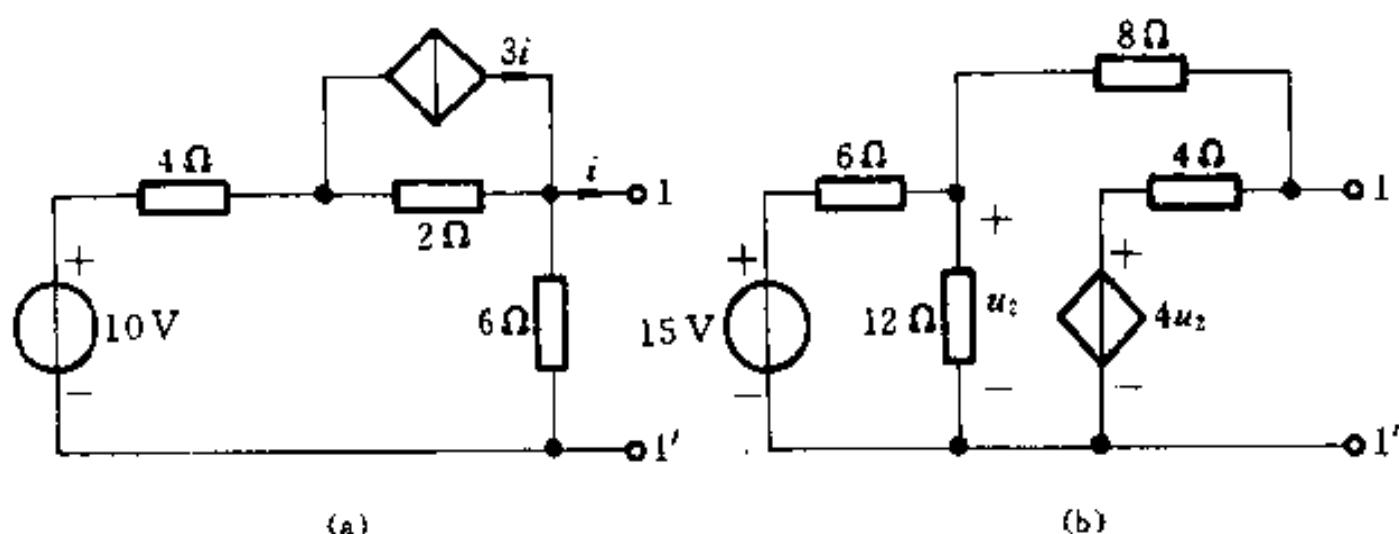


题 4-11 图



题 4-12 图

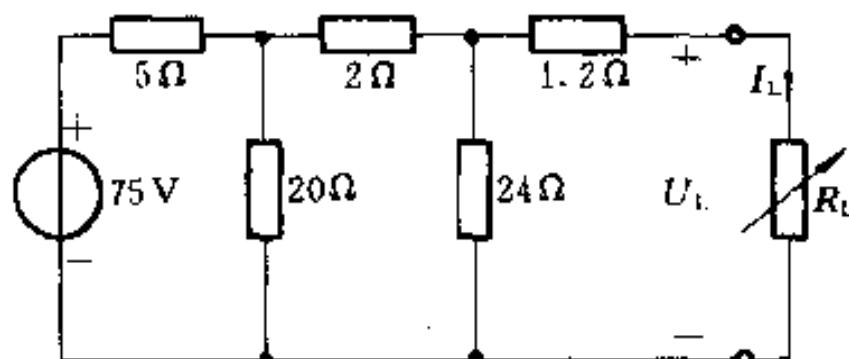
4-13 求图示两个一端口的戴维宁或诺顿等效电路，并解释所得结果。



题 4-13 图

4-14 在图示电路中，当 R_L 取 $0, 2, 4, 6, 10, 18, 24, 42, 90$ 和 186Ω 时，求 R_L 的电压

U_L 、电流 I_L 和 R_L 消耗的功率(可列表表示各结果)。

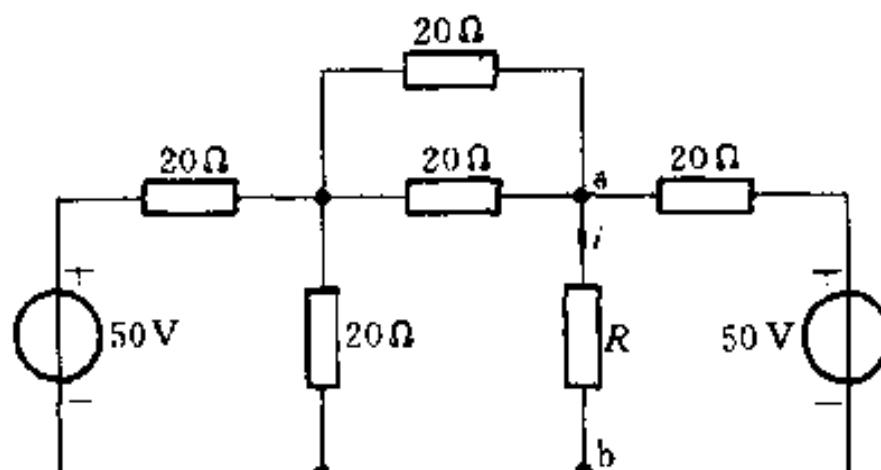


题 4-14 图

4-15 在图示电路中,试问:

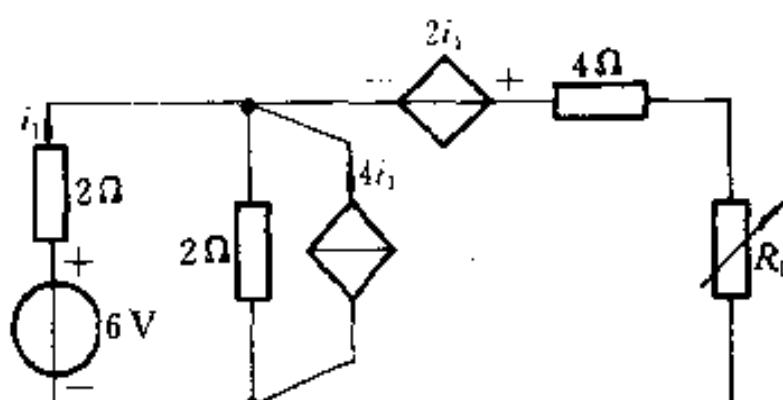
(1) R 为多大时,它吸收的功率最大? 求此最大功率。

(2) 若 $R = 80\Omega$,欲使 R 中电流为零,则 a、b 间应并接什么元件,其参数为多少? 画出电路图。



题 4-15 图

4-16 图示电路的负载电阻 R_L 可变,试问 R_L 等于何值时可吸收最大功率? 求此功率。

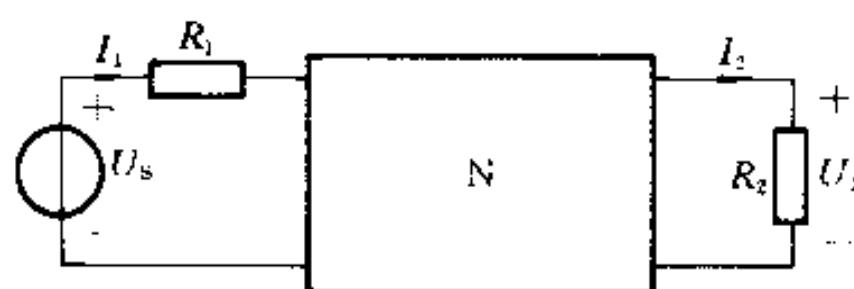


题 4-16 图

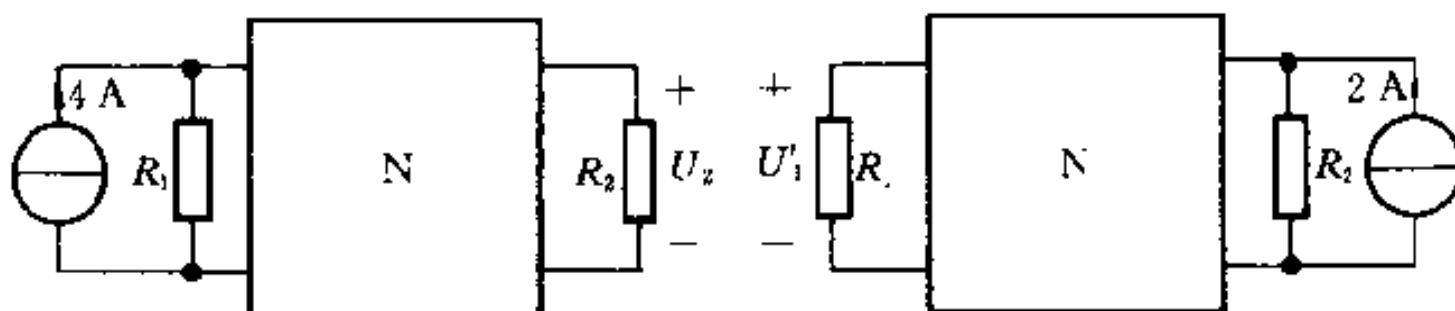
4-17 图示电路中 N(方框内部)仅由电阻组成。对不同的输入直流电压 U_S 及不同的 R_1, R_2 值进行了两次测量,得下列数据: $R_1 = R_2 = 2\Omega$ 时, $U_S = 8V, I_1 = 2A, U_2 = 2V; R_1 = 1.4\Omega, R_2 = 0.8\Omega$ 时, $U_S = 9V, I_1 = 3A$,求 U_S 的值。

4-18 在图(a)中,已知 $U_2 = 6V$,求图(b)中 U'_1 (网络 N 仅由电阻组成)。

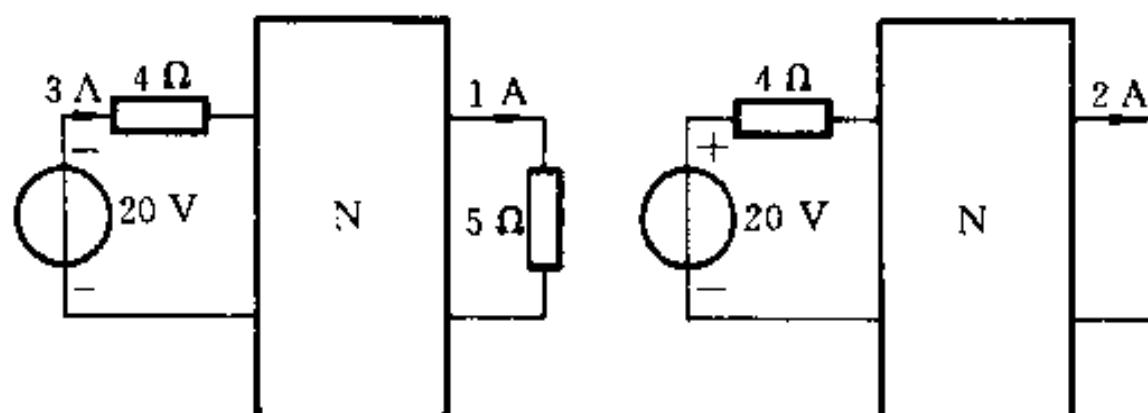
4-19 图中网络 N 仅由电阻组成。根据图(a)和图(b)的已知情况,求图(c)中电流 I_1 和 I_2 。



题 4-17 图

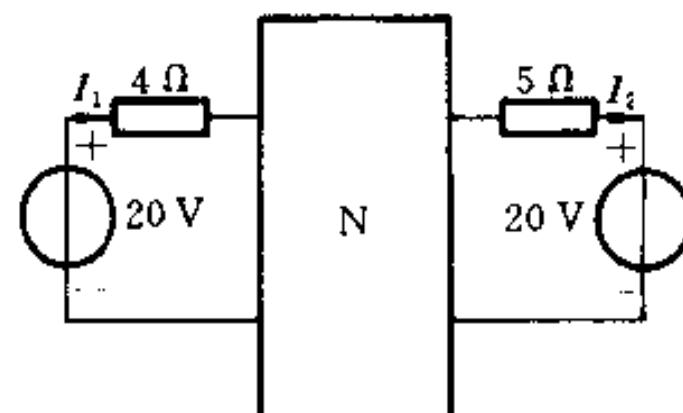


题 4-18 图



(a)

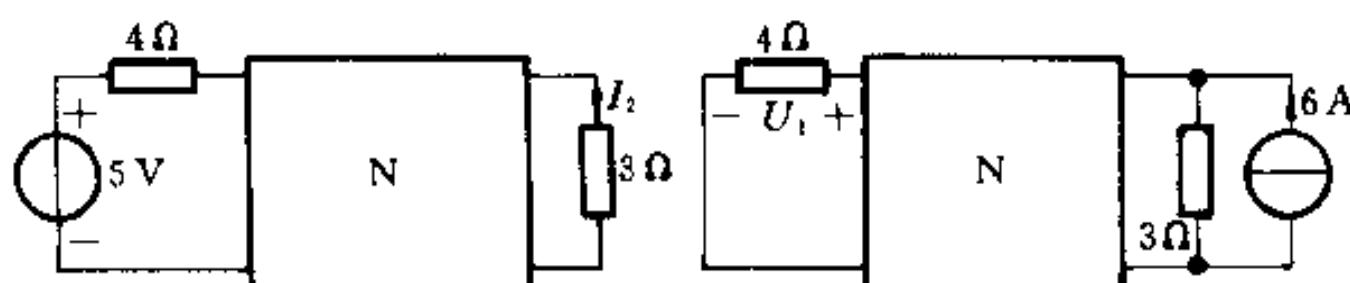
(b)



(c)

题 4-19 图

4-20 图示电路中 N 由电阻组成, 图(a)中, $I_2 = 0.5 \text{ A}$, 求图(b)中电压 U_1 。

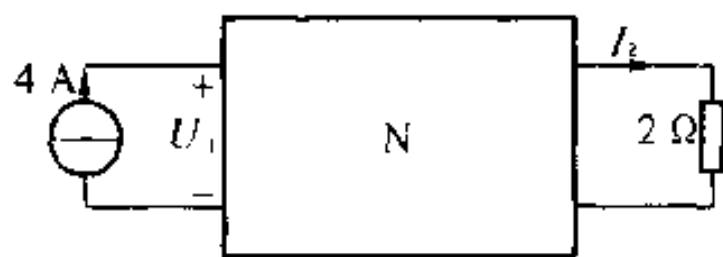


(a)

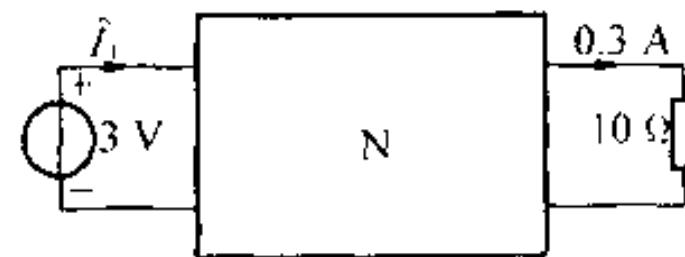
(b)

题 4-20 图

4-21 图示电路中 N 仅由电阻组成。已知图(a)中电压 $U_1 = 1 \text{ V}$, 电流 $I_2 = 0.5 \text{ A}$, 求图(b)中 \hat{I}_1 。



(a)



(b)

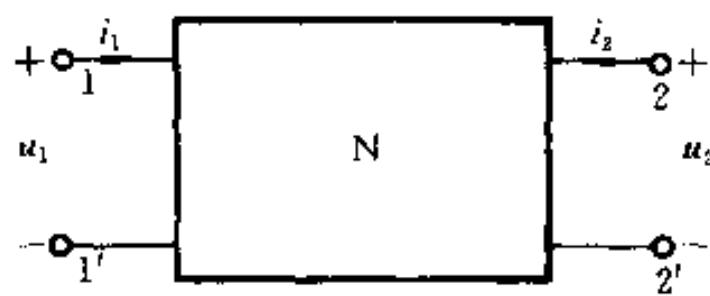
题 4-21 图

4-22 图示网络 N 仅由电阻组成, 端口电压和电流之间的关系可由下式表示:

$$i_1 = G_{11} u_1 + G_{12} u_2$$

$$i_2 = G_{21} u_1 + G_{22} u_2$$

试证明 $G_{12} = G_{21}$ 。如果 N 内部含独立电源或受控源, 上述结论是否成立, 为什么?



题 4-22 图

第五章

含有运算放大器的电阻电路

— 内容提要 —

运算放大器是电路中一个重要的多端器件,它的应用日益广泛。本章介绍运算放大器的电路模型,运算放大器在理想化条件下的外部特性,以及含有运算放大器的电阻电路的分析。另外介绍一些典型电路。

§ 5-1 运算放大器的电路模型

运算放大器(简称运放)是一种包含许多晶体管的集成电路,它是目前获得广泛应用的一种多端器件。一般放大器的作用是把输入电压放大一定倍数后再输送出去,其输出电压与输入电压的比值称为电压放大倍数或电压增益。运放是一种高增益(可达几万倍甚至更高)、高输入电阻、低输出电阻的放大器。由于它能完成加法、积分、微分等数学运算而被称为运算放大器,然而它的应用远远超出上述范围。

虽然运放有多种型号,其内部结构也各不相同,但从电路分析的角度出发,感兴趣的仅仅是运放的外部特性及其电路模型。图 5-1(a)给出了运放的电路图形符号,其中“三角形”符号表示“放大器”(实际运放外部端子比图示的可能还要多)。运放有两个输入端 a、b 和一个输出端 o。电源端子 E^+ 和 E^- 连接直流偏置电压,以维持运放内部晶体管正常工作。 E^+ 端接正电压, E^- 端接负电压,这里电压的正负是对“地”或公共端^① 而言的。在分析运放的放大作用时可以不考虑偏置电源,这时采用图 5-1(b)所示电路符号,但应记得偏置电源是存在的。a 端称为倒向输入端(也称反相输入端)。当输入电压 u 加在 a 端与公共

^① 公共端或“地”的电压(位)是零,它相当于电路中的参考结点。事实上接地不一定要求与大地直接连接。有时仪器的底座或金属外壳都可以作为公共端。接地的符号见图 5-1(a)。

端之间,且其实际方向从 a 端指向公共端时,输出电压 u_o 。实际方向则自公共端指向 o 端,即两者的方向正好相反。b 端称为非倒向输入端(也称为同相输入端)。当输入电压 u^+ 加在 b 端与公共端之间, u_o 与 u^+ 两者实际方向相对公共端恰好相同。为了区别起见,a 端和 b 端分别用“-”号和“+”号标出,如图中所示,但不要将它们误认为电压参考方向的正负极性。电压的正负极性应另外标出或用箭头表示。

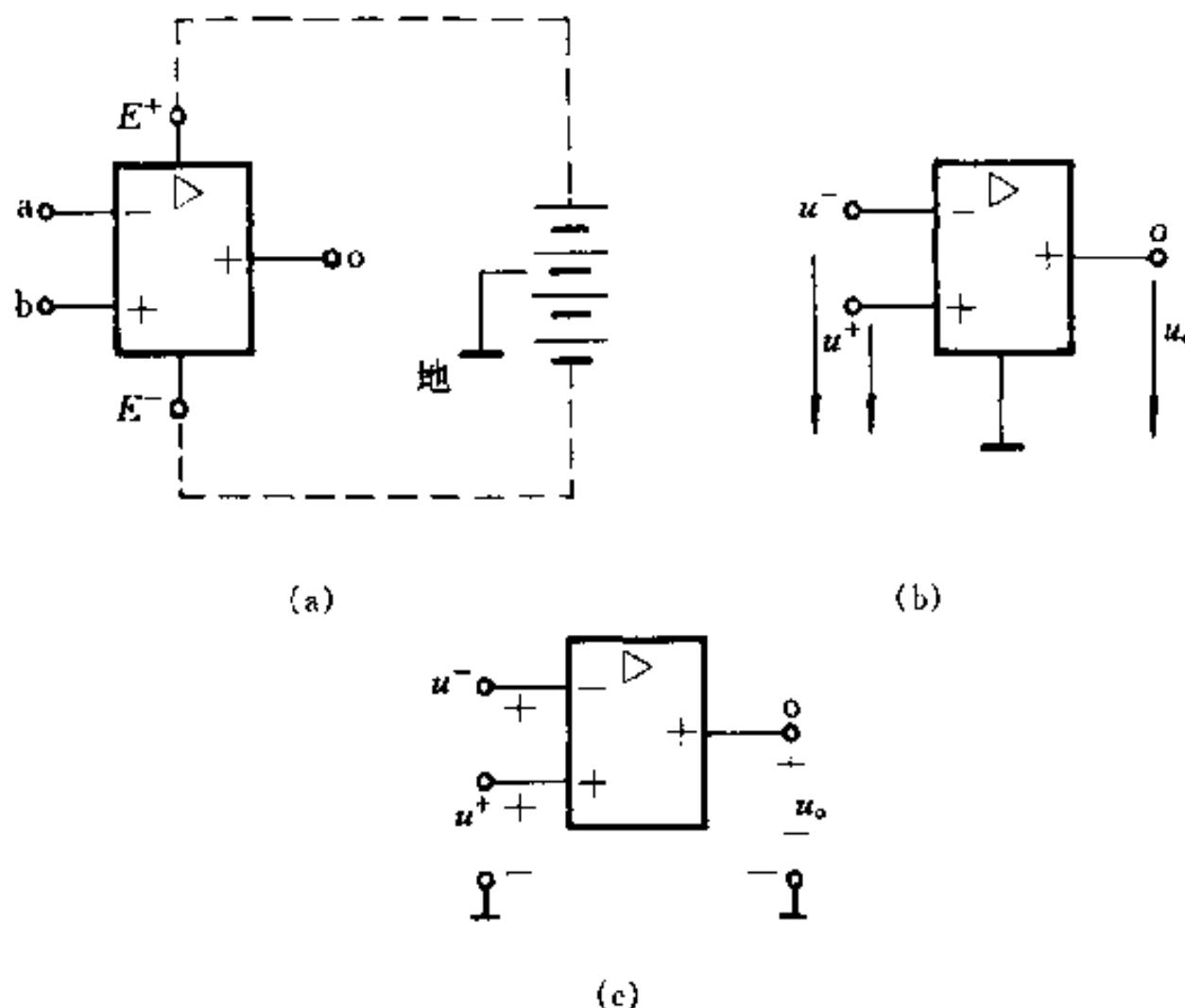


图 5-1 运放的电路图形符号图

如果在 a 端和 b 端分别同时加输入电压 u^- 和 u^+ , 则有

$$u_o = A(u^+ - u^-) = Au_d \quad (5-1)$$

其中 $u_d = u^+ - u^-$, A 为运放的电压放大倍数(或电压增益的绝对值)。运放的这种输入情况称为差动输入,而 u_d 称为差动输入电压。有时把非倒向端与公共端连接起来(接地),而只在倒向端加输入电压,则有

$$u_o = -Au^-$$

上式右边的负号说明输出电压 u_o 与输入电压 u^- 相对公共端是反向的。反之,若把倒向端与公共端连接起来,而在非倒向端加输入电压 u^+ ,这时有

$$u_o = Au^+$$

有时,为了简化起见,在画运放的电路符号时[见图 5-1(b)],可将接地的

连接线省略掉,而用图 5·1(c)所示的电路符号表示^①。但在进行电路分析时,应当注意到这个接地线的存在。运放可以看作是一种多端元件。

运放的输出电压 u_o 与差动输入电压 u_d 之间的关系可以用图 5·2 近似地描述。在 $-\epsilon \leq u_d \leq \epsilon$ (ϵ 是很小的) 范围内, u_o 与 u_d 的关系用通过原点的一段直线描述, 其斜率等于 A 。由于放大倍数 A 值很大, 所以这段直线很陡。当 $|u_d| > \epsilon$ 时, 输出电压 u_o 趋于饱和, 图中用 $\pm U_{\text{sat}}$ 表示, 此饱和电压值略低于直流偏置电压值。这个关系曲线称为运放的外特性。

图 5·3 示出运放的电路模型, 其中电压控制电压源的电压为 $A(u^+ - u^-)$, R_{in} 为运放的输入电阻, R_o 为输出电阻。实际运放的 R_{in} 都比较高, 而 R_o 则较低。它们的具体值根据运放的制造工艺有所不同, 但可以认为 $R_{\text{in}} \gg R_o$ 。本章中把运放的工作范围限制在线性段, 即设 $-U_{\text{sat}} < u_o < U_{\text{sat}}$ 。由于放大倍数 A 很大, 而 U_{sat} 一般为正负十几伏或几伏, 这样输入电压就必须很小。运放的这种工作状态称为“开环运行”, A 称为开环放大倍数。在运放的实际应用中, 通常通过一定的方式将输出的一部分接回(反馈)到输入中去, 这种工作状态称为“闭环运行”。

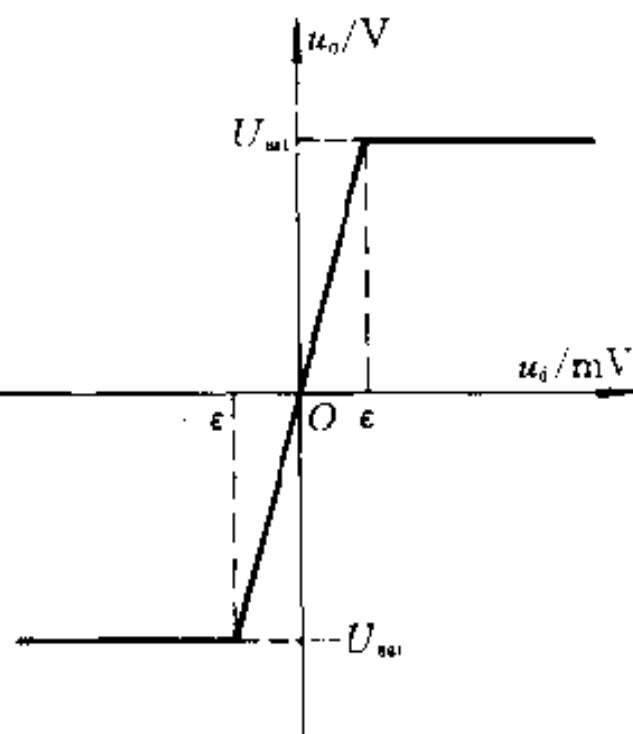


图 5·2 运放的 u_d - u_o 特性

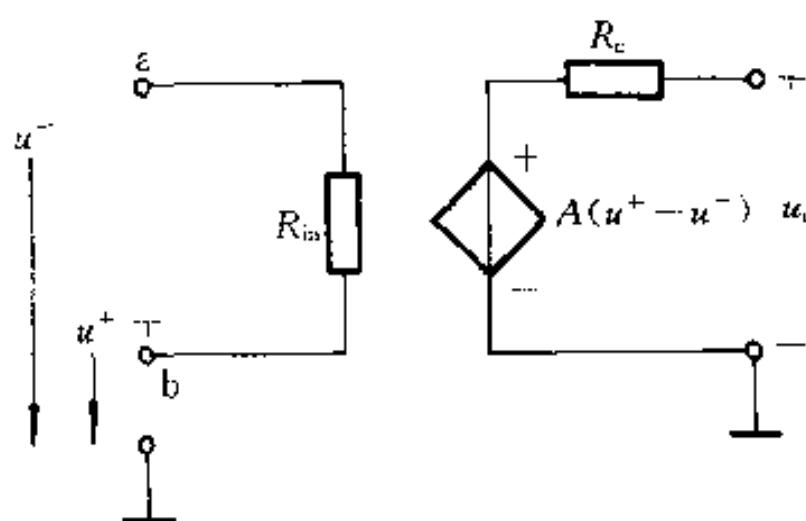


图 5·3 运放的电路模型

在理想化情况下, 流入每一输入端的电流均为零, 就是说 R_{in} 为无限大、输

^① 目前不少运放产品的引出端中往往不存在公共端或接地端, 而接地端是通过偏置(双)电源实现的, 如图 5·1(a)。

出电阻 R_o 则设为零, 而放大倍数 A 作为无限大处理。于是从式(5-1)可见, $u_d = u^+ - u^- = 0$ 。这是因为 u_o 为有限值, 所以差动输入电压 u_d 被强制为零, 或者说 u^+ 和 u^- 将相等。如果不是差动输入的情况, 而是把非倒向端(或倒向端)接地, 即有 $u^+ = 0$ (或 $u^- = 0$), 则在倒向端的电压 u^- (或非倒向端的电压 u^+)就将强制为零值。

归纳以上论述, 在 $-U_{sat} < u_o < U_{sat}$ 范围内, 如果假设运放的电路模型中的 $R_{in} \gg \infty$, $R_o = 0$, 且认为 $A = \infty$, 则称这种运放为理想运放。并且在表示运放的图形符号中加“ ∞ ”以资说明; 否则用“ A ”表示。

实际运放的工作情况比以上介绍的要复杂一些。例如, 放大倍数 A 不仅为有限值, 而且随着频率的增高而下降。通常, 图 5-3 所示电路模型在输入电压频率较低时是足够精确的。为了简化分析, 一般将假设运放是在理想化条件下工作的, 这样做在许多场合下不会造成很大的误差。

§ 5-2 比例电路的分析

图 5-4(a) 表示一个由运放和电阻构成的电路, 称为倒向比例器。运放的输出电压通过电阻 R_2 反馈到输入回路中。显然, 由于电阻 R_1 的存在, 电路的输入电压 u_{in} 与运放的倒向输入端电压 u^- 不同。

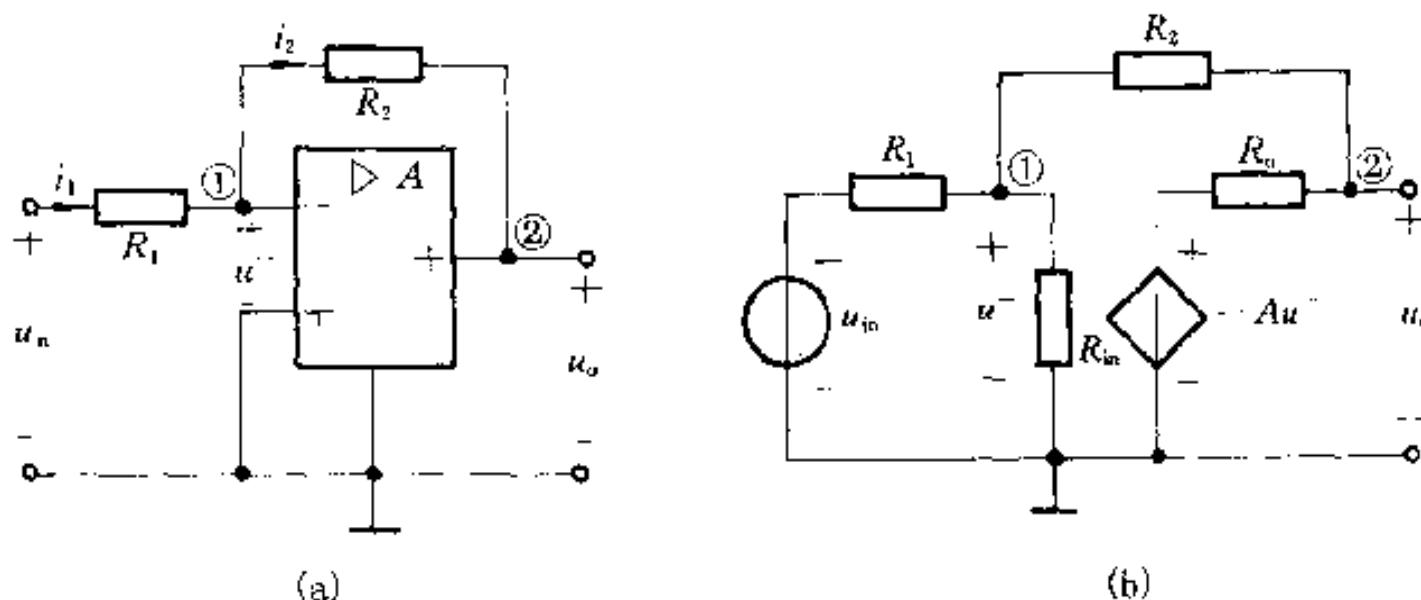


图 5-4 倒向比例器

参照图 5-3 所示运放电路模型, 图 5-4(a) 电路可用图 5-4(b) 表示。设输入电压用一个电压为 u_{in} 的电压源表示, 对结点①、②列出结点电压方程:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{in}} + \frac{1}{R_2} \right) u_{n1} - \frac{1}{R_2} u_{n2} &= \frac{u_{in}}{R_1} \\ - \frac{1}{R_2} u_{n1} + \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2} \right) u_{n2} &= - \frac{A u^-}{R_o} \end{aligned}$$

由于 $u_{\text{in}} = u_+$, $u_{\text{in}} = u_+$, 改写上列方程, 得:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{\text{in}}} + \frac{1}{R_2} \right) u_+ - \frac{1}{R_2} u_o = \frac{u_{\text{in}}}{R_1}$$

$$\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{A}{R_{\text{in}}} \right) u_+ + \left(\frac{1}{R_{\text{in}}} + \frac{1}{R_2} \right) u_o = 0$$

联立求解上列方程, 求得

$$u_o = \frac{\left(\frac{A}{R_{\text{in}}} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{u_{\text{in}}}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_{\text{in}}} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{\text{in}}} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{A}{R_{\text{in}}} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

所以

$$\frac{u_o}{u_{\text{in}}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_{\text{in}}}{R_2} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_{\text{in}}} \right)} \quad (5-2)$$

$$= \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{A + \frac{R_{\text{in}}}{R_2}}$$

从上式可见, 由于 A 很大, R_{in} 很小, R_{in} 很大, 再选择适当的 R_1 和 R_2 , 则有

$$\frac{u_o}{u_{\text{in}}} \approx -\frac{R_2}{R_1} \quad (5-3)$$

例如, 设 $A = 50000$, $R_{\text{in}} = 1 \text{ M}\Omega$, $R_{\text{in}} = 100 \Omega$, 而 $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, 则

$$\frac{u_o}{u_{\text{in}}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1.00022}$$

可见用式(5-3)计算 $\frac{u_o}{u_{\text{in}}}$ 足够精确。

上述结果是很有意义的。利用图 5-4(a)所示电路可使输出电压与输入电压之比按 $\frac{R_2}{R_1}$ 确定, 而不会由于运放的性能稍有改变就使 $\frac{u_o}{u_{\text{in}}}$ 的值受到影响。显然, 选择不同的 R_2 和 R_1 值, 就可获得不同的 $\frac{u_o}{u_{\text{in}}}$ 值, 所以有比例器的作用。通常又把这个电路称为倒向放大器。

如果把 5-4(a)的运放当作理想运放, 则由于 $A = \infty$, $R_{\text{in}} = \infty$, $R_{\text{out}} = 0$, 从式(5-2)可直接求得

$$\frac{u_o}{u_{\text{in}}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

另外, 也可以直接利用理想运放的性质, 对图 5-4(a)的电路求解。由于 $R_{\text{in}} = \infty$, $R_{\text{out}} = 0$ 及 $A = \infty$, 则 $i_1 = i_2$, 从而得

$$\frac{u_{in} - u}{R_1} = \frac{u^- - u_o}{R_2}$$

又由于 $\frac{u_o}{u} = -A$, 故 $u^- = 0$, 所以

$$\frac{u_{in}}{R_1} = -\frac{u_o}{R_2}$$

这样也可以求得

$$\frac{u_o}{u_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

与上述结果相同。

§ 5-3 含有理想运算放大器的电路的分析

含有理想运放的电路的分析有一些特点,按 § 5-1 介绍的有关理想运放的性质,可以得到以下两条规则:

- (1) 倒向端和非倒向端的输入电流均为零[可称之为“虚断(路)”];
- (2) 对于公共端(地),倒向输入端的电压与非倒向输入端的电压相等^① (可称之为“虚短(路)”).

合理地运用这两条规则,并与结点电压法相结合,将使这类电路的分析大为简化。下面举一些实例加以说明。

例 5-1 图 5-5 所示电路称为非倒向放大器(比例器)。试求输出电压 u_o 与输入电压 u_{in} 之间的关系。

解 用上述两条规则。按规则 1, 有 $i_1 = i_2 = 0$, 故有

$$u_2 = \frac{u_o R_1}{R_1 + R_2}$$

按规则 2, 有 $u_{in} = u^+ = u^- = u_2$, 所以

$$u_{in} = \frac{u_o R_1}{R_1 + R_2}$$

即

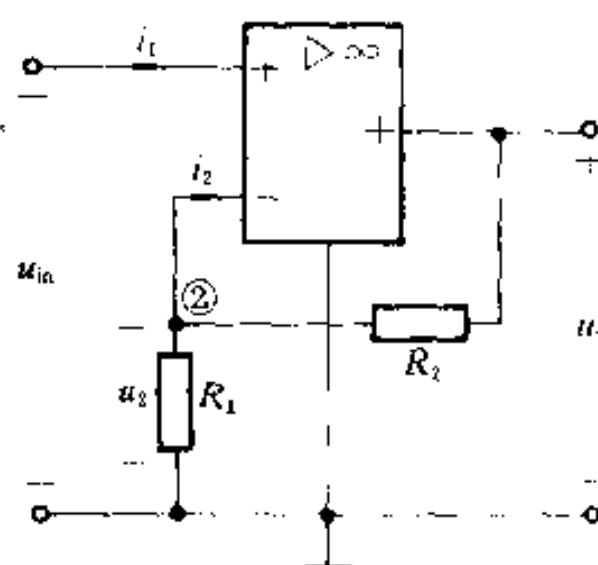


图 5-5 例 5-1 图

^① 显然,如果把这两个输入端直接与一个独立电压源或受控电压源连接,那将导致矛盾,因此是不允许的。另外,如果运放的一个输入端接地,则另一个没有接地的输入端的电压将等于零,故称之为“虚地”。

$$\frac{u_o}{u_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

选择不同的 R_1 和 R_2 , 可以获得不同的 $\frac{u_o}{u_{in}}$ 值, 而比值一定大于 1, 同时又是正的, 即输出是非倒向的。

将图 5·5 中电阻 R_1 改为开路, 把电阻 R_2 改为短路, 则得图 5·6 所示电路。不难得出 $u_o = u_{in}$, 同时有 $i_{in} = 0$, 就是说输入电阻 R_{in} 为无限大。此电路的输出电压完全“重复”输入电压, 故称为电压跟随器。由于 R_{in} 为无限大, 所以它又起“隔离作用”。例如, 图 5·7(a) 所示由电阻 R_1 和 R_2 构成的分压电路, 其中电压

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_1$$

如果把负载 R_L 直接接到此分压器, 则电阻 R_L 的接入将会影响电压 u_2 的大小。但是如果通过图 5·6 所示电压跟随器把 R_L 接入[见图 5·7(b)], 则 u_2 值仍将等于 $\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_1$ 。所以, 负载电阻的作用被“隔离”了。

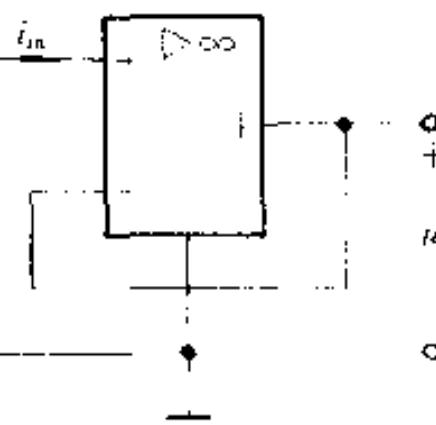


图 5·6 电压跟随器

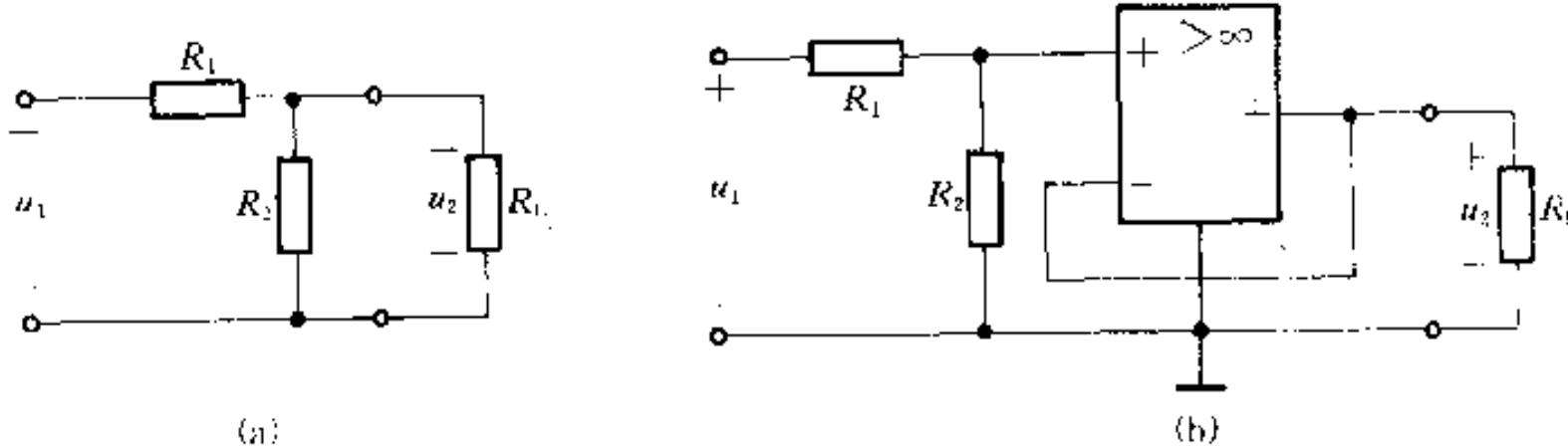


图 5·7 电压跟随器的隔离作用

例 5·2 图 5·8 所示电路为加法器。试说明其工作原理。

解 用规则 1, $i_v = 0$, 得 $i_v = i_1 + i_2 + i_3$, 故

$$-\frac{u_o - u}{R_f} = \frac{u_1 - u}{R_1} + \frac{u_2 - u}{R_2} + \frac{u_3 - u}{R_3}$$

用规则 2, 得 $u_o = 0$, 所以:

$$-\frac{u_o - u}{R_f} = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3}$$

$$u_o = -R_f \left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} \right)$$

如令 $R_1 = R_2 = R_3 = R_f$, 则

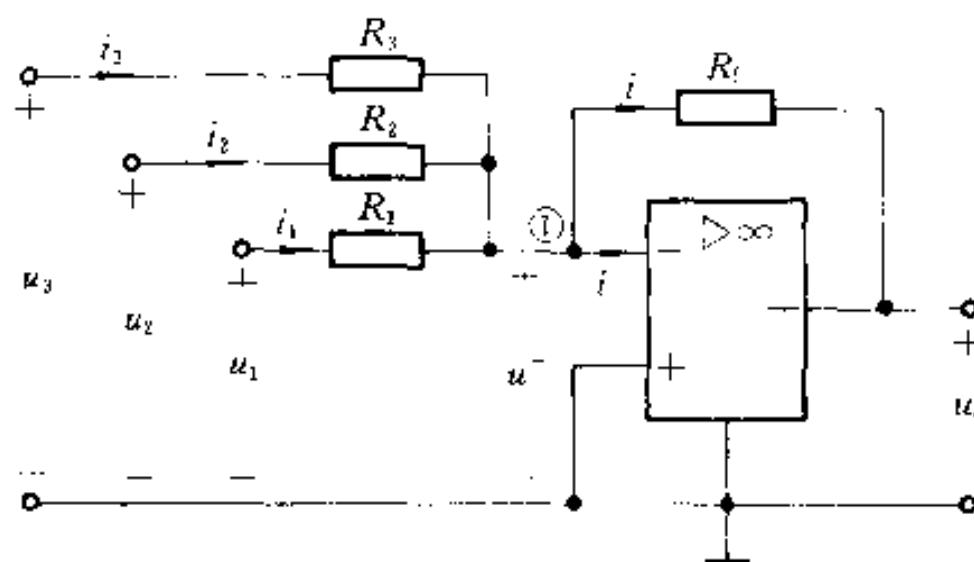


图 5·8 加法器

$$u_o = -(u_1 + u_2 + u_3)$$

式中负号说明输出电压和输入电压反向。

如直接对结点①列写结点电压方程(注意 $u_{ad} = 0, i = 0$)，得

$$-\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_3}{R_3} - \frac{u_o}{R_f} = 0$$

所得结果将与上面一致。

例 5·3 图 5·9 所示电路含有 2 个运放，设 $R_s = R_6$ 。试求 $\frac{u_o}{u_{in}}$ 。

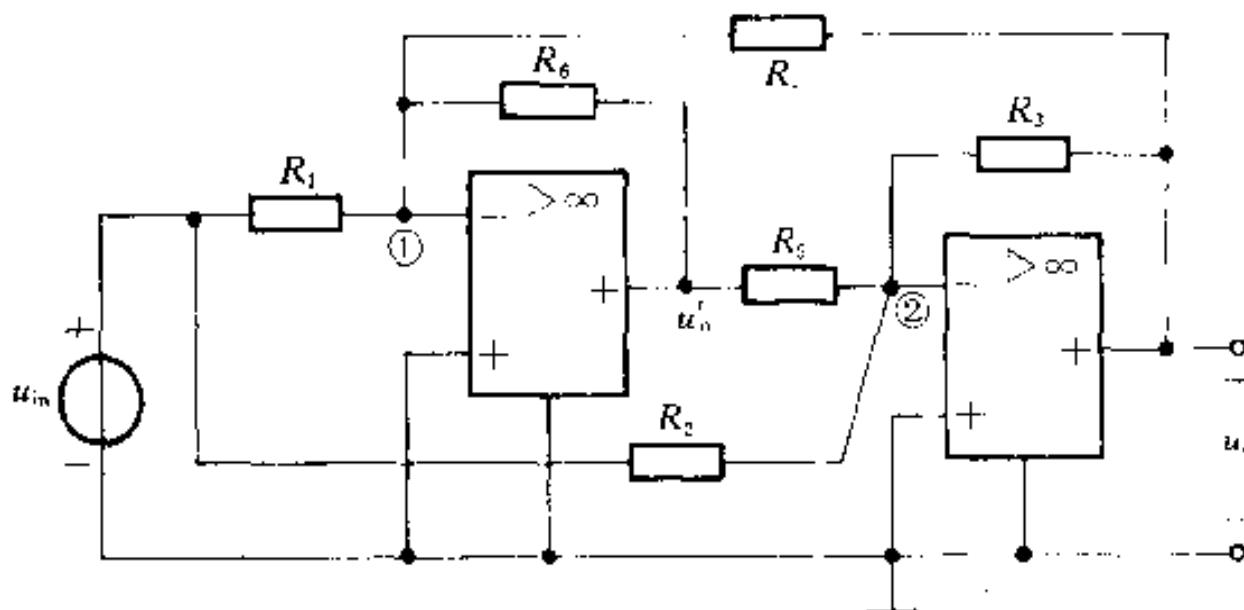


图 5·9 例 5·3 图

解 对结点①和结点②列出结点电压方程，并注意到规则 1 和规则 2 ($u_{in} = u_{o1} = 0$)，可得：

$$-\frac{u_{in}}{R_1} - \frac{u'_o}{R_6} - \frac{u_o}{R_4} = 0$$

$$-\frac{u_{in}}{R_2} - \frac{u'_o}{R_5} - \frac{u_o}{R_3} = 0$$

从以上两个方程中消去 u'_o , 得

$$\frac{u_{in}}{R_1} - \frac{u_{in}}{R_2} = \frac{u_o}{R_3} - \frac{u_o}{R_4}$$

所以

$$\frac{u_o}{u_{in}} = \frac{G_1 - G_2}{G_3 + G_4}$$

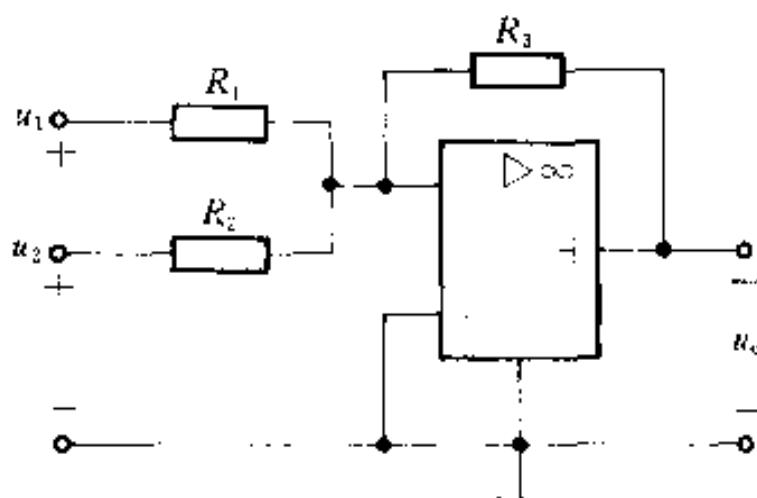
在应用以上方法时, 由于运放输出端的电流事先无法确定, 因此不宜对该结点列方程, 可以认为这是把运放理想化处理所带有的特点。

习 题

5·1 设要求图示电路的输出 u_o 为

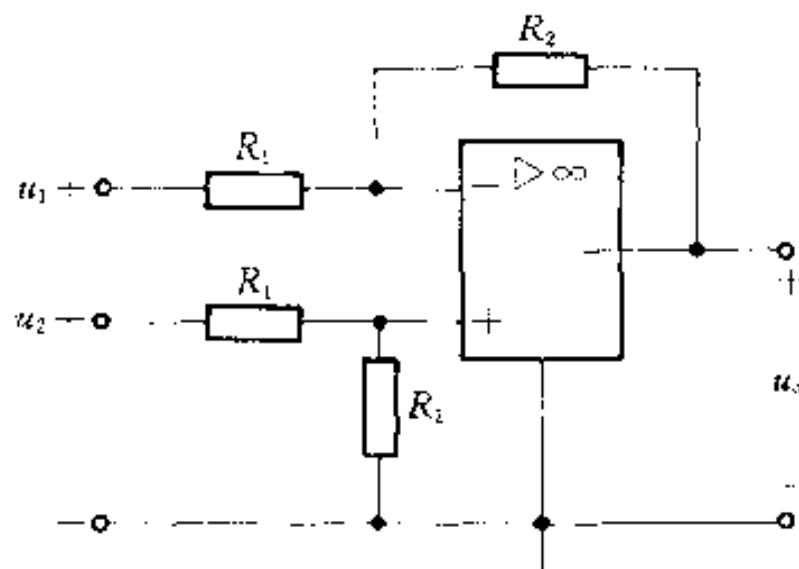
$$= u_1 - 3u_2 + 0.2u_3$$

已知 $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, 求 R_1 和 R_2 :



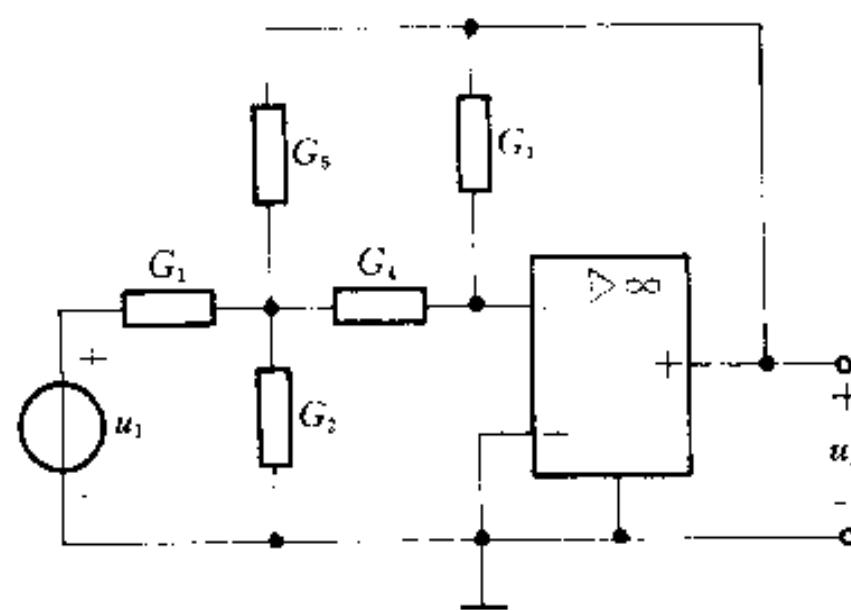
题 5·1 图

5·2 图示电路起减法作用, 求输出电压 u_o 和输入电压 u_1, u_2 之间的关系。



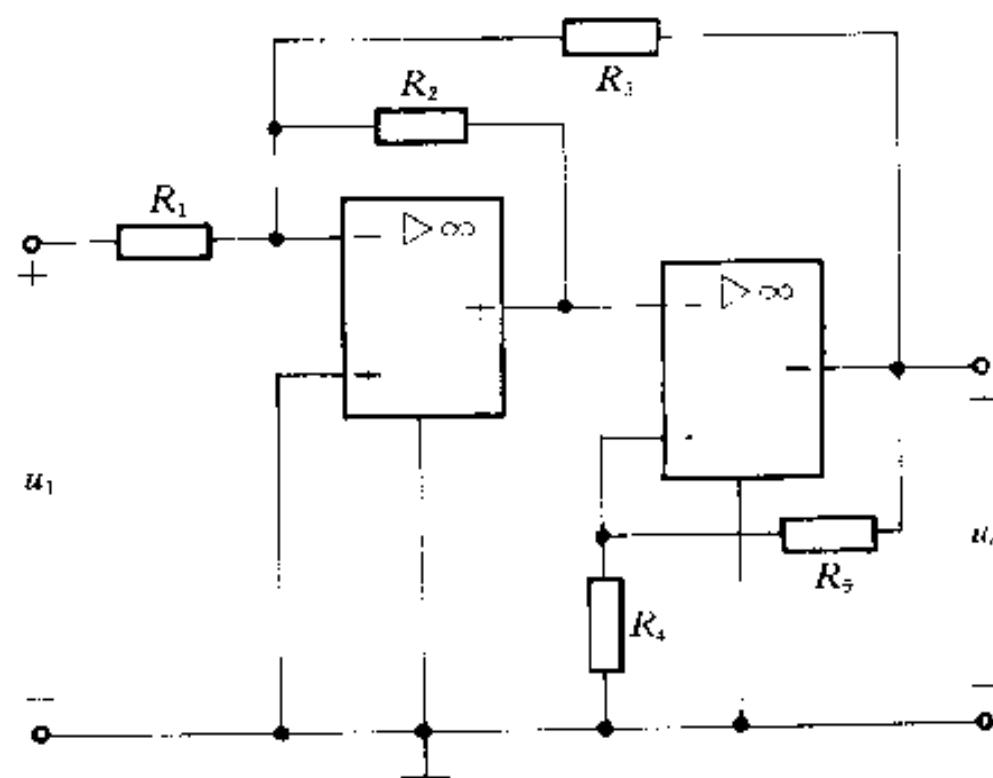
题 5·2 图

5·3 求图示电路的输出电压与输入电压之比 $\frac{u_o}{u_1}$



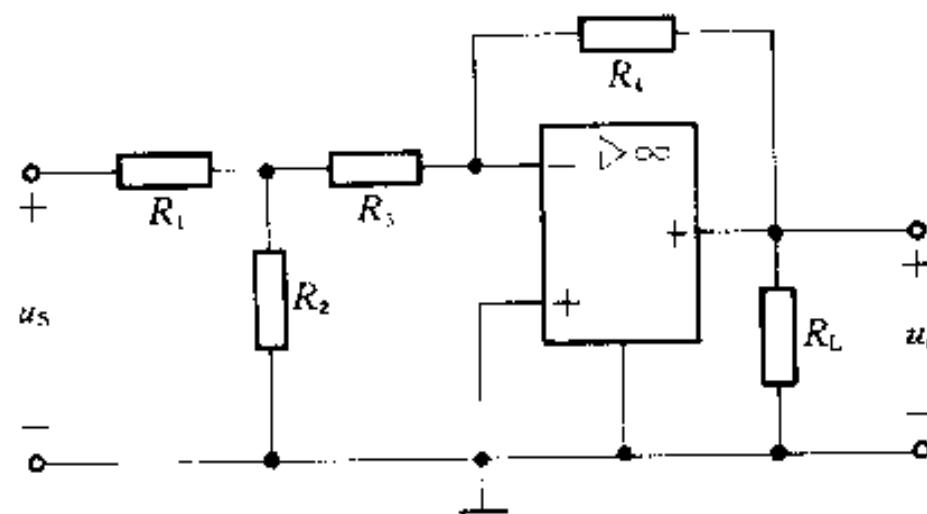
题 5-3 图

5-4 求图示电路的电压比值 $\frac{u_o}{u_1}$



题 5-4 图

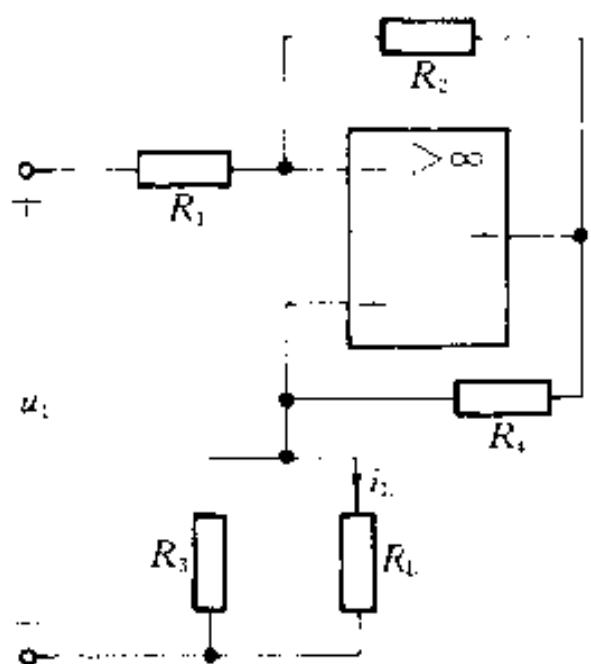
5-5 求图示电路的电压比 $\frac{u_o}{u_s}$



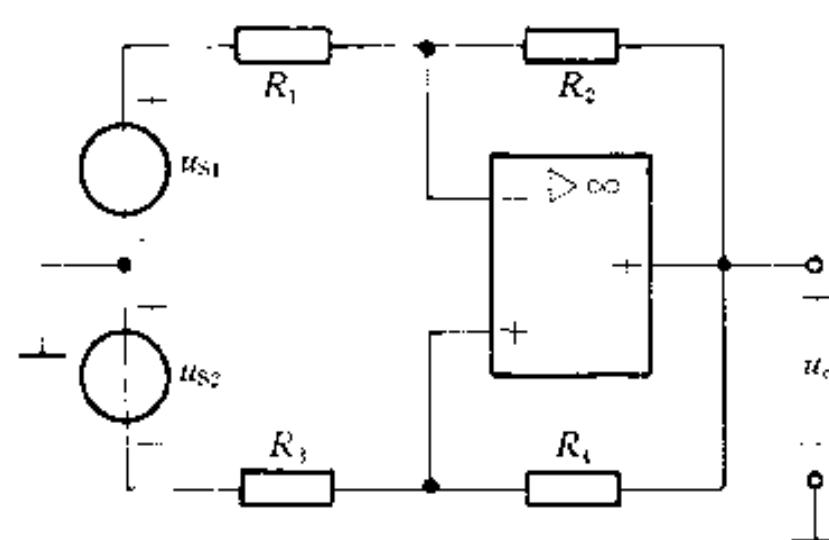
题 5-5 图

5-6 试证明图示电路若满足 $R_1 R_4 = R_2 R_3$, 则电流 i_1 仅决定于 u_1 而与负载电阻 R 无关。

5-7 求图示电路的 u_o 与 u_{si} , u_s 之间的关系。

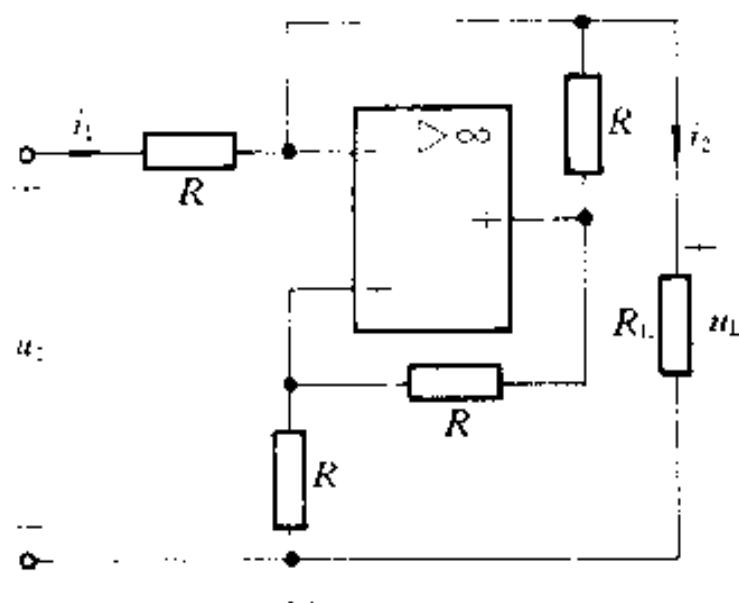


题 5、6 图



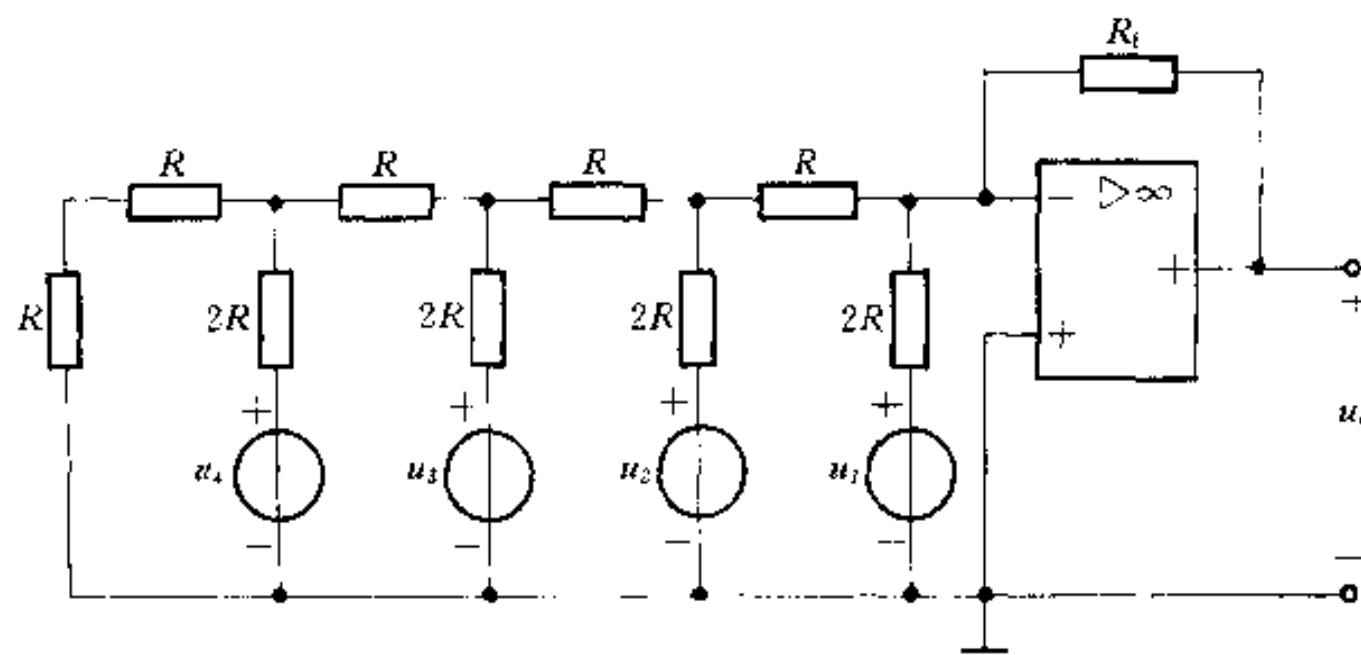
题 5-7 图

5-8 用运放可实现受控源,试将图示电路以一个受控源形式表示,并求其控制系数



題 5·8 圖

5-9 电路如图所示,设 $R_1=16R$,验证该电路的输出 u_o 与输入 $u_1 \sim u_4$ 之间的关系为 $u_o = -(8u_1 + 4u_2 + 2u_3 + u_4)$ 。[注:该电路为 4 位数字—模拟转换器,常用在信息处理、自动控制领域。该电路可将 4 位二进制数字信号转换成模拟信号,例如当数字信号为 1101 时,令 $u_1 = u_2 = u_3 = 1, u_4 = 0$ 则由关系式 $u_o = -(8u_1 + 4u_2 + 2u_3 + u_4)$ 得模拟信号 $u_o = -(8 + 4 + 0 + 1) = -13$ 。]



题 5-9 图

第六章

一阶电路

· 内容提要 ·

本章讨论可以用一阶微分方程描述的电路,主要是 RC 电路和 RL 电路,介绍一阶电路的经典法,以及一阶电路的时间常数的概念。还介绍零输入响应、零状态响应、全响应、瞬态分量、稳态分量、阶跃响应、冲激响应等重要概念。

§ 6-1 动态电路的方程及其初始条件

在第一章中介绍了电容元件和电感元件,这两种元件的电压和电流的约束关系是通过导数(或积分)表达的,所以称为动态元件,又称为储能元件。当电路中含电容和电感时,根据 KVL 和 KCL 以及元件的 VCR 建立的电路方程是以电流和电压为变量的微分方程或微分—积分方程,这不同于前几章讨论的电阻电路。

对于含有一个电容和一个电阻,或一个电感和一个电阻的电路,当电路的无源元件都是线性和时不变时,电路方程将是一阶线性常微分方程,相应的电路称为一阶电阻电容电路(简称为 RC 电路)或一阶电阻电感电路(简称为 RL 电路)。如果电路仅含一个动态元件,则可以把该动态元件以外的电阻电路用戴维宁定理或诺顿定理置换为电压源和电阻的串联组合,或电流源和电阻的并联组合,从而把它变换为 RC 电路或 RL 电路。这种电路称为一阶动态电路。

动态电路的一个特征是当电路的结构或元件的参数发生变化时(例如电路中电源或无源元件的断开或接入,信号的突然注入等),可能使电路改变原来的工作状态,转变到另一个工作状态,这种转变往往需要经历一个过程,在工程上称为过渡过程。

上述电路结构或参数变化引起的电路变化统称为“换路”,并认为换路是在 $t=0$ 时刻进行的。为了叙述方便,把换路前的最终时刻记为 $t=0_+$,把换路后

的最初时刻记为 $t = 0_-$, 换路经历的时间为 0_- 到 0_+ 。

分析动态电路的过渡过程的方法之一是: 根据 KCL、KVL 和支路的 VCR 建立描述电路的方程, 建立的方程是以时间为自变量的线性常微分方程, 然后求解常微分方程, 从而得到电路所求变量(电压或电流)。此方法称为经典法, 它是一种在时间域中进行的分析方法。

用经典法求解常微分方程时, 必须根据电路的初始条件确定解答中的积分常数。设描述电路动态过程的微分方程为 n 阶, 所谓初始条件就是指电路中所求变量(电压或电流)及其 $(n - 1)$ 阶导数在 $t = 0_-$ 时的值, 也称初始值。电容电压 u_C 和电感电流 i_L 的初始值, 即 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 称为独立的初始条件, 其余的称为非独立的初始条件。

对于线性电容, 在任意时刻 t 时, 它的电荷、电压与电流的关系为:

$$\begin{aligned} q(t) &= q(t_0) + \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi \\ u_C(t) &= u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi \end{aligned}$$

式中 q 、 u_C 和 i_C 分别为电容的电荷、电压和电流。令 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$, 则得:

$$q(0_+) = q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (6-1a)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (6-1b)$$

从式(6-1a)和式(6-1b)可以看出, 如果在换路前后, 即 0_- 到 0_+ 的瞬间, 电流 $i_C(t)$ 为有限值, 则式(6-1a)和式(6-1b)中右方的积分项将为零, 此时电容上的电荷和电压就不发生跃变, 即:

$$q(0_+) = q(0_-) \quad (6-2a)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (6-2b)$$

对于一个在 $t = 0_-$ 储存电荷为 $q(0_-)$, 电压为 $u_C(0_-) = U_0$ 的电容, 在换路瞬间不发生跃变的情况下, 有 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, 可见在换路的瞬间, 电容可视为一个电压值为 U_0 的电压源。同理, 对于一个在 $t = 0_-$ 不带电荷的电容, 在换路瞬间不发生跃变的情况下, 有 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 在换路瞬间电容相当于短路。

线性电感的磁通链与电流的关系为:

$$\begin{aligned} \Psi_L(t) &= \Psi_L(t_0) + \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \\ i_L(t) &= i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \end{aligned}$$

令 $t_0 = 0$, $t = 0$, 有:

$$\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} u_L dt \quad (6-3a)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L dt \quad (6-3b)$$

如果从 0_- 到 0_+ 瞬间, 电压 $u_L(t)$ 为有限值, 式中右方的积分项将为零, 此时电感中的磁通链和电流不发生跃变, 即:

$$\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) \quad (6-4a)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (6-4b)$$

对于 $t = 0$ 时电流为 I_0 的电感, 在换路瞬间不发生跃变的情况下, 有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$, 此电感在换路瞬间可视为一个电流值为 I_0 的电流源。同理, 对于 $t = 0$ 时电流为零的电感, 在换路瞬间不发生跃变的情况下有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$, 此电感在换路瞬间相当于开路。

式(6-2a)、(6-2b)和式(6-4a)、(6-4b)分别说明在换路前后电容电流和电感电压为有限值的条件下, 换路前后瞬间电容电压和电感电流不能跃变。

一个动态电路的独立初始条件为电容电压 $u_C(0_+)$ 和电感电流 $i_L(0_+)$, 一般可以根据它们在 $t = 0_-$ 时的值(即电路发生换路前的状态) $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 确定。该电路的非独立初始条件, 即电阻的电压或电流、电容电流、电感电压等则需要通过已知的独立初始条件求得。

例 6-1 图 6-1 所示电路中直流电压源的电压为 U_0 。当电路中的电压和电流恒定不变时打开开关 S。试求 $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 和 $u_{R_2}(0_+)$ 。

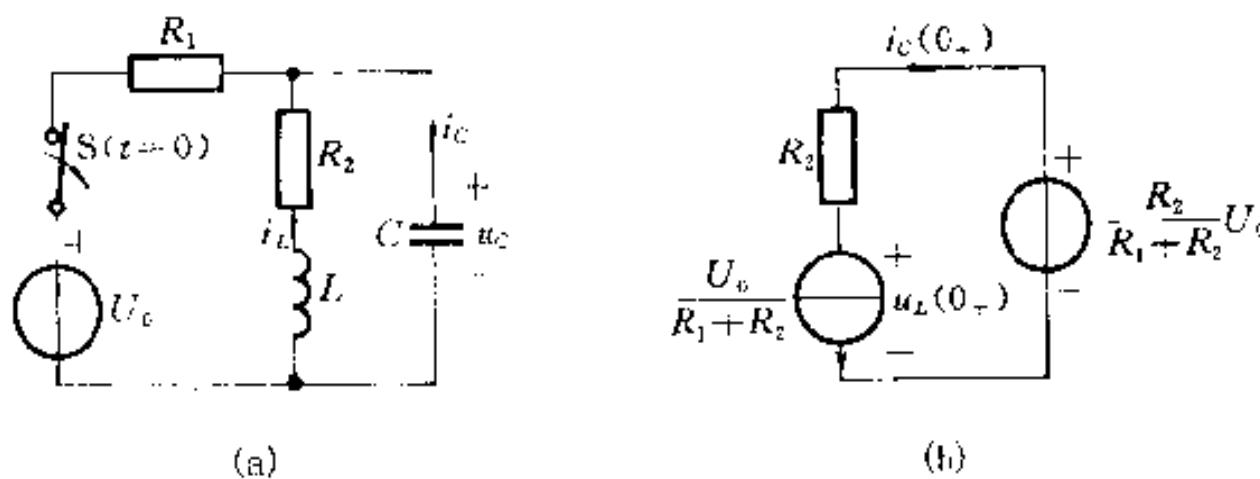


图 6-1 例 6-1 图

解 可以根据 $t = 0_-$ 时刻的电路状态计算 $u_C(0_-)$ 和 $u_L(0_-)$ 。由于开关打开前, 电路中的电压和电流已恒定不变, 故有:

$$\left(\frac{du_C}{dt} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{di_L}{dt} \right)_0 = 0$$

所以电容电流和电感电压均为零($i_C = C \frac{du_C}{dt}, u_L = L \frac{di_L}{dt}$), 即此时刻的电容相当于开路, 电感相当于短路。所以:

$$u_C(0_-) = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_L(0_-) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

该电路在换路时, i_L 和 u_C 都不会跃变, 所以有 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。为了求得 $t = 0_+$ 时刻的其他初始值, 可以把已知的 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 分别以电压源和电流源替代, 得到 $t = 0_+$ 时的等效电路如图 6-1(b) 所示。可以求出:

$$i_C(0_+) = \frac{-U_0}{R_1 + R_2} = -i_L(0_+)$$

$$u_{R_2}(0_+) = -R_2 i_L(0_+) = -\frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$u_L(0_+) = 0$$

§ 6-2 一阶电路的零输入响应

零输入响应就是动态电路在没有外施激励时, 由电路中动态元件的初始储能引起的响应。

首先讨论 RC 电路的零输入响应。在图 6-2 所示 RC 电路中, 开关 S 闭合前, 电容 C 已充电, 其电压 $u_C = U_0$, 如图所示。开关闭合后, 电容储存的能量将通过电阻以热能形式释放出来。现把开关动作时刻取为计时起点 ($t = 0$)。开关闭合后, 即 $t \geq 0_+$ 时, 根据 KVL 可得

$$u_R - u_C = 0$$

而 $u_R = Ri$, 将 $i = -C \frac{du_C}{dt}$ 代入上述方程, 有

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

这是一阶齐次微分方程, 初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, 令此方程的通解为 $u_C = Ae^{pt}$, 代入上式后有

$$(RCp + 1)Ae^{pt} = 0$$

相应的特征方程为

$$RCp + 1 = 0$$

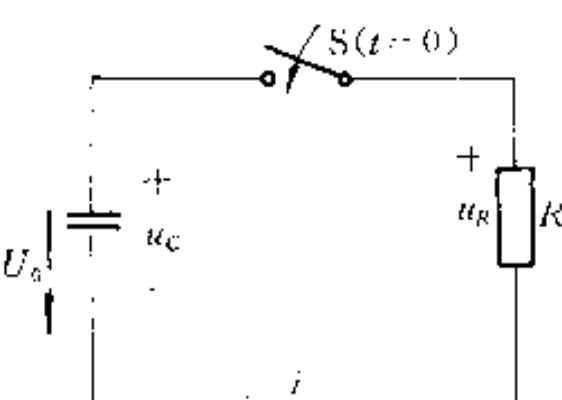


图 6-2 RC 电路的零输入响应

特征根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

根据 $u_C(0_+) = u_C(0^-) = U_0$, 以此代入 $u_C = Ae^{pt}$, 则可求得积分常数 $A = u_C(0_+) = U_0$ 。

这样, 求得满足初始值的微分方程的解为

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{1}{RC}t} = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

这就是放电过程中电容电压 u_C 的表达式。

电路中的电流为

$$\begin{aligned} i &= -C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{d}{dt}(U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}) \\ &= -C \left(-\frac{1}{RC} \right) U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned}$$

电阻上的电压

$$u_R = u_C = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

从以上表达式可以看出, 电压 u_C 、 u_R 及电流 i 都是按照同样的指数规律衰减的。它们衰减的快慢取决于指数中 $-\frac{1}{RC}$ 的大小。由于 $p = -\frac{1}{RC}$, 这是电路特征方程的特征根, 仅取决于电路的结构和元件的参数。当电阻的单位为 Ω , 电容的单位为 F 时, 乘积 RC 的单位为 s , 它称为 RC 电路的时间常数, 用 τ 表示。引入 τ 后, 电容电压 u_C 和电流 i 可以分别表示为:

$$\begin{aligned} u_C &= U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i &= \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

τ 的大小反映了一阶电路过渡过程的进展速度, 它是反映过渡过程特性的一个重要的量。可以计算得:

$$t=0 \text{ 时}, u_C(0) = U_0 e^0 = U_0$$

$$t=\tau \text{ 时}, u_C(\tau) = U_0 e^{-1} = 0.368 U_0$$

零输入响应在任一时刻 t_0 的值, 经过一个时间常数 τ 可以表示为

$$\begin{aligned} u_C(t_0 + \tau) &= U_0 e^{-(t_0 + \tau)/\tau} \\ &= U_0 e^{-1} e^{-t_0/\tau} \\ &= e^{-1} u_C(t_0) \\ &= 0.368 u_C(t_0) \end{aligned}$$

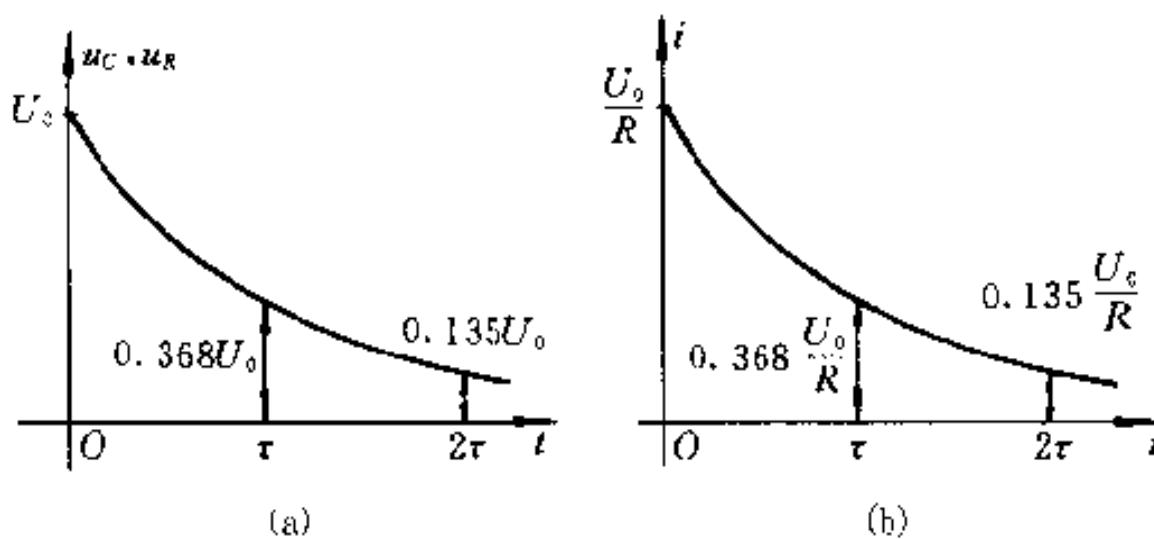
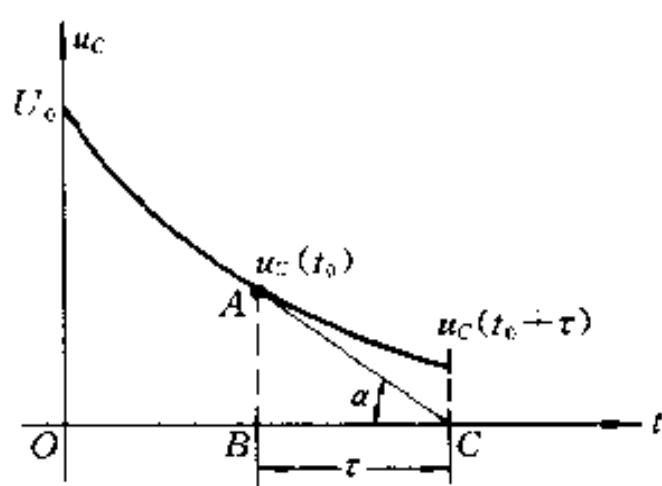
即经过一个时间常数 τ 后, 衰减了 63.2%, 或为原值的 36.8%。 $t = 2\tau, t = 3\tau, t = 4\tau, \dots$ 时刻的电容电压值列于表 6-1 中。

表 6-1

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	...	∞
$u_c(t)$	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.018U_0$	$0.0067U_0$...	0

从上表可见,在理论上要经过无限长的时间 u_c 才能衰减为零值。但工程上一般认为换路后,经过 $3\tau \sim 5\tau$ 时间过渡过程即告结束。

图 6-3(a)、(b)所示曲线为 u_c 、 u_R 和 i 随时间变化的曲线。时间常数 τ 的大小,还可以从 u_c 或 i_c 的曲线上用几何方法求得。在图 6-4 中,取电容电压 u_c 的曲线上任意一点 A,通过 A 点作切线 AC,则图中的次切距

图 6-3 u_c 、 u_R 和 i 随时间变化的曲线图 6-4 时间常数 τ 的几何意义

$$\tau = \frac{AB}{\tan \alpha} = \frac{u_c(t)}{-\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=t_0}} = \frac{U_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{\frac{1}{\tau} U_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}} = \tau$$

即在时间坐标上次切距的长度等于时间常数 τ 。这说明曲线上任意一点,如果以该点的斜率为固定变化率衰减,经过 τ 时间为零值。

在放电过程中,电容不断放出能量为电阻所消耗;最后,原来储存在电容中的电场能量全部为电阻吸收而转换成热能。即

$$\begin{aligned}
 W_R &= \int_0^\infty i^2(t) R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt \\
 &= \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{1}{2} C U_0^2 (e^{-\frac{2t}{RC}}) \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{1}{2} C U_0^2
 \end{aligned}$$

例 6-2 图 6-5(a) 所示电路中开关 S 原在位置 1, 且电路已达稳态。 $t=0$ 时开关由 1 合向 2, 试求 $t \geq 0$ 时的电流 $i(t)$ 。

解 首先求出:

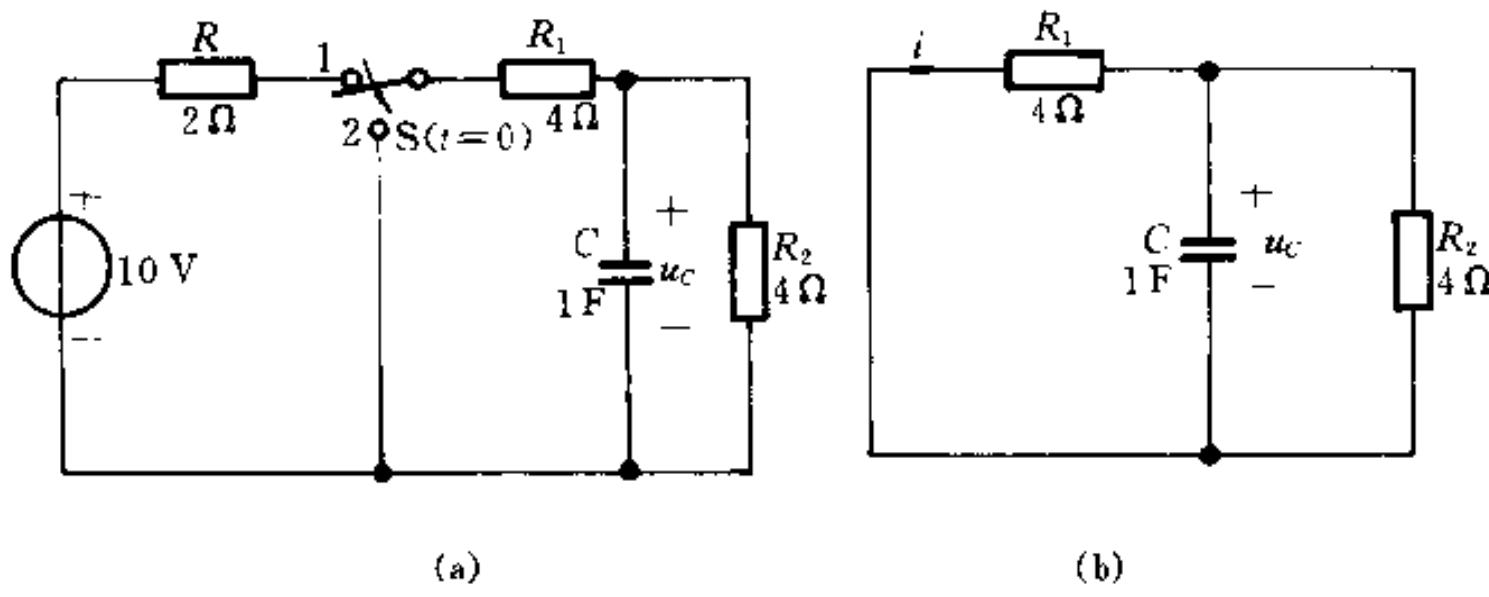


图 6-5 例 6-2 的图

$$u_C(0_-) = \frac{10 \times 4}{2 + 4 + 4} V = 4 V$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4 V$$

换路后, 电路如图 6-5(b) 所示, 电容通过电阻 R_1, R_2 放电, 由于 R_1, R_2 为并联, 设等效电阻为 R' , 有:

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2 \Omega$$

$$\tau = R' C = 2 s$$

所以:

$$u_C = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 4 e^{-0.5t} V$$

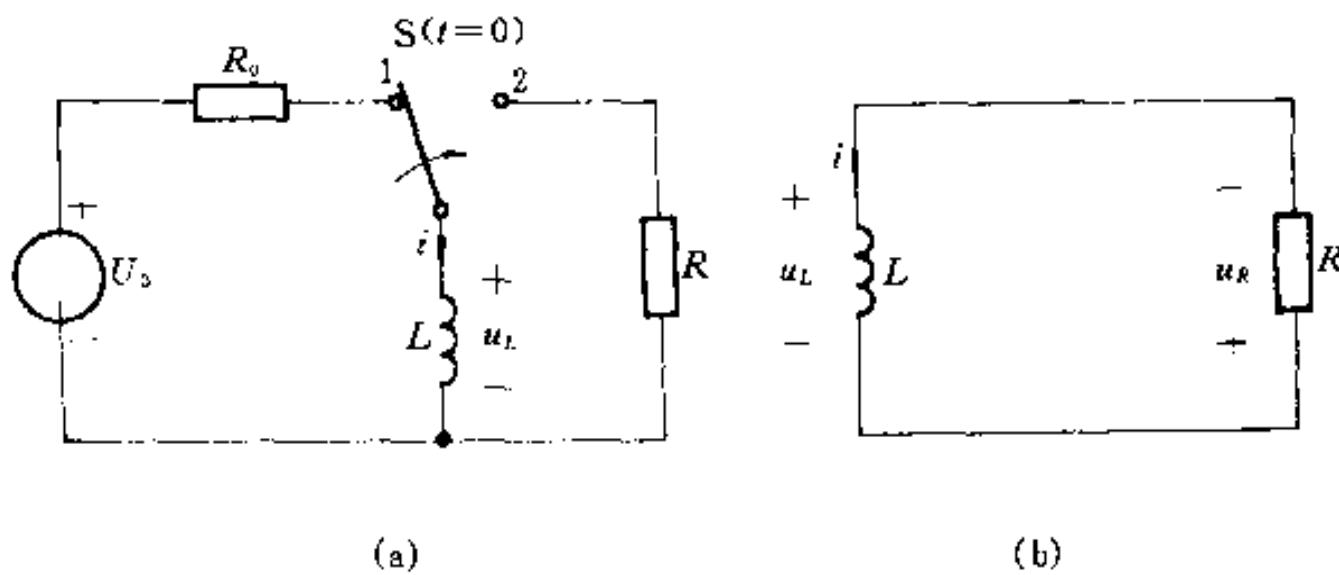
$$i = -\frac{u_C(t)}{4} = -e^{-0.5t} A$$

现在讨论 RL 电路的零输入响应。图 6-6 所示电路在开关 S 动作之前电压和电流已恒定不变, 电感中有电流 $I_0 = \frac{U_0}{R_0} = i(0_-)$ 。在 $t=0$ 时开关由 1 合到 2, 具有初始电流 I_0 的电感 L 和电阻 R 相连接, 构成一个闭合回路, 如图 6-6(b)。在 $t>0$ 时, 根据 KVL, 有

$$u_R + u_L = 0$$

而 $u_R = Ri$, $u_L = L \frac{di}{dt}$, 电路的微分方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$



(a)

(b)

图 6-6 RL 电路的零输入响应

这也是一个一阶齐次微分方程。令 $i = Ae^{pt}$, 就可以得到相应的特征方程为

$$Lp + R = 0$$

其特征根为

$$p = -\frac{R}{L}$$

故电流为

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

根据 $i(0_+) = i(0_-) = I_0$, 代入上式可求得 $A = i(0_+) = I_0$, 而有

$$i = i(0_+)e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

电阻和电感上电压分别为:

$$u_R = Ri = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

与 RC 电路类似, 令 $\tau = \frac{L}{R}$, 称为 RL 电路的时间常数, 则上述各式可写为:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

图 6-7 所示曲线分别为 i 、 u_L 和 u_R 随时间变化的曲线。

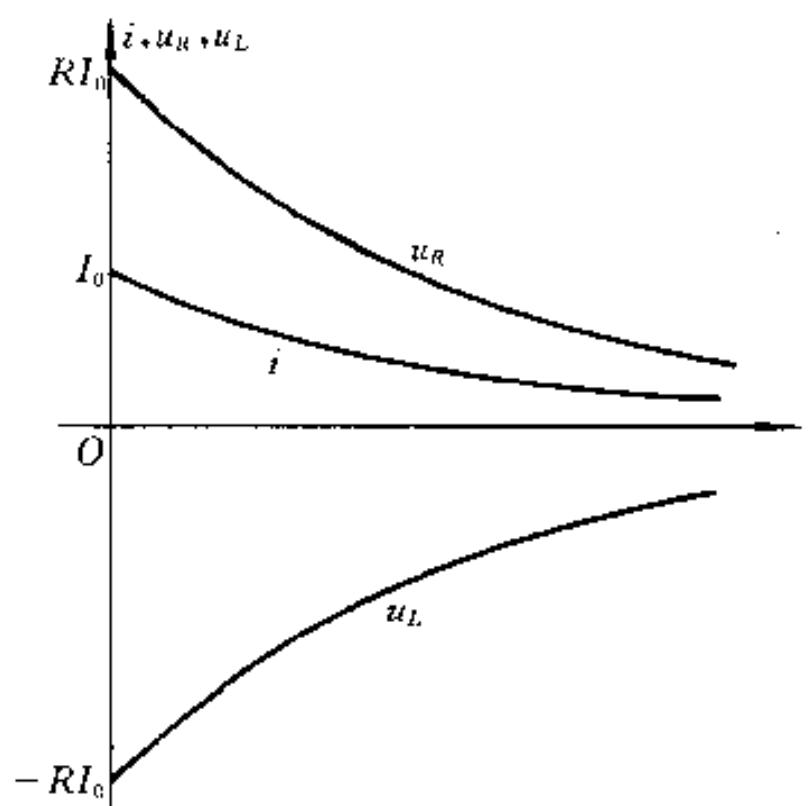


图 6-7 RL 电路的零输入响应曲线

例 6-3 图 6-8 所示是一台 300 kW 汽轮发电机的励磁回路。已知励磁绕组的电阻 $R = 0.189 \Omega$, 电感 $L = 0.398 \text{ H}$, 直流电压 $U = 35 \text{ V}$ 。电压表的量程为 50 V , 内阻 $R_v = 5 \text{ k}\Omega$ 。开关未断开时, 电路中电流已经恒定不变。在 $t = 0$ 时, 断开开关。求: (1) 电阻、电感回路的时间常数; (2) 电流 i 的初始值和开关断开后电流 i 的最终值; (3) 电流 i 和电压表处的电压 u_v ; (4) 开关刚断开时, 电压表处的电压。

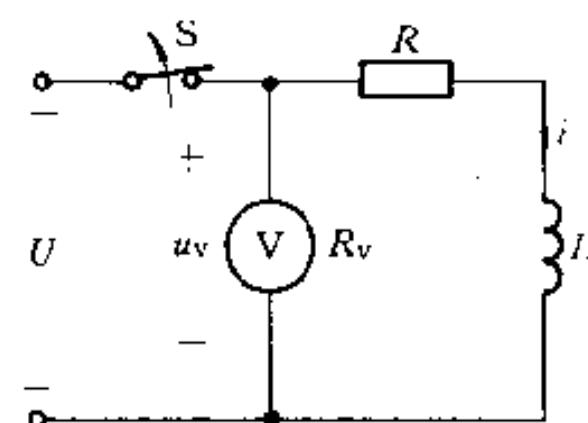


图 6-8 例 6-3 图

解 (1) 时间常数

$$\tau = \frac{L}{R + R_v} = \frac{0.398}{0.189 + 5 \times 10^3} \text{ s} = 79.6 \mu\text{s}$$

(2) 开关断开前, 由于电流已恒定不变, 电感 L 两端电压为零, 故

$$i(0_+) = \frac{U}{R} = \frac{35}{0.189} \text{ A} = 185.2 \text{ A}$$

由于电感中电流不能跃变, 电流的初始值 $i(0_+) = i(0_-) = 185.2 \text{ A}$ 。

(3) 按 $i = i(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$, 可得

$$i = 185.2 e^{-\frac{t}{79.6}} \text{ A}$$

电压表处的电压

$$u_v = -R_v i = -5 \times 10^3 \times 185.2 e^{-\frac{t}{79.6}} \text{ V} = -926 e^{-\frac{t}{79.6}} \text{ kV}$$

(4) 开关刚断开时, 电压表处的电压

$$u_v(0_+) = -926 \text{ kV}$$

在这个时刻电压表要承受很高的电压,其绝对值将远大于直流电源的电压 U ,而且初始瞬间的电流也很大,可能损坏电压表。由此可见,切断电感电流时必须考虑磁场能量的释放。如果磁场能量较大,而又必须在短时间内完成电流的切断,则必须考虑如何熄灭因此而出现的电弧(一般出现在开关处)的问题。

§ 6-3 一阶电路的零状态响应

零状态响应就是电路在零初始状态下(动态元件初始储能为零)由外施激励引起的响应。

图 6-9 所示 RC 串联电路,开关 S 闭合前电路处于零初始状态,即 $u_c(0_-) = 0$ 。在 $t=0$ 时刻,开关 S 闭合,电路接入直流电压源 U_s 。根据 KVL,有

$$u_R + u_c = U_s$$

把 $u_R = Ri$, $i = C \frac{du_c}{dt}$ 代入,得电路的微分方程

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s$$

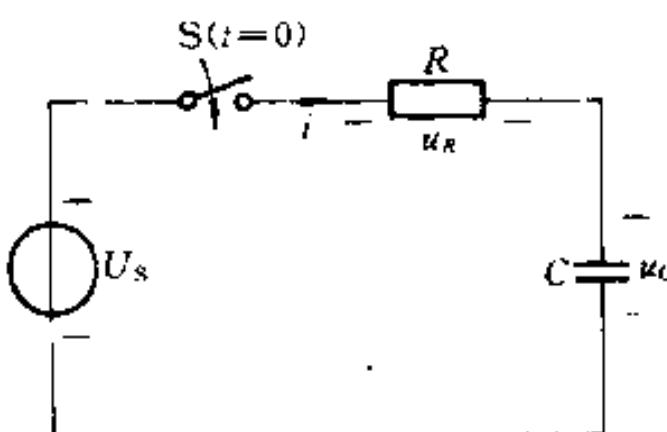


图 6-9 RC 电路的零状态响应

此方程为一阶线性非齐次方程。方程的解由两个分量组成,即非齐次方程的特解 u'_c 和对应的齐次方程的通解 u''_c ,即

$$u_c = u'_c + u''_c$$

不难求得特解为

$$u'_c = U_s$$

而齐次方程 $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$ 的通解为

$$u''_c = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中 $\tau = RC$ 。因此

$$u_c = U_s + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始值,可求得

$$A = -U_s$$

而:

$$u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{\tau}} = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

u_c 和 i 的波形如图 6-10。电压 u_c 的两个分量 u'_c 和 u''_c 也示于该图中。

u_c 以指数形式趋近于它的最终恒定值 U_s , 到达该值后, 电压和电流不再变化, 电容相当于开路, 电流为零。此时电路达到稳定状态(简称稳态), 所以在这种情况下, 特解 $u'_c (= U_s)$ 称为稳态分量。同时可以看出 u'_c 与外施激励的变化规律有关, 所以又称为强制分量。非齐次方程的通解 u''_c 则由于其变化规律取决于特征根而与外施激励无关, 所以称为自由分量。自由分量按指数规律衰减, 最终趋于零, 所以又称为瞬态分量。对电流 i 可作类似解释。

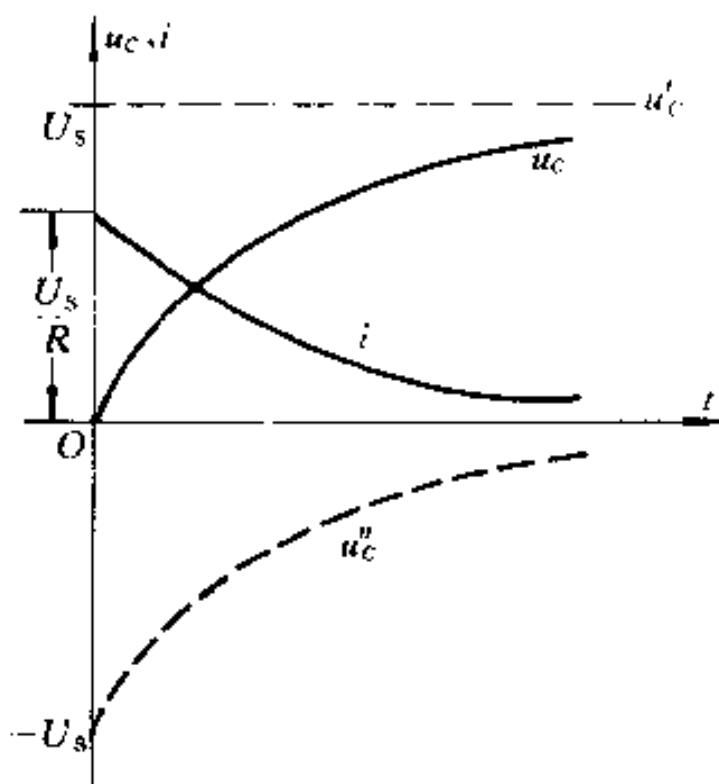


图 6-10 u_c 、 i 的波形

RC 电路接通直流电压源的过程也即是电源通过电阻对电容充电的过程。在充电过程中, 电源供给的能量一部分转换成电场能量储存于电容中, 一部分被电阻转变为热能消耗, 电阻消耗的电能为

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt \\ &= \frac{U_s^2}{R} \left(-\frac{RC}{2} \right) e^{-\frac{2}{RC} t} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} C U_s^2 \end{aligned}$$

从上式可见, 不论电路中电容 C 和电阻 R 的数值为多少, 在充电过程中, 电源提供的能量只有一半转换成电场能量储存于电容中, 另一半则为电阻所消耗, 也就是说, 充电效率只有 50%。

图 6-11 所示为 RL 电路, 直流电流源的电流为 I_s , 在开关打开前电感中

的电流为零。开关打开后 $i_L(0_+) = i_L(0^-) = 0$, 电路的响应为零状态响应。电路的微分方程为

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_S$$

初始条件为 $i_L(0_+) = 0$ 。电流 i_L 的通解为

$$\begin{aligned} i_L &= i_L' + A e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= i_L' + A e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

式中 $\tau = \frac{L}{R}$ 为时间常数。

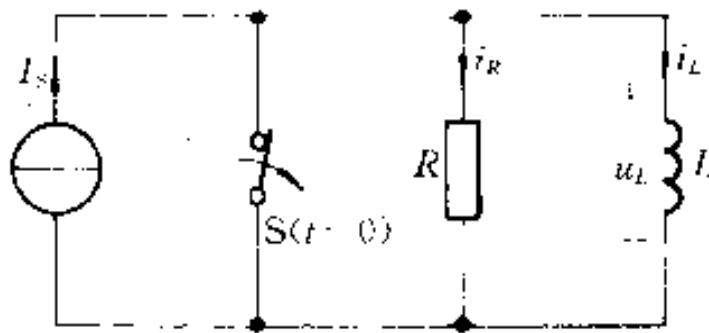


图 6-11 RL 电路的零状态响应

特解 $i_L' = I_S$, 积分常数 $A = -i_L'(0_+) = -I_S$ 。所以

$$i_L = I_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

下面以 RL 电路为例, 讨论在正弦电压激励下的零状态响应。

图 6-12(a) 所示为 RL 串联电路, 外施激励为正弦电压 $u_S = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$, 其中 ϕ_u 为接通电路时外施电压的初相角, 它决定于电路的接通时刻, 所以又称为接入相位角或合闸角。接通后电路方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

其通解为 $i = i' + i''$, 其中自由分量 $i'' = A e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{L}{R}$ 为时间常数。 i' 应为方程

$$L \frac{di'}{dt} + Ri' = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

的特解^①。为了求得此特解, 设特解为

$$i' = I_m \cos(\omega t + \theta)$$

把它代入上列微分方程, 有

$$RI_m \cos(\omega t + \theta) - \omega L I_m \sin(\omega t + \theta) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

① i' 的求解方法将在第九章详细介绍。

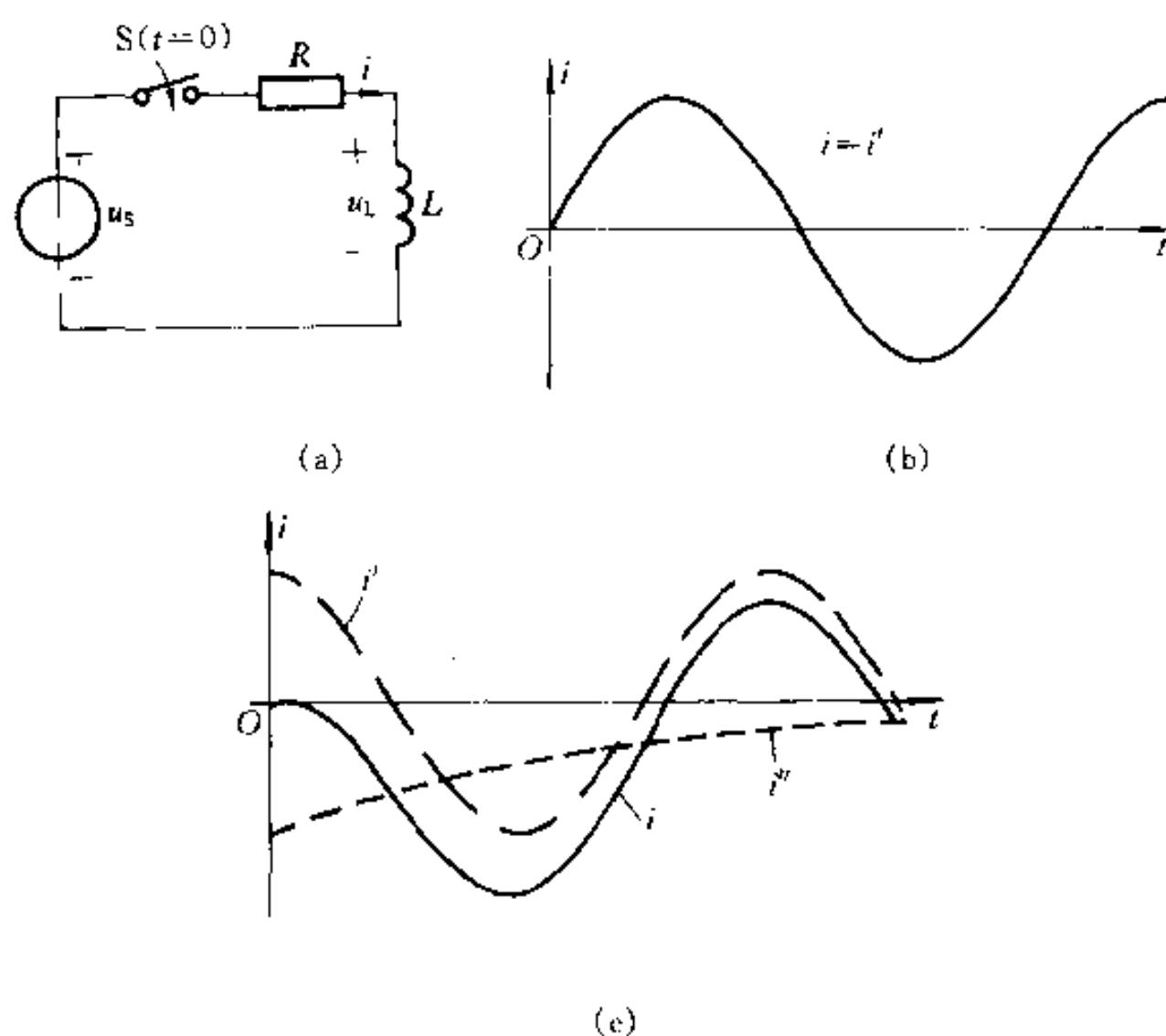


图 6-12 正弦激励下的 RL 电路

可以用待定系数法确定 I_m 和 θ 。引入 $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$, 有:

$$\sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

再令 $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, 上式左方可写为

$$\begin{aligned}
 & I_m [R\cos(\omega t + \theta) - \omega L \sin(\omega t + \theta)] \\
 &= I_m |Z| \left[\cos(\omega t + \theta) \frac{R}{|Z|} - \sin(\omega t + \theta) \frac{\omega L}{|Z|} \right] \\
 &= I_m |Z| [\cos(\omega t + \theta) \cos \varphi - \sin(\omega t + \theta) \sin \varphi] \\
 &\equiv I_m |Z| \cos(\omega t + \theta + \varphi)
 \end{aligned}$$

于是，得

$$J_- |Z| \cos(\omega t + \theta + \phi) = U_- \cos(\omega t + \phi_+)$$

因此可求得待定常数：

$$L_+ |Z| = U_\infty$$

$$\theta + \phi = \psi$$

或。

$$I_m = \frac{U_m}{|Z|} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\theta = \psi_u - \varphi$$

所以,特解 i' 为

$$i' = \frac{U_m}{|Z|} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi)$$

方程的通解为

$$i = \frac{U_m}{|Z|} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始条件,由于 $i(0_+) = i(0_-) = 0$,有

$$0 = \frac{U_m}{|Z|} \cos(\psi_u - \varphi) + A$$

于是

$$A = -\frac{U_m}{|Z|} \cos(\psi_u - \varphi)$$

因而电流 i 为

$$i = \frac{U_m}{|Z|} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{U_m}{|Z|} \cos(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电阻上的电压为

$$u_R = Ri = \frac{RU_m}{|Z|} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{RU_m}{|Z|} \cos(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电感上的电压为

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_m \frac{\omega L}{|Z|} \cos\left(\omega t + \psi_u - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + U_m \frac{R}{|Z|} \cos(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

由以上可见,方程的特解或强制分量与外施正弦激励按同频率的正弦规律变化,自由分量则随时间增长趋于零。最终只剩下强制分量。所以说这种电路需经历一个过渡过程,然后达到稳定状态。自由分量与开关闭合的时刻有关。

当开关闭合时,若有 $\psi_u = \varphi - \frac{\pi}{2}$, 则

$$A = -\frac{U_m}{|Z|} \cos(\psi_u - \varphi) = 0$$

所以:

$$i'' = 0$$

$$i = i' = \frac{U_m}{|Z|} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

故开关闭合后,电路中不发生过渡过程而立即进入稳定状态, i 的波形见图 6-12(b)。

如果开关闭合时,有 $\phi_u = \varphi$, 则有

$$\begin{aligned} A &= -\frac{U_m}{|Z|} \cos(\phi_u - \varphi) \\ &= -\frac{U_m}{|Z|} \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} i'' &= -\frac{U_m}{|Z|} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i &= \frac{U_m}{|Z|} \cos(\omega t) - \frac{U_m}{|Z|} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

电流 i 的波形如图 6-12(c) 所示。从上式和波形图中可以看出,当电路的时间常数很大,则 i'' 衰减极其缓慢。这种情况下接通电路后,大约经过半个周期的时间,电流的最大瞬时值的绝对值将接近稳态电流振幅的两倍。

可见,RL 串联电路与正弦电压接通后,在初始值一定的条件下,电路的过渡过程与开关动作的时刻有关。

§ 6-4 一阶电路的全响应

当一个非零初始状态的一阶电路受到激励时,电路的响应称为全响应。

图 6-13 所示电路为已充电的电容经过电阻接到直流电压源 U_s 。设电容原有电压为 U_0 , 开关 S 闭合后, 根据 KVL 有

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s$$

初始条件

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0$$

方程的通解

$$u_c = u'_c + u''_c$$

取换路后达到稳定状态的电容电压为特解, 则

$$u'_c = U_s$$

u''_c 为上述方程对应的齐次方程的通解

$$u''_c = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中 $\tau = RC$ 为电路的时间常数, 所以有

$$u_c = U_s + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

根据初始条件 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0$, 得积分常数为

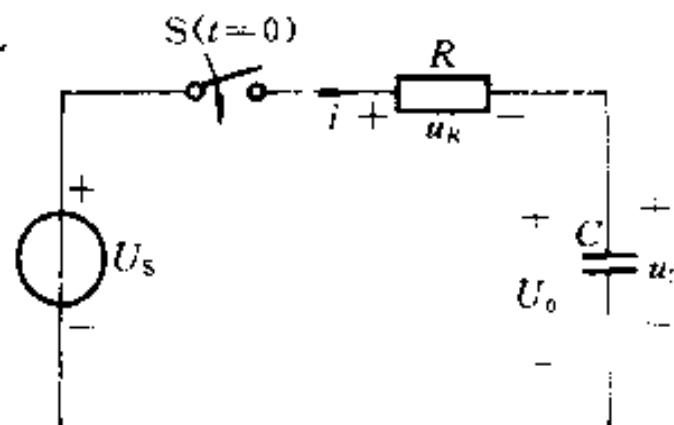


图 6-13 一阶电路的全响应

$$A = U_0 - U_s$$

所以电容电压

$$u_c = U_s + (U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-5)$$

这就是电容电压在 $t \geq 0$ 时的全响应。

把式(6-5)改写成

$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

上式右边的第一项正是电路的零输入响应,因为如果把电压源置零,电路的响应恰好就是 $U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。右边的第二项则是电路的零状态响应,因为它正好是 $u_c(0_+) = 0$ 时的响应。这说明一阶电路中,全响应是零输入响应和零状态响应的叠加,这是线性电路叠加性质的体现。所以一般情况下,一阶电路的全响应可以表示为

$$\text{全响应} = (\text{零输入响应}) + (\text{零状态响应})$$

从式(6-5)又可以看出,右边的第一项是稳态分量,它等于外施的直流电压,而第二项则是瞬态分量,它随时间的增长而按指数规律逐渐衰减为零。所以全响应又可以表示为

$$\text{全响应} = (\text{稳态分量}) + (\text{瞬态分量})$$

无论是把全响应分解为零状态响应和零输入响应之叠加,还是分解为瞬态分量和稳态分量之叠加,都不过是不同分法,真正的响应则是全响应,是由初始值、特解和时间常数三个要素决定的。在直流电源激励下,若初始值为 $f(0_+)$,特解为稳态解 $f(\infty)$,时间常数为 τ ,则全响应 $f(t)$ 可写为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-6)$$

只要知道 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 这三个要素,就可以根据式(6-6)直接写出直流激励下一阶电路的全响应,这种方法称为三要素法。

一阶电路在正弦电源激励下,由于电路的特解 $f'(t)$ 是时间的正弦函数,则上述公式可写为

$$f(t) = f'(t) + [f(0_+) - f'(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-7)$$

其中 $f'(t)$ 是特解为稳态响应, $f'(0_+)$ 是 $t = 0_+$ 时稳态响应的初始值, $f(0_+)$ 与 τ 的含义与前述相同。

前已指出,如果电路中仅含一个储能元件(L 或 C),电路的其他部分由电阻和独立电源或受控源连接而成,这种电路仍是一阶电路。在求解这类电路时,可以把储能元件以外的部分,应用戴维宁定理或诺顿定理进行等效变换,然后求得储能元件上的电压和电流。如果还要求其他支路的电压和电流,则可以按照变换前的原电路进行。

例 6-4 图 6-14(a)所示电路中 $U_s = 10 \text{ V}$, $I_s = 2 \text{ A}$, $R = 2 \Omega$, $L = 4 \text{ H}$. 试求 S 闭合后电路中的电流 i_L 和 i .

解 戴维宁等效电路如图(b), 其中:

$$U_\infty = U_s - RI_s = (10 - 2 \times 2) \text{ V} = 6 \text{ V}$$

$$R_{\text{eq}} = R = 2 \Omega$$

$$i_L(0_+) = i_L(0^-) = -2 \text{ A}$$

特解:

$$i_L' = \frac{6}{2} \text{ A} = 3 \text{ A}$$

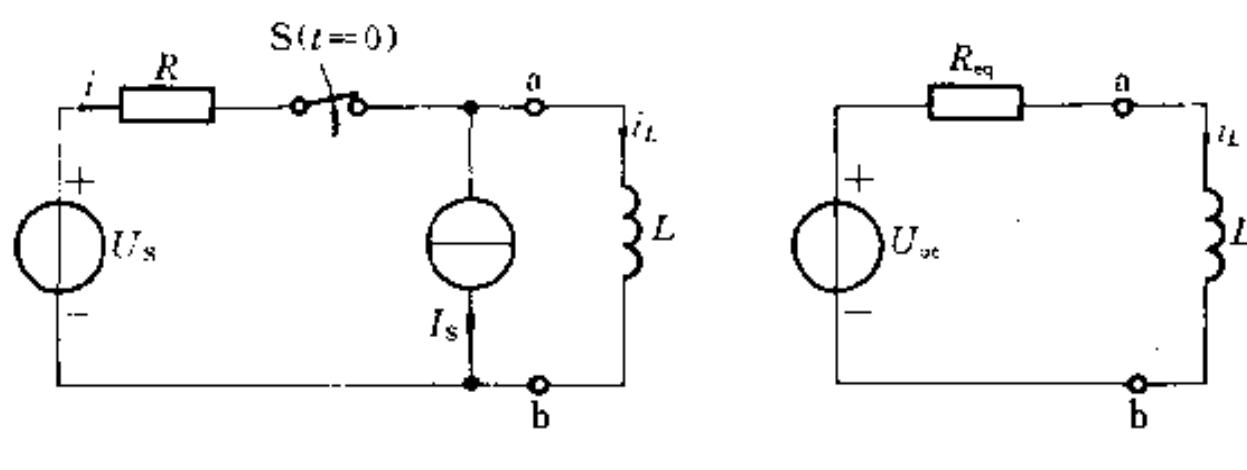
$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = 2 \text{ s}$$

按式(6-6)解得

$$\begin{aligned} i_L &= [3 + (-2 - 3)e^{-\frac{1}{2}t}] \text{ A} \\ &= (3 - 5e^{-0.5t}) \text{ A} \end{aligned}$$

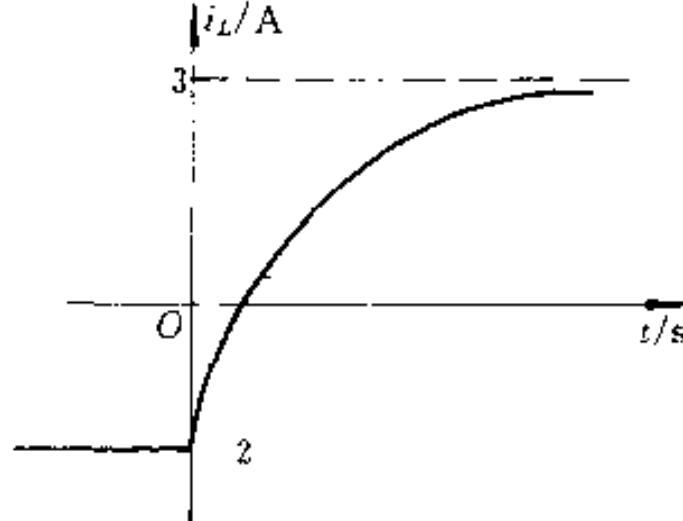
i_L 随时间变化的曲线如图 6-14(c)所示。电流 i 可以根据 KCL 求得为

$$i = I_s + i_L = (5 - 5e^{-0.5t}) \text{ A}$$



(a)

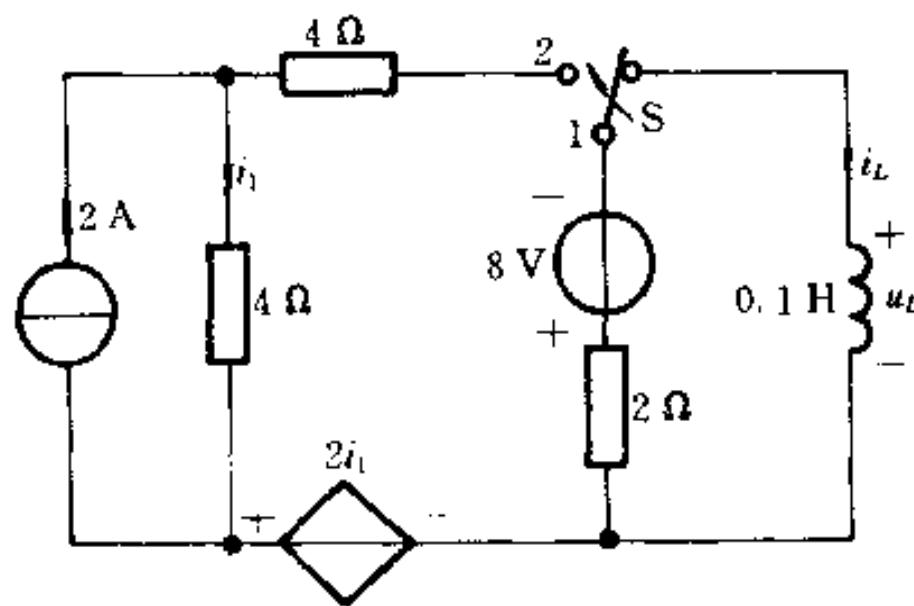
(b)



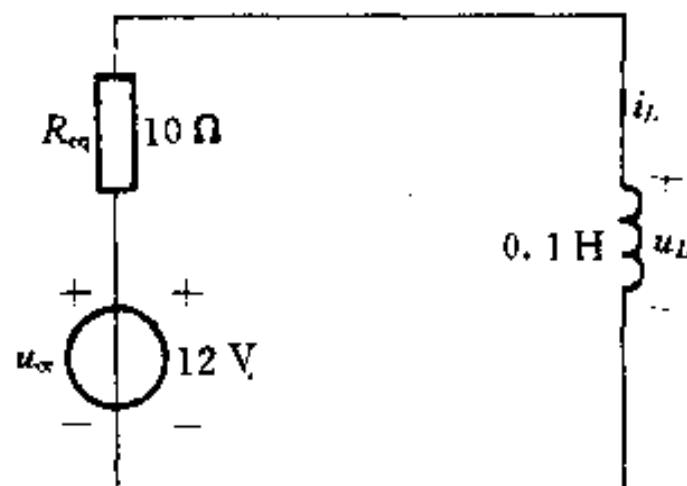
(c)

图 6-14 例 6-4 的图

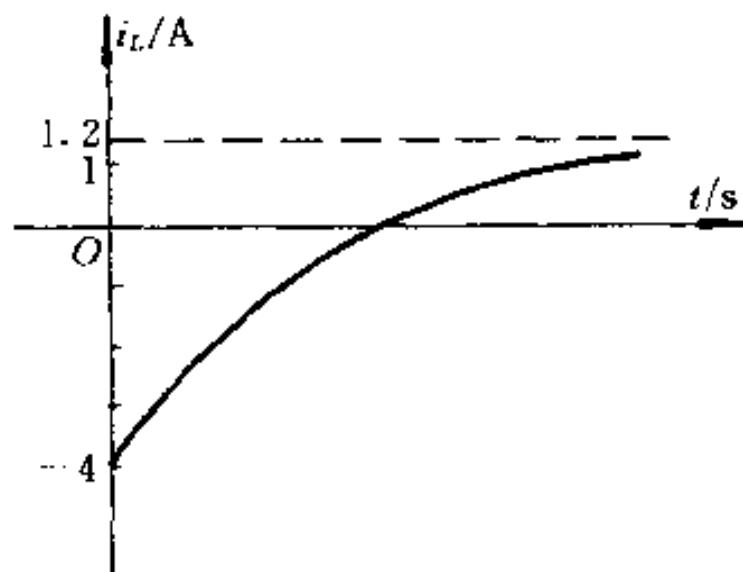
例 6-5 电路如图 6-15(a)所示,开关合在 1 时已达稳定状态。 $t=0$ 时,开关由 1 合向 2,求 $t \geq 0$ 时的电压 u_L 。



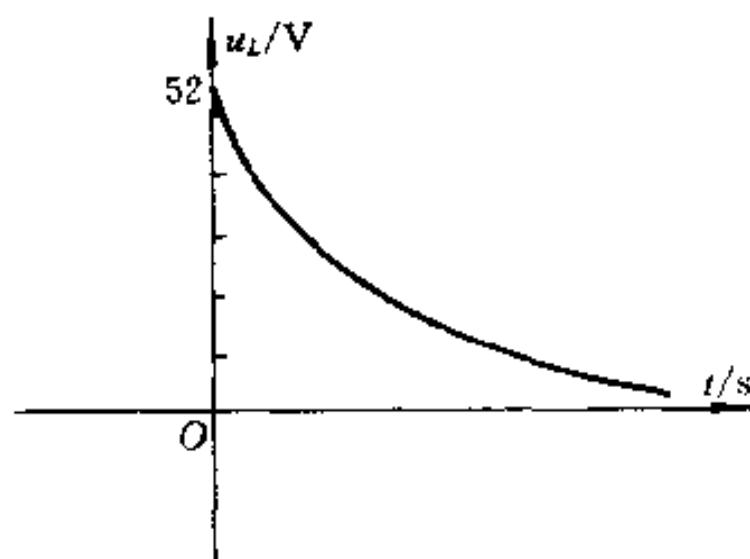
(a)



(b)



(c)



(d)

图 6-15 例 6-5 图

$$\text{解 } i_L(0_+) = i_L(0_-) = -\frac{8}{2} \text{ A} = -4 \text{ A}$$

换路后,应用戴维宁定理得出等效电路如图 6-15(b)所示,其中 $u_{\infty} = 12 \text{ V}$, $R_{\infty} = 10 \Omega$ 。可直接应用式(6-6)求得电路的全响应:

$$i_L(0_+) = -4 \text{ A}$$

$$i_L(\infty) = 1.2 \text{ A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{\infty}} = 0.01 \text{ s}$$

所以:

$$i_L = [1.2 + (-4 - 1.2)e^{-\frac{t}{0.01}}} \text{ A}$$

$$= (1.2 - 5.2e^{-100t}) \text{ A}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = 52e^{-100t} \text{ V}$$

电流 i_L 和电压 u_L 的波形见图 6-15(c)、(d)。

§ 6-5 一阶电路的阶跃响应

电路对于单位阶跃函数输入的零状态响应称为单位阶跃响应。

单位阶跃函数是一种奇异函数,见图 6-16(a),可定义为

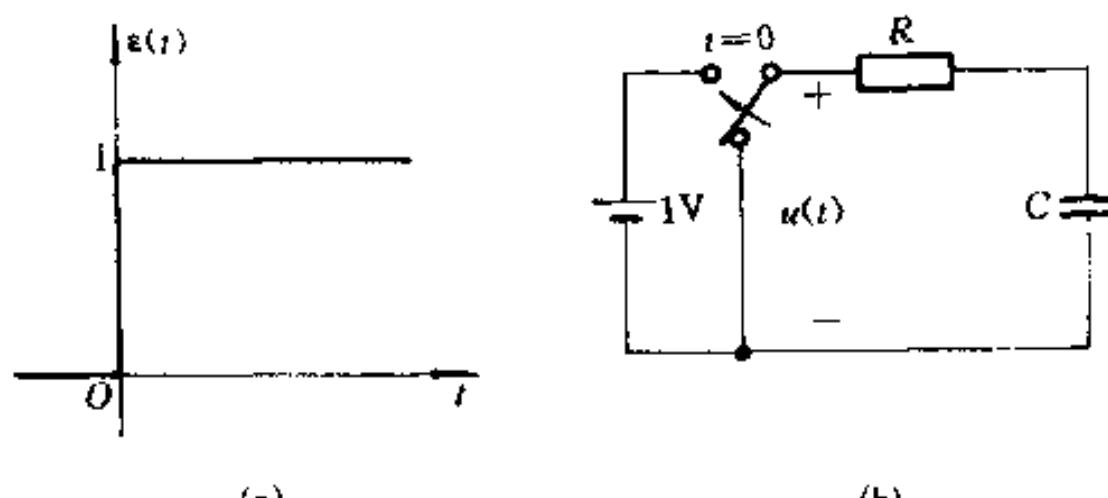


图 6-16 单位阶跃函数

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t \geq 0, \end{cases}$$

它在 $(0^-, 0^+)$ 时域内发生了单位阶跃。这个函数可以用来描述图 6-16(b) 所示开关动作,它表示在 $t = 0$ 时把电路接到单位直流电压。阶跃函数可以作为开关的数学模型,所以有时也称为开关函数。

定义任一时刻 t_0 起始的阶跃函数为

$$\epsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \leq t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

$\epsilon(t - t_0)$ 可看作是把 $\epsilon(t)$ 在时间轴上移动 t_0 后的结果, 如图 6-17 所示, 所以它是延迟的单位阶跃函数。

假设把电路在 $t = t_0$ 时接通到一个电流为 2 A 的直流电流源, 则此外施电流就可写为 $2\epsilon(t - t_0)$ A。

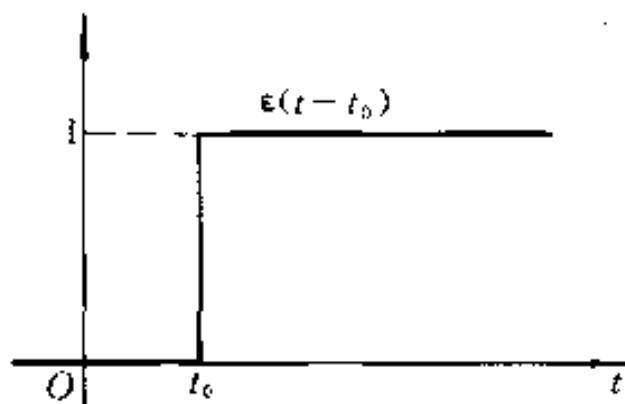


图 6-17 延迟的单位阶跃函数

单位阶跃函数还可用来“起始”任意一个 $f(t)$ 。设 $f(t)$ 是对所有 t 都有定义的一个任意函数, 则

$$f(t)\epsilon(t - t_0) = \begin{cases} f(t) & t \geq t_0 \\ 0 & t \leq t_0 \end{cases}$$

它的波形如图 6-18 所示。

对于一个如图 6-19(a)所示幅度为 1 的矩形脉冲, 可以把它看作由两个阶跃函数组成的, 如图 6-19(b)所示, 即

$$f(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t - t_0)$$

同理, 对于一个如图 6-19(c)所示矩形脉冲, 则可写为

$$f(t) = \epsilon(t - \tau_1) - \epsilon(t - \tau_2)$$

当电路的激励为单位阶跃 $\epsilon(t)$ V 或 $\epsilon(t)$ A 时, 相当于将电路在 $t = 0$ 时接通电压值为 1 V 的直流电压源或电流值为 1 A 的直流电流源。因此单位阶跃响应与直流激励的响应相同。用 $s(t)$ 表示单位阶跃响应。已知电路的 $s(t)$, 如果该电路的恒定激励为 $u_s(t) = U_0\epsilon(t)$ [或 $i_s(t) = I_0\epsilon(t)$], 则电路的零状态响应为 $U_0s(t)$ [或 $I_0s(t)$]。

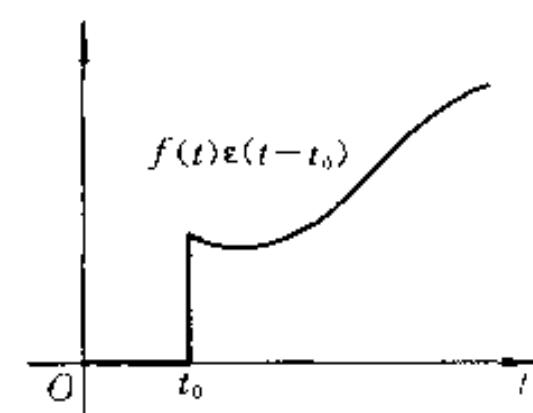
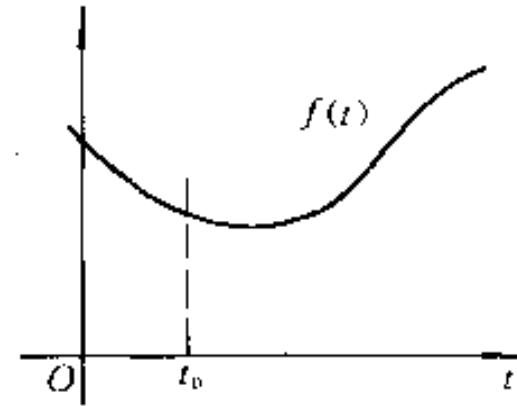


图 6-18 单位阶跃函数
的起始作用

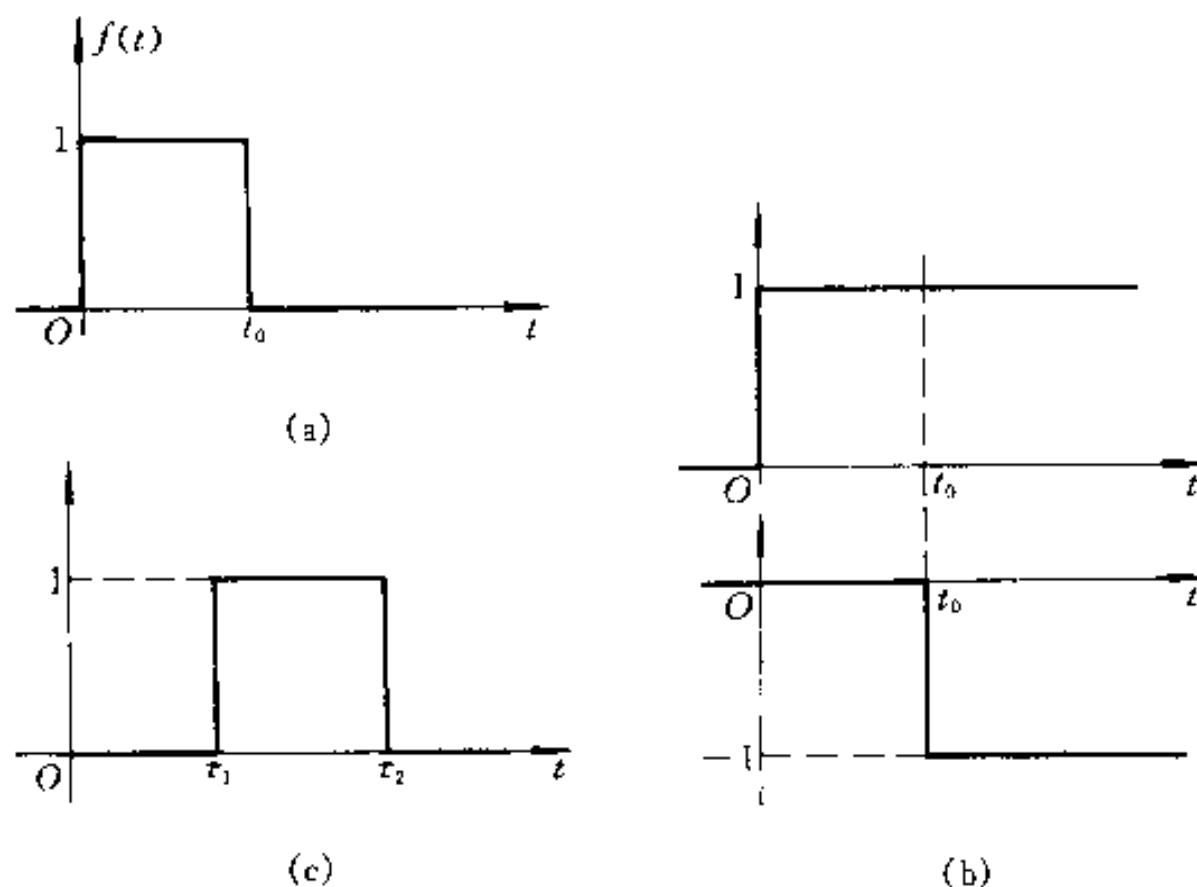


图 6-19 矩形脉冲的组成

例 6-6 图 6-20 所示电路,开关 S 合在位置 1 时电路已达稳定状态。 $t = 0$ 时,开关由位置 1 合向位置 2,在 $t = \tau = RC$ 时又由位置 2 合向位置 1,求 $t \geq 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。

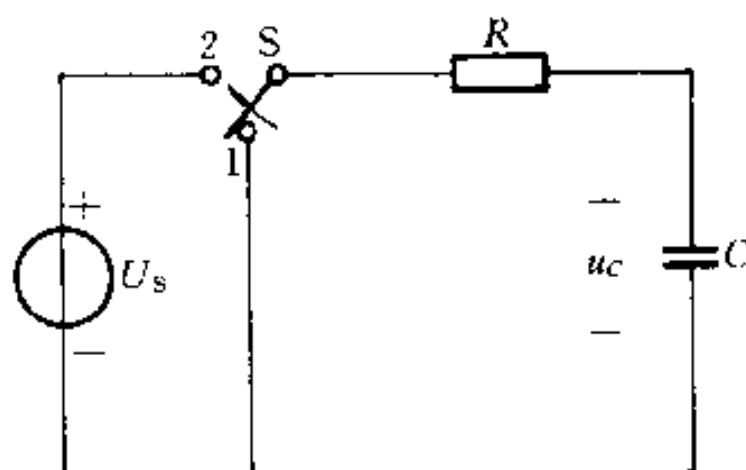


图 6-20 例 6-6 图

解 此题可用两种方法求解。

(1) 将电路的工作过程分段求解

在 $0 \leq t \leq \tau$ 区间为 RC 电路的零状态响应:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$u_C(t) = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \tau = RC$$

在 $\tau \leq t < \infty$ 区间为 RC 电路的零输入响应:

$$u(\tau) = U_s(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = 0.632 U_s$$

$$u_C(t) = 0.632 U_s e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}$$

(2) 用阶跃函数表示激励,求阶跃响应

根据开关的动作, 电路的激励 $u_s(t)$ 可以用图 6-21(a) 的矩形脉冲表示, 按图(b) 可写为

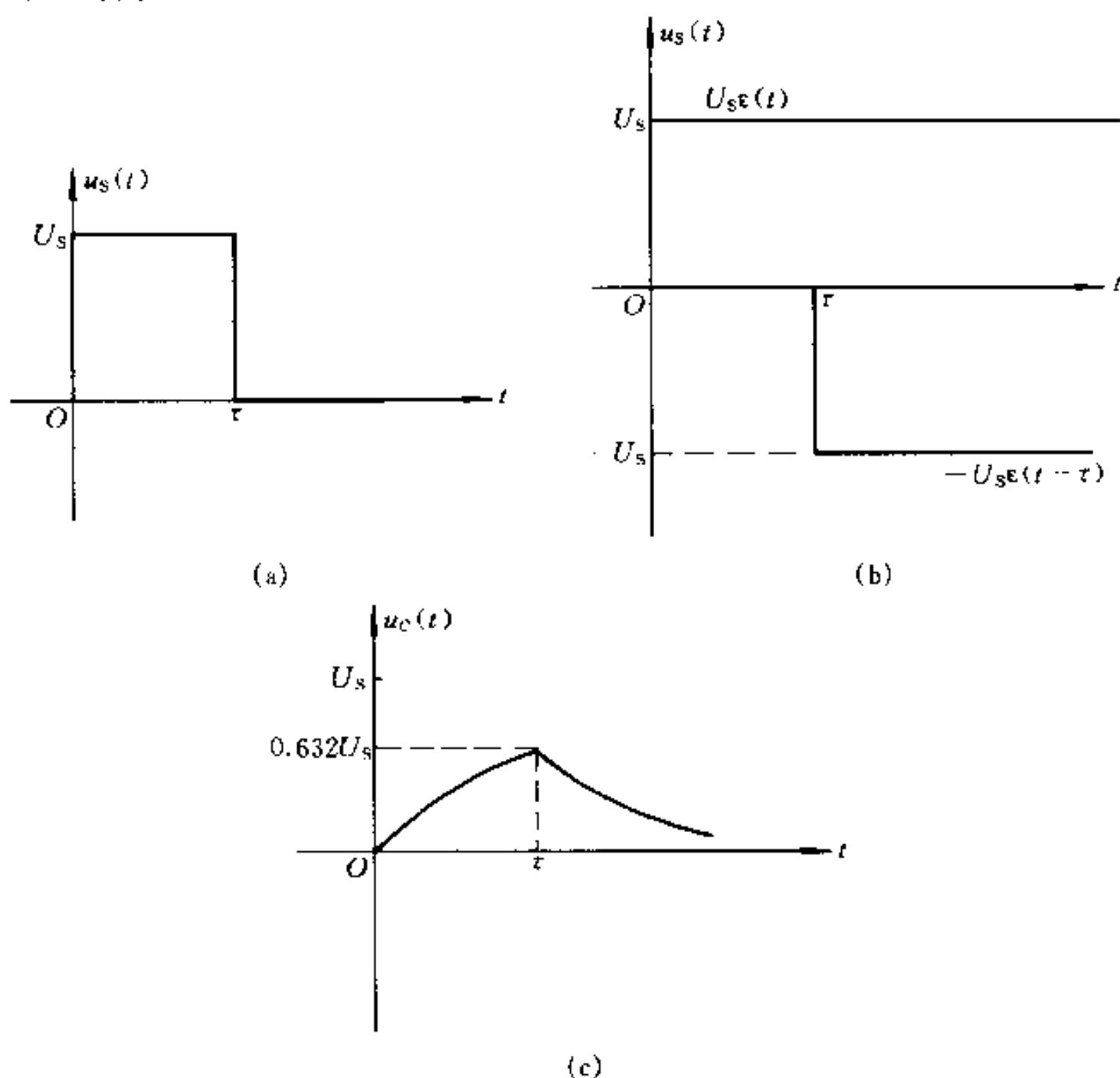


图 6-21 u_c 的波形

$$u_s(t) = U_s \epsilon(t) - U_s \epsilon(t - \tau)$$

RC 电路的单位阶跃响应为

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \epsilon(t)$$

故

$$u_c(t) = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \epsilon(t) + U_s [1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau}}] \epsilon(t - \tau)$$

其中第一项为阶跃响应, 第二项为延迟的阶跃响应。 $u_c(t)$ 的波形如图 6-21(c) 所示。

§ 6-6 一阶电路的冲激响应

电路对于单位冲激函数输入的零状态响应称为单位冲激响应。

单位冲激函数也是一种奇异函数, 可定义为:

$$\delta(t) = 0 \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

单位冲激函数又称为 δ 函数。它在 $t \neq 0$ 处为零,但在 $t = 0$ 处为奇异的。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 可以看作是单位脉冲函数的极限情况。图 6-22(a) 为一个单位矩形脉冲函数 $p_\Delta(t)$ 的波形。它的高为 $\frac{1}{\Delta}$, 宽为 Δ , 在保持矩形面积 $\Delta \cdot \frac{1}{\Delta} = 1$ 不变的情况下, 它的宽度越来越窄时, 它的高度越来越大。当脉冲宽度 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 脉冲高度 $\frac{1}{\Delta} \rightarrow \infty$, 在此极限情况下, 可以得到一个宽度趋于零, 幅度趋于无限大的面积仍为 1 的脉冲, 这就是单位冲激函数 $\delta(t)$, 可记为

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} p_\Delta(t) = \delta(t)$$

单位冲激函数的波形如图 6-22(b), 有时在箭头旁边注明“1”。强度为 K 的冲激函数可用图 6-22(c) 表示, 此时箭头旁边应注明 K 。

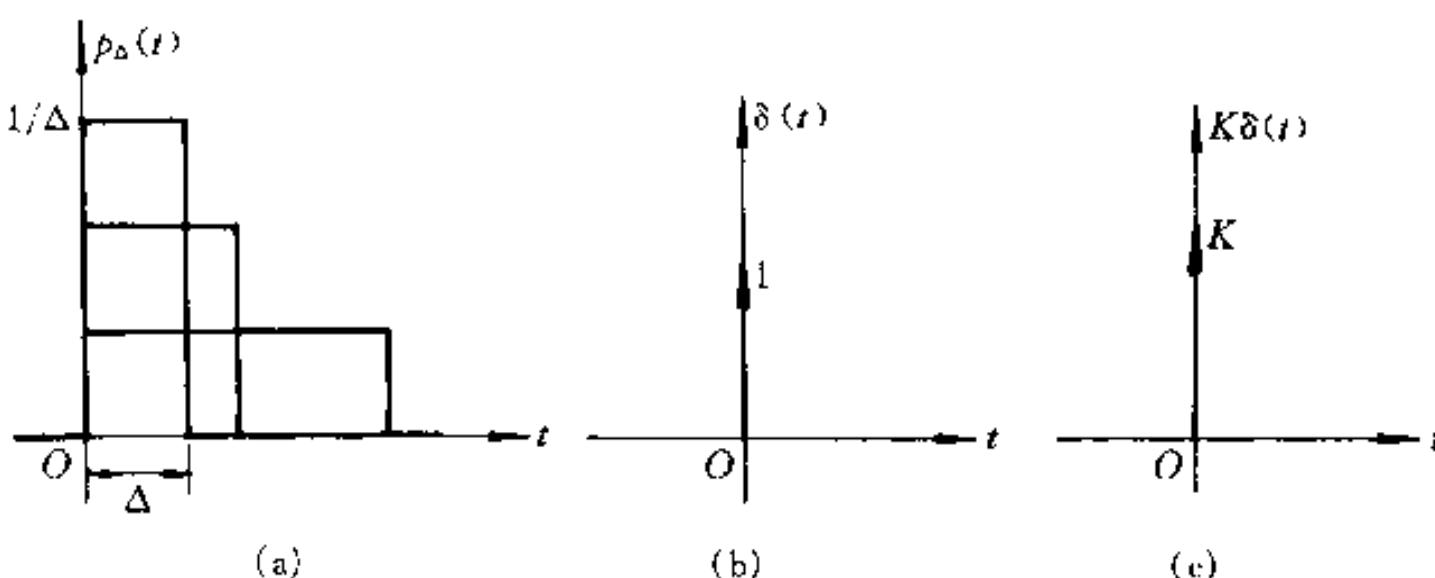


图 6-22 冲激函数

同在时间上延迟出现的单位阶跃函数一样, 可以把发生在 $t = t_0$ 时的单位冲激函数写为 $\delta(t - t_0)$, 还可以用 $K\delta(t - t_0)$ 表示一个强度为 K , 发生在 t_0 时刻的冲激函数。

冲激函数有如下两个主要性质:

(1) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 对时间的积分等于单位阶跃函数 $\epsilon(t)$, 即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = \epsilon(t)$$

反之, 阶跃函数 $\epsilon(t)$ 对时间的一阶导数等于冲激函数 $\delta(t)$, 即

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \delta(t) \quad (6 \cdot 8)$$

(2) 单位冲激函数的“筛分性质”

由于当 $t \neq 0$ 时, $\delta(t) = 0$, 所以对任意在 $t = 0$ 时连续的函数 $f(t)$, 将有

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

同理, 对于任意一个在 $t = t_0$ 时连续的函数 $f(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

这就是说, 冲激函数有把一个函数在某一时刻的值“筛”出来的本领, 所以称为“筛分”性质, 又称取样性质。

当把一个单位冲激电流 $\delta_i(t)$ (其单位为 A) 加到初始电压为零且 $C = 1$ F 的电容, 电容电压 u_C 为

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta_i(t)dt = \frac{1}{C} = 1 \text{ V}$$

这相当于单位冲激电流瞬时把电荷转移到电容上, 使电容电压从零跃变到 1 V。

同理, 如果把 1 个单位冲激电压 $\delta_u(t)$ (用 V 表示) 加到初始电流为零且 $L = 1$ H 的电感上, 则电感电流

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} \delta_u(t)dt = \frac{1}{L} = 1 \text{ A}$$

所以单位冲激电压瞬时在电感内建立了 1 A 的电流, 即电感电流从零值跃变到 1 A。

当冲激函数作用于零状态的一阶 RC 或 RL 电路, 在 $t = 0_-$ 到 0_+ 的区间内它使电容电压或电感电流发生跃变。 $t \geq 0_+$ 时, 冲激函数为零, 但 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 不为零, 电路中将产生相当于初始状态引起的零输入响应。所以, 一阶电路冲激响应的求解, 在于计算在冲激函数作用下的 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 的值。

图 6-23(a) 为一个在单位冲激电流 $\delta_i(t)$ 激励下的 RC 电路。可以用下述方法求得该电路的零状态响应。根据 KCL 有

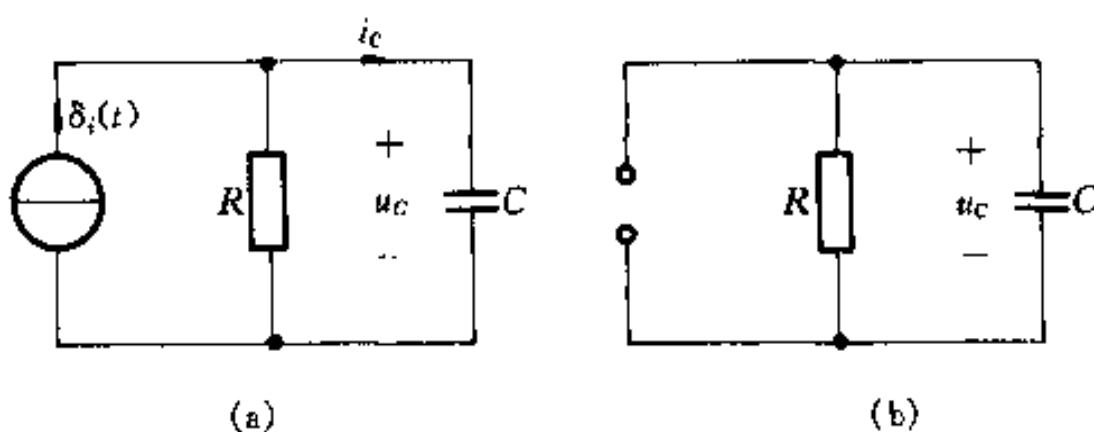


图 6-23 RC 电路的冲激响应

$$C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R} = \delta_i(t), t \geq 0.$$

而 $u_c(0_-) = 0$ 。

为了求 $u_c(0_+)$ 的值, 把上式在 0_- 与 0_+ 时间间隔内积分, 得

$$\int_{0_-}^{0_+} C \frac{du_c}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} \frac{u_c}{R} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta_i(t) dt$$

上式左方第二个积分仅在 u_c 为冲激函数时才不为零。但是如果 u_c 是冲激函数, 则 i_R 亦为冲激函数 ($i_R = \frac{u_c}{R}$), 而 $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ 将为冲激函数的一阶导数; 这样就不能满足 KCL, 即上式将不能成立, 因此 u_c 不可能是冲激函数。于是方程左方的第二个积分应为零, 从而得

$$C[u_c(0_+) - u_c(0_-)] = 1$$

或

$$u_c(0_+) = \frac{1}{C}$$

当 $t \geq 0_+$ 时, 冲激电流源相当于开路, 所以可以用图 6-23(b) 求得 $t \geq 0_+$ 时的电容电压为

$$u_c = u_c(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中 $\tau = RC$, 为给定 RC 电路的时间常数。

用相同的分析方法, 可求得图 6-24 所示 RL 电路在单位冲激电压 $\delta_u(t)$ 激励下的零状态响应 i_L 为

$$i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中 $\tau = \frac{L}{R}$ 为时间常数。

电感电流发生了跃变, 而电压 u_L 为

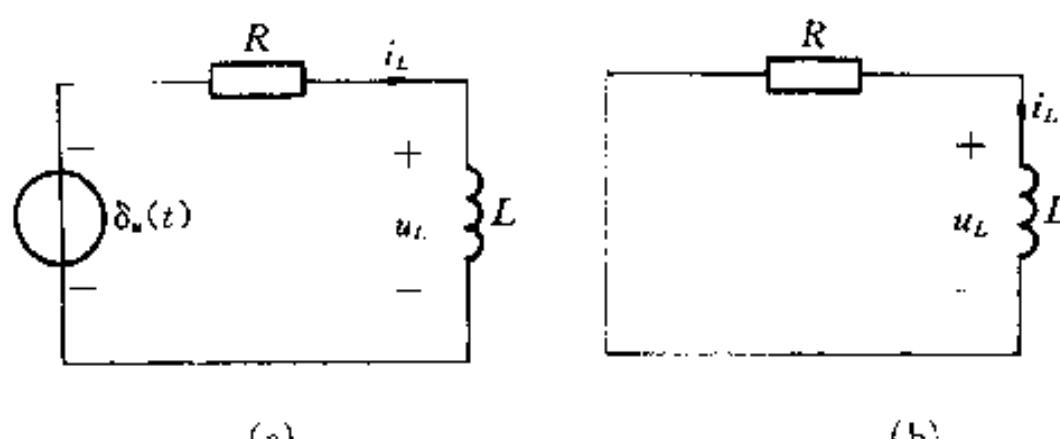


图 6-24 RL 电路的冲激响应

$$u_L = \delta_u(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

i_L 、 u_L 的波形见图 6-25(a)、(b), 注意 $t=0$ 到 $0+$ 的冲激和跃变情况。

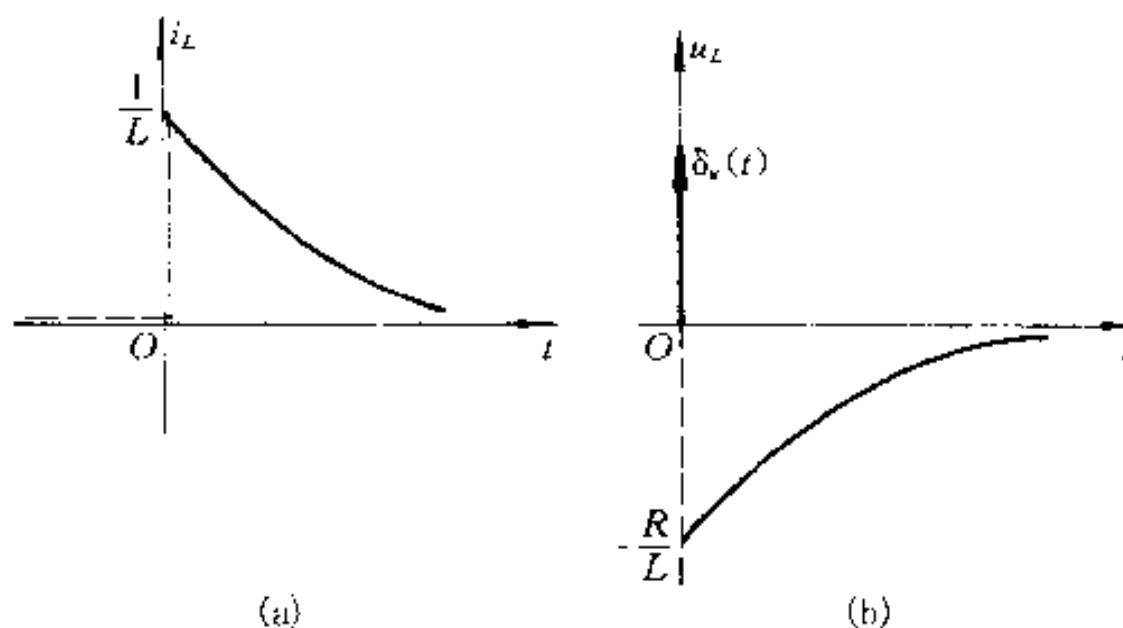


图 6-25 i_L 和 u_L 的波形

由于阶跃函数和冲激函数之间满足式(6-8)的关系,因此,线性电路中阶跃响应与冲激响应之间也具有一个重要关系。如果以 $s(t)$ 表示某一电路的阶跃响应,而 $h(t)$ 为同一电路的冲激响应,则两者之间存在下列数学关系:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$s(t) = \int h(t) dt$$

下面证明这一般关系。

按冲激函数的定义,有:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = \epsilon(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

对于一个线性电路,描述电路性状的微分方程为线性常系数方程。对于这种电路,如设激励为 $e(t)$ 时的响应为 $r(t)$,则当所加激励换为 $e(t)$ 的导数或积分时,所得响应必相应地为 $r(t)$ 的导数或积分。冲激激励是阶跃激励的一阶导数,因此冲激响应可以按阶跃响应的一阶导数求得。

图 6-23、6-24 所示电路,如按阶跃响应的一阶导数求冲激响应,可得到与上述相同的结果。

为了便于比较,表 6-2 给出了一些一阶电路的阶跃响应与冲激响应。

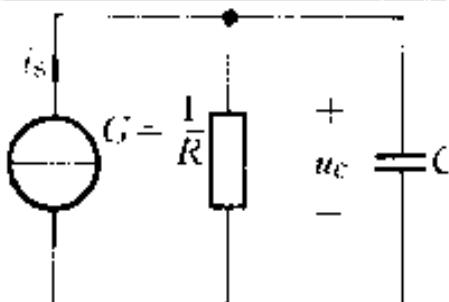
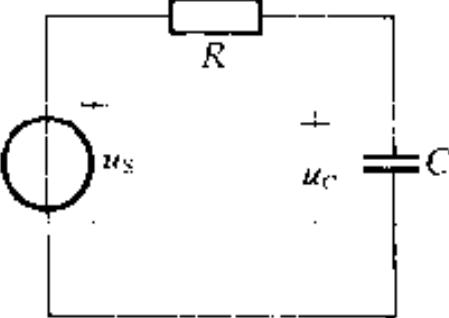
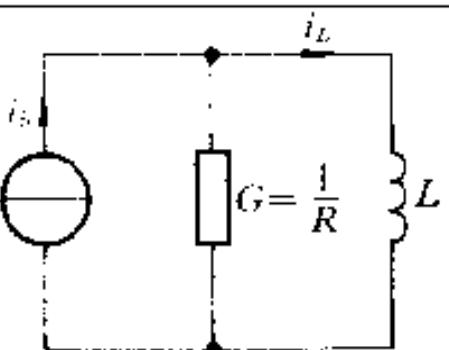
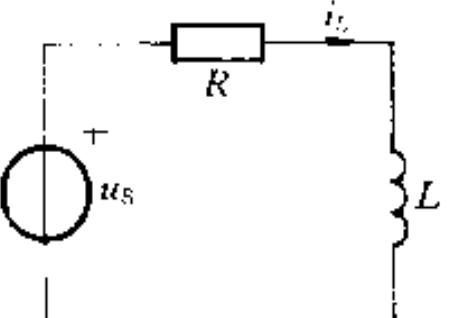
根据电容和电感互为对偶元素,从表 6-2 不难得出一些对偶关系。例如,在单位阶跃或单位冲激电压激励下的 RC 串联电路与在单位阶跃或单位冲激电流激励下的 GL 并联电路互为对偶。只要求出前者的响应,后者的响应可根据

§ 6-6 一阶电路的冲激响应

149

对偶原理求得,反之亦然。

表 6-2 一阶电路的阶跃响应和冲激响应

电 路	零 状 态 响 应	
	阶跃响应 $s(t)$	冲激响应 $\delta(t)$
	$i_s(t) = \epsilon(t)$ $u_c = R(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\epsilon(t)$ $= \frac{1}{G}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\epsilon(t)$	$i_s(t) = \delta(t)$ $u_c = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}\epsilon(t)$
	$u_s(t) = \epsilon(t)$ $u_c = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\epsilon(t)$	$u_s(t) = \delta(t)$ $u_c = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}\epsilon(t)$
	$i_s(t) = \epsilon(t)$ $i_L = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\epsilon(t)$	$i_s(t) = \delta(t)$ $i_L = \frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\epsilon(t)$ $= \frac{1}{GL}e^{-\frac{t}{\tau}}\epsilon(t)$
	$u_s(t) = \epsilon(t)$ $i_L = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\epsilon(t)$	$u_s(t) = \delta(t)$ $i_L = \frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\epsilon(t)$

例 6-7 图 6-26(a)所示电路中 $i_L(0_+)=0$, $R_1=6\Omega$, $R_2=4\Omega$, $L=100\text{ mH}$ 。求冲激响应 i_L 和 u_L 。

解 首先将电感 L 以外的电路用戴维宁定理等效变换为如图 6-26(b) 电路所示。其中 $R_{eq}=2.4\Omega$, $u_\infty=4\delta(t)\text{ V}$, 进而求激励电压 $4\delta(t)$ 在电感中引起的初始电流 $i_L(0_+)$ 。

根据 KVL 有

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 4\delta(t)$$

对方程两边 0 至 0_+ 积分得

$$\int_{0_-}^{0_+} L \frac{di_L}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} Ri_L dt = \int_{0_-}^{0_+} 4\delta(t) dt$$

由于电流 i_L 不可能为冲激函数, 所以上式方程左边第二项的积分为零, 得

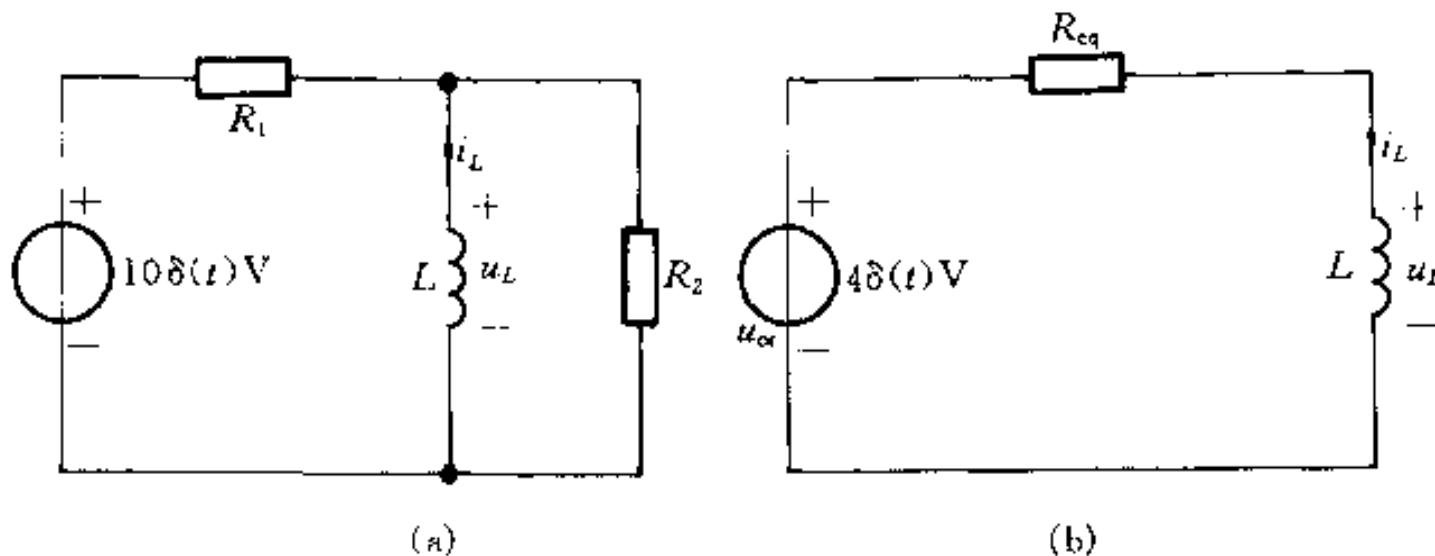


图 6-26 例 6-7 的图

$$L[i_L(0_+) - i_L(0_-)] = 4$$

因 $i_L(0_-) = 0$, 所以:

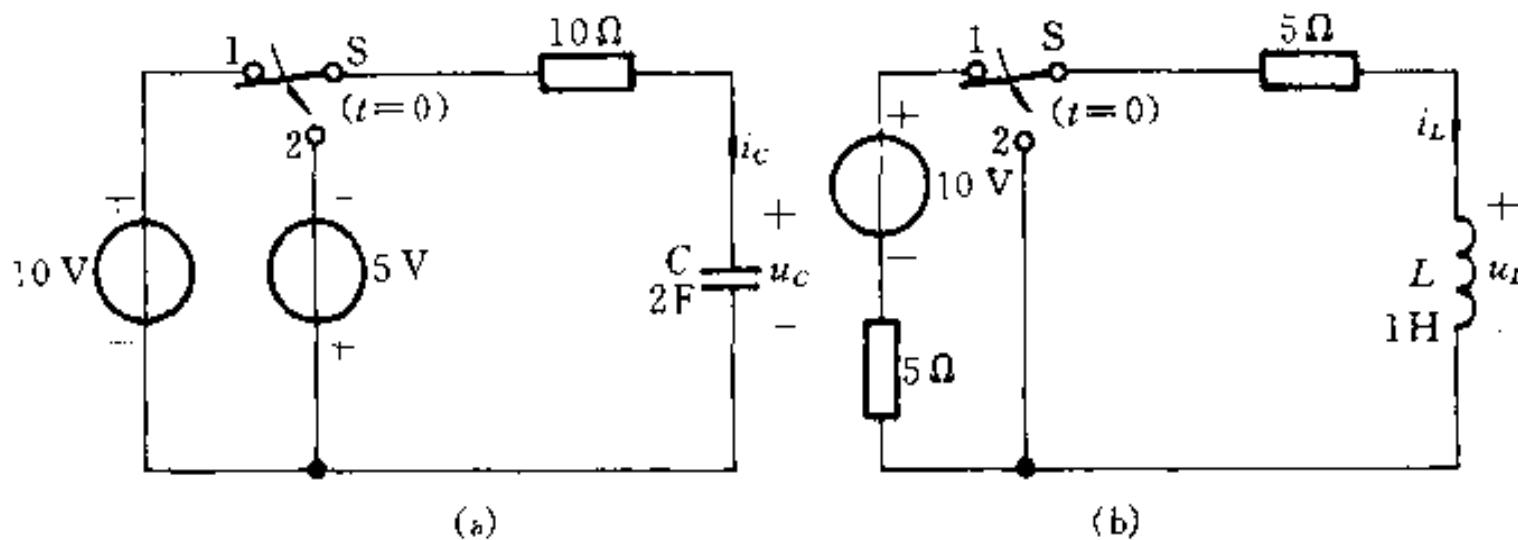
$$\begin{aligned} i_L(0_+) &= \frac{4}{L} = \frac{4}{100 \times 10^{-3}} \text{ A} = 40 \text{ A} \\ i_L &= i_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 40 e^{-\frac{2.4}{100 \times 10^{-3}} t} \\ &= 40 e^{-24t} \text{ A} \end{aligned}$$

由于上式适用于 $t \geq 0_+$, 所以又可写为:

$$\begin{aligned} i_L &= 40e^{-24t}\epsilon(t) \text{ A} \\ u_L &= L \frac{di_L}{dt} = -96e^{-24t}\epsilon(t) \text{ V} \end{aligned}$$

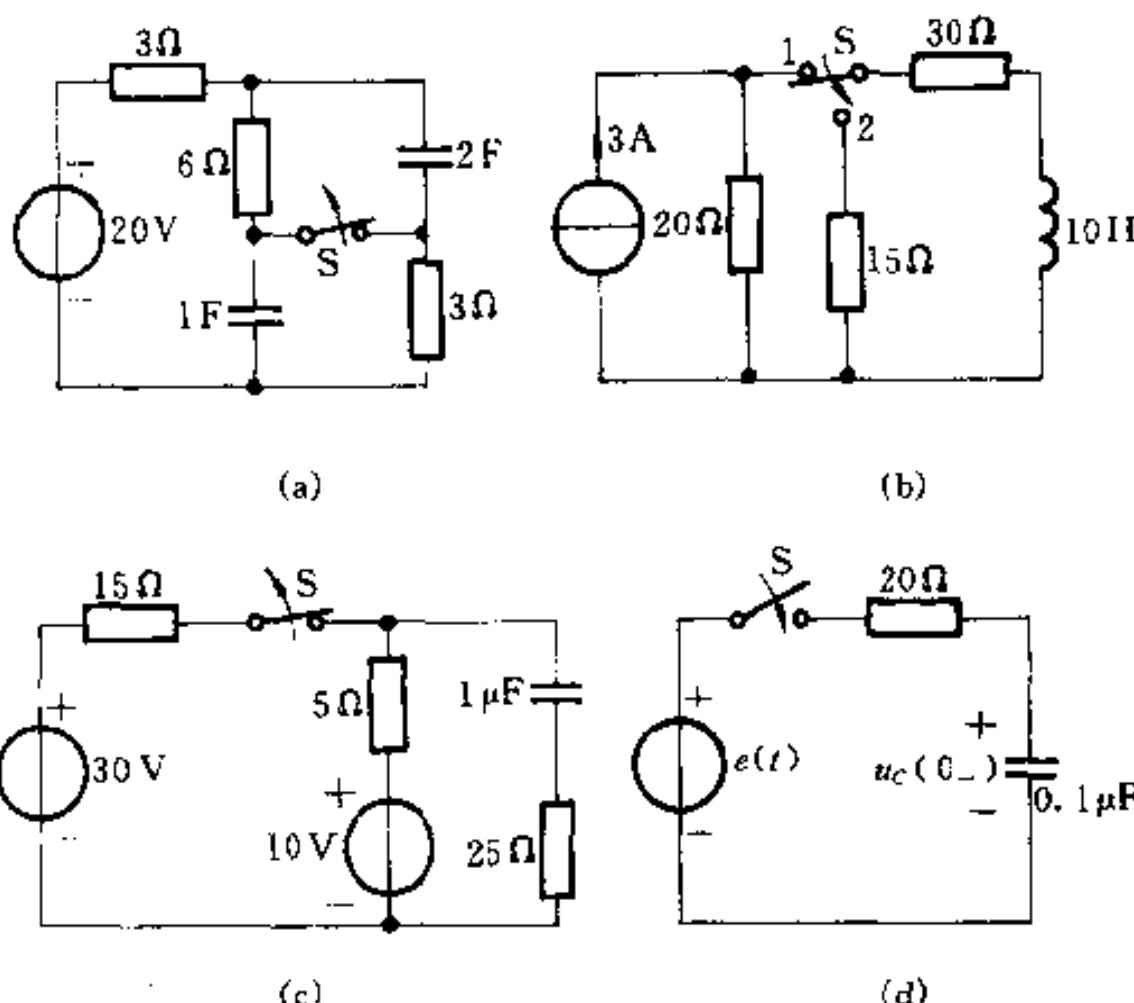
习 题

6-1 图(a)、(b)所示电路中开关 S 在 $t = 0$ 时动作, 试求电路在 $t = 0_+$ 时刻电压、电流的初始值。



题 6-1 图

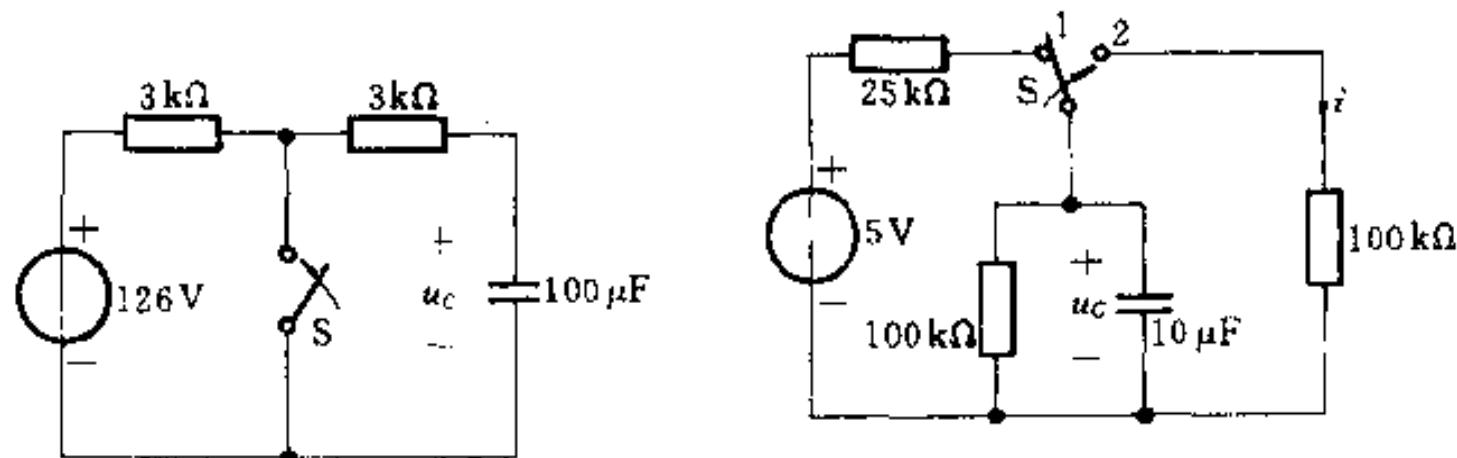
6-2 图示各电路中开关 S 在 $t=0$ 时动作, 试求各电路在 $t=0+$ 时刻的电压、电流。已知图(d)中的 $e(t) = 100\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ V, $u_c(0_-) = 20$ V。



题 6-2 图

6-3 图示电路在 $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $u_c(t)$ 。

6-4 开关 S 原在位置 1 已久, $t=0$ 时合向位置 2, 求 $u_c(t)$ 和 $i(t)$ 。

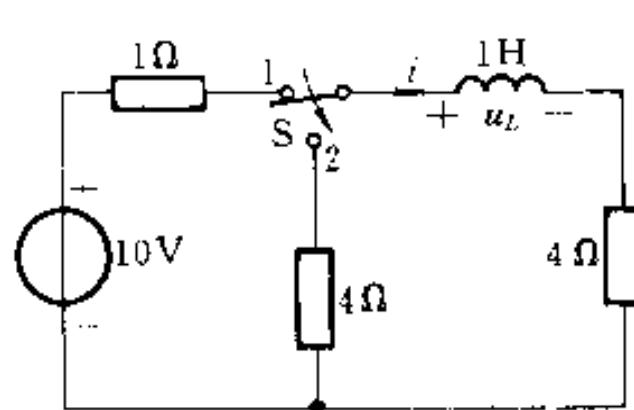


题 6-3 图

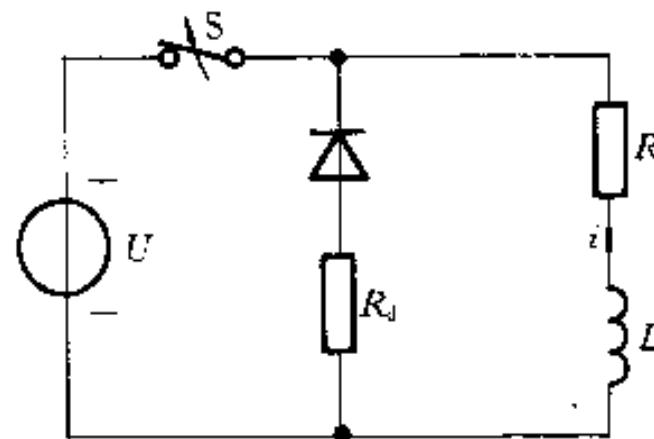
题 6-4 图

6-5 图中开关 S 在位置 1 已久, $t=0$ 时合向位置 2, 求换路后的 $i(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

6-6 图示电路为发电机励磁电路, 励磁绕组的参数为 $R = 40 \Omega$, $L = 1.5 \text{ H}$, 接在 $U = 120$ V 的直流电源上。当打开开关 S 时, 要求绕组两端电压不超过正常工作电压的 2.5 倍, 并使电流在 0.05 s 内衰减到初值的 5%, 试求并联放电电阻 R_d 为多大? (图中二极管的作用是, 当开关 S 闭合时, 放电电阻 R_d 中无电流, 当 S 打开后, 绕组电流将通过 R_d 衰减到零, 此时二极管如同短路。)



题 6-5 图

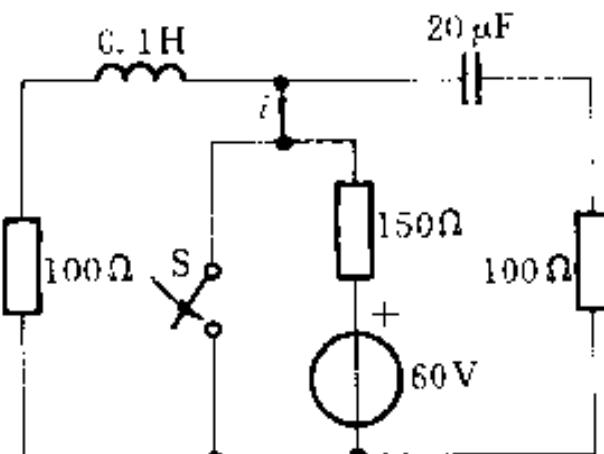


题 6-6 图

6-7 一个高压电容器原先已充电,其电压为 10 kV,从电路中断开后,经过 15 min 它的电压降低为 3.2 kV,问:

- (1) 再过 15 min 电压将降为多少?
- (2) 如果电容 $C = 15 \mu\text{F}$,那么它的绝缘电阻是多少?
- (3) 需经多少时间,可使电压降至 30 V 以下?
- (4) 如果以一根电阻为 0.2Ω 的导线将电容接地放电,最大放电电流是多少?若认为在 5τ 时间内放电完毕,那么放电的平均功率是多少?
- (5) 如果以 $100 \text{k}\Omega$ 的电阻将其放电,应放电多少时间?并重答(4)。

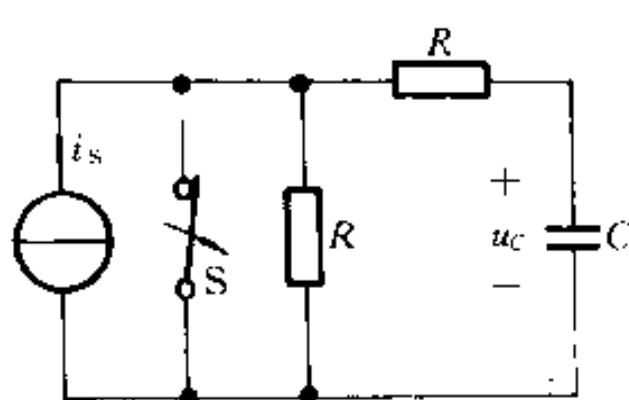
6-8 图示电路中,若 $t=0$ 时开关 S 闭合,求电流 i_s



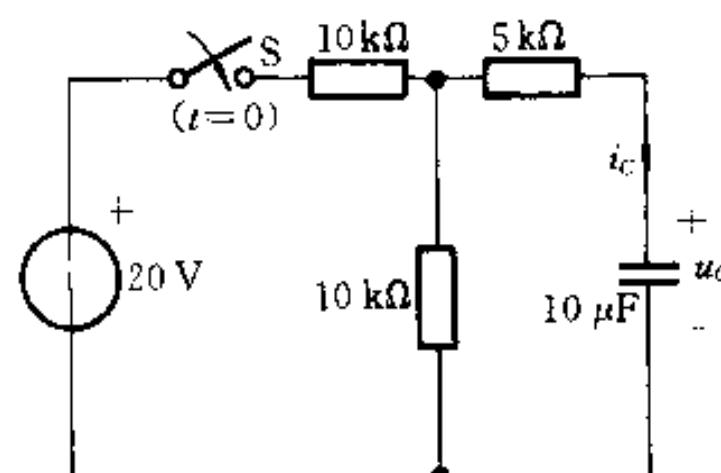
题 6-8 图

6-9 图示电路中,若 $t=0$ 时开关 S 打开,求 u_c 和电流源发出的功率。

6-10 图示电路中开关 S 闭合前,电容电压 u_c 为零。在 $t=0$ 时 S 闭合,求 $t>0$ 时的 $u_c(t)$ 和 $i_c(t)$ 。

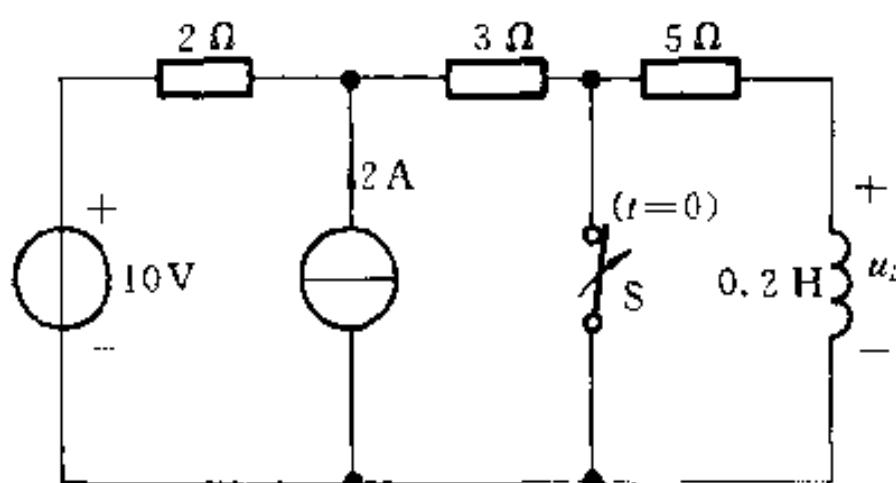


题 6-9 图



题 6-10 图

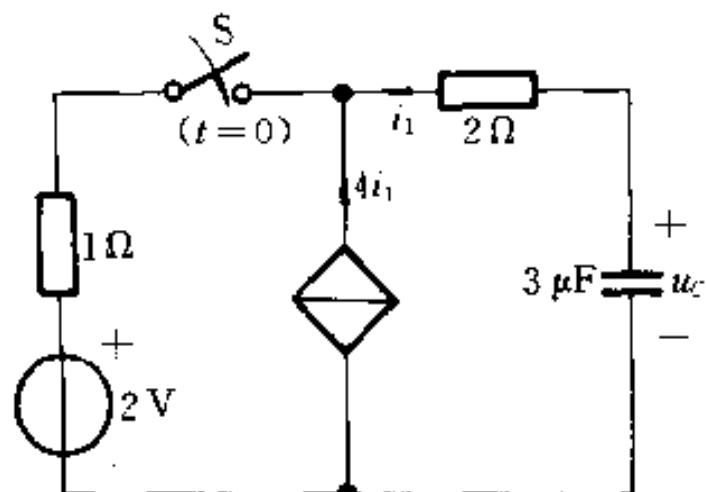
6-11 图示电路中开关 S 打开前已处稳定状态。 $t=0$ 开关 S 打开,求 $t \geq 0$ 时的 $u_L(t)$ 和电压源发出的功率。



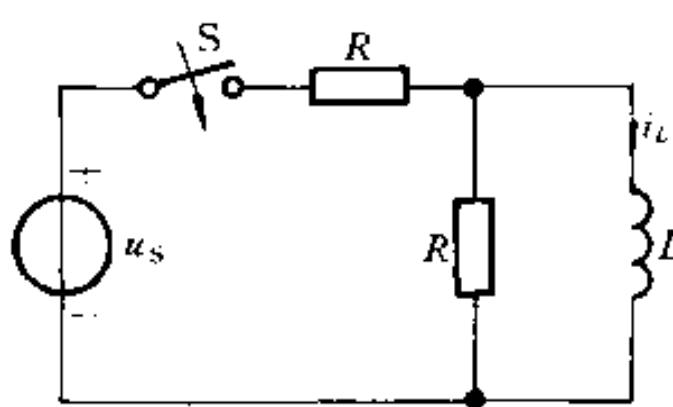
题 6-11 图

6-12 图示电路中开关闭合前电容无初始储能, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。

6-13 图示电路中 $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 i_L 和电压源发出的功率。



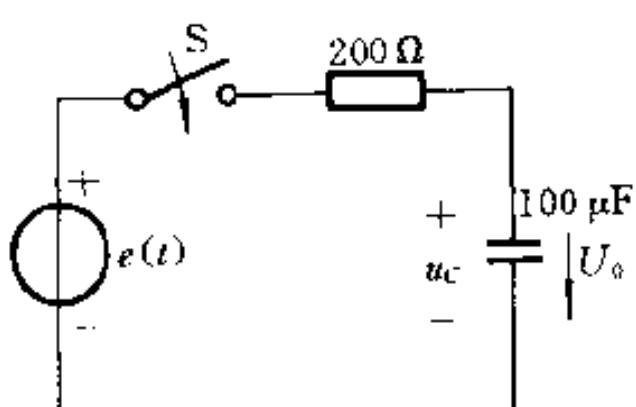
题 6-12 图



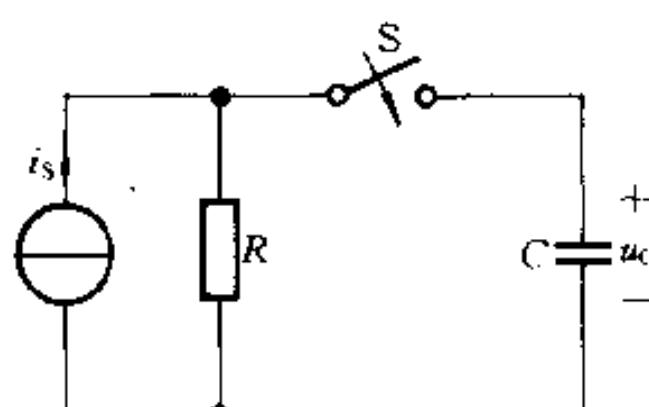
题 6-13 图

6-14 图示电路中 $e(t) = \sqrt{2}220\cos(314t + 30^\circ)$ V, $t=0$ 时合上开关 S, 求:(1) u_C ; (2) U_0 为何值时, 瞬态分量为零。

6-15 图示电路中 $i_s = 6$ A, $R = 2$ Ω, $C = 1$ F, $t < 0$ 时闭合开关 S, 在下列两种情况下求 u_C , i_C 以及电流源发出的功率:(1) $u_C(0_+)=3$ V; (2) $u_C(0_+)=15$ V。



题 6-14 图



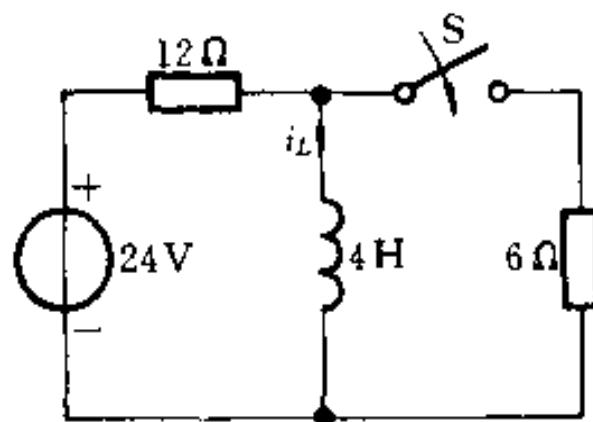
题 6-15 图

6-16 图示电路中直流电压源的电压为 24 V, 且电路原已达稳态, $t=0$ 时合上开关 S, 求:

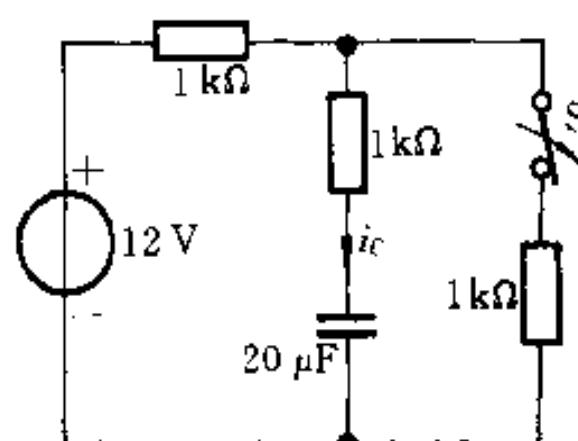
(1) 电感电流 i_L ;

(2) 直流电压源发出的功率。

6-17 图示电路中开关 S 打开以前已达稳态, $t=0$ 时开关 S 打开。求 $t \geq 0$ 时的 $i_C(t)$, 并求 $t=2 \text{ ms}$ 时电容的能量。

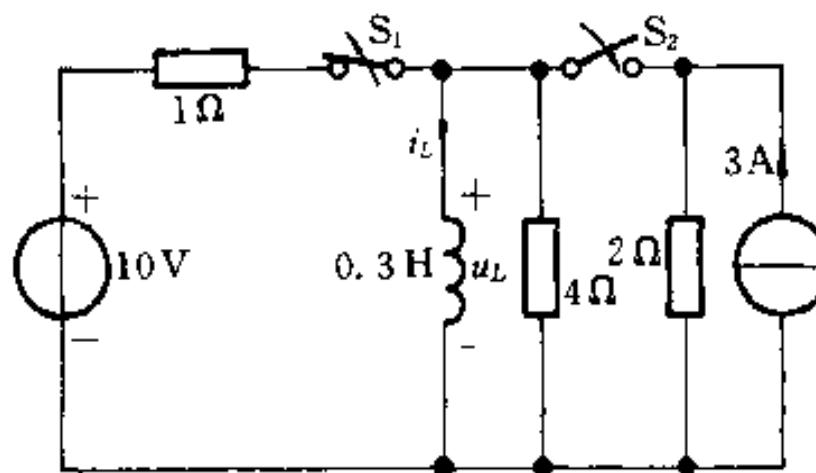


题 6-16 图



题 6-17 图

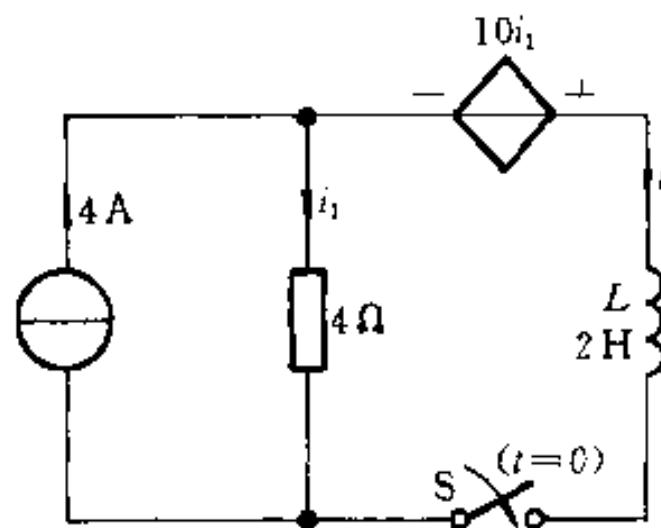
6-18 图示电路中 $t=0$ 时开关 S_1 打开, S_2 闭合, 在开关动作前, 电路已达稳态。试求 $t \geq 0$ 时的 $u_L(t), i_L(t)$ 。



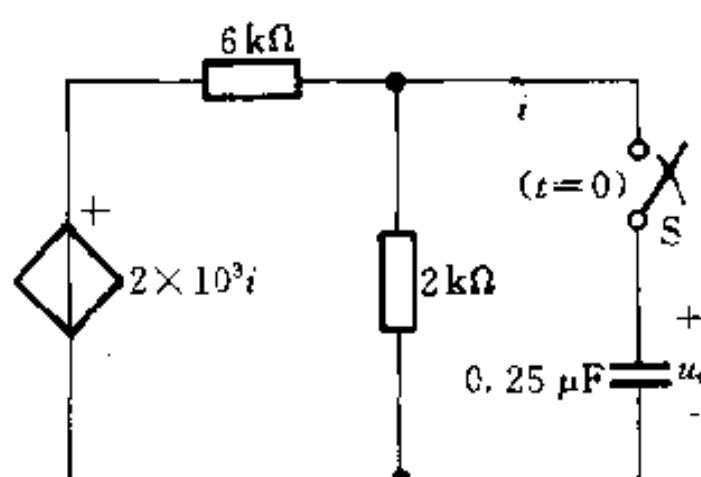
题 6-18 图

6-19 图示电路中开关原打开, $t=0$ 时将开关 S 闭合, 已知 $i_L(0_+)=0$, 求 $t > 0$ 时的电流 $i(t)$ 。

6-20 图示电路中, 已知 $u_C(0_-)=6 \text{ V}$, $t=0$ 时将开关 S 闭合, 求 $t > 0$ 时的电流 i 。

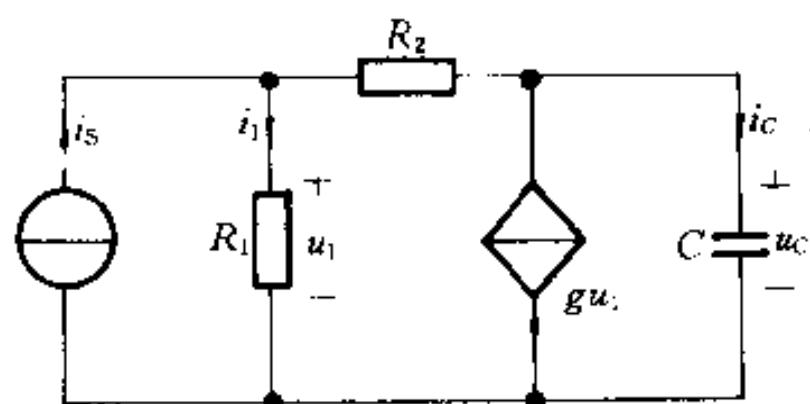


题 6-19 图



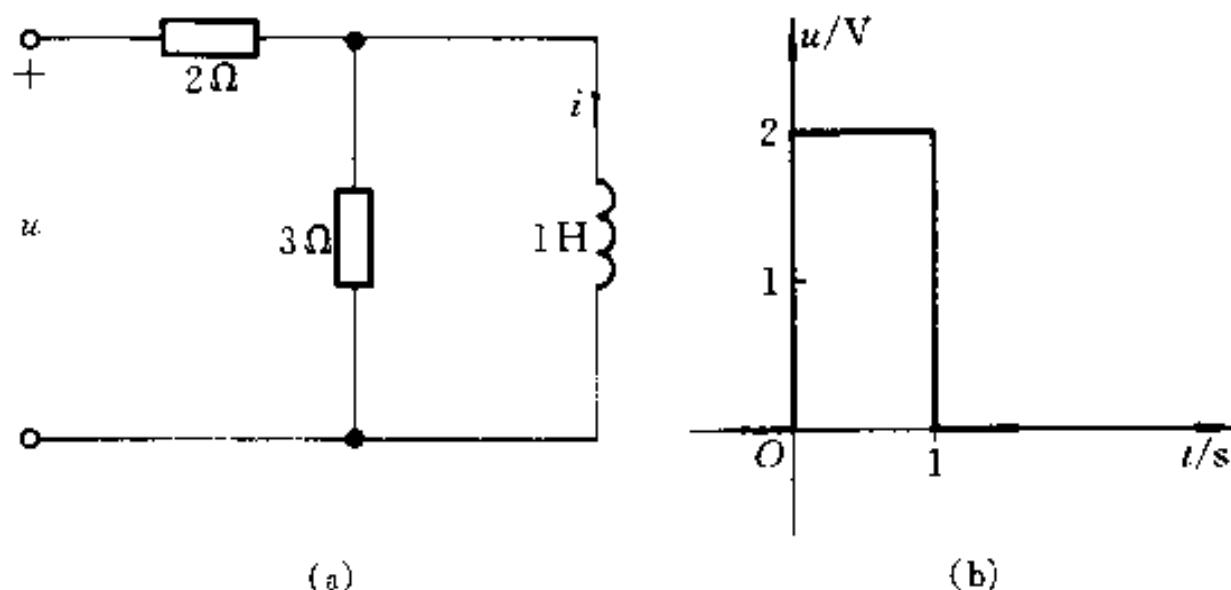
题 6-20 图

6-21 图示电路中,已知 $i_s = 10\epsilon(t)$ A, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $C = 1 \mu F$, $u_C(0_-) = 2 V$, $g = 0.25 S$ 。求全响应 $i_1(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $u_C(t)$ 。



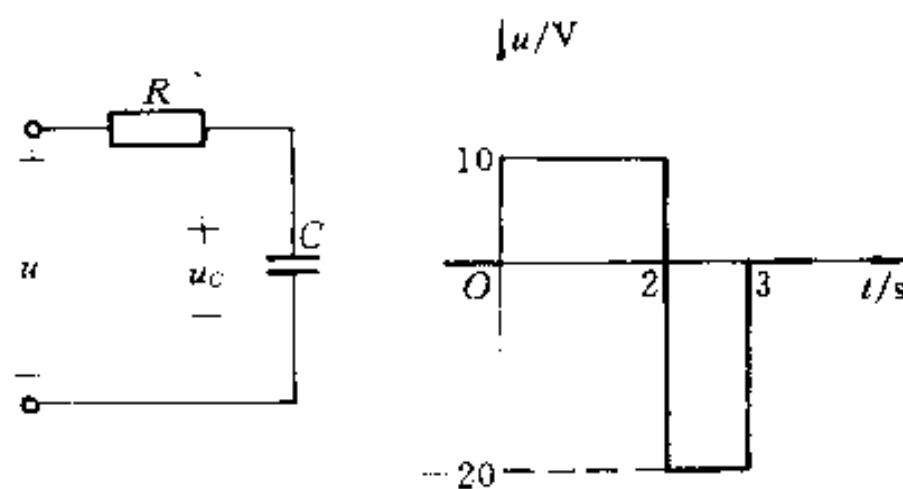
题 6-21 图

6-22 图(a)所示电路中的电压 $u(t)$ 的波形如图(b)所示,试求电流 $i(t)$ 。



题 6-22 图

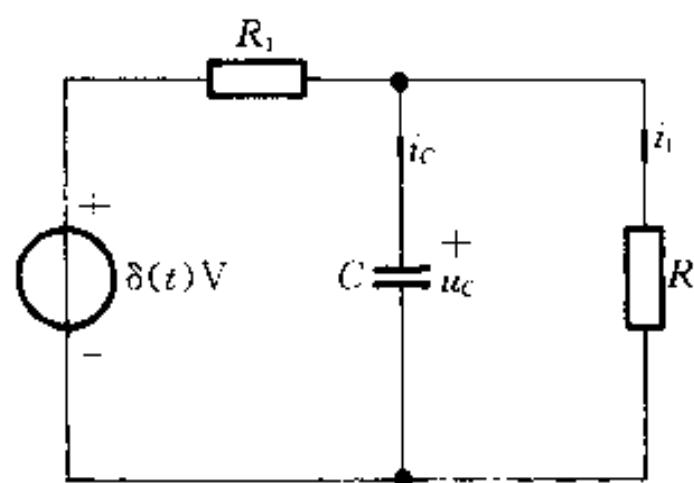
6-23 RC 电路中电容 C 原未充电,所加 $u(t)$ 的波形如图所示,其中 $R = 1000 \Omega$, $C = 10 \mu F$ 。求:(1) 电容电压 u_C ; (2) 用分段形式写出 u_C ; (3) 用一个表达式写出 u_C 。



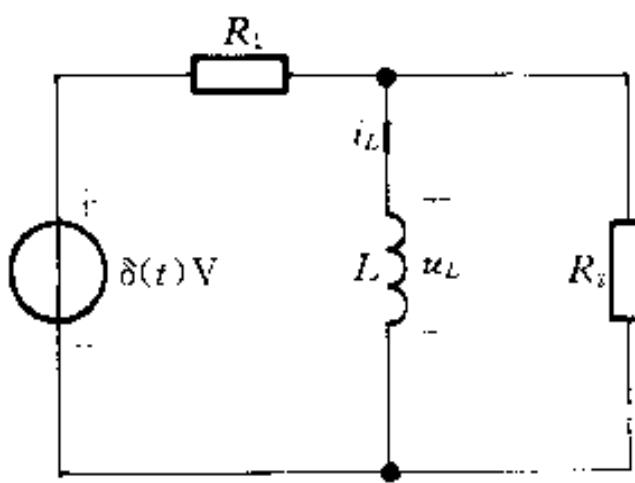
题 6-23 图

6-24 图示电路中, $u_C(0_-) = 0$, $R_1 = 3 k\Omega$, $R_2 = 6 k\Omega$, $C = 2.5 \mu F$, 试求电路的冲激响应 i_C 、 i_1 和 u_C 。

6-25 图示电路中, $i_L(0_-) = 0$, $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $L = 100 mH$, 试求冲激响应 i_L 、 u_{Lc} 。



题 6-24 图

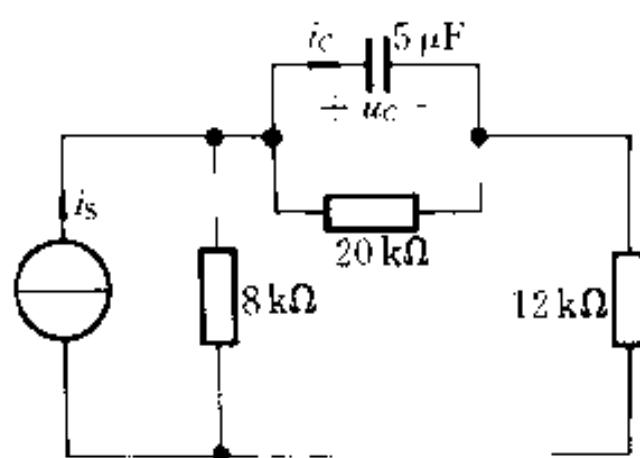


题 6-25 图

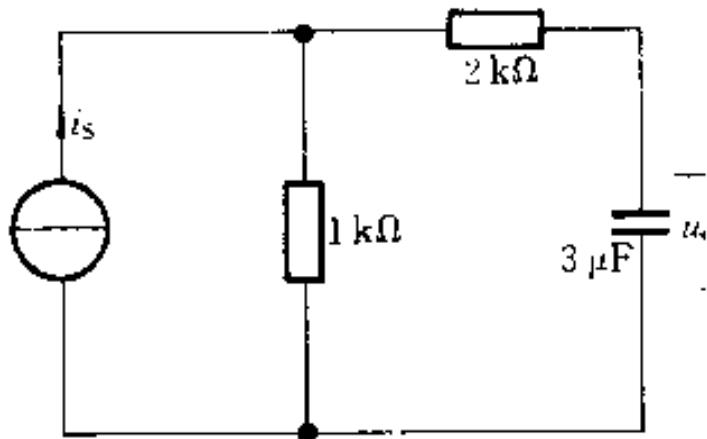
6-26 图示电路中电容原来未充电,求当 i_s 给定为下列情况时的 u_c 和 i :

- (1) $i_s = 25\epsilon(t)$ mA;
- (2) $i_s = \delta(t)$ mA.

6-27 电路如图所示,当:(1) $i_s = \delta(t)$ A, $u_c(0^-) = 0$;(2) $i_s = \delta(t)$ A, $u_c(0^-) = 1$ V;
(3) $i_s = 3\delta(t - 2)$ A, $u_c(0_-) = 2$ V 时,试求响应 $u_c(t)$.



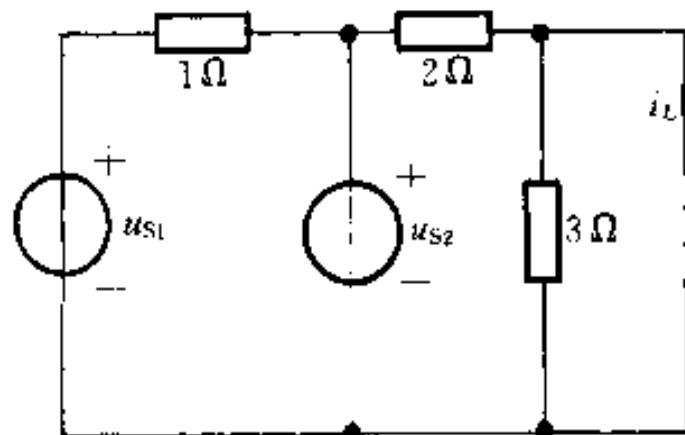
题 6-26 图



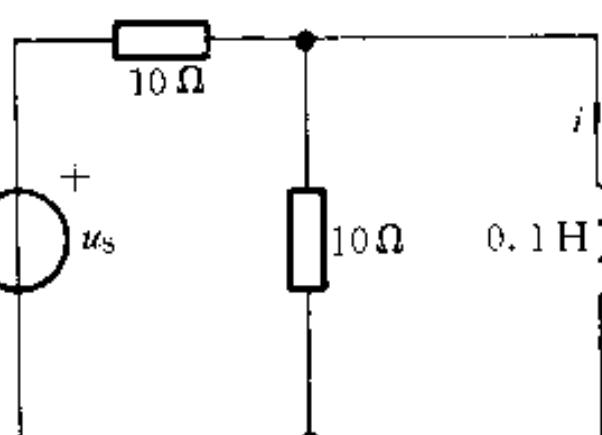
题 6-27 图

6-28 图示电路中, $u_{s1} = \epsilon(t)$ V, $u_{s2} = 5\epsilon(t)$ V, 试求电路响应 $i_L(t)$.

6-29 图示电路中电源 $u_s = [50\epsilon(t) + 2\delta(t)]$ V, 求 $t > 0$ 时电感支路的电流 $i(t)$



题 6-28 图

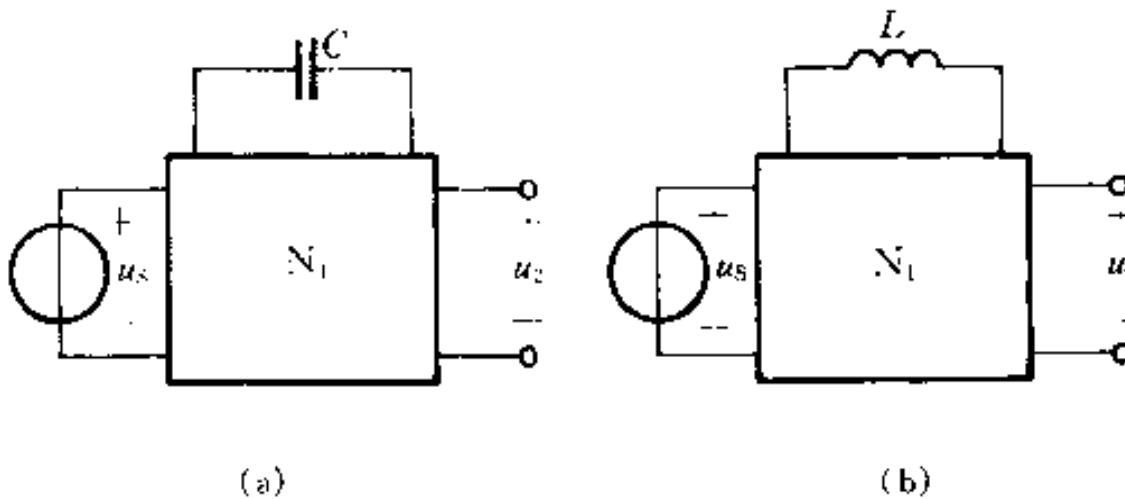


题 6-29 图

6-30 已知图(a)电路中, $u_s(t) = \epsilon(t)$ V, $C = 2 \text{ F}$, 其零状态响应为

$$u_2(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} e^{-0.25t} \right) \epsilon(t) \text{ V}$$

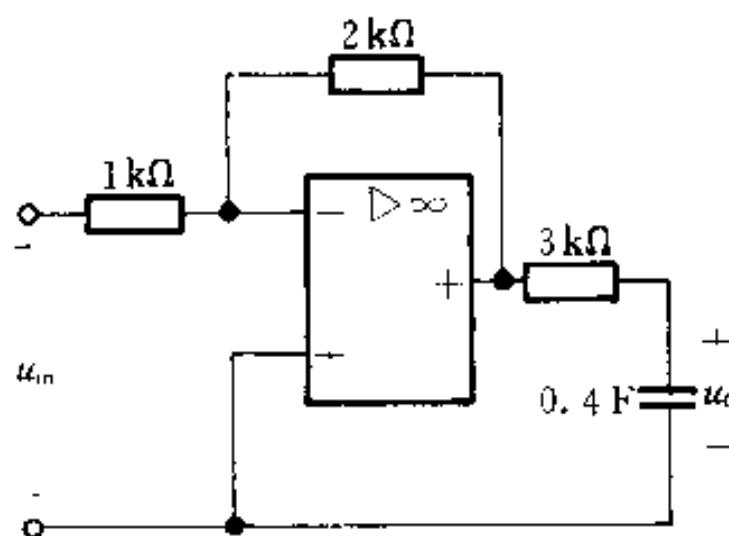
如果用 $L = 2 \text{ H}$ 的电感代替电容 C [见图(b)], 试求零状态响应 $u_2(t)$.



题 6-30 图

6-31 接续上题, 试设计一个电路 N_1 (指题 6-30 图中的 N_1), 并选取合适的元件值.

6-32 图示电路中含有理想运算放大器, 试求零状态响应 $u_o(t)$, 已知 $u_{in} = 5\epsilon(t)$ V.



题 6-32 图

第七章

二阶电路

● 内容提要 ●

本章将在一阶电路的基础上,用经典法分析二阶电路的过渡过程。通过简单的实例,阐明二阶动态电路的零输入响应、零状态响应、全响应、阶跃响应和冲激响应等基本概念。

§ 7-1 二阶电路的零输入响应

用二阶微分方程描述的动态电路称为二阶电路。在二阶电路中,给定的初始条件应有两个,它们由储能元件的初始值决定。RLC 串联电路和 GLC 并联电路是最简单的二阶电路。

图 7-1 所示为 RLC 串联电路,假设电容原已充电,其电压为 U_0 ,电感中的初始电流为 I_0 。 $t=0$ 时,开关 S 闭合,此电路的放电过程即是二阶电路的零输入响应。在指定的电压、电流参考方向下,根据 KVL 可得

$$-u_C + u_R + u_L = 0$$

$i = -C \frac{du_C}{dt}$, 电压 $u_R = Ri = -RC \frac{du_C}{dt}$, $u_L = L \frac{di}{dt} = -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$ 。把它们代入

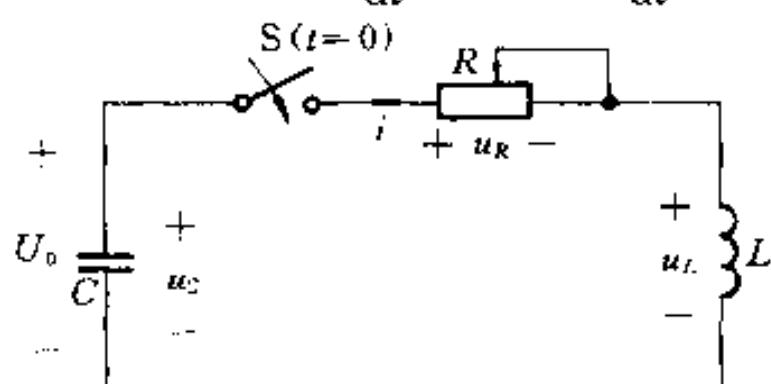


图 7-1 RLC 放电电路

上式,得

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad (7-1)$$

式(7-1)是以 u_c 为未知量的 RLC 串联电路放电过程的微分方程。这是一个线性常系数二阶齐次微分方程。求解这类方程时,仍然先设 $u_c = A e^{pt}$, 然后再确定其中的 p 和 A 。

将 $u_c = A e^{pt}$ 代入式(7-1), 得特征方程

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

解出特征根为

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

根号前有正负两个符号, 所以 p 有两个值。为了兼顾这两个值, 电压 u_c 可写成

$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (7-2)$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ p_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned} \quad (7-3)$$

从式(7-3)可见, 特征根 p_1 和 p_2 仅与电路参数和结构有关, 而与激励和初始储能无关。

现在给定的初始条件为 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0$ 和 $i(0_+) = i(0_-) = I_0$ 。

由于 $i = -C \frac{du_c}{dt}$, 因此有 $\frac{du_c}{dt} = -\frac{I_0}{C}$, 根据这两个初始条件和式(7-2), 得

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= U_0 \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= -\frac{I_0}{C} \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

联立求解式(7-4)就可求得常数 A_1 和 A_2 。下面讨论 $U_0 \neq 0$ 而 $I_0 = 0$ 的情况, 即已充电的电容 C 通过 R 、 L 放电的情况。此时, 可解得:

$$A_1 = \frac{p_2 U_0}{p_2 - p_1}$$

$$A_2 = \frac{p_1 U_0}{p_2 - p_1}$$

将解得的 A_1 、 A_2 代入式(7-2)就可以得到 RLC 串联电路零输入响应的表达式。

由于电路中 R 、 L 、 C 的参数不同, 特征根可能是(a)两个不等的负实根;(b)一对

实部为负的共轭复根；(c)一对相等的负实根。下面将分3种情况加以讨论。

1. $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 非振荡放电过程

在这种情况下, 特征根 p_1 和 p_2 是两个不等的负实数, 电容上的电压为

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \quad (7-5)$$

电流

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -\frac{CU_0 p_1 p_2}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (7-6)$$

上式中利用了 $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$ 的关系。

电感电压

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \quad (7-7)$$

图 7-2 画出了 u_C 、 i 、 u_L 随时间变化的曲线。从图中可以看出, u_C 、 i 始终不改变方向, 而且有 $u_C \geq 0$, $i \geq 0$, 表明电容在整个过程中一直释放储存的电能, 因此称为非振荡放电, 又称为过阻尼放电。当 $t = 0_+$ 时, $i(0_+) = 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时放电过程结束, $i(\infty) = 0$, 所以在放电过程中电流必然要经历从小到大再趋于零的变化。电流达最大值的时刻 t_m 可由 $\frac{di}{dt} = 0$ 决定

$$t_m = \frac{\ln(p_2/p_1)}{p_1 - p_2}$$

$t < t_m$ 时, 电感吸收能量, 建立磁场; 当 $t > t_m$ 时, 电感释放能量, 磁场逐渐衰减, 趋向消失。当 $t = t_m$ 时, 正是电感电压过零点。

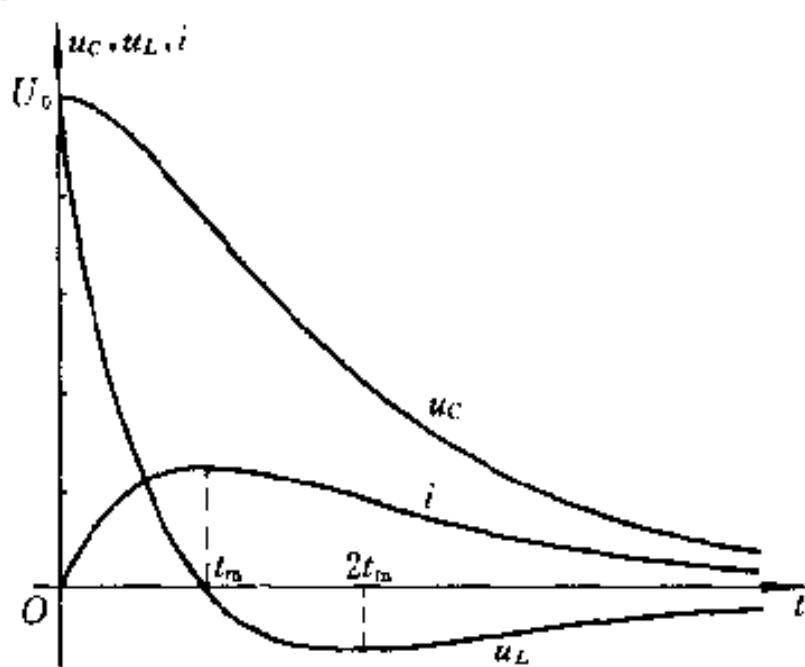


图 7-2 非振荡放电过程中 u_C 、 u_L 和 i 随时间变化的曲线

例 7-1 在图 7-3 所示的电路中, 已知 $U_s = 10 \text{ V}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 4 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ H}$, 开关 S 原来闭合在触点 1 处, 在 $t = 0$ 时, 开关 S 由触点 1 接至触点 2 处。求:(1) u_C 、 u_R 、 i 和 u_L ; (2) i_{\max} 。

解 (1) 今已知 $R = 4 \text{ k}\Omega$, 而 $2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{1}{10^{-6}}} = 2 \text{ k}\Omega$, 所以 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 放电过程是非振荡的。且 $u_C(0_+)=U_0=U_s$

特征根

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -268$$

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -3732$$

根据公式(7-5)、(7-6)和(7-7), 可得电容电压

$$u_C = (10.77 e^{-268t} - 0.773 e^{-3732t}) \text{ V}$$

电流

$$i = 2.89(e^{-268t} - e^{-3732t}) \text{ mA}$$

电阻电压

$$u_R = Ri = 11.56(e^{-268t} - e^{-3732t}) \text{ V}$$

电感电压

$$u_L = L \frac{di}{dt} = (10.77 e^{-3732t} - 0.773 e^{-268t}) \text{ V}$$

(2) 电流最大值发生在 t_m 时刻, 即

$$t_m = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2} = 7.60 \times 10^{-4} \text{ s} = 760 \mu\text{s}$$

$$\begin{aligned} i_{\max} &= 2.89(e^{-268 \times 7.60 \times 10^{-4}} - e^{-3732 \times 7.60 \times 10^{-4}}) \\ &= 21.9 \times 10^{-4} \text{ A} \\ &= 2.19 \text{ mA} \end{aligned}$$

2. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 振荡放电过程

在这种情况下, 特征根 p_1 和 p_2 是一对共轭复数。若令:

$$\delta = \frac{R}{2L}; \omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

则

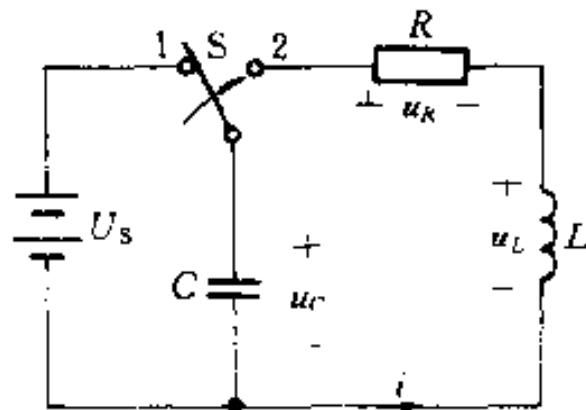


图 7-3 例 7-1 图

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{-\omega^2} = j\omega \quad (j = \sqrt{-1})$$

于是有：

$$p_1 = -\delta + j\omega, \quad p_2 = -\delta - j\omega$$

令 $\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$, $\beta = \arctan \frac{\omega}{\delta}$ (见图 7-4), 则有 $\delta = \omega_0 \cos \beta$, $\omega = \omega_0 \sin \beta$, 根据 $e^{j\beta} = \cos \beta + j\sin \beta$, $e^{-j\beta} = \cos \beta - j\sin \beta$, 可求得:

$$p_1 = -\omega_0 e^{-j\beta}, \quad p_2 = -\omega_0 e^{j\beta}$$

这样

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \\ &= \frac{U_0}{-j2\omega} [-\omega_0 e^{j\beta} e^{(-\delta + j\omega)t} + \omega_0 e^{-j\beta} e^{(-\delta - j\omega)t}] \\ &= \frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \left[\frac{e^{(j\omega + \beta)t} - e^{-j(\omega + \beta)t}}{j2} \right] \\ &= \frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

根据 $i = -C \frac{du_C}{dt}$, 或者利用式(7-6)可求得 i 为

$$i = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

而电感电压

$$u_L = -\frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$

从上述 u_C 、 i 和 u_L 的表达式可以看出, 它们的波形将呈现衰减振荡的状态, 在整个过程中, 它们将周期性地改变方向, 储能元件也将周期性地交换能量。 u_C 、 i 和 u_L 的波形见图 7-5。根据上述各式, 还可以得出:

1. $\omega t = k\pi$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ 为电流 i 的过零点, 即 u_C 的极值点;
2. $\omega t = k\pi + \beta$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ 为电感电压 u_L 的过零点, 也即电流 i 的极值点;
3. $\omega t = k\pi - \beta$, $k = 1, 2, 3 \dots$ 为电容电压 u_C 的过零点。

根据上述零点划分的时域可以看出元件之间能量转换、吸收的概况, 见表 7-1。

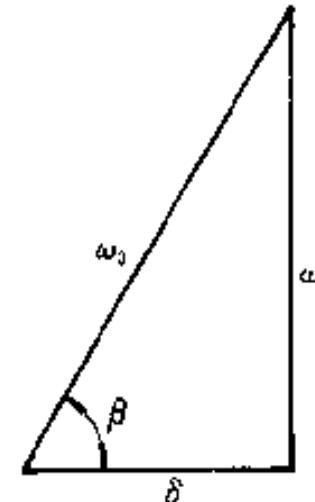


图 7-4 表示 ω_0 、
 ω 和 δ 相互关系的
三角形

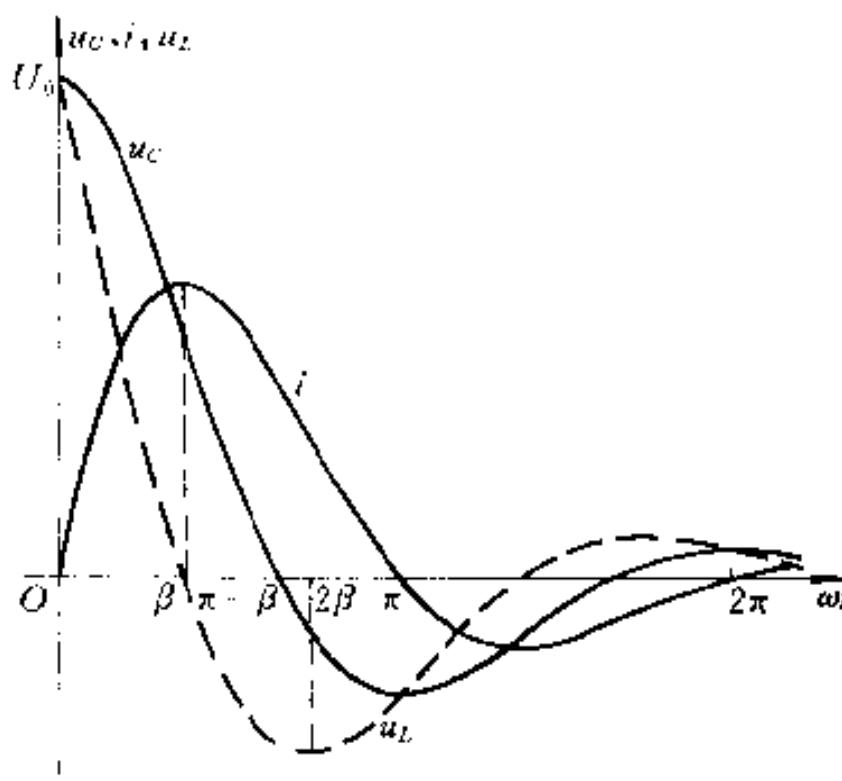
图 7-5 振荡放电过程中 u_C 、 u_L 和 i 的波形

表 7-1

	$0 < \omega t < \beta$	$\beta < \omega t < \pi - \beta$	$\pi - \beta < \omega t < \pi$
电感	吸收	释放	释放
电容	释放	释放	吸收
电阻	消耗	消耗	消耗

例 7-2 在受控热核研究中, 需要强大的脉冲磁场, 它是靠强大的脉冲电流产生的。这种强大的脉冲电流可以由 RLC 放电电路产生。若已知 $U_0 = 15 \text{ kV}$, $C = 1700 \mu\text{F}$, $R = 6 \times 10^{-4} \Omega$, $L = 6 \times 10^{-9} \text{ H}$, 试问:

- (1) $i(t)$ 为多少?
- (2) $i(t)$ 在何时达到极大值? 求出 i_{\max} 。

解 根据已知参数有:

$$\delta = \frac{R}{2L} = 5 \times 10^4 \text{ 1/s}$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = j3.09 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right) = 1.41 \text{ rad}$$

即特征根为共轭复数, 属于振荡放电情况。所以有:

- (1) 电流 i 为

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin(\omega t) \\ &= 8.09 \times 10^6 e^{-5 \times 10^4 t} \sin(3.09 \times 10^5 t) \text{ A} \end{aligned}$$

(2) 当 $\omega t = \beta$, 即当 $t = \frac{\beta}{\omega} = 4.56 \mu s$ 时, 电流 i 达到极大值

$$i_{\max} = 8.09 \times 10^6 e^{-5 \times 10^4 \times 4.56 \times 10^{-6}} \sin(3.09 \times 10^5 \times 4.56 \times 10^{-6}) A \\ = 6.36 \times 10^6 A$$

可见, 最大放电电流可达 $6.36 \times 10^6 A$, 这是一个比较可观的数值。

在 $R=0$ 时, $\delta=0$, 则 $\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, 所以这时 u_c 、 i 、 u_L 的表达式为:

$$u_c = U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i = \frac{U_0}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t) = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin(\omega_0 t)$$

$$u_L = -U_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = u_c$$

这时 u_c 、 i 、 u_L 诸量都是正弦函数, 它们的振幅并不衰减, 是一种等幅振荡的放电过程。

尽管实际的振荡电路都是有损耗的, 但若仅关心在很短的时间间隔内发生的过程时, 则按等幅振荡处理不会带来显著的误差。

例 7-3 为了试验油开关熄灭电弧的能力, 需要在开关中通以数十千安, 频率为 50 Hz 的正弦电流。工程中往往采用 LC 放电电路作为试验电源, 如图 7-6 所示。其工作情况大致如下: 首先打开开关 S_2 , 接通开关 S_1 , 使电容器充电至所需电压 U_0 ; 然后打开开关 S_1 , 接通开关 S_2 , 于是电容器就开始对电感线圈放电。选择电路参数 L 和 C 的大小以及充电电压 U_0 的数值, 就可得到试验所需正弦电流。在开关闭合后的适当时间, 借助于自动装置把被试开关的触头 A 拉开, 便可以试验高压开关的灭弧能力。

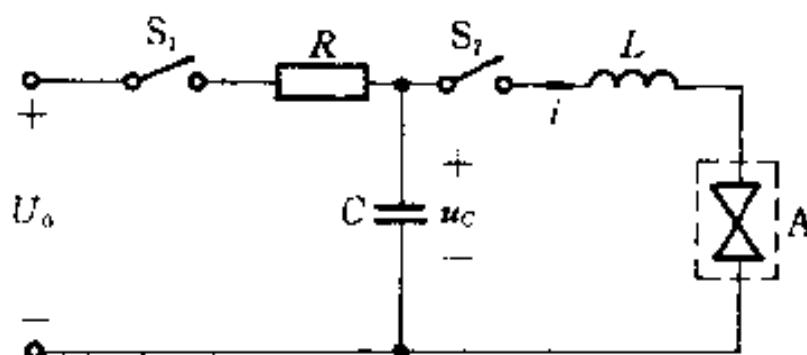


图 7-6 试验高压开关灭弧能力的振荡电路

在本例题中, 已知 $C = 3800 \mu F$, $U_0 = 14.14 kV$, 若线圈用很粗的导线绕制, 则在近似估算中可以把它的电阻忽略不计, 试求:

(1) 为了产生试验所需 50 Hz 电流, 线圈电感 L 等于多少?

(2) 振荡电路的电流 $i(t)$ 以及电容电压 $u_c(t)$ 。

解 (1) 试验所需电流的频率为 50 Hz, 即 $\omega_0 = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$, 根据 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 可以求出电感 L 的大小

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = 2.67 \times 10^{-3} \text{ H} = 2.67 \text{ mH}$$

(2) 根据

$$i = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

可以得出电流 $i(t)$ 为

$$i(t) = 16.9 \times 10^3 \sin(314t) \text{ A}$$

可见, 放电电流的峰值可达 16.9 kA。

电容电压为

$$u_c = u_L = U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = 10\sqrt{2} \times 10^3 \sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

3. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 临界情况

在 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的条件下, 这时特征方程具有重根

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

微分方程式(7-1)的通解为

$$u_c = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$$

根据初始条件可得:

$$A_1 = U_0$$

$$A_2 = \delta U_0$$

所以:

$$u_c = U_0(1 + \delta t)e^{-\delta t}$$

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

从以上诸式显然可以看出 u_c 、 i 、 u_L 不作振荡变化, 即具有非振荡的性质, 其波形与图 7-2 所示相似。然而, 这种过程是振荡与非振荡过程的分界线, 所

以 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时的过渡过程称为临界非振荡过程, 这时的电阻称为临界电阻, 并称电阻大于临界电阻的电路为过阻尼电路, 小于临界电阻的电路为欠阻尼电路。

还可指出, 临界情况下过渡过程的计算公式, 可通过前两种非临界情况下的公式取极限导出。

§ 7-2 二阶电路的零状态响应和阶跃响应

二阶电路的初始储能为零(即电容两端的电压和电感中的电流都为零), 仅由外施激励引起的响应称为二阶电路的零状态响应。

图 7-7 所示为 GCL 并联电路, $u_c(0_+)=0$, $i_L(0_+)=0$, $t=0$ 时, 开关 S 打开。根据 KVL 有

$$i_C + i_G + i_L = i_s$$

以 i_L 为待求变量, 可得

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s$$

这是二阶线性非齐次方程, 它的解答由特解和对应的齐次方程的通解组成, 即

$$i_L = i'_L + i''_L$$

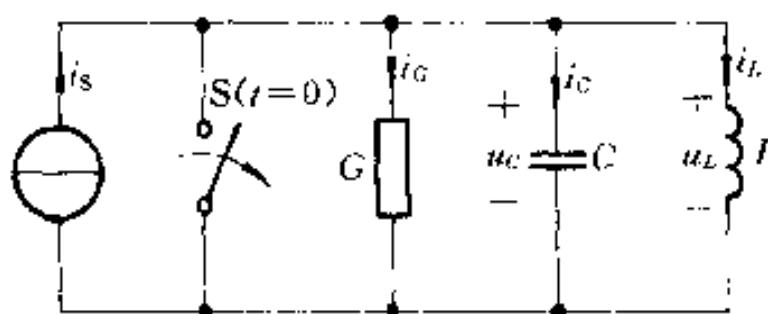


图 7-7 二阶电路的零状态响应

取稳态解 i' 为特解, 而通解 i'' 与零输入响应形式相同, 再根据初始条件确定积分常数, 从而得到全解。

二阶电路在阶跃激励下的零状态响应称为二阶电路的阶跃响应, 其求解方法与零状态响应的求解方法相同。

如果二阶电路具有初始储能, 又接入外施激励, 则电路的响应称为全响应。全响应是零输入响应和零状态响应的叠加, 可以通过求解二阶非齐次方程方法求得全响应。

例 7-4 图 7-7 所示电路中, $u_c(0_+)=0$, $i_L(0_+)=0$, $G=2 \times 10^{-3}$ S, $C=1 \mu F$, $L=1 H$, $i_s=1 A$, 当 $t=0$ 时把开关 S 打开。试求阶跃响应 i_L 、 u_L 和 i_{C2} 。

解 开关 S 的动作使外施激励 i_s 相当于单位阶跃电流, 即 $i_s = \epsilon(t) A$ 。为了求出电路的零状态响应, 列出电路的微分方程

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s$$

特征方程为

$$p^2 + \frac{G}{C}p + \frac{1}{LC} = 0$$

代入数据后可求得特征根为

$$p_1 = p_2 = p = -10^3$$

由于 p_1, p_2 是重根, 为临界阻尼情况, 其解答为

$$i_L = i_L' + i_L''$$

式中 i_L' 为特解(强制分量)

$$i_L' = 1 A$$

i_L'' 为对应的齐次方程的解

$$i_L'' = (A_1 + A_2 t) e^{-10^3 t} A$$

所以通解为

$$i_L = [1 + (A_1 + A_2 t) e^{-10^3 t}] A$$

$t = 0_+$ 时的初始值为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_L}{dt} \right)_{0_+} - \frac{1}{L} u_L(0_+) &= \frac{1}{L} u_C(0_+) \\ &= \frac{1}{L} u_C(0_-) = 0 \end{aligned}$$

代入初始条件可求得:

$$\begin{aligned} A_1 + 0 &\approx -1 \\ -10^3 A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned}$$

解得:

$$\begin{aligned} A_1 &= -1 \\ A_2 &= -10^3 \end{aligned}$$

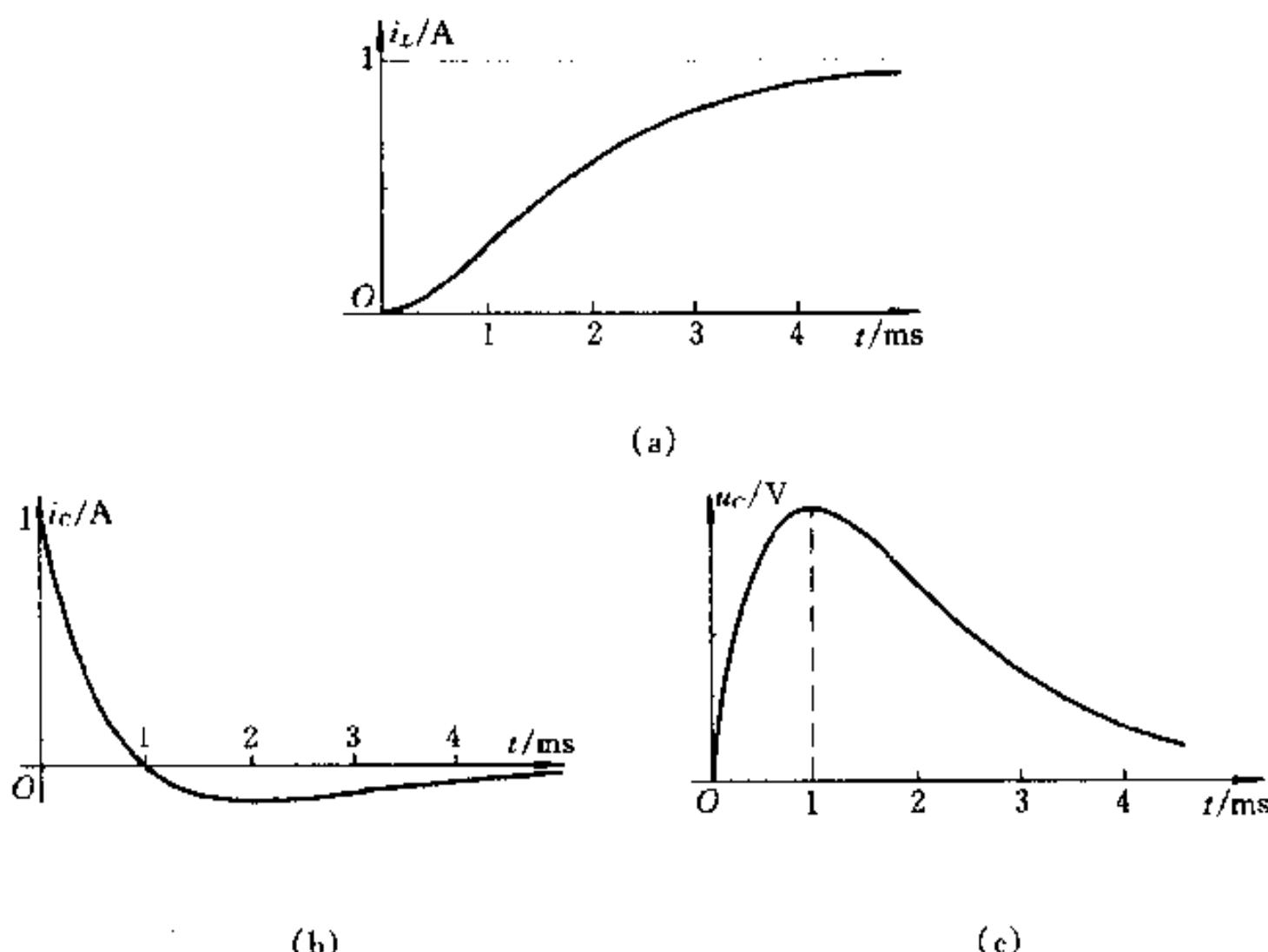
所以求得的阶跃响应为:

$$i_L = [1 - (1 + 10^3 t) e^{-10^3 t}] \epsilon(t) A$$

$$u_C = L \frac{di_L}{dt} = 10^6 t e^{-10^3 t} \epsilon(t) V$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = (1 - 10^3 t) e^{-10^3 t} \epsilon(t) A$$

过渡过程是临界阻尼情况, 属非振荡性质, i_L 、 i_C 、 u_C 随时间变化的波形如图 7-8 所示。

图 7-8 i_L 、 i_C 、 u_C 的波形

§ 7-3 二阶电路的冲激响应

零状态的二阶电路在冲激函数激励下的响应就是二阶电路的冲激响应。

图 7-9 是一个零状态的 RLC 串联电路, 在 $t=0$ 时与冲激电压 $\delta(t)$ 接通。若以 u_C 为变量, 根据 KVL 可得电路方程

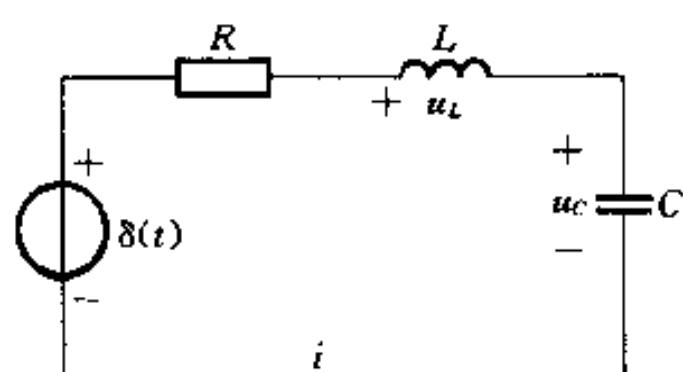


图 7-9 二阶电路的冲激响应

$$\left. \begin{aligned} & LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = \delta(t) \\ & u_c(0_-) = 0, i_L(0_-) = 0 \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0 \quad (7-8)$$

由于 $\delta(t)$ 在 $t \neq 0$ 时为零,而在 $t = 0$ 时电路受冲激电压激励而获得了一定能量,在 $t > 0_+$ 时放电,即在 $t > 0_+$ 时,有

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad (7-9)$$

关键在于求出与初始能量对应的初始条件 $u_c(0_+)$ 和 $i(0_+)$ 。把式(7-8)在 $t = 0$ 到 0_+ 区间积分,得

$$LC \left(\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+} - \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_-} \right) + RC [u_c(0_+) - u_c(0_-)] + \int_{0_-}^{0_+} u_c dt = 1$$

根据零状态条件,有 $u_c(0_-) = 0, i(0_-) = 0$, 故 $\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_-} = 0$ 。由于 u_c 不可能是阶跃函数或冲激函数,否则式(7-9)不能成立,就是说 u_c 不可能跃变;仅 $\frac{du_c}{dt}$ 才可能发生跃变。这样就有

$$LC \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+} = 1$$

即

$$\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{1}{LC}$$

该式的意义是冲激电压源在 $t = 0_-$ 到 0_+ 间隔内使电感电流跃变,跃变后 $i(0_+)$ $= C \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{1}{L}$, 电感中储存一定的磁场能量,而冲激响应就是由此磁场能量引起的变化过程。

$t \geq 0$ 时为零输入解,其过渡过程的分析和解答与 § 7-1 相同,即

$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

初始条件为:

$$u_c(0_+) = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{1}{LC}$$

有:

$$A_1 = -A_2 = \frac{1}{p_2 - p_1} \frac{1}{LC}$$

$$u_C = -\frac{1}{LC(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

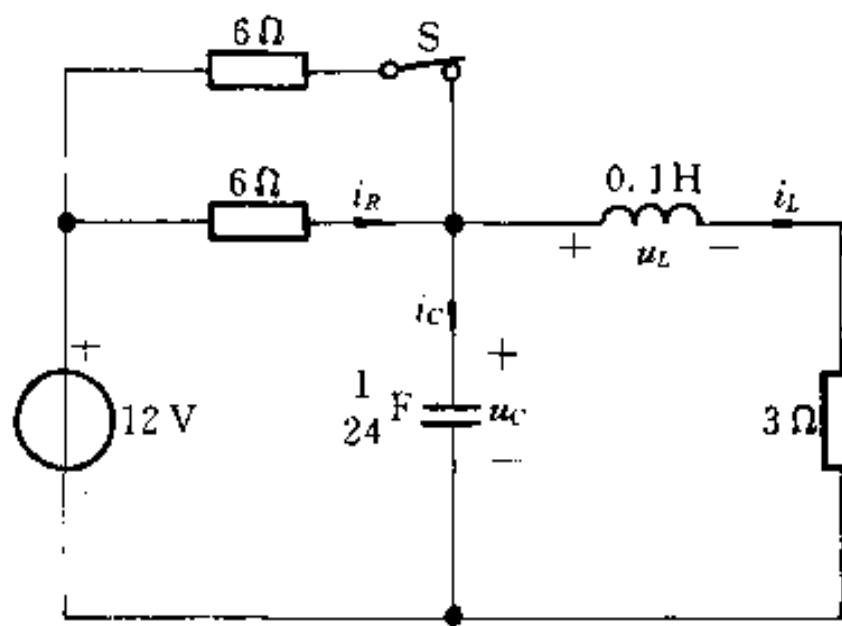
如果 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 即振荡放电情况, 冲激响应为

$$u_C = \frac{1}{\omega LC} e^{-\beta t} \sin(\omega t)$$

以上是从冲激函数的定义出发, 直接求出冲激响应。还可以首先求出电路的单位阶跃响应, 再对时间取导数就得到单位冲激响应, 最后乘以冲激强度就可得到冲激强度为 A 的冲激函数引起的冲激响应。

习题

7-1 电路如图所示, 开关未动作前电路已达稳态, $t=0$ 时开关 S 打开。求 $u_C(0_+)$ 、
 $i_L(0_-), \frac{du_C}{dt}\Big|_{0_+}, \frac{di_L}{dt}\Big|_{0_+}, \frac{di_R}{dt}\Big|_{0_+}$



题 7-1 图

7-2 图示电路中, 电容原先已充电, $u_C(0_-) = U_0 = 6$ V, $R = 2.5$ Ω, $L = 0.25$ H, $C = 0.25$ F。试求:

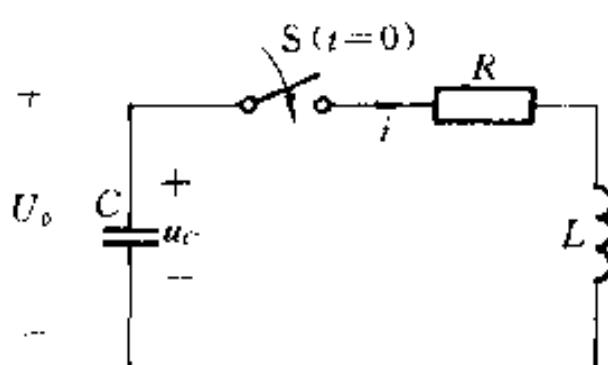
- (1) 开关闭合后的 $u_C(t), i(t)$;
- (2) 使电路在临界阻尼下放电, 当 L 和 C 不变时, 电阻 R 应为何值?

7-3 已知图示电路中 $R = 1$ kΩ, $C = 2$ μF, $L = 2.5$ H。设电容原先已充电且 $u_C(0_-) = 10$ V。在 $t=0$ 时开关 S 闭合。试求 $u_C(t), i(t), u_L(t)$ 以及 S 闭合后的 i_{max} 。

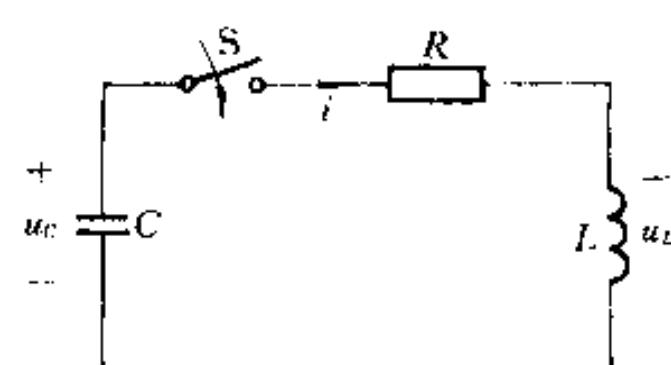
7-4 图示电路中开关 S 闭合已久, $t=0$ 时 S 打开。求 u_C, i_L 。

7-5 电路如图所示, $t=0$ 时开关 S 闭合, 设 $u_C(0_-) = 0, i(0_-) = 0, L = 1$ H, $C = 1$ μF, $U = 100$ V。若:(1) 电阻 $R = 3$ kΩ; (2) $R = 2$ kΩ; (3) $R = 200$ Ω。试分别求在上述电阻值时电路中的电流 i 和电压 u_C 。

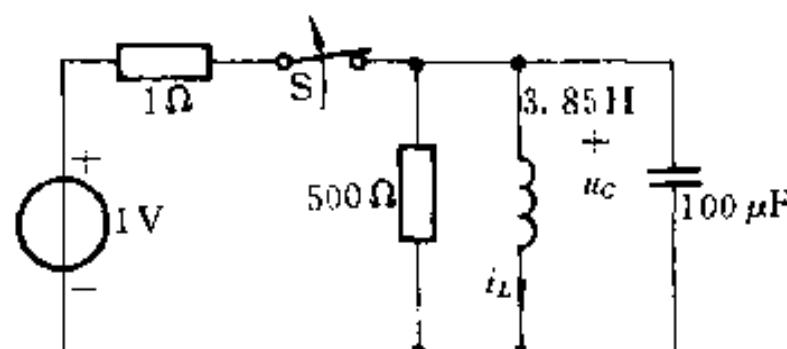
7-6 图示电路中 $R = 3$ Ω, $L = 6$ mH, $C = 1$ μF, $U_0 = 12$ V, 电路已处稳态。设开关 S 在 $t=0$ 时打开, 试求 $u_L(t)$ 。



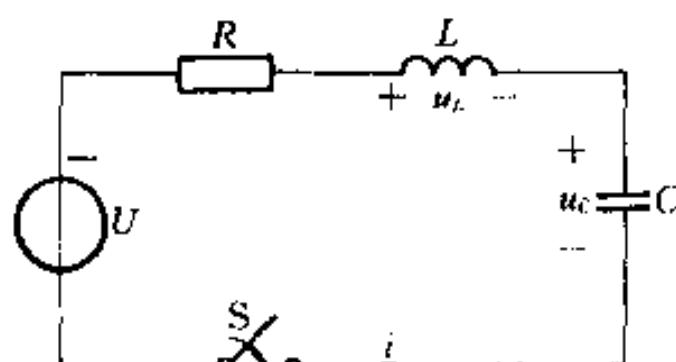
题 7-2 图



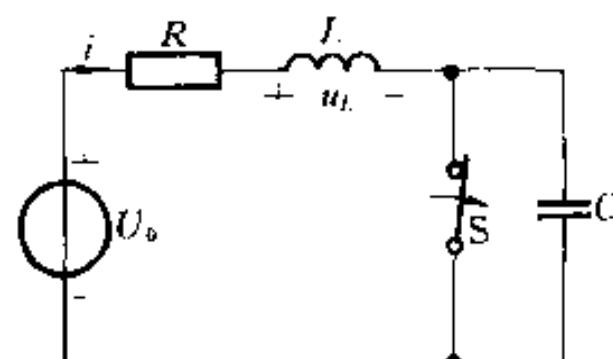
题 7-3 图



题 7-4 图

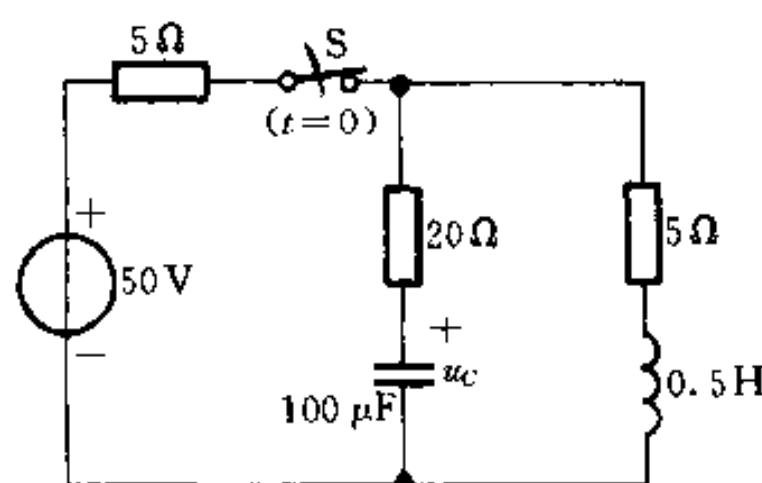


题 7-5 图



题 7-6 图

7-7 图示电路在开关 S 打开之前已达稳态; $t=0$ 时, 开关 S 打开, 求 $t>0$ 时的 u_C 。



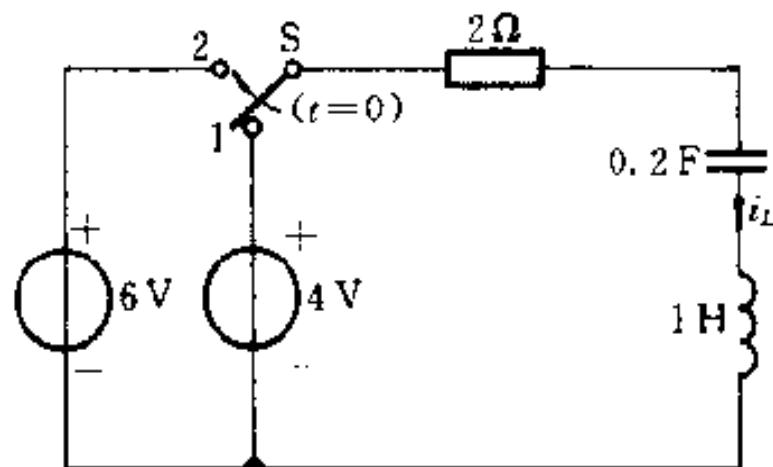
题 7-7 图

7-8 图示电路在开关 S 动作前已达稳态; $t=0$ 时 S 由 1 接至 2, 求 $t>0$ 时的 i_L 。

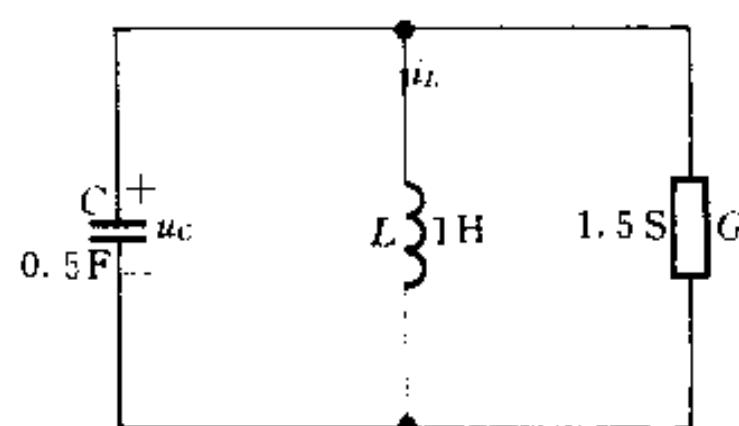
7-9 图示 GLC 并联电路中, 已知 $u_C(0_+)=1$ V, $i_L(0_+)=2$ A。求 $t>0$ 时的 i_L 。

7-10 图示电路中 $G = 5 \text{ S}$, $L = 0.25 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$ 。求:(1) $i_s(t) = \epsilon(t) \text{ A}$ 时, 电路的阶跃响应 $i_L(t)$;

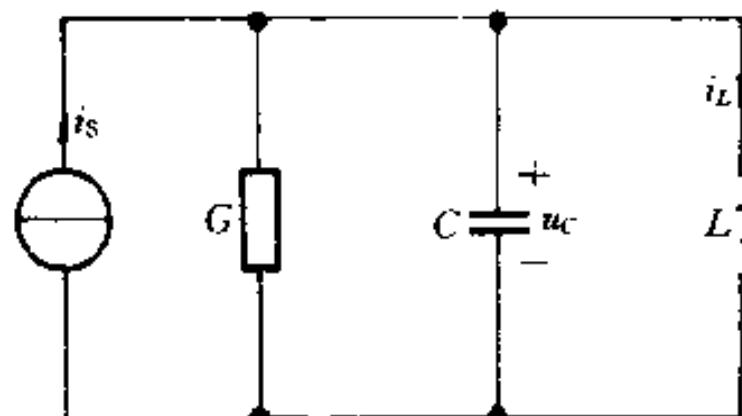
(2) $i_s(t) = \delta(t) \text{ A}$ 时, 电路的冲激响应 $u_c(t)$ 。



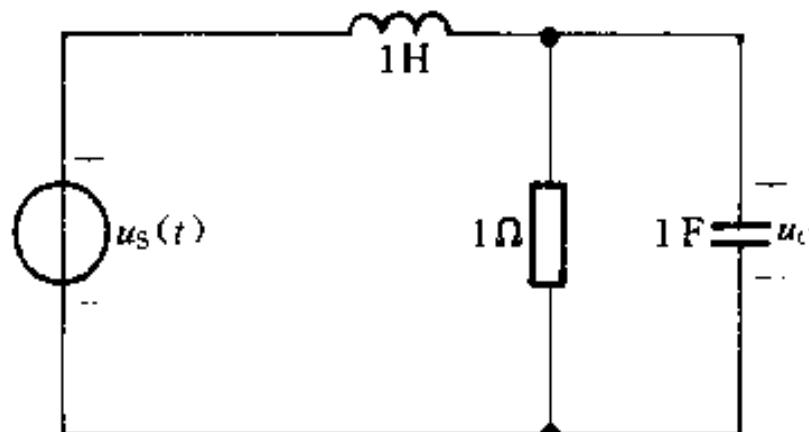
题 7-8 图



题 7-9 图



题 7-10 图

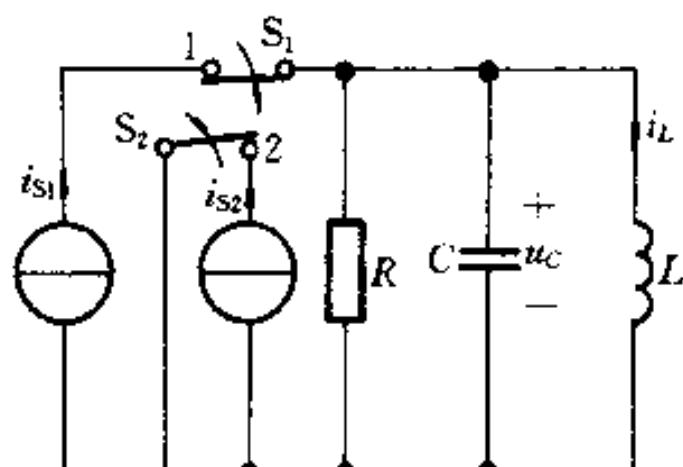


题 7-11 图

7-11 当 $u_s(t)$ 为下列情况时, 求图示电路的响应 u_c :

(1) $u_s(t) = 10 \epsilon(t) \text{ V}$;

(2) $u_s(t) = 10 \delta(t) \text{ V}$ 。



题 7-12 图

7-12 图示并联电路中, 在 $t=0$ 时开关 S_1 由位置 1 接至位置 2, S_2 由位置 2 接至位置 1。已知 $i_{s1} = 1 \text{ A}$, $i_{s2} = 5 \text{ A}$, $R = 5 \Omega$, $C = 0.1 \text{ F}$, $L = 2 \text{ H}$ 。求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 。

第八章

相量法

— 内容提要 —

本章介绍相量法，相量法是线性电路正弦稳态分析的一种简便而又有效的方法。主要内容有：复数，正弦量，相量法的基础，电路定律的相量形式。

§8-1 复数

相量法是线性电路正弦稳态分析的一种简便有效的方法。应用相量法，需要运用复数的运算。本节对复数的有关知识作一扼要的介绍。

一个复数有多种表示形式。复数 F 的代数形式为

$$F = a + jb$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚单位（在数学中常用 i 表示，在电路中已用 i 表示电流，故改用 j ）。取复数 F 的实部和虚部分别用下列符号表示

$$\text{Re}[F] = a, \text{Im}[F] = b$$

即 $\text{Re}[F]$ 是取方括号内复数的实部， $\text{Im}[F]$ 是取其虚部。

一个复数 F 在复平面上可以用一条从原点 O 指向 F 对应坐标点的有向线段（向量）表示，如图 8-1。

根据图 8-1，可得复数 F 的三角形式

$$F = |F|(\cos \theta + j\sin \theta)$$

式中 $|F|$ 为复数的模（值）， θ 为复数的辐角，即 $\theta = \arg F$ 。 θ 可以用弧度或度表示。 $|F|$ 和 θ 与 a 和 b 之间的关系为：

$$a = |F|\cos \theta, \quad b = |F|\sin \theta$$

或：

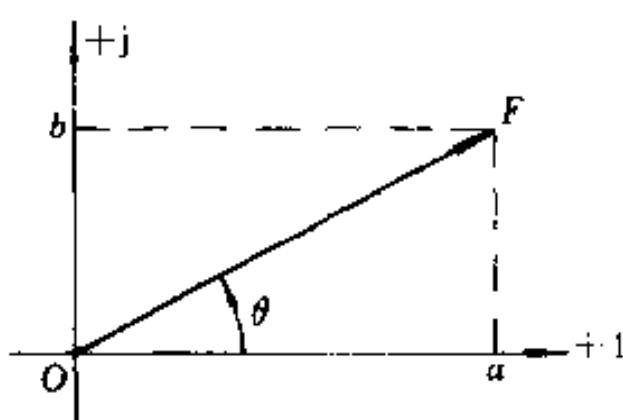


图 8-1 复数的表示

$$|F| = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \arctan \left(\frac{b}{a} \right)$$

根据欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

复数的三角形式可转变为指数形式,即

$$F = |F| e^{j\theta}$$

所以复数 F 是其模 $|F|$ 与 $e^{j\theta}$ 相乘的结果。上述指数形式有时改写为极坐标形式,即

$$F = |F| / \theta$$

复数的相加和相减用代数形式进行。例如,设 $F_1 = a_1 + j b_1, F_2 = a_2 + j b_2$, 则

$$\begin{aligned} F_1 \pm F_2 &= (a_1 + j b_1) \pm (a_2 + j b_2) \\ &= (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \end{aligned}$$

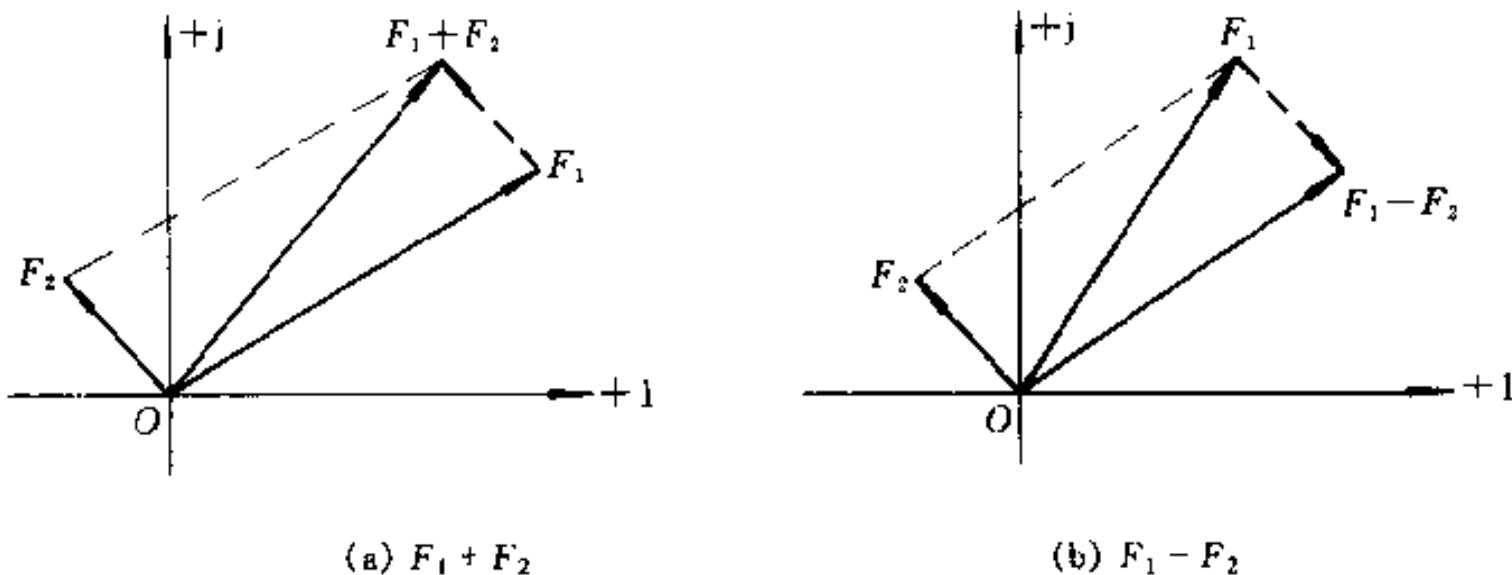


图 8-2 复数代数和的图解法

复数的相加和相减的运算也可以按平行四边形法在复平面上用向量的相加和相减求得,见图 8-2。

两个复数的相乘,用代数形式有

$$\begin{aligned} F_1 F_2 &= (a_1 + j b_1)(a_2 + j b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

复数相乘用指数形式比较方便,即

$$\begin{aligned} F_1 F_2 &= |F_1| e^{j\theta_1} |F_2| e^{j\theta_2} \\ &= |F_1| |F_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned} |F_1 F_2| &= |F_1| |F_2| \\ \arg(F_1 F_2) &= \arg(F_1) + \arg(F_2) \end{aligned}$$

复数乘积的模等于各复数模的积,其辐角等于各复数辐角的和。

复数相除的运算为

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1|/\theta_1}{|F_2|/\theta_2} = \frac{|F_1|}{|F_2|} \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2}$$

所以：

$$\arg\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \arg(F_1) - \arg(F_2)$$

如用代数形式有

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2}$$

式中 $(a_2 - jb_2)$ 为 F_2 的共轭复数, F 的共轭复数表示为 F^* 。 $F_2 F_2^*$ 的结果为实数,称为有理化运算。

图 8-3(a)、(b)为复数乘、除的图解表示,从图上可以看出:复数乘、除表示为模的放大或缩小,辐角表示为逆时针旋转或顺时针旋转。

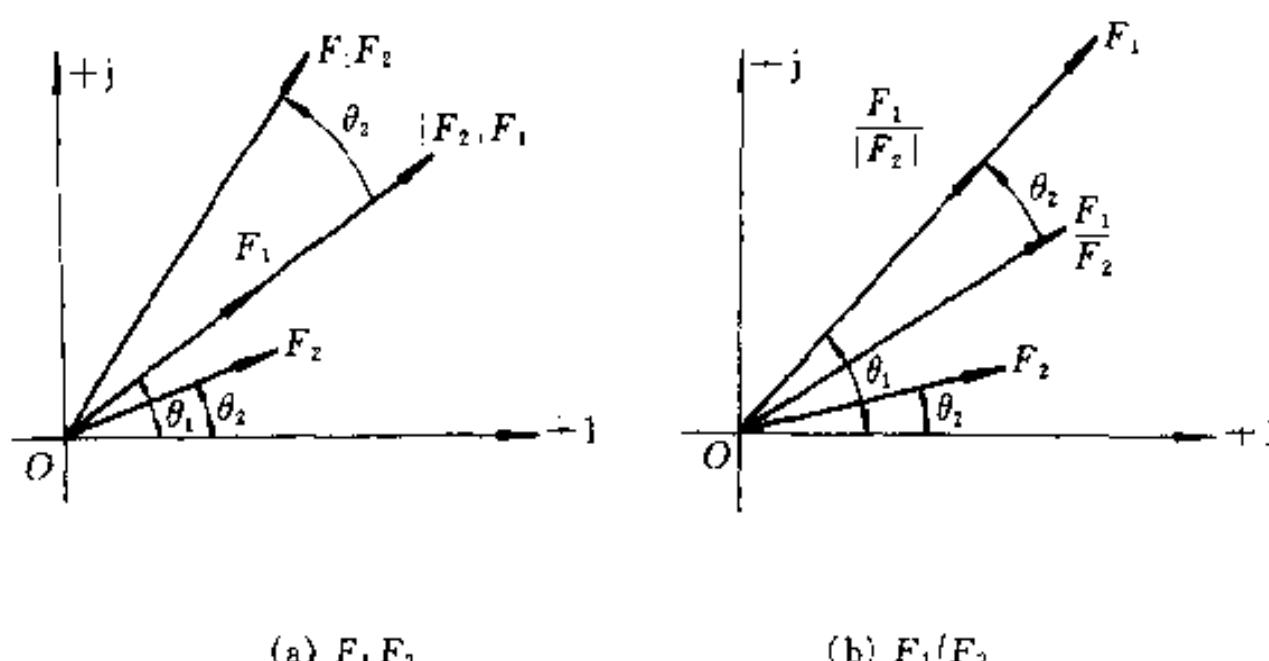


图 8-3 复数乘、除的图解示意

复数 $e^{j\theta} = 1$ 是一个模等于 1,辐角为 θ 的复数。任意复数 $A = |A|e^{j\phi}$ 乘以 $e^{j\theta}$ 等于把复数 A 逆时针旋转一个角度 θ ,而 A 的模值不变,所以 $e^{j\theta}$ 称为旋转因子。

根据欧拉公式,不难得出 $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$, $e^{jk} = -1$ 。因此“ $\pm j$ ”和“ -1 ”都可以看成旋转因子。例如一个复数乘以 j ,等于把该复数逆时针旋转 $\pi/2$ (在复平面上);一个复数除以 j ,等于把该复数乘以 $-j$,因此等于把它顺时针旋转 $\pi/2$ 。虚轴 j 等于把实轴 $+1$ 乘以 j 而得到的。

在复数运算中常有两个复数相等的运算。两个复数相等必须满足两个条件,如 $F_1 = F_2$ 必须有:

$$\operatorname{Re}[F_1] = \operatorname{Re}[F_2], \operatorname{Im}[F_1] = \operatorname{Im}[F_2]$$

或者有:

$$|F_1| = |F_2|, \arg(F_1) = \arg(F_2)$$

例 8-1 设 $F_1 = 3 - j4, F_2 = 10 / 135^\circ$ 。求 $F_1 + F_2$ 和 F_1/F_2 。

解 求复数的代数和用代数形式:

$$\begin{aligned} F_2 &= 10 / 135^\circ = 10(\cos 135^\circ + j\sin 135^\circ) \\ &= -7.07 + j7.07 \end{aligned}$$

$$F_1 + F_2 = (3 - j4) + (-7.07 + j7.07) = -4.07 + j3.07$$

转换为指数形式有:

$$\arg(F_1 + F_2) = \arctan\left(\frac{3.07}{-4.07}\right) = 143^\circ$$

$$|F_1 + F_2| = \sqrt{(4.07)^2 + (3.07)^2} = 5.1$$

即有:

$$F_1 + F_2 = 5.1 / 143^\circ$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{3 - j4}{-7.07 + j7.07} = \frac{(3 - j4)(-7.07 - j7.07)}{(-7.07 + j7.07)(-7.07 - j7.07)} = -0.495 + j0.071$$

或者

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{3 - j4}{10 / 135^\circ} = \frac{5 / -53.1^\circ}{10 / 135^\circ} = 0.5 / -188.1^\circ = 0.5 / 171.9^\circ$$

§ 8-2 正弦量

电路中按正弦规律变化的电压或电流,统称为正弦量。对正弦量的数学描述,可以采用 sine 函数,也可以用 cosine 函数。用相量法分析时,要注意采用的是哪一种形式,不要两者同时混用。本书采用 cosine 函数。

图 8-4 表示一段电路中有正弦电流 i ,在图示参考方向下,其数学表达式定义如下

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \quad (8-1)$$

式中的 3 个常数 I_m 、 ω 和 ϕ_i 称为正弦量的三要素。

I_m 称为正弦量的振幅。正弦量是一个等幅振荡的、正负交替变化的周期函数,振幅是正弦量在整个振荡过程中达到的最大值,即 $\cos(\omega t)$

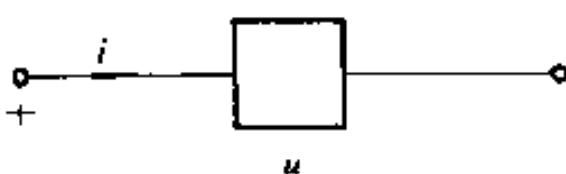


图 8-4 一段正弦电流电路

$\omega t + \phi_i = 0$ 时, 有

$$i_{\max} = I_m$$

这也是正弦量的极大值。当 $\cos(\omega t + \phi_i) = -1$ 时, 将有最小值(也是极小值) $i_{\min} = -I_m$ 。 $i_{\max} - i_{\min} = 2I_m$ 称为正弦量的峰-峰值。

随时间变化的角度 $(\omega t + \phi_i)$ 称为正弦量的相位, 或称相角。 ω 称为正弦量的角频率, 它是正弦量的相位随时间变化的角速度, 即

$$\omega = \frac{d}{dt}(\omega t + \phi_i)$$

单位为 rad/s。它与正弦量的周期 T 和频率 f 之间的关系为:

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = 2\pi f, \quad f = 1/T$$

频率 f 的单位为 1/s, 称为 Hz(赫兹, 简称赫)。我国工业用电的频率为 50 Hz。工程中还常以频率区分电路, 如音频电路、高频电路、甚高频电路等等。

ϕ_i 是正弦量在 $t = 0$ 时刻的相位, 称为正弦量的初相位(角), 简称初相, 即

$$(\omega t + \phi_i)|_{t=0} = \phi_i$$

初相的单位用弧度或度表示, 通常在主值范围内取值, 即 $|\phi_i| \leq 180^\circ$ 。初相与计时零点的确定有关。对任一正弦量, 初相是允许任意指定的, 但对于一个电路中的许多相关的正弦量, 它们只能相对于一个共同的计时零点确定各自的相位。

正弦量的三要素是正弦量之间进行比较和区分的依据。

正弦量随时间变化的图形称为正弦波。图 8-5 是正弦电流 i 的波形表示 ($\phi_i > 0$)。横轴可以用时间 t , 也可以用 ωt (rad) 表示。

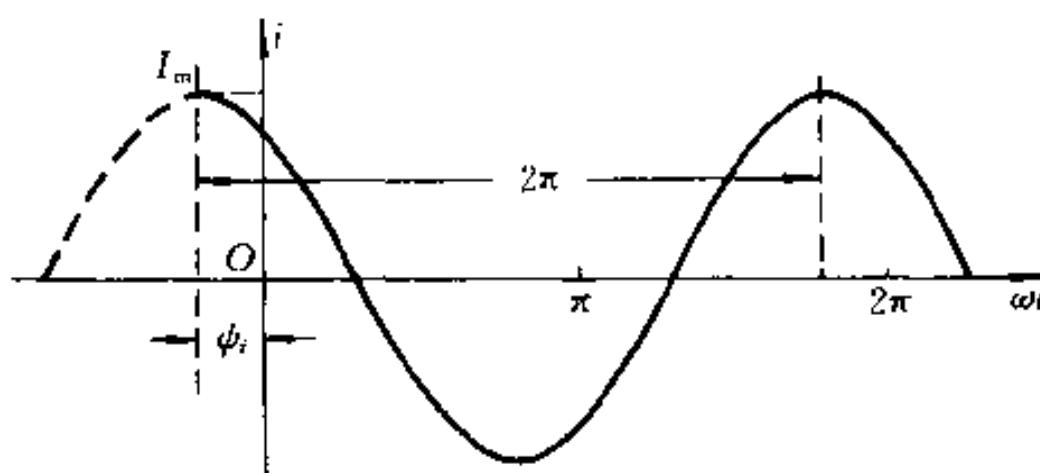


图 8-5 正弦量 i 的波形 ($\phi_i > 0$)

正弦量乘以常数, 正弦量的微分、积分, 同频正弦量的代数和等运算, 其结果仍为一个同频率的正弦量。正弦量的这个性质十分重要。

工程中常将周期电流或电压在一个周期内产生的平均效应换算为在效应上与之相等的直流量, 以衡量和比较周期电流或电压的效应, 这一直流量就称为周期量的有效值, 用相对应的大写字母表示。可通过比较电阻的热效应获得周期电流 i 与其有效值 I 之间的关系, 有效值 I 定义如下:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (8-2)$$

上式表示:周期量的有效值等于其瞬时值的平方在一个周期内积分的平均值再取平方根,因此有效值又称为均方根值^①。上式的定义是周期量有效值普遍适用的公式。当电流 i 是正弦量时,可以推出正弦量的有效值与正弦量的振幅之间的特殊关系。此时有

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_i) dt}$$

由于 $\cos^2(\omega t + \phi_i) = \frac{1 + \cos[2(\omega t + \phi_i)]}{2}$,代入上式后得

$$I = I_m / \sqrt{2} = 0.707 I_m$$

所以正弦量的有效值与其最大值之间有 $\sqrt{2}$ 关系,但是,正弦量的有效值与正弦量的频率和初相无关。根据这一关系常将正弦量 i 改写成如下的形式

$$i = \sqrt{2} I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

I 、 ω 、 ϕ_i 也可用来表示正弦量的三要素。工程中使用的交流电气设备铭牌上标出的额定电流、电压的数值,交流电压表、电流表表面上标出的数字都是有效值。

电路中常引用“相位差”的概念描述两个同频正弦量之间的相位关系。例如,设两个同频正弦电流 i_1 、电压 u_2 分别为:

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \phi_{i1})$$

$$u_2 = \sqrt{2} U_2 \cos(\omega t + \phi_{u2})$$

两个同频正弦量的相位差等于它们相位相减的结果。如设 φ_{12} 表示电流 i_1 与电压 u_2 之间的相位差,则有

$$\varphi_{12} = (\omega t + \phi_{i1}) - (\omega t + \phi_{u2}) = \phi_{i1} - \phi_{u2}$$

相位差也是在主值范围内取值。上述结果表明:同频正弦量的相位差等于它们的初相之差,为一个与时间无关的常数。电路常采用“超(越)前”和“滞(落)后”来说明两个同频正弦量相位比较的结果。

当 $\varphi_{12} > 0$,称为 i_1 超前 u_2 ; $\varphi_{12} < 0$,称 i_1 滞后 u_2 ; 当 $\varphi_{12} = 0$,称 i_1 和 u_2 同相; 当 $|\varphi_{12}| = \pi/2$,称 i_1 与 u_2 正交; 当 $|\varphi_{12}| = \pi$,称 i_1 、 u_2 彼此反相。

相位差可以通过观察波形确定,如图 8-6 所示。在同一个周期内两个波形的极大(小)值之间的角度值($\leq 180^\circ$),即为两者的相位差,先到达极值点的为超前波。图中所示为 i_1 滞后 u_2 。相位差与计时零点的选取、变动无关。

① root-mean-square(r.m.s.)

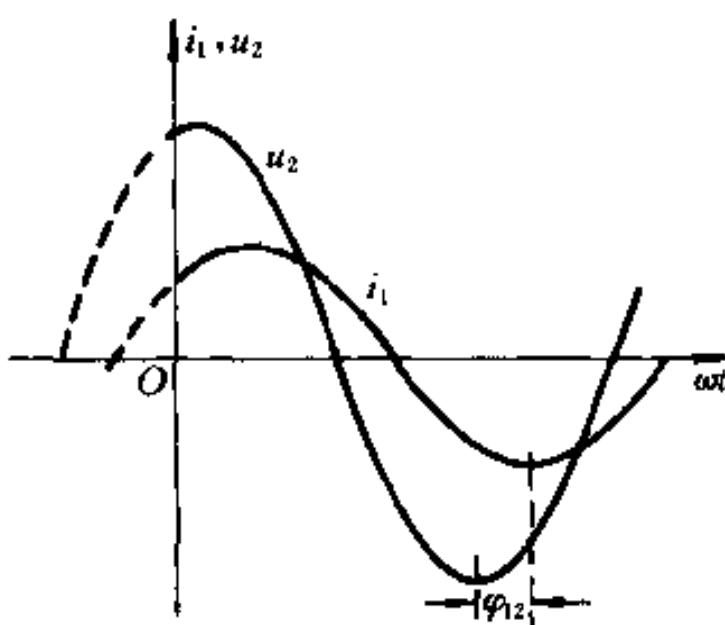


图 8-6 同频正弦量的相位差

由于正弦量的初相与设定的参考方向有关,当改设某一正弦量的参考方向时,则该正弦量的初相将改变 π ,它与其他正弦量的相位差也将相应地改变 π 。

§ 8-3 相量法的基础

在线性电路中,如果激励是正弦量,则电路中各支路的电压和电流的稳态响应将是同频正弦量。如果电路有多个激励且都是同一频率的正弦量,则根据线性电路的叠加性质,电路全部稳态响应都将是同一频率的正弦量。处于这种稳定状态的电路称为正弦稳态电路,又可称正弦电流电路。电力工程中遇到的大多数问题都可以按正弦稳态电路分析处理。许多电气、电子设备的设计和性能指标也往往是按正弦稳态考虑的。电工技术中的非正弦周期函数可以分解为频率成整数倍的正弦函数的无穷级数。这类问题也可以应用正弦稳态方法处理。

相量法是分析求解正弦电流电路稳态响应的一种有效工具。

如果复数 $F = |F|e^{j\theta}$ 中的辐角 $\theta = \omega t + \psi$, 则 F 就是一个复指数函数, 根据欧拉公式可展开为

$$F = |F|e^{j(\omega t + \psi)} = |F|\cos(\omega t + \psi) + j|F|\sin(\omega t + \psi)$$

显然有

$$\operatorname{Re}[F] = |F|\cos(\omega t + \psi)$$

所以正弦量可以用上述形式的复指数函数描述,使正弦量与其实部一一对应起来。如以正弦电流 $i = \sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_i)$ 为例,有

$$i = \operatorname{Re}[\sqrt{2}Ie^{j\phi_i} e^{j\omega t}]^{\textcircled{1}} \quad (8-3)$$

从上式可以看出:复指数函数中的 $Ie^{j\phi_i}$ 是以正弦量的有效值为模,以初相为幅

^① 如果正弦电流 i 用 sine 函数表示: $i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \phi_i)$, 则此式应改为 $i = \operatorname{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\phi_i} e^{j\omega t}]$ 。

角的一个复常数,这个复常数定义为正弦量的相量,记为 \hat{I}

$$\hat{I} = I e^{j\psi} = I / \underline{\psi}$$

字母 I 上的小圆点是用来表示相量,并与有效值区分,也可以与一般复数区分。按正弦量有效值定义的相量称为“有效值”相量。^①

在实际应用中,不必经过上述的变换步骤,可直接根据正弦量写出与之对应的相量;反之,从相量直接写出相对应的正弦量时,必须给出正弦量的角频率 ω ,因为相量没有反映正弦量的频率。例如,正弦量 $220\sqrt{2}\cos(\omega t - 35^\circ)$,它的有效值相量就是 $220 / -35^\circ$,反之,如果已知频率 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ 的正弦量的有效值相量为 $100 / 60^\circ$,则此正弦量为 $100\sqrt{2}\cos(100t + 60^\circ)$ 。

相量是一个复数,它在复平面上的图形称为相量图,如图 8-7 所示。

上述与正弦量相对应的复指数函数在复平面上可用旋转相量表示出来。其中复常数 $\sqrt{2}I / \underline{\psi}$ (以电流为例)称为旋转相量的复振幅, $e^{j\omega t}$ 是一个随时间变化而以角速度 ω 不断逆时针旋转的因子,复振幅乘以旋转因子 $e^{j\omega t}$ 即表示复振幅在复平面上不断逆时针旋转,故称之为旋转相量,这就是复指数函数的几何意义。式(8-3)表示的几何意义为:正弦电流 i 的瞬时值等于其对应的旋转相量[式(8-3)括号内]在实轴上的投影[式(8-3)取实部的含义],这一关系和正弦量的波形的对应关系如图 8-8 所示。

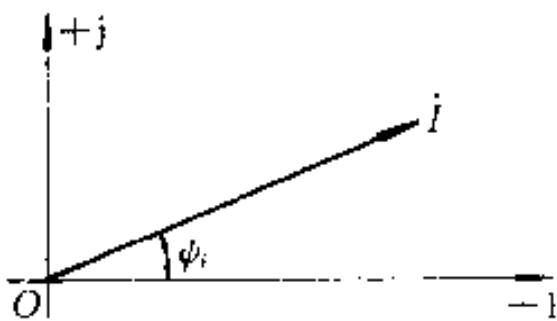


图 8-7 正弦量的相量图

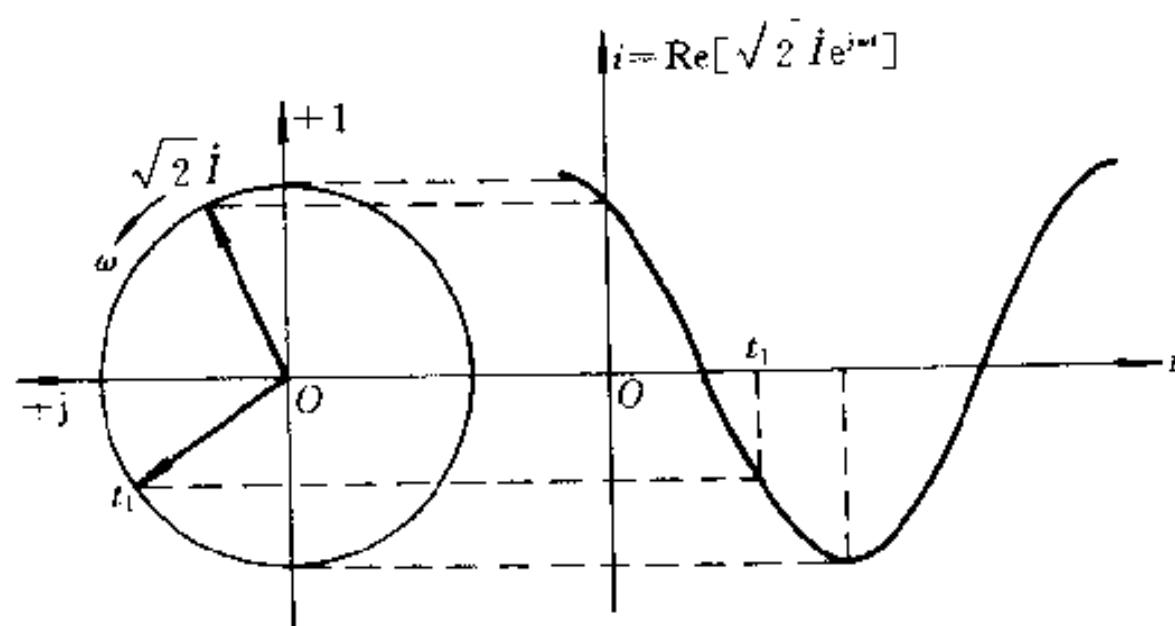


图 8-8 正弦波与旋转相量

^① 相量也可以用正弦量的振幅值定义,即把式(8-3)改为

$$i = \text{Re}[I_m e^{j\psi} e^{j\omega t}]$$

对应的相量记为 $I_m = I_m e^{j\psi} = I_m / \underline{\psi}$, I_m 称为“振幅”相量。

正弦量乘以常数, 正弦量的微分、积分及同频正弦量的代数和, 结果仍是一个同频的正弦量。下面将这些运算转换为相对应的相量运算。

1. 同频正弦量的代数和

如设 $i_1 = \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \phi_1)$, $i_2 = \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t + \phi_2)$, ..., 这些正弦量的和设为正弦量 i , 则

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \dots \\ &= \operatorname{Re}[\sqrt{2} I_1 e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\sqrt{2} I_2 e^{j\omega t}] + \dots \\ &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}(I_1 + I_2 + \dots) e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

而

$$i = \operatorname{Re}[\sqrt{2} I e^{j\omega t}]$$

有

$$\operatorname{Re}[\sqrt{2} I e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2}(I_1 + I_2 + \dots) e^{j\omega t}]$$

上式对于任何时刻 t 都成立, 故有

$$\hat{i} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \dots$$

2. 正弦量的微分

设正弦电流 $i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_i)$, 对 i 求导, 有

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[\sqrt{2} I e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\frac{d}{dt}(\sqrt{2} I e^{j\omega t})\right]$$

上述关系表明: 复指数函数实部的导数等于复指数函数导数的实部。其结果为

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}(j\omega I) e^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}(I e^{j(\omega t + \phi_i + \pi/2)})] \\ &= \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_i + \pi/2) \end{aligned}$$

这说明正弦量的导数是一个同频正弦量, 其相量等于原正弦量 i 的相量 \hat{i} 乘以 $j\omega$, 即表示 di/dt 的相量为

$$j\omega \hat{i} = \omega I / \underline{\phi_i + \pi/2}$$

此相量的模为 ωI , 辐角则超前 $\pi/2$ 。

对 i 的高阶导数 $d^n i / dt^n$, 其相量为 $(j\omega)^n \hat{i}$ 。

3. 正弦量的积分

设 $i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_i)$, 则

$$\begin{aligned} \int i dt &= \int \operatorname{Re}[\sqrt{2} I e^{j\omega t}] dt = \operatorname{Re} \left[\int (\sqrt{2} I e^{j\omega t}) dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \left(\frac{I}{j\omega} \right) e^{j\omega t} \right] \\ &= \sqrt{2} \frac{I}{\omega} \cos \left(\omega t + \phi_i - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

正弦量的积分结果为同频率正弦量,其相量等于原正弦量 i 的相量 \hat{i} 除以 $j\omega$,其模为 I/ω ,其幅角滞后 $\pi/2$ 。 i 的 n 重积分的相量为 $\hat{I}/(j\omega)^n$ 。

例 8-2 已知两个同频正弦电流分别为 $i_1 = 10\sqrt{2}\cos(314t + \pi/3)$ A, $i_2 = 22\sqrt{2}\cos(314t - 5\pi/6)$ A。求:(1) $i_1 + i_2$; (2) di_1/dt ; (3) $\int i_2 dt$ 。

解 (1) 设 $i = i_1 + i_2 = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi_i)$, 其相量为 $\hat{I} = I/\psi_i$ (待求), 可得:

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 10/60^\circ \text{ A} + 22/-150^\circ \text{ A} \\ &= (5 + j8.66) \text{ A} + (-19.05 - j11) \text{ A} \\ &= (-14.05 - j2.34) \text{ A} = 14.24/-170.54^\circ \text{ A} \\ i &= 14.24\sqrt{2}\cos(314t - 170.54^\circ) \text{ A}\end{aligned}$$

(2) 求 $\frac{di_1}{dt}$ 可直接用时域形式求解,也可以用相量求解

$$\begin{aligned}\frac{di_1}{dt} &= -10\sqrt{2} \times 314 \sin(314t + 60^\circ) \\ &= 3140\sqrt{2}\cos(314t + 60^\circ + 90^\circ)\end{aligned}$$

用相量形式求解,设 di_1/dt 的相量为 K/ψ_K , 则有

$$K/\psi_K = j\omega \hat{I}_1 = j314 \times 10/60^\circ = 3140/60^\circ + 90^\circ$$

两者结果相同。

(3) $\int i_2 dt$ 的相量为

$$\frac{\hat{I}_2}{j\omega} = \frac{22/-150^\circ}{314/90^\circ} = 0.07/120^\circ$$

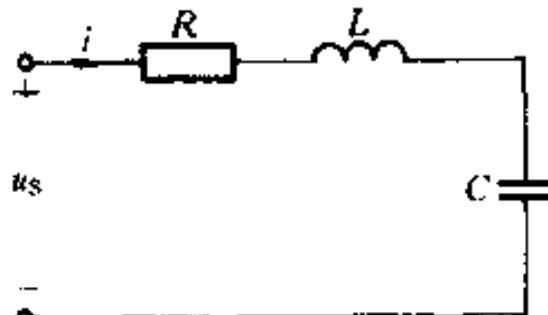
相量法是求解线性电路在正弦激励下微分方程特解(稳态解)的有效方法。图 8-9 所示 RLC 电路中,设 $u_s = \sqrt{2}U_s\cos(\omega t + \psi_u)$ V, 描述该电路的微分方程为(以电流 i 为变量)

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u_s$$

电路的特解是与 u_s 同频率的正弦量,根据式(8-3)将上述微分方程进行如下的变换

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[R(\sqrt{2}\hat{I}e^{j\omega t})] + \operatorname{Re}[\sqrt{2}(j\omega L)\hat{I}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{j\omega C}\right)\hat{I}e^{j\omega t}\right] \\ = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\hat{U}_s e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

上式对任何时刻 t 均成立,所以两边去掉取实部的运算符号“ Re ”,方程仍应成立,有



$$\sqrt{2}(RI)e^{j\omega t} + \sqrt{2}(j\omega LI)e^{j\omega t} + \sqrt{2}\left(\frac{I}{j\omega C}\right)e^{j\omega t} = \sqrt{2}U_s e^{j\omega t}$$

约去方程两边的公共因子 $\sqrt{2}e^{j\omega t}$, 方程将变为与时间无关的复代数方程

$$RI + j\omega LI - j\frac{1}{\omega C}I = U_s$$

电流 i 的相量 I 为

$$I = \frac{U_s}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

将电流相量变换为时间函数, 可求得正弦电流 i 。

§ 8-4 电路定律的相量形式

正弦电流电路中的各支路电流和支路电压都是同频正弦量, 所以可以用相量法将 KCL 和 KVL 转换为相量形式。

对电路中任一结点, 根据 KCL 有

$$\sum i = 0$$

由于所有支路电流都是同频正弦量, 故其相量形式为

$$\sum I = 0$$

同理, 对电路任一回路, 根据 KVL 有

$$\sum u = 0$$

由于所有支路电压都是同频正弦量, 故其相量形式为

$$\sum U = 0$$

电阻、电感和电容元件的 VCR 也可以用相量形式表示。

对于图 8-10(a)所示电阻 R , 当有正弦电流 i_R 通过时, 电阻两端的电压 u_R 为

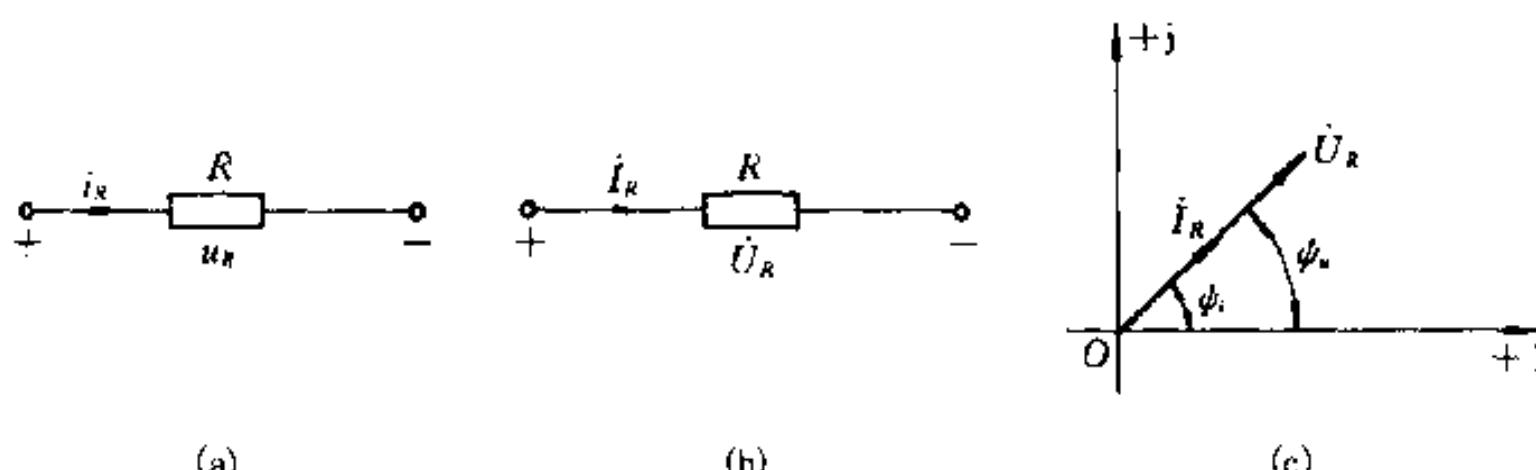


图 8-10 电阻中的正弦电流

$$u_R = Ri_R \quad (\text{或 } i_R = Gu_R, G = 1/R)$$

u_R 和 i_R 为同频正弦量, 其相量形式为

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R \quad (\text{或 } \dot{I}_R = G\dot{U}_R)$$

所以

$$U_R = RI_R \quad (\text{或 } I_R = GU_R)$$

而 u_R 和 i_R 的相位差为零, 即它们同相。图 8-10(b)是表示电阻 R 的电压相量和电流相量形式的示意图; 图 8-10(c)是电阻中正弦电流和电压的相量图。

当有正弦电流 i_L 通过图 8-11(a)所示电感 L 时, 有

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

其相量形式为

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L \quad \left(\text{或 } \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U}_L \right)$$

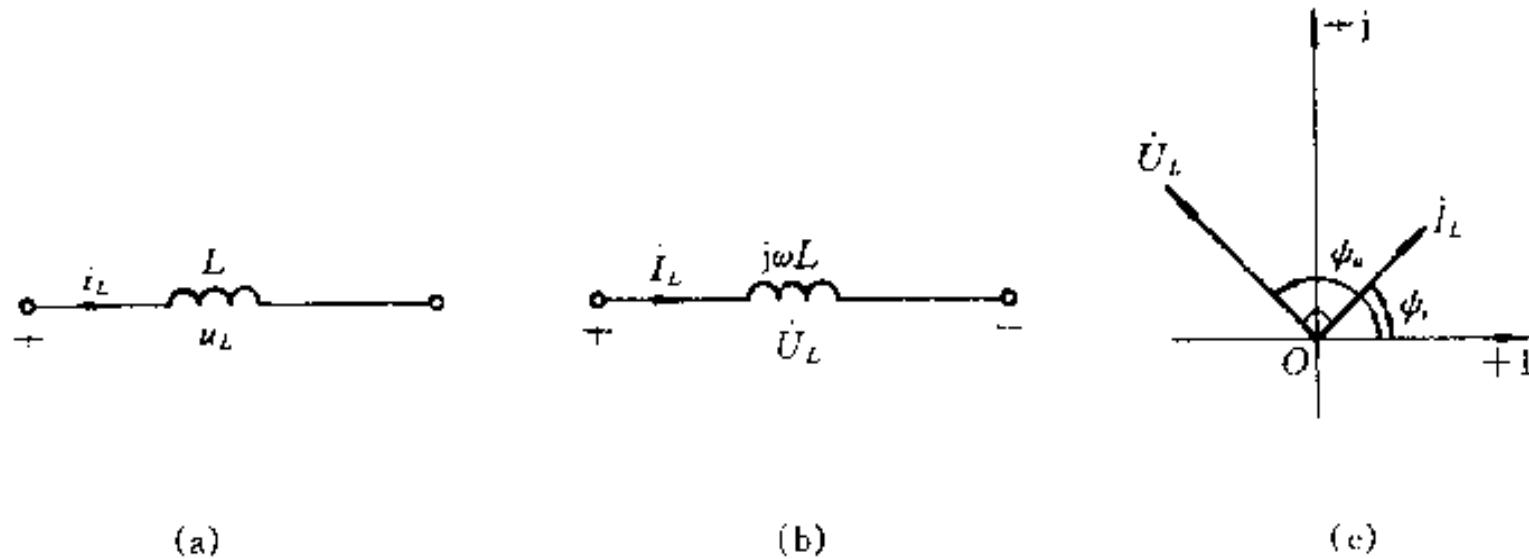


图 8-11 电感中的正弦电流

所以

$$U_L = \omega L I_L \quad (\text{或 } I_L = U_L / \omega L)$$

而正弦电流 i_L 滞后正弦电压 u_L 的相位为 $\pi/2$ 。式中 ωL 具有与电阻相同的量纲。当 $\omega = 0$ 时, $\omega L = 0$, 此时电感相当于短路。

图 8-11(b)是表示电感 L 及电感的电压相量和电流相量形式的示意图, 图(c)则为电感中正弦电压和电流的相量图。

当电容 C 上电压 u_C 为正弦量时, 如图 8-12(a), 电容电流 i_C 为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

其相量形式为

$$I_C = j \omega C U_C \quad \left(\text{或 } \dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_C \right)$$

所以

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_C$$

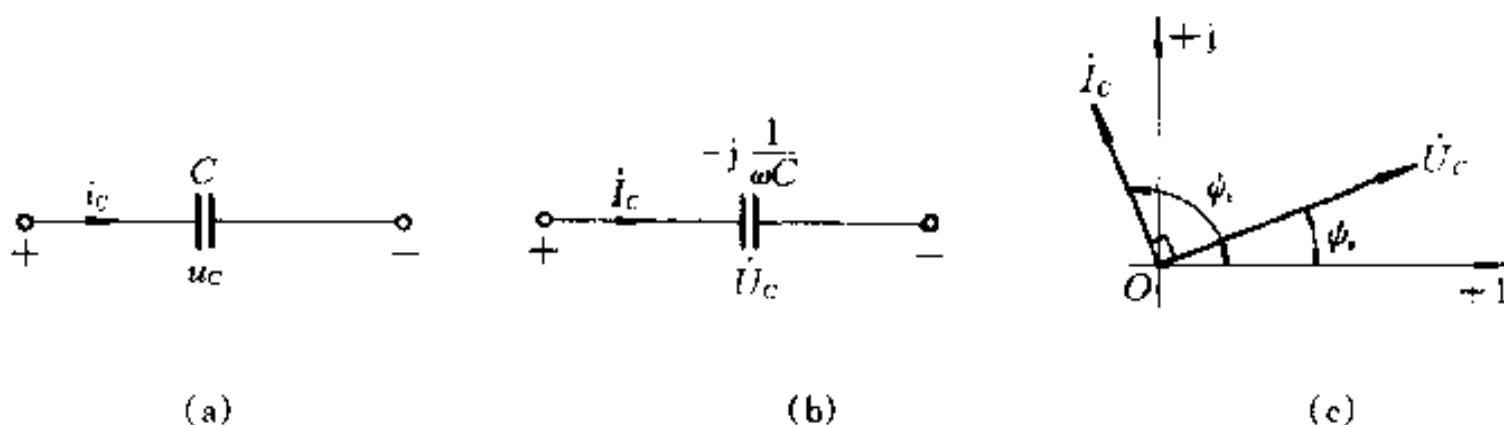


图 8-12 电容中的正弦电流

而电容电压 \$u_C\$ 滞后其电流 \$i_C\$ 的相位为 \$\pi/2\$。上式中的 \$\frac{1}{\omega C}\$ 具有与电阻相同的量纲。当 \$\omega = 0\$ 时, \$\frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty\$, 此时电容相当于开路。

图 8-12(b) 是表示电容 \$C\$ 及其电压相量和电流相量形式的示意图, 图(c) 则为电容电压和电流的相量图。

如果受控源(线性)的控制电压或电流是正弦量, 则受控源的电压或电流将是同一频率的正弦量。现以图 8-13(a) 的 VCCS 为例说明, 此时有

$$i_j = g u_k$$

相量形式为

$$\dot{I}_j = g \dot{U}_k$$

图 8-13(b) 为其相量形式的示意图。

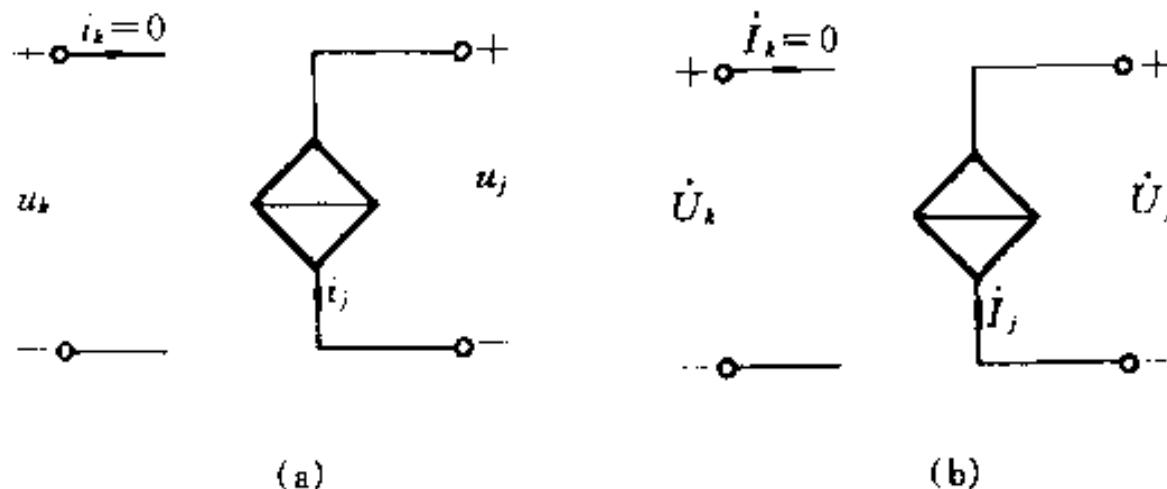
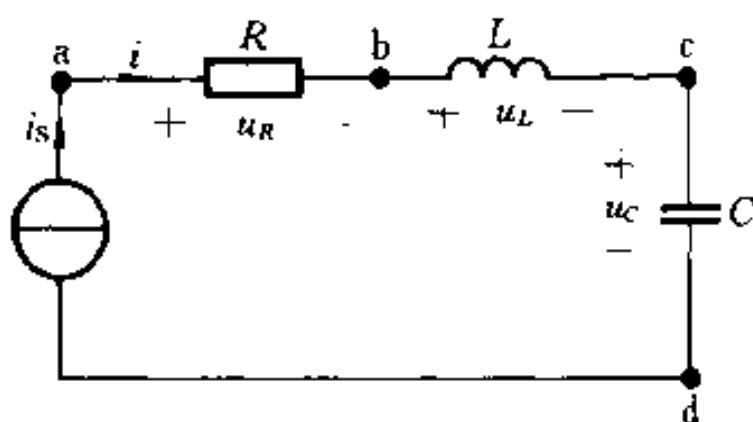


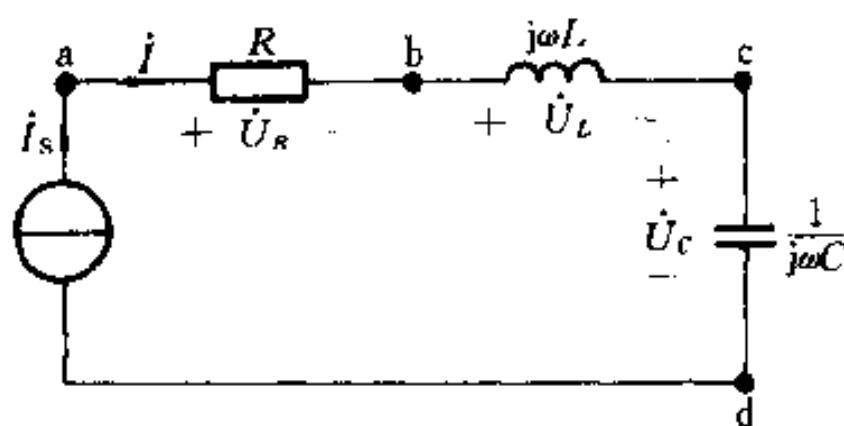
图 8-13 VCCS 的相量表示

根据以上介绍的 KCL 和 KVL 的相量形式和 \$R, L, C\$ 等元件 VCR 的相量形式, 不难看出在形式上与描述电阻电路的有关关系式完全相似。

例 8-3 图 8-14(a) 所示电路中, \$i_s\$ 为正弦电流源的电流, 其有效值 \$I_s = 5 \text{ A}\$, 角频率 \$\omega = 10^3 \text{ rad/s}\$, \$R = 3 \Omega\$, \$L = 1 \text{ H}\$, \$C = 1 \mu\text{F}\$。求电压 \$u_{ad}\$ 和 \$u_{bd}\$。



(a)



(b)

图 8-14 例 8-3 图

解 画出与图 8-14(a)所示电路相对应的相量形式表示的电路图,如图 8-14(b)所示。

设电路的电流相量为参考相量,即令 $\hat{I} = \hat{I}_s = 5 / 0^\circ \text{ A}$ 。根据元件的 VCR,有:

$$\hat{U}_R = R\hat{I} = 15 / 0^\circ \text{ V}$$

$$\hat{U}_L = j\omega L\hat{I} = 5000 / 90^\circ \text{ V}$$

$$\hat{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \hat{I} = 5000 / -90^\circ \text{ V}$$

根据 KVL,有:

$$\hat{U}_{bd} = \hat{U}_L + \hat{U}_C = 0$$

$$\hat{U}_{ad} = \hat{U}_R + \hat{U}_{bd} = 15 / 0^\circ \text{ V}$$

所以:

$$u_{bd} = 0$$

$$u_{ad} = 15\sqrt{2} \cos(10^3 t) \text{ V}$$

例 8-4 图 8-15 所示电路中的仪表为交流电流表,其仪表所指示的读数为电流的有效值,其中电流表 A_1 的读数为 5 A, 电流表 A_2 的读数为 20 A, 电流表 A_3 的读数为 25 A。求电流表 A 和 A_4 的读数。

解 图中各交流电流表的读数就是仪表所在支路的电流相量的模(有效

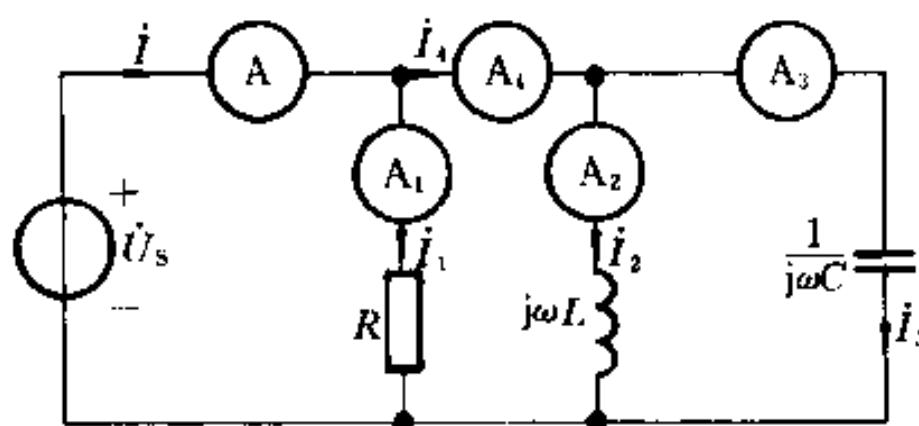


图 8-15 例 8-4 图

值)。显然,如果选择并联支路的电压相量为参考相量,即令 $\dot{U}_s = U_s / 0^\circ$ V, 则根据元件的 VCR 就能很方便地确定这些并联支路中电流的初相。它们分别为:

$$\dot{I}_1 = 5 / 0^\circ \text{ A}, \dot{I}_2 = -j20 \text{ A}, \dot{I}_3 = j25 \text{ A}$$

根据 KCL,有:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (5 + j5) \text{ A} = 7.07 / 45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = j5 \text{ A} = 5 / 90^\circ \text{ A}$$

所求电流表的读数为:

表 A : 7.07 A ; 表 A_4 : 5 A

习 题

8-1 将下列复数化为极坐标形式:

- (1) $F_1 = -5 - j5$; (2) $F_2 = -4 + j3$; (3) $F_3 = 20 + j40$; (4) $F_4 = j10$; (5) $F_5 = -3$; (6) $F_6 = 2.78 + j9.20$ 。

8-2 将下列复数化为代数形式:

- (1) $F_1 = 10 / -73^\circ$; (2) $F_2 = 15 / 112.6^\circ$; (3) $F_3 = 1.2 / 152^\circ$; (4) $F_4 = 10 / -90^\circ$; (5) $F_5 = 5 / -180^\circ$; (6) $F_6 = 10 / -135^\circ$ 。

8-3 若 $100 / 0^\circ + A / 60^\circ = 175 / \psi$ 。求 A 和 ψ 。

8-4 求 8-1 题中的 $F_2 \cdot F_6$ 和 F_2 / F_6 。

8-5 求 8-2 题中的 $F_1 + F_5$ 和 F_1 / F_5 。

- 8-6 若已知 $i_1 = -5 \cos(314t + 60^\circ)$ A, $i_2 = 10 \sin(314t + 60^\circ)$ A, $i_3 = 4 \cos(314t + 60^\circ)$ A。(1) 写出上述电流的相量,并绘出它们的相量图;(2) i_1 与 i_2 和 i_1 与 i_3 的相位差;(3) 绘出 i_1 的波形图;(4) 若将 i_1 表达式中的负号去掉将意味着什么? (5) 求 i_1 的周期 T 和频率 f。

- 8-7 若已知两个同频正弦电压的相量分别为 $\dot{U}_1 = 50 / 30^\circ$ V, $\dot{U}_2 = -100 / -150^\circ$ V, 其频率 $f = 100$ Hz。求:(1) 写出 u_1, u_2 的时域形式;(2) u_1 与 u_2 的相位差。

- 8-8 已知:

$$u_1 = 220\sqrt{2}\cos(314t - 120^\circ) \text{ V}$$

$$u_2 = 220\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$$

- (1) 画出它们的波形图, 求出它们的有效值、频率 f 和周期 T ;
 (2) 写出它们的相量和画出其相量图, 求出它们的相位差;
 (3) 如把电压 u_2 的参考方向反向, 重新回答(1)、(2)。

8-9 已知一段电路的电压、电流为:

$$u = 10\sin(10^3 t - 20^\circ) \text{ V}$$

$$i = 2\cos(10^3 t - 50^\circ) \text{ A}$$

- (1) 画出它们的波形图和相量图;
 (2) 求它们的相位差。

8-10 已知图示 3 个电压源的电压分别为:

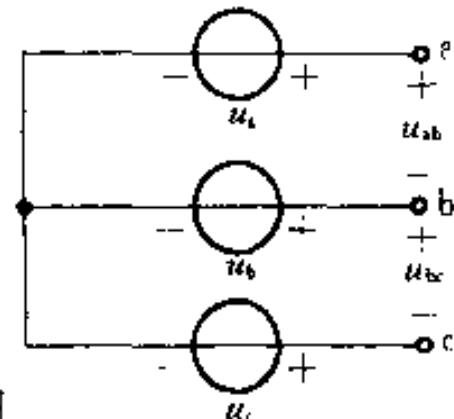
$$u_a = 220\sqrt{2}\cos(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$$

$$u_b = 220\sqrt{2}\cos(\omega t - 110^\circ) \text{ V}$$

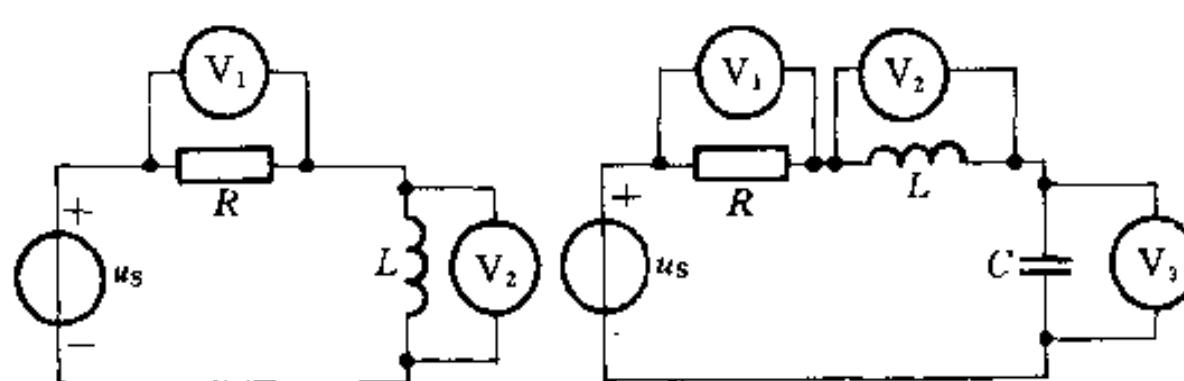
$$u_c = 220\sqrt{2}\cos(\omega t + 130^\circ) \text{ V}$$

求:(1) 3 个电压的和;(2) u_{ab} 、 u_{bc} ; (3) 画出它们的相量图。

8-11 已知图(a)中电压表读数为: $V_1: 30 \text{ V}$; $V_2: 60 \text{ V}$; 图(b)中的 $V_1: 15 \text{ V}$; $V_2: 80 \text{ V}$; $V_3: 100 \text{ V}$ 。(电压表的读数为正弦电压的有效值)。求图中电压 U_s 。



题 8-10 图



(a)

(b)

题 8-11 图

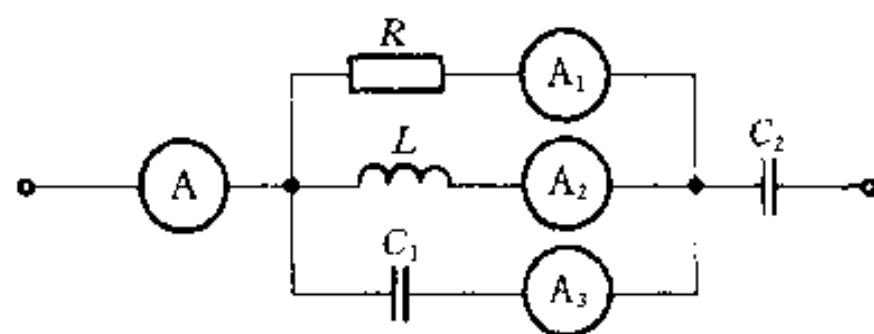
8-12 已知图示正弦电流电路中电流表的读数分别为 $A_1: 5 \text{ A}$; $A_2: 20 \text{ A}$; $A_3: 25 \text{ A}$ 。求:(1) 图中电流表 A 的读数;(2) 如果维持 A_1 的读数不变, 而把电源的频率提高一倍, 再求电流表 A 的读数。

8-13 对 RL 串联电路作如下 2 次测量:(1) 端口加 90 V 直流电压($\omega = 0$)时, 输入电流为 3 A ;(2) 端口加 $f = 50 \text{ Hz}$ 的正弦电压 90 V 时, 输入电流为 1.8 A 。求 R 和 L 的值。

8-14 某一元件的电压、电流(关联方向)分别为下述 4 种情况时, 它可能是什么元件?

$$(1) \begin{cases} u = 10\cos(10t + 45^\circ) \text{ V} \\ i = 2\sin(10t + 135^\circ) \text{ A} \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} u = 10\sin(100t) \text{ V} \\ i = 2\cos(100t) \text{ A} \end{cases};$$



题 8-12 图

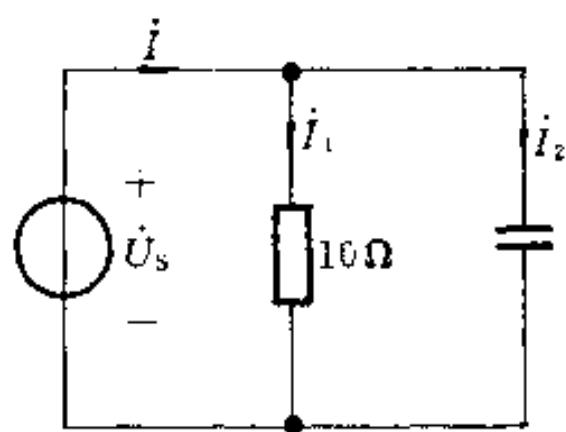
$$(3) \begin{cases} u = -10\cos t \text{ V} \\ i = -\sin t \text{ A} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u = 10\cos(314t + 45^\circ) \text{ V} \\ i = 2\cos(314t) \text{ A} \end{cases}$$

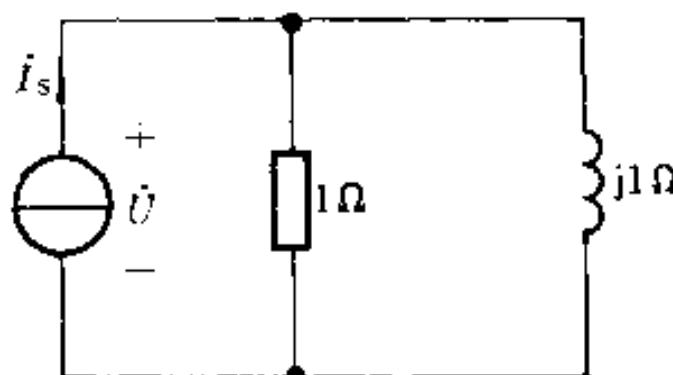
8-15 电路由电压源 $u_s = 100\cos(10^3 t)$ V 及 R 和 $L = 0.025$ H 串联组成, 电感端电压的有效值为 25 V。求 R 值和电流的表达式。

8-16 已知图示电路中 $I_1 = I_2 = 10$ A。求 I 和 U_s 。

8-17 图示电路中 $I_s = 2\angle 0^\circ$ A。求电压 U_a 。



题 8-16 图



题 8-17 图

第九章

正弦稳态电路的分析

———— 内容提要 ————

本章用相量法分析线性电路的正弦稳态响应。首先，引入阻抗、导纳的概念和电路的相量图。其次，将通过实例介绍电路方程的相量形式和线性电路定理的相量描述和应用，介绍正弦电流电路的瞬时功率、平均功率、无功功率、视在功率和复功率，以及最大功率的传输问题。最后，介绍电路的谐振现象和电路的频率响应。

§ 9-1 阻抗和导纳

阻抗和导纳的概念以及对它们的运算和等效变换是线性电路正弦稳态分析中的重要内容。图 9-1(a)所示为一个含线性电阻、电感和电容等元件，但不含独立源的一端口 N_0 。当它在角频率为 ω 的正弦电压(或正弦电流)激励下处于稳定状态时，端口的电流(或电压)将是同频率的正弦量。应用相量法，端口的电压相量 \dot{U} 与电流相量 \dot{I} 的比值定义为该一端口的阻抗 Z ，即

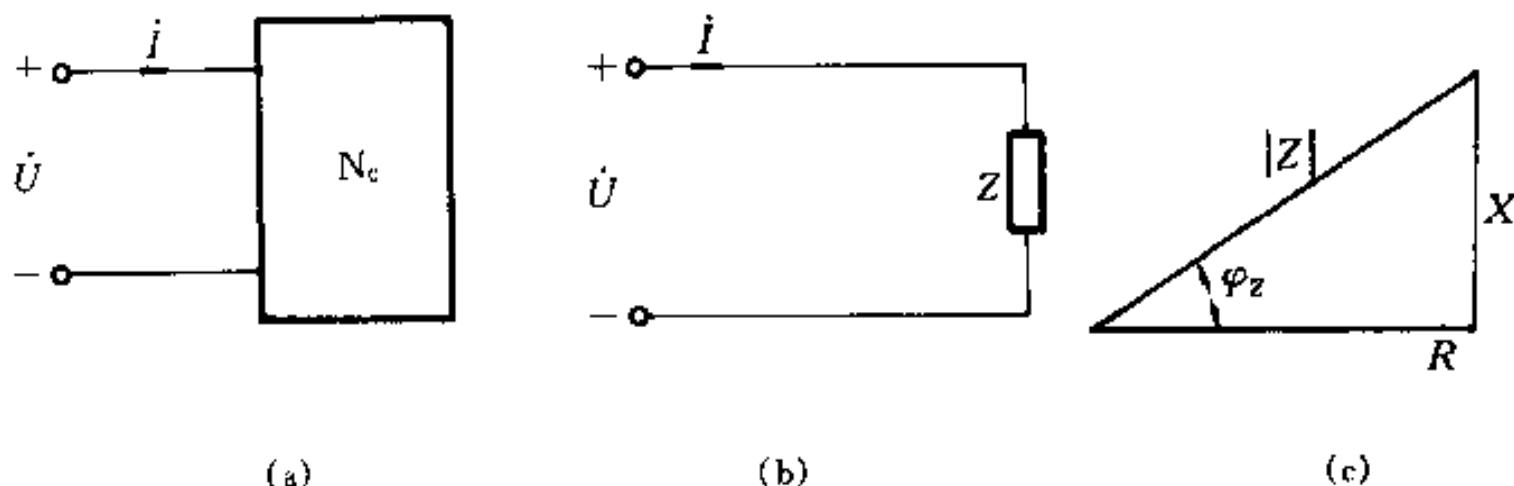


图 9-1 一端口的阻抗

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = |Z| e^{j\varphi_z} \quad (9-1)$$

式中 $\dot{U} = U / \psi_u$, $\dot{I} = I / \psi_i$ 。 Z 又称为复阻抗, 其图形符号见图 9-1(b)。 Z 的模值 $|Z|$ 称为阻抗模, 它的辐角 φ_z 称为阻抗角^①。

由上式不难得出:

$$|Z| = U/I, \quad \varphi_z = \psi_u - \psi_i$$

阻抗 Z 的代数形式可写为

$$Z = R + jX$$

其实部 $\text{Re}[Z] = |Z| \cos \varphi_z (= R)$ 称为电阻^②, 虚部 $\text{Im}[Z] = |Z| \sin \varphi_z (= X)$ 称为电抗。

如果一端口 N_0 内部仅含单个元件 R 、 L 或 C , 则对应的阻抗分别为:

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$$

所以电阻 R 的阻抗虚部为零, 实部即为 R 。电感 L 的阻抗实部为零, 虚部为 $j\omega L$ 。 Z_L 的“电抗”用 X_L 表示, $X_L = \omega L$, 称为感性电抗, 简称感抗。电容 C 的阻抗实部为零, 虚部为 $-j \frac{1}{\omega C}$ 。 Z_C 的“电抗”用 X_C 表示, $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ ^③, 称为容性电抗, 简称容抗。

如果 N_0 内部为 RLC 串联电路(参见图 8-9), 则阻抗 Z 为

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= R + jX = |Z| / \psi_z \end{aligned}$$

Z 的实部就是电阻 R , 它的虚部 X 即电抗为

$$X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Z 的模值和辐角分别为:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi_z = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

而

$$R = |Z| \cos \varphi_z, \quad X = |Z| \sin \varphi_z$$

① 复阻抗往往简称为阻抗; “阻抗模”在不会混淆的情况下也可以用“阻抗”这一名称。

② 按 GB 3102.5—93, $\text{Re}[Z]$ 称为(交流)电阻。

③ 有的文献定义 X_C 为 $X_C \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\omega C}$

当 $X > 0$, 即 $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ 时, 称 Z 呈感性, 当 $X < 0$, 即 $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ 时, 称 Z 呈容性。

一般情况下, 按式(9-1)定义的阻抗又称为一端口 N_0 的等效阻抗, 输入阻抗或驱动点阻抗, 它的实部和虚部都将是外施正弦激励角频率 ω 的函数, 此时 Z 可写为

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$Z(j\omega)$ 的实部 $R(\omega)$ 称为它的电阻分量, 它的虚部 $X(\omega)$ 称为电抗分量。

按阻抗 Z 的代数形式, R 、 X 和 $|Z|$ 之间的关系可用一个直角三角形表示, 见图 9-1(c), 这个三角形称为阻抗三角形。

显然, 阻抗具有与电阻相同的量纲。

(复数)阻抗 Z 的倒数定义为(复数)导纳, 用 Y 表示

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = \frac{I}{U} / [\psi_i - \psi_u] = |Y| / \phi_Y$$

Y 的模值 $|Y|$ 称为导纳模^①, 它的辐角 ϕ_Y 称为导纳角, 而:

$$|Y| = I/U, \phi_Y = \psi_i - \psi_u$$

导纳 Y 的代数形式可写为

$$Y = G + jB^{\circledR}$$

Y 的实部 $\text{Re}[Y] = |Y| \cos \phi_Y = G$ 称为电导, 虚部 $\text{Im}[Y] = |Y| \sin \phi_Y = B$ 称为电纳。

对于单个元件 R 、 L 、 C , 它们的导纳分别为:

$$Y_R = G = \frac{1}{R}$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$$

$$Y_C = j\omega C$$

电阻 R 的导纳实部即为电导 $G\left(=\frac{1}{R}\right)$, 虚部为零。电感 L 的导纳实部为零, 虚部为 $-j\frac{1}{\omega L}$, 即电纳 $B_L = -\frac{1}{\omega L}$ ^②。电容 C 的导纳实部为零, 虚部为 $j\omega C$, 即电纳 $B_C = j\omega C$ 。 B_L 有时称为感性电纳, 简称感纳, B_C 有时称为容性电纳, 简称

① 复数导纳往往简称为导纳; “导纳模”也可用“导纳”的名称。

② 此定义系根据 GB 3102.5—93, 另有如下形式:

$$Y = G - jB$$

有的文献定义 B_L 为 $B_L \xrightarrow{\text{def}} \frac{1}{\omega L}$ 。

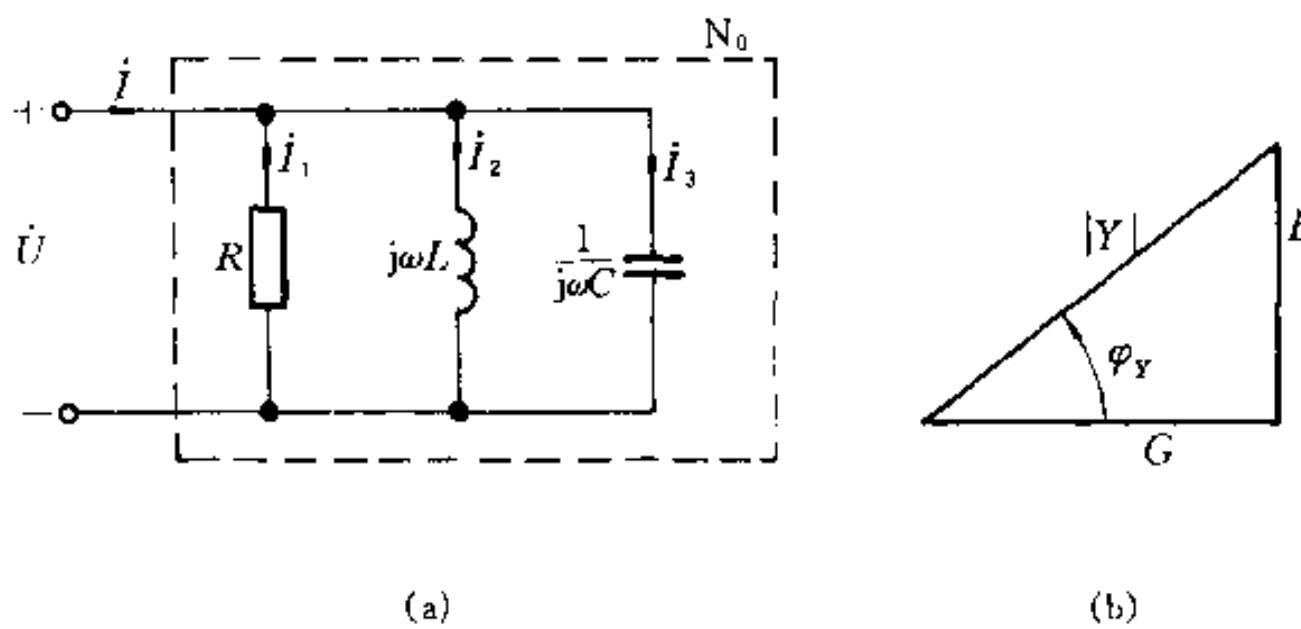
容纳。

如果一端口 N_0 内部为 RLC 并联电路, 见图 9-2(a), 其导纳为

$$Y = \frac{I}{U}$$

根据 KCL 有

$$I_1 = \frac{U}{R}, I_2 = \frac{U}{j\omega L}, I_3 = j\omega C U$$



(a)

(b)

图 9-2 一端口的导纳

故

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Y 的实部就是电导 G ($= \frac{1}{R}$), 虚部 $B = \omega C - \frac{1}{\omega L} = B_C + B_L$ 。 Y 的模和导纳角分别为:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi_Y = \arctan \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \right)$$

当 $B > 0$, 即 $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ 时, 称 Y 呈容性; 当 $B < 0$, 即 $\omega C < \frac{1}{\omega L}$ 时, 称 Y 呈感性。

一般情况下, 按一端口定义的导纳又称为一端口 N_0 的等效导纳, 输入导纳或驱动点导纳, 它的实部和虚部都将是外施正弦激励的角频率 ω 的函数, 此时 Y 可写为

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

$Y(j\omega)$ 的实部 $G(\omega)$ 称为它的电导分量, 它的虚部称为电纳分量。

按导纳 Y 的代数形式, G 、 B 和 Y 之间的关系可用导纳三角形表示, 见图 9-2(b)。

阻抗和导纳可以等效互换,条件为

$$Z(j\omega)Y(j\omega) = 1$$

即有:

$$|Z(j\omega)| \cdot |Y(j\omega)| = 1, \varphi_Z + \varphi_Y = 0$$

用代数形式表示有

$$G(\omega) + jB(\omega) = \frac{1}{R(\omega) + jX(\omega)} = \frac{R(\omega)}{|Z(j\omega)|^2} - j \frac{X(\omega)}{|Z(j\omega)|^2}$$

故:

$$G(\omega) = \frac{R(\omega)}{|Z(j\omega)|^2}$$

$$B(\omega) = -\frac{X(\omega)}{|Z(j\omega)|^2}$$

或者:

$$R(\omega) = \frac{G(\omega)}{|Y(j\omega)|^2}$$

$$X(\omega) = -\frac{B(\omega)}{|Y(j\omega)|^2}$$

以 RLC 串联电路为例,它的阻抗可以直接写出,即

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

而其等效导纳为

$$Y = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} - j \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

所以 Y 的实部和虚部都是 ω 的函数,而且比较复杂。同理,对 RLC 并联电路,它的导纳可以直接写出,其等效阻抗为

$$Z = \frac{G}{\sqrt{G^2 + B^2}} - j \frac{B}{\sqrt{G^2 + B^2}}$$

其中 $G = \frac{1}{R}$, $B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$ 。

当一端口 N_0 中含有受控源时,可能会有 $\operatorname{Re}[Z(j\omega)] < 0$,或 $|\varphi_Z| > 90^\circ$ 的情况出现,如果仅限于 R, L, C 元件的组合时,一定有 $\operatorname{Re}[Z(j\omega)] \geq 0$,或 $|\varphi_Z| \leq 90^\circ$ 。

§ 9-2 阻抗(导纳)的串联和并联

阻抗的串联和并联电路的计算,在形式上与电阻的串联和并联电路相似。对于 n 个阻抗串联而成的电路,其等效阻抗

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

各个阻抗的电压分配为

$$\dot{U}_k = \frac{Z_k}{Z_{\text{eq}}} \dot{U}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

其中 \dot{U} 为总电压, \dot{U}_k 为第 k 个阻抗 Z_k 的电压。

同理, 对于 n 个导纳并联而成的电路, 其等效导纳

$$Y_{\text{eq}} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

各个导纳的电流分配为

$$I_k = \frac{Y_k}{Y_{\text{eq}}} I, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

其中 I 为总电流, I_k 为第 k 个导纳 Y_k 的电流。

例 9-1 RLC 串联电路如图 9-3 所示, 其中 $R = 15 \Omega$, $L = 12 \text{ mH}$, $C = 5 \mu\text{F}$, 端电压 $u = 100 \sqrt{2} \cos(5000t) \text{ V}$ 。试求电路中的电流 i (瞬时表达式) 和各元件的电压相量。

解 用相量法求解时, 可先写出已知相量和设定待求相量, 本例已知 $\dot{U} = 100 / 0^\circ \text{ V}$, I 、 \dot{U}_R 、 \dot{U}_L 和 \dot{U}_C 为待求相量, 如图所示。然后计算各部分阻抗:

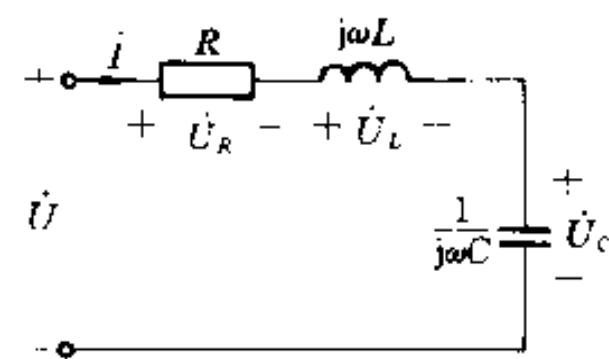


图 9-3 例 9-1 图

$$Z_R = 15 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j60 \Omega$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j40 \Omega$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{eq}} &= Z_R + Z_L + Z_C = (15 + j20) \Omega \\ &= 25 / 53.13^\circ \Omega \text{ (感性阻抗)} \end{aligned}$$

$$I = \frac{\dot{U}_s}{Z_{\text{eq}}} = \frac{100 / 0^\circ}{25 / 53.13^\circ} \text{ A} = 4 / -53.13^\circ \text{ A}$$

各元件电压相量为:

$$\dot{U}_R = R I = 60 / -53.13^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L I = 240 / 36.87^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} I = 160 / -143.13^\circ \text{ V}$$

正弦电流 i 为

$$i = 4\sqrt{2} \cos(5000t - 53.13^\circ) \text{ A}$$

注意, 本例中有 $U_L > U_s$, $U_C > U_s$ 。(如果本例的电源频率可变, 则等效阻抗 $Z_{\text{eq}}(j\omega)$ 会不会变为容性阻抗或电阻性阻抗?)

例 9-2 图示电路中 $R_1 = 10 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $R_2 = 1000 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$, $U_s =$

100 V, $\omega = 314 \text{ rad/s}$ 。求各支路电流和电压 \dot{U}_{10} 。

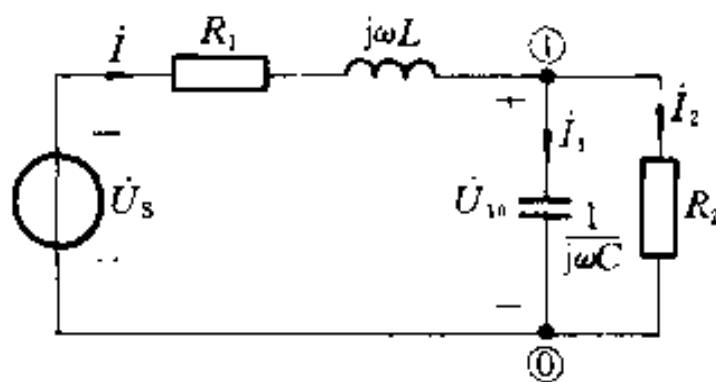


图 9-4 例 9-2 图

解 令 $\dot{U}_s = 100 / 0^\circ \text{ V}$ (参考相量), 设各支路电流相量为 \dot{I} 、 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 , 如图所示。各阻抗计算如下:

$$Z_{R_1} = 10 \Omega, Z_{R_2} = 1000 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j157 \Omega, Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j318.47 \Omega$$

Z_{R_2} 与 Z_C 的并联等效阻抗为 Z_{12} , 有

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \frac{Z_{R_2} Z_C}{Z_{R_2} + Z_C} = \frac{1000(-j318.47)}{1000 - j318.47} \Omega = 303.45 / -72.33^\circ \Omega \\ &= (92.11 - j289.13) \Omega \end{aligned}$$

总的输入阻抗 Z_{eq} 为

$$Z_{eq} = Z_{12} + Z_{R_1} + Z_L = (102.11 - j132.13) \Omega = 166.99 / -52.30^\circ \Omega$$

各支路电流和电压 \dot{U}_{10} 计算如下:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z_{eq}} = 0.60 / 52.30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{10} = Z_{12} \dot{I} = 182.07 / -20.03^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{10}}{Z_C} = 0.57 / 69.97^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{10}}{Z_{R_2}} = 0.18 / -20.03^\circ \text{ A}$$

§ 9-3 电路的相量图

在分析阻抗(导纳)串、并联电路时, 可以利用相关的电压和电流相量在复平面上组成的电路的相量图。相量图可以直观地显示各相量之间的关系, 并可用来辅助电路的分析计算。在相量图上, 除了按比例反映各相量的模(有效值)以外, 最重要的是根据各相量的相位相对地确定各相量在图上的位置(方位)。一般的做法是: 以电路

并联部分的电压相量为参考,根据支路的 VCR 确定各并联支路的电流相量与电压相量之间的夹角;然后,再根据结点上的 KCL 方程,用相量平移求和法则,画出结点上各支路电流相量组成的多边形;以电路串联部分的电流相量为参考,根据 VCR 确定有关电压相量与电流相量之间的夹角,再根据回路上的 KVL 方程,用相量平移求和的法则,画出回路上各电压相量所组成的多边形。

例 9-3 画出例 9-1 电路(图 9-3 所示)的相量图。

解 该电路为串联电路,所以以电流相量 \dot{I} 为参考,根据 $\dot{U}_s - \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ 画出电压相量组成的多边形。画法如下。

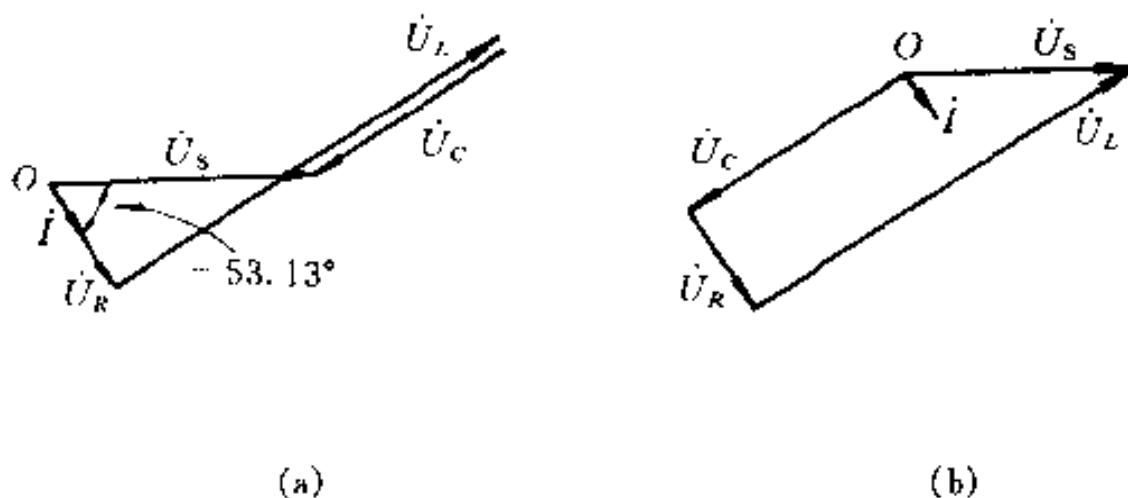


图 9-5 例 9-1 电路的相量图

在复平面上先画出电流相量 \dot{I} ,然后,从原点 O 起,相对于电流相量 \dot{I} ,按平移求和法则,逐一画出 KVL 方程右边各电压相量。例如,画出 $\dot{U}_R = R\dot{I}$,然后,再从 \dot{U}_R 的末端画出下一个电压相量,例如, $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$,依次类推。最后,从原点 O 至最后一个电压相量的末端的相量就是上述 KVL 方程左边的电压相量 \dot{U}_s ,如图 9-5(a)所示。KVL 方程在相量图上表示为一个封闭的多边形,本例为四边形。根据 KVL 方程求和时,与电压相量的次序无关,所以,图 9-5(b)也是该电路的相量图。(本例也可以先设电流相量的相位为零画出,最后将整个图形顺时针旋转 53.13°)。

例 9-4 画出例 9-2 电路(图 9-4 所示)的相量图。

解 先以并联部分的电压为参考相量,设 $\dot{U}_{10} = U_{10}/0^\circ$,画出描述 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ 的电流相量 \dot{I} 组成的三角形,注意 \dot{I}_1 超前 \dot{U}_{10} 的角度为 90° , \dot{I}_2 与 \dot{U}_{10} 同相;然后,以已画出的电流相量 \dot{I} 为参考,画出描述 $\dot{U}_s = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_L$ 的电压相量组成的多边形,如图 9-6 所示。最后将图 9-6 顺时针旋转 20.03° ,即为该电路的相量图。

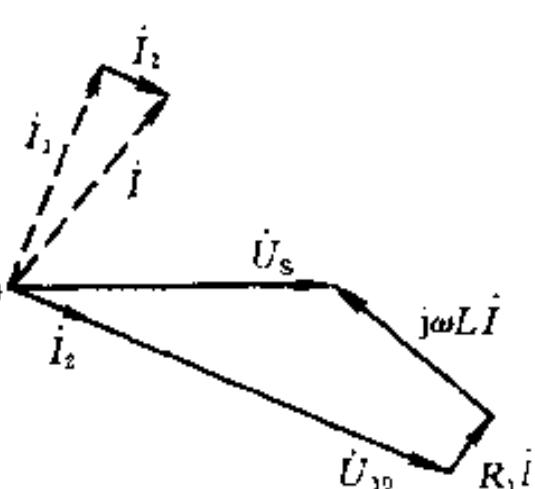


图 9-6 例 9-2 电路的相量图

§ 9-4 正弦稳态电路的分析

前面已指出：在用相量法分析计算时，引入正弦量的相量、阻抗、导纳和KCL、KVL的相量形式，它们在形式上与线性电阻电路相似。对于电阻电路有：

$$\sum i = 0$$

$$\sum u = 0$$

$$u = Ri$$

$$i = Gu$$

对于正弦电流电路有：

$$\sum I = 0$$

$$\sum U = 0$$

$$U = ZI$$

$$I = YU$$

因此，用相量法分析时，线性电阻电路的各种分析方法和电路定理可推广用于线性电路的正弦稳态分析，差别仅在于所得电路方程为以相量形式表示的代数方程以及用相量形式描述的电路定理，而计算则为复数运算。显然两者描述的物理过程之间有很大差别。

例 9-5 图 9-7 所示电路中的独立电源全都是同频正弦量。试列出该电路的结点电压方程和回路电流方程。

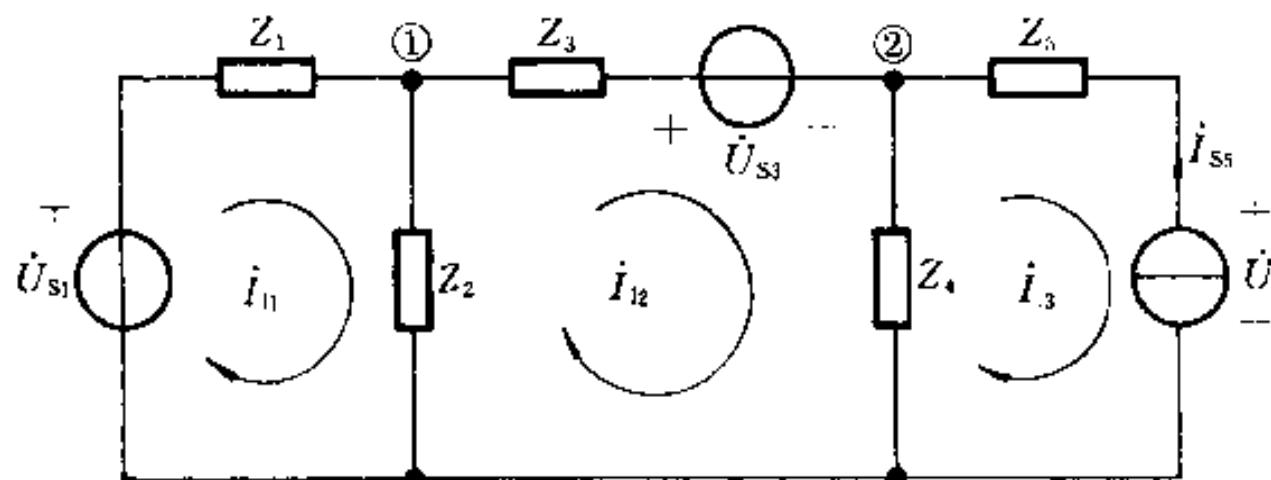


图 9-7 例 9-5 图

解 该电路的结点电压方程为：

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3)U_{n1} - Y_3U_{n2} = Y_1U_{s1} + Y_3U_{s3}$$

$$- Y_3U_{n1} + (Y_3 + Y_4)U_{n2} = - Y_3U_{s3} + I_{ss}$$

对于该电路的回路电流方程，如取顺时针的回路电流 I_{11} 、 I_{12} 和 I_3 （见图）为电路变量，则有：

$$(Z_1 + Z_2)I_{11} - Z_2I_{12} = U_{s1}$$

$$\begin{aligned} -Z_2 \dot{I}_B + (Z_2 + Z_3 + Z_4) \dot{I}_{12} - Z_4 \dot{I}_B &= -\dot{U}_{S3} \\ -Z_4 \dot{I}_{12} + (Z_4 + Z_5) \dot{I}_{13} + \dot{U} &= 0 \\ \dot{I}_{13} &= -\dot{I}_{S3} \end{aligned}$$

例 9-6 图 9-8 中的独立电源全都是同频正弦量。列出电路的结点电压方程和回路电流方程。

解 此电路有无伴电压源和无伴受控电流源。列结点电压方程时, 可令结点②为参考结点, 对结点③、④列出下列方程:

$$\begin{aligned} -Y_3 \dot{U}_{n1} + (Y_3 + Y_4 + Y_5) \dot{U}_{n3} - Y_5 \dot{U}_{n4} &= -Y_3 \dot{U}_{S3} \\ -Y_1 \dot{U}_{n1} - Y_5 \dot{U}_{n3} + (Y_1 + Y_5) \dot{U}_{n4} &= \beta \dot{I}_3 \end{aligned}$$

另有:

$$\dot{I}_3 = Y_3 (\dot{U}_{n1} - \dot{U}_{n3} - \dot{U}_{S3})$$

$$\dot{U}_{n1} = \dot{U}_{S2}$$

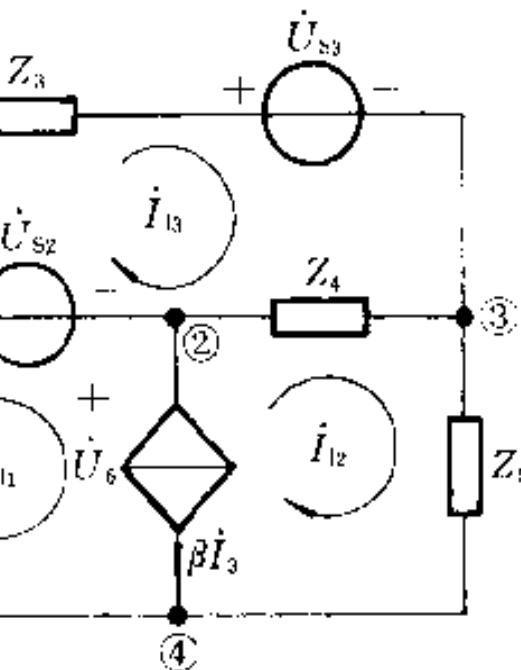


图 9-8 例 9-6 图

列回路电流方程时, 设回路电流为 \dot{I}_1 、 \dot{I}_{12} 、 \dot{I}_B , 如图所示, 并令受控电流源两端电压为 \dot{U}_6 。该电路的回路电流方程为:

$$\begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_6 &= -\dot{U}_{S2} \\ -\dot{U}_6 + (Z_4 + Z_5) \dot{I}_{12} - Z_4 \dot{I}_B &= 0 \\ -Z_4 \dot{I}_{12} + (Z_3 + Z_4) \dot{I}_B &= \dot{U}_{S2} - \dot{U}_{S3} \end{aligned}$$

另有:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} = \beta \dot{I}_3$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{13}$$

例 9-7 求图 9-9(a) 所示一端口的戴维宁等效电路。

解 戴维宁等效电路的开路电压 \dot{U}_{oc} 和戴维宁等效阻抗 Z_{eq} 的求解方法与电阻电路相似。

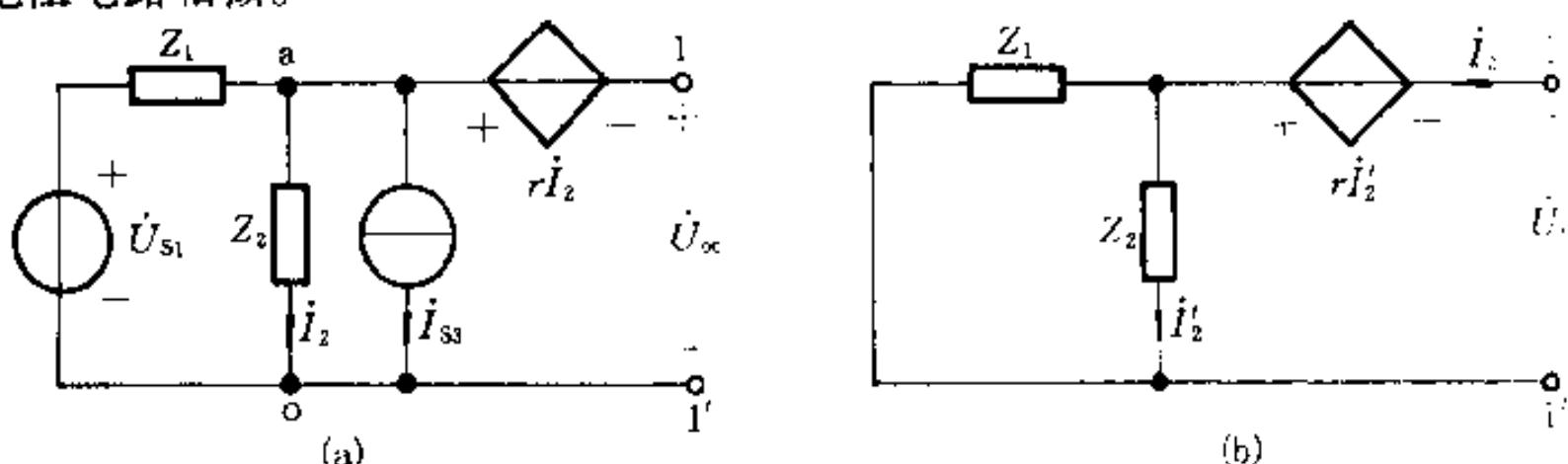


图 9-9 例 9-7 图

先求 \dot{U}_∞

$$\dot{U}_\infty = -r\dot{I}_2 + \dot{U}_\infty$$

又有：

$$(Y_1 + Y_2)\dot{U}_\infty = Y_1\dot{U}_{s1} - \dot{I}_{s2}$$

$$\dot{I}_2 = Y_2\dot{U}_\infty$$

解得

$$\dot{U}_\infty = \frac{(1 - rY_2)(Y_1\dot{U}_{s1} - \dot{I}_{s2})}{Y_1 + Y_2}$$

可按图 9-9(b)求解等效阻抗 Z_{eq} 。在端口 1-1'置一电压源 \dot{U}_0 (与独立电源同频率), 求得 \dot{I}_0 后有

$$Z_{eq} = \dot{U}_0/\dot{I}_0$$

可以设 \dot{I}'_2 为已知, 然后求出 \dot{U}_0, \dot{I}_0 :

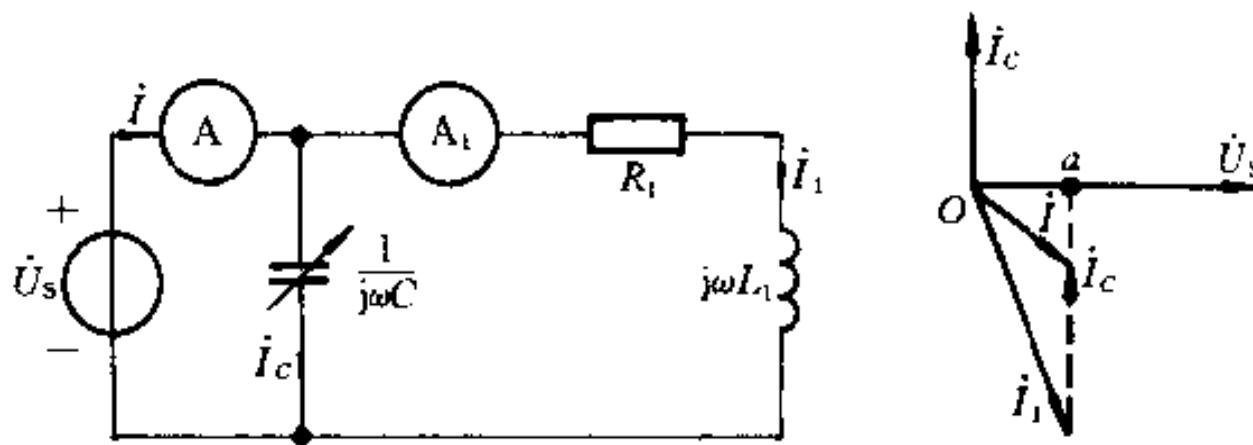
$$\dot{I}_0 = \dot{I}'_2 + Z_2 Y_1 \dot{I}'_2$$

$$\dot{U}_0 = Z_2 \dot{I}'_2 - r \dot{I}'_2$$

解得

$$Z_{eq} = \frac{(Z_2 - r)\dot{I}'_2}{(1 + Z_2 Y_1)\dot{I}'_2} = \frac{Z_2 - r}{1 + Z_2 Y_1}$$

例 9-8 图 9-10(a)中正弦电压 $U_s = 380 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, 电容可调, 当 $C = 80.95 \mu\text{F}$ 时, 交流电流表 A 的读数最小, 其值为 2.59 A。求图中交流电流表 A_1 的读数。



(a)

(b)

图 9-10 例 9-8 图

解 方法一：

当电容 C 变化时, I_1 始终不变, 可先定性画出电路的相量图。令 $\dot{U}_s = 380[0^\circ] \text{ V}$, $\dot{I}_1 = \dot{U}_s/R + j\omega L$, 故 \dot{I}_1 滞后电压 \dot{U}_s , $\dot{I}_c = j\omega C\dot{U}_s$ 。表示 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_c$ 的电流相量组成的三角形如图 9-10(b)。当 C 变化时, I_c 始终与 \dot{U}_s 正交, 故 I_c 的末

端将沿图中所示虚线变化,而到达 a 点时, I 为最小。 $I_c = \omega C U_s = 9.66 \text{ A}$, 此时 $I = 2.59 \text{ A}$, 用电流三角形解得电流表 A_1 的读数为

$$\sqrt{(9.66)^2 + (2.59)^2} \text{ A} = 10 \text{ A}$$

方法二:

当 I 最小时, 表示电路的输入导纳最小(或者阻抗最大), 有

$$Y(j\omega) = j\omega C + \frac{R_1}{|Z_1|^2} - j \frac{\omega L_1}{|Z_1|^2}$$

当 C 变化时, 只改变 $Y(j\omega)$ 的虚部, 导纳最小意味着虚部为零, \dot{U}_s 与 I 同相。设 $\dot{U}_s = 380 / 0^\circ \text{ V}$, 则 $I = 2.59 / 0^\circ \text{ A}$, 而 $I_c = j\omega C U_s = j9.66 \text{ A}$, 设 $I_1 = I_1 / \phi_1$, 按 KCL 有

$$2.59 / 0^\circ = j9.66 + I_1 / \phi_1$$

得:

$$I_1 \sin \phi_1 = -9.66$$

$$I_1 \cos \phi_1 = 2.59$$

解得:

$$\phi_1 = \arctan \left(\frac{-9.66}{2.59} \right) = -70^\circ$$

$$I_1 = 2.59 / \cos \phi_1 \text{ A} = 10 \text{ A}$$

故电流表 A_1 的读数为 10 A。

根据以上数据, 还可以求得参数 R_1 和 L_1 , 即

$$Z_1 = \frac{\dot{U}_s}{I_1} = 38 / 70^\circ \Omega = (13 + j35.71) \Omega$$

故:

$$R_1 = 13 \Omega$$

$$L_1 = \frac{35.71}{314} \text{ H} = 113.7 \text{ mH}$$

§ 9·5 正弦稳态电路的功率

设图 9·11(a) 所示一端口 N 内部不含独立电源, 仅含电阻、电感和电容等无源元件, 它吸收的瞬时功率 p 等于电压 u 和电流 i 的乘积

$$p = ui$$

在正弦稳态情况下, 设:

$$u = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i)$$

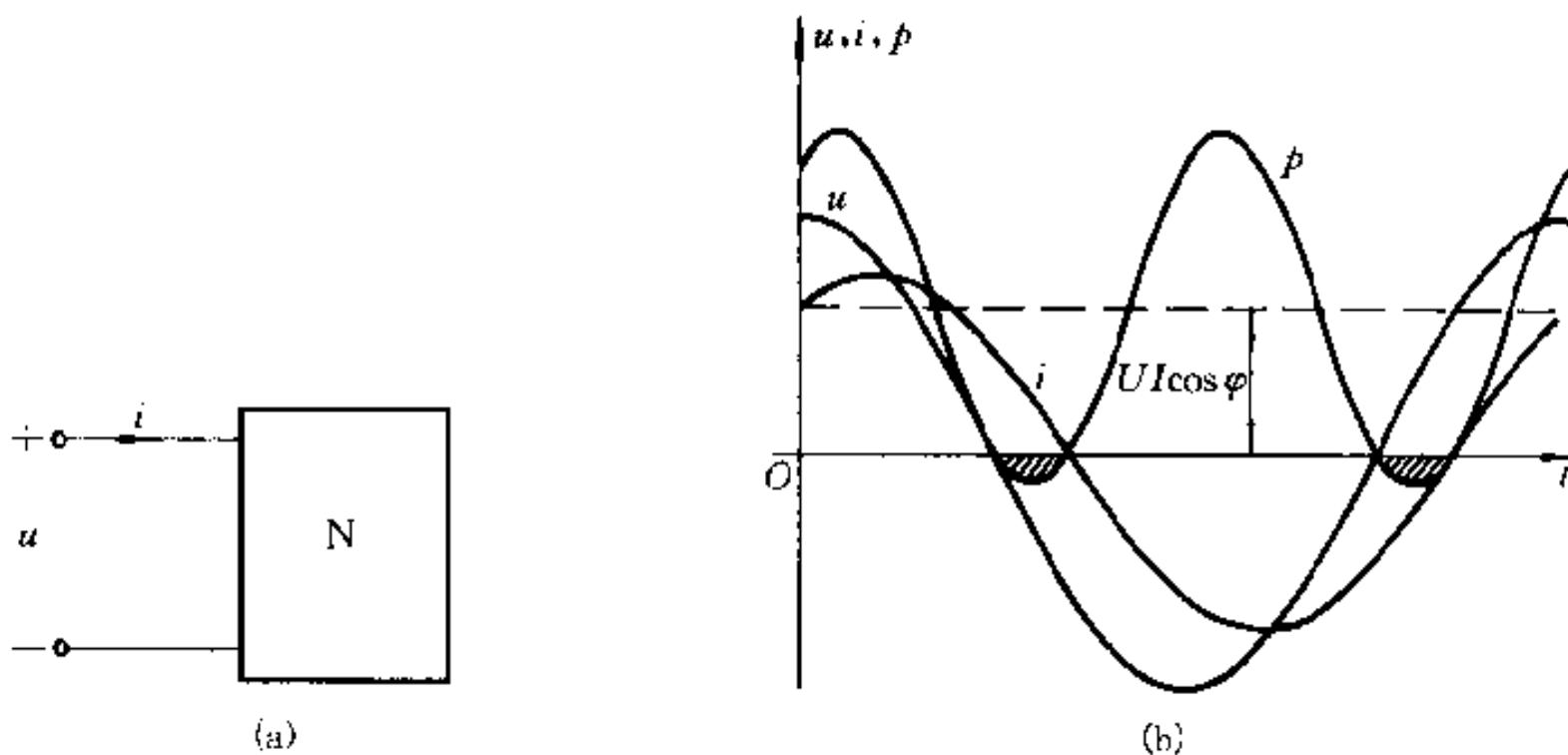


图 9-11 一端口电路的功率

有

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2} U \cos(\omega t + \phi_u) \times \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_i) \\ &= UI \cos(\phi_u - \phi_i) + UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \end{aligned}$$

令 $\varphi = \phi_u - \phi_i$, φ 为电压和电流之间的相位差, 有

$$p = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \quad (9-2)$$

瞬时功率的波形见图 9-11(b)。从上式可以看出: 瞬时功率有两个分量, 第一个为恒定量, 第二个为正弦量, 其频率是电压或电流频率的两倍。

瞬时功率还可以改写为

$$\begin{aligned} p &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 2\phi_u - \varphi) \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\phi_u) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\phi_u) \\ &= UI \cos \varphi [1 + \cos(2(\omega t + \phi_u))] + UI \sin \varphi \sin[2(\omega t + \phi_u)] \quad (9-3) \end{aligned}$$

上式中的第一项始终大于或等于零 ($\varphi \leq \pi/2$), 它是瞬时功率中的不可逆部分; 第二项是瞬时功率中的可逆部分, 其值正负交替, 这说明能量在外施电源与一端口之间来回交换。

瞬时功率的实际意义不大, 且不便于测量。通常引用平均功率的概念。平均功率又称有功功率, 是指瞬时功率在一个周期 ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) 内的平均值, 用大写字母 P 表示

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)] dt \\ &= UI \cos \varphi \end{aligned}$$

有功功率代表一端口实际消耗的功率, 它就是式(9-2)的恒定分量。它不仅与电压和电流的有效值的乘积有关, 且与它们之间的相位差有关。式中 $\cos \varphi$

称为功率因数，并用 λ 表示，即有 $\lambda = \cos \varphi$ 。

在工程中还引用无功功率的概念，用大写字母 Q 表示，其定义为

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} UI \sin \varphi$$

从式(9·3)可见它与瞬时功率的可逆部分有关。

许多电力设备的容量是由它们的额定电流和额定电压的乘积决定的，为此引进了视在功率的概念，用大写字母 S 表示，其定义为

$$S \stackrel{\text{def}}{=} UI$$

有功功率、无功功率和视在功率都具有功率的量纲，为便于区分，有功功率的单位用 W，无功功率的单位用 var(乏，即无功伏安)，视在功率用 V·A(伏安)。

如果一端口 N 分别为 R 、 L 、 C 单个元件，则从式(9·3)可以求得瞬时功率、有功功率和无功功率。

对于电阻 R ，有 $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$ ，所以瞬时功率

$$p = UI \{1 + \cos[2(\omega t + \psi_u)]\}$$

它始终大于或等于零，它的最小值为零。这说明电阻一直在吸收能量。平均功率为

$$P_R = UI = RI^2 = GU^2$$

P_R 表示电阻所消耗的功率。电阻的无功功率为零。

对于电感 L ，有 $\varphi = \pi/2$ ，瞬时功率

$$p = UI \sin \varphi \sin[2(\omega t + \psi_u)]$$

它的平均功率为零，所以不消耗能量，但是 p 正负交替变化，说明有能量的来回交换。电感的无功功率为

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI = \omega L I^2 = \frac{U^2}{\omega L}$$

对于电容 C ，有 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ，瞬时功率为

$$\begin{aligned} p &= UI \sin \varphi \sin[2(\omega t + \psi_u)] \\ &= -UI \sin[2(\omega t + \psi_u)] \end{aligned}$$

它的平均功率为零，所以电容也不消耗能量，但是 p 正负交替变化，说明有能量的来回交换。电容的无功功率为

$$Q_C = -UI = -\frac{1}{\omega C}I^2 = -\omega CU^2$$

如果一端口 N 为 RLC 串联电路，它的有功功率

$$P = UI \cos \varphi$$

无功功率

$$Q = UI \sin \varphi$$

由于一端口 N 的阻抗为：

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \varphi = \arctan \left(\frac{X}{R} \right)$$

另有 $U = |Z|I$, $R = |Z| \cos \varphi$, $X = |Z| \sin \varphi$, 故：

$$P = UI \cos \varphi = |Z| I^2 \cos \varphi = RI^2$$

$$\begin{aligned} Q &= UI \sin \varphi = |Z| I^2 \sin \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I^2 \\ &= Q_L + Q_C \end{aligned}$$

有功功率 P 、无功功率 Q 和视在功率 S 之间存在下列关系：

$$P = S \cos \varphi, Q = S \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \varphi = \arctan \left(\frac{Q}{P} \right)$$

在一般情况下,图 9-11(a)的一端口 N 可以用它的等效阻抗(或等效导纳)表示,其实部和虚部的各种功率可以用上述 RLC 串联电路讨论。

对于无源一端口,其等效阻抗的实部不会是负值,所以 $\cos \varphi \geq 0$ 。

例 9-9 图 9-12 电路是测量电感线圈参数 R 、 L 的实验电路,已知电压表的读数为 50 V,电流表的读数为 1 A,功率表的读数为 30 W,电源的频率 $f = 50$ Hz。试求 R 、 L 之值。

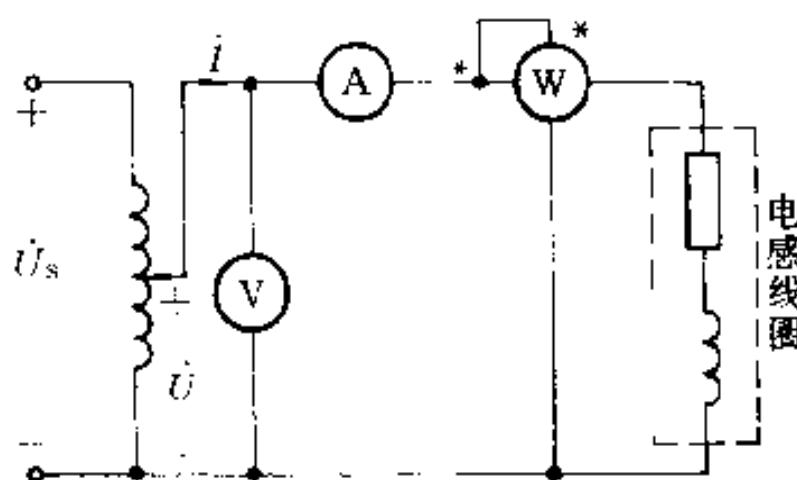


图 9-12 例 9-9 图

解 根据图中 3 个表的读数,可先求得线圈的阻抗:

$$Z = |Z| / \varphi = R + j \omega L$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = 50 \Omega$$

功率表读数表示线圈吸收的有功功率,故有:

$$UI \cos \varphi = 30$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{30}{UI} \right) = 53.13^\circ$$

解得：

$$Z = 50 / 53.13^\circ \Omega = (30 + j40) \Omega$$

$$R = 30 \Omega$$

$$L = \frac{40}{\omega} = 127 \text{ mH}$$

另一种方法是利用功率表的读数表示电阻吸收的有功功率，即

$$I^2 R = 30$$

得

$$R = 30 \Omega$$

而 $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ，故可求得

$$\omega L = \sqrt{50^2 - 30^2} \Omega = 40 \Omega$$

§ 9-6 复 功 率

正弦电流电路的瞬时功率等于两个同频率正弦量的乘积，在一般情况下其结果是一个非正弦量，同时它的变动频率也不同于电压或电流的频率，所以不能用相量法讨论。但是正弦电流电路的有功功率、无功功率和视在功率三者之间的关系可以通过“复功率”表述。

设一个一端口的电压相量为 \bar{U} ，电流相量为 \bar{I} ，复功率 \bar{S} 定义为

$$\begin{aligned} \bar{S} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{U}\bar{I}^* = UI [\phi_u - \phi_i] \\ &\approx UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi \\ &= P + jQ \end{aligned}$$

式中 \bar{I}^* 是 \bar{I} 的共轭复数^①。复功率的吸收或发出同样根据端口电压和电流的参考方向来判断。复功率是一个辅助计算功率的复数，它将正弦稳态电路的 3 个功率和功率因数统一为一个公式表示。只要计算出电路中的电压和电流相量，各种功率就可以很方便地计算出来。复功率的单位用 V·A。

应当注意，复功率 \bar{S} 不代表正弦量，乘积 $\bar{U}\bar{I}^*$ 是没有意义的。复功率的概念显然适用于单个电路元件或任何一段电路。

一个不含独立电源的一端口可以用等效阻抗 Z （或等效导纳 Y ）表示。图 9-13(a)示出了等效阻抗 Z 的实部 R_s （电阻分量）和虚部 X_s （电抗分量）上的电压分量 \bar{U}_s 和 \bar{U}_r ；图(b)是有关的相量图。 \bar{U}_s 和 \bar{U}_r 可以认为是电压相量 \bar{U} 的两个分量。 \bar{U}_s 与电流相量 \bar{I} 同相，称为 \bar{U} 的有功分量， $U_s = U \cos \varphi$ ，而有功功率 $P = UI \cos \varphi = U_s I$ ； \bar{U}_r 与 \bar{I} 正交，称为 \bar{U} 的无功分量， $U_r = U \sin \varphi$ ，而无功

^① \bar{S} 的另一种定义： $\bar{S} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{U}^* \bar{I}$ 。

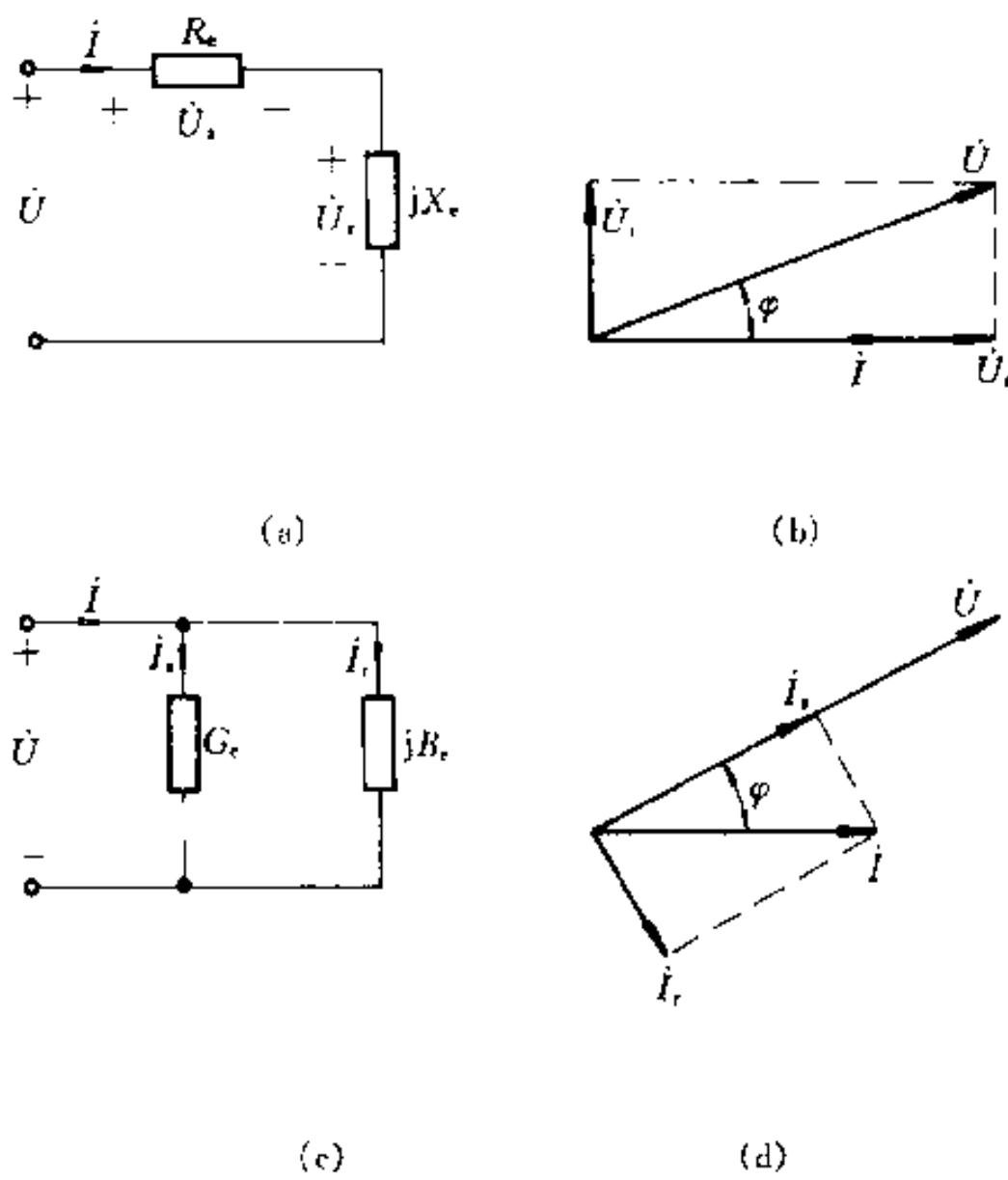


图 9-13 电压和电流的有功分量和无功分量

功率 $Q = UI \sin \varphi = U_r I$ 。这样复功率 \bar{S} 可以写为

$$\bar{S} = U I^* = I Z I^* = I^2 Z$$

其中 $Z = R_s + jX_s$ 。

同理,可以把电流相量 \vec{I} 分为有功分量 \vec{I}_a 和无功分量 \vec{I}_r , 见图 9-13(c)、(d)。 \vec{I}_a 为流过等效并联电导 G_e 的电流, \vec{I}_r 为流过等效并联电纳 B_e 的电流。 \vec{I}_a 与电压 \vec{U} 同相, $I_a = I \cos \varphi$, \vec{I}_r 与电压 \vec{U} 正交, $I_r = I \sin \varphi$ 。这样 $P = UI_a$, $Q = UI_r$, 而

$$\bar{S} = U\bar{I}^* = U(UY)^* = U^2 Y^*$$

其中 $Y = G_e + jB_e$, $Y^* = G_e - jB_e$ 。

可以证明,正弦电流电路中总的有功功率是电路各部分有功功率之和,总的无功功率是电路各部分无功功率之和,即有功功率和无功功率分别守恒。电路中的复功率也守恒,但视在功率不守恒。

例 9-10 求例 9-9 电路中线圈吸收的复功率 \bar{S} 。

解 根据电压、电流相量就可以计算复功率。令 $\dot{U} = 50 \angle 0^\circ$ V, 则 $\dot{I} = 1 \angle -53.13^\circ$ A, 有

$$\bar{S} = U^* = 50 / 0^\circ \text{ V} \cdot 1 / 53, 13^\circ \text{ A} = (30 + i40) \text{ V} \cdot \text{A}$$

或者

$$\bar{S} = I^2 Z = (30 + j40) \text{ V}\cdot\text{A}$$

例 9-11 图示电路外加 50 Hz、380 V 的正弦电压, 感性负载吸收的功率 $P_1 = 20 \text{ kW}$, 功率因数 $\lambda_1 = 0.6$ 。若要使电路的功率因数提高到 $\lambda = 0.9$, 求在负载的两端并接的电容值(图中虚线所示)。

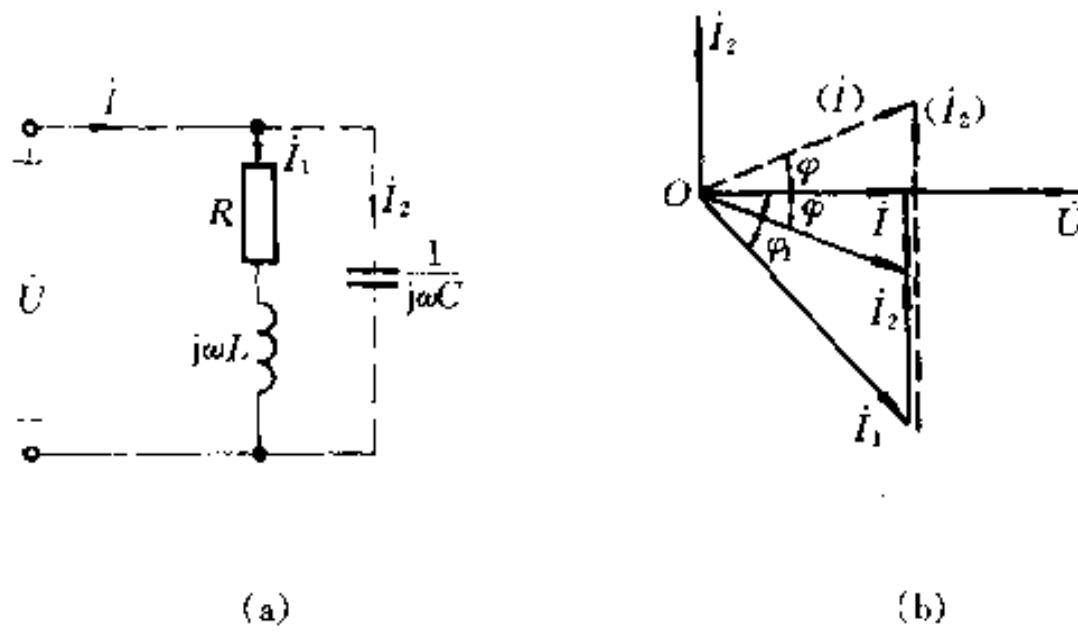


图 9-14 例 9-11 图

解 方法一:

并联电容 C 不会影响支路 1 的复功率(设为 \bar{S}_1), 因为 U 和 I_1 都没有变。但是并联电容后, 电容的无功功率“补偿”了电感 L 的无功功率, 减少了电源的无功功率, 从而提高了电路的功率因数。设并联电容后电路吸收的复功率为 \bar{S} , 电容吸收的复功率为 \bar{S}_c , 则有

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_c$$

并联电容前有:

$$\lambda_1 = \cos \varphi_1, \varphi_1 = 53.13^\circ$$

$$P_1 = 20 \text{ kW}, Q_1 = P_1 \tan \varphi_1 = 26.67 \text{ kvar}$$

$$\bar{S}_1 = P_1 + jQ_1 = (20 + j26.67) \text{ kV}\cdot\text{A}$$

并联电容后要求 $\lambda = 0.9$, 即 $\cos \varphi = 0.9$, $\varphi = \pm 25.84^\circ$, 而有功功率没有改变, 故:

$$Q = P_1 \tan \varphi = \pm 9.69 \text{ kvar}$$

$$\bar{S} = P_1 + jQ = (20 \pm j9.69) \text{ kV}\cdot\text{A}$$

故电容的视在功率

$$\bar{S}_c = \bar{S} - \bar{S}_1 = -j16.98 \text{ kvar} (\text{或} -j36.36 \text{ kvar})$$

显然取较小的电容为好, 故有

$$C = \frac{16.98 \times 10^3}{314 \times (380)^2} \text{ F} = 374.49 \mu\text{F}$$

方法二:

可利用电流的有功分量和无功分量的概念。并联电容后并不改变原负载的工作状况,所以电路的有功功率并没有改变,只是改变了电路的无功功率,从而使功率因数得到提高。

按图 9-14(a),根据 KCL,有

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

式中 $\bar{I} = I \cos \varphi + j I \sin \varphi$, $\bar{I}_1 = I_1 \cos \varphi_1 + j I_1 \sin \varphi_1$, $\bar{I}_2 = j \omega C U$ 。

电流的有功分量和无功分量分别为:

$$I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1$$

$$I \sin \varphi + I_2 = I_1 \sin \varphi_1$$

给定的负载功率 $P_1 = UI_1 \cos \varphi_1$, 而 $P_1 = 20 \text{ kW}$, $\cos \varphi_1 = 0.6$, $\varphi_1 = 53.13^\circ$ 。可以求得

$$I_1 = 87.72 \text{ A}$$

现在要求 $\cos \varphi = 0.9$, 即 $\varphi = \pm 25.84^\circ$ 。把这些数据代入, 可以求得:

$$I = 58.48 \text{ A}, I_2 = 44.69 \text{ A} (\text{或 } 95.67 \text{ A})$$

故电容 C 为(取小值)

$$C = I_2 / (\omega U^2) = 375 \mu\text{F}$$

I 为并联电容后电源供给的电流, 可见要求电源供给的视在功率也相应地减小了。

图 9-14(b)画出了并联电容前后电路的相量图。

通过这个例子可以看出功率因数提高的经济意义。并联电容后减少了电源的无功“输出”, 从而减小了电流的输出, 这提高了电源设备的利用率, 也减少了传输线上的损耗。

§ 9-7 最大功率传输

图 9-15(a)所示电路为含源一端口 N_s 向终端负载 Z 传输功率, 当传输的功率较小(如通讯系统, 电子电路中), 而不必计较传输效率时, 常常要研究使负载获得最大功率(有功)的条件。根据戴维宁定理, 该问题可以简化为图(b)所示等效电路进行研究。

设 $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$, $Z = R + jX$, 则负载吸收的有功功率为

$$P = \frac{U_{oc}^2 R}{(R + R_{eq})^2 + (X_{eq} + X)^2}$$

如果 R 和 X 可以任意变动, 而其他参数不变时, 则获得最大功率的条件为

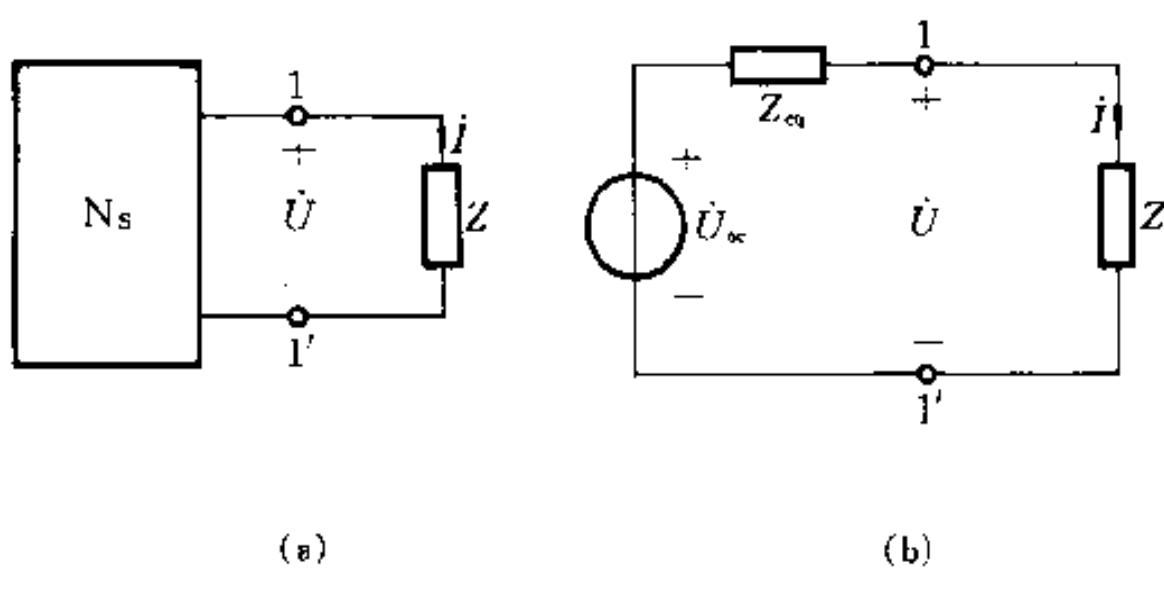


图 9-15 最大功率传输

$$\left. \begin{aligned} X + X_{eq} &= 0 \\ \frac{d}{dR} \left[\frac{(R + R_{eq})^2}{R} \right] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} X &= -X_{eq} \\ R &= R_{eq} \end{aligned}$$

解得

即有

$$Z = R_{eq} - jX_{eq} = Z^*$$

此时获得的最大功率为

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}}$$

其他可变情况不一一列举。当用诺顿等效电路时, 获最大功率的条件可表示为

$$Y = Y^*$$

上述获最大功率的条件称为最佳匹配。

例 9-12 电路如图 9-16(a)所示, $I_s = 2 / 0^\circ$ A。求最佳匹配时获得的最大功率。

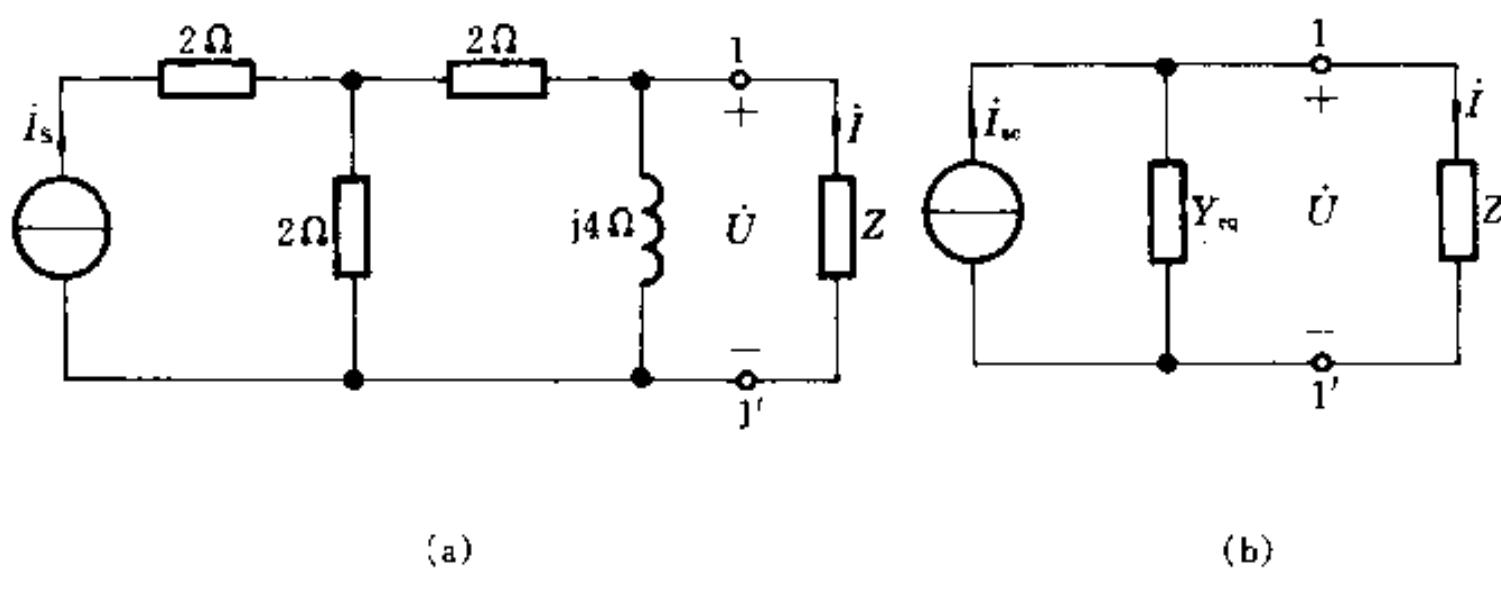


图 9-16 例 9-12 图

解 先求得一端口的诺顿等效电路,如图(b)所示,其中

$$I_s = \frac{1}{2} I_s = 1 / 0^\circ \text{ A}, Y_{eq} = (0.25 - j0.25) \text{ S}$$

最佳匹配时有: $Y = Y_{eq}^* = (0.25 + j0.25) \text{ S}$ 。此时获得的最大功率为

$$P_{max} = (0.5)^2 / 0.25 \text{ W} = 1 \text{ W}$$

§ 9-8 串联电路的谐振

谐振现象的研究有重要的实际意义。一方面谐振现象得到广泛的应用,另一方面在某些情况下电路中发生谐振会破坏正常工作。

图 9-17(a)为 RLC 串联电路,在正弦电压 $u = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u)$ 的激励下,电路的工作状况将随频率的变动而变动,这是由于感抗和容抗随频率变动而造成的。首先分析该电路的输入阻抗 $Z(j\omega)$ 随频率变化的特性

$$Z(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

当 ω 变动时,感抗随频率成正比变动,容抗随频率成反比变动,电抗随频率变化的特性曲线见图 9-17(b),图(c)为阻抗随频率变化时在复平面上表示的图形,其末端的轨迹是一条与纵轴平行的直线。

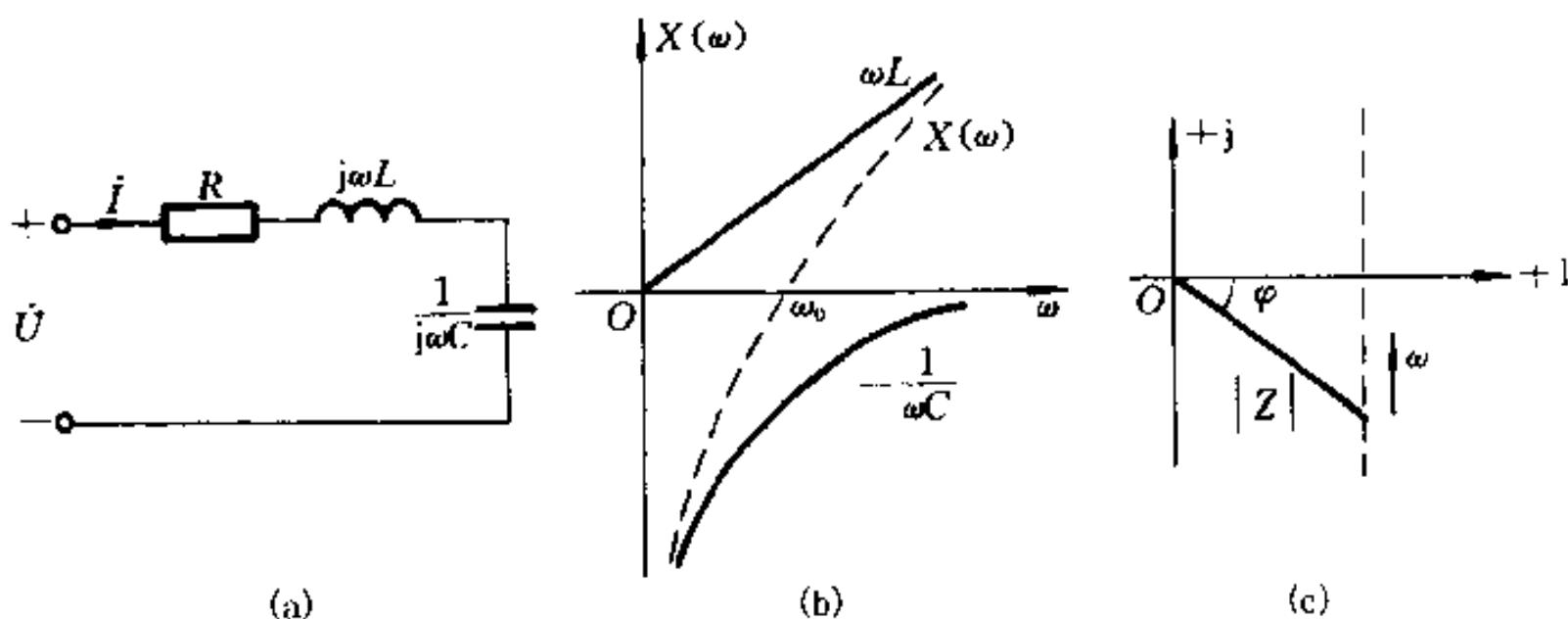


图 9-17 串联谐振电路

由于串联电路中的感抗和容抗有相互抵消作用,所以,当 $\omega = \omega_0$ 时,出现 $X(\omega_0) = 0$,这时端口上的电压与电流同相,工程上将电路的这种工作状况称为谐振,由于是在 RLC 串联电路中发生的,故称为串联谐振。串联谐振的条件为

$$\operatorname{Im}[Z(j\omega)] = 0$$

即

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

发生谐振时的角频率 ω_0 和频率 f_0 分别为:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振频率又称为电路的固有频率, 它是由电路的结构和参数决定的。串联谐振频率只有一个, 是由串联电路中的 L 、 C 参数决定的, 而与串联电阻 R 无关。改变电路中的 L 或 C 都能改变电路的固有频率, 使电路在某一频率下发生谐振, 或者避免谐振。这种串联谐振也会在电路中某一条含 L 和 C 串联的支路中发生。

谐振时阻抗为最小值

$$Z(j\omega_0) = R + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = R$$

在输入电压有效值 U 不变的情况下, 电流 I 和 U_R 为最大, 即:

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{R}$$

$$U_R = RI = U$$

实验时可根据此特点判别串联谐振电路发生谐振与否。根据阻抗 $|Z(j\omega)|$ 的频率特性可定性绘出 $I(\omega)$ 随频率变化的曲线, 如图 9-18(a) 所示, 两条 $I(\omega)$ 曲线对应两个具有不同的电阻 R_1 和 R_2 , 但 L 和 C 相同的串联电路。

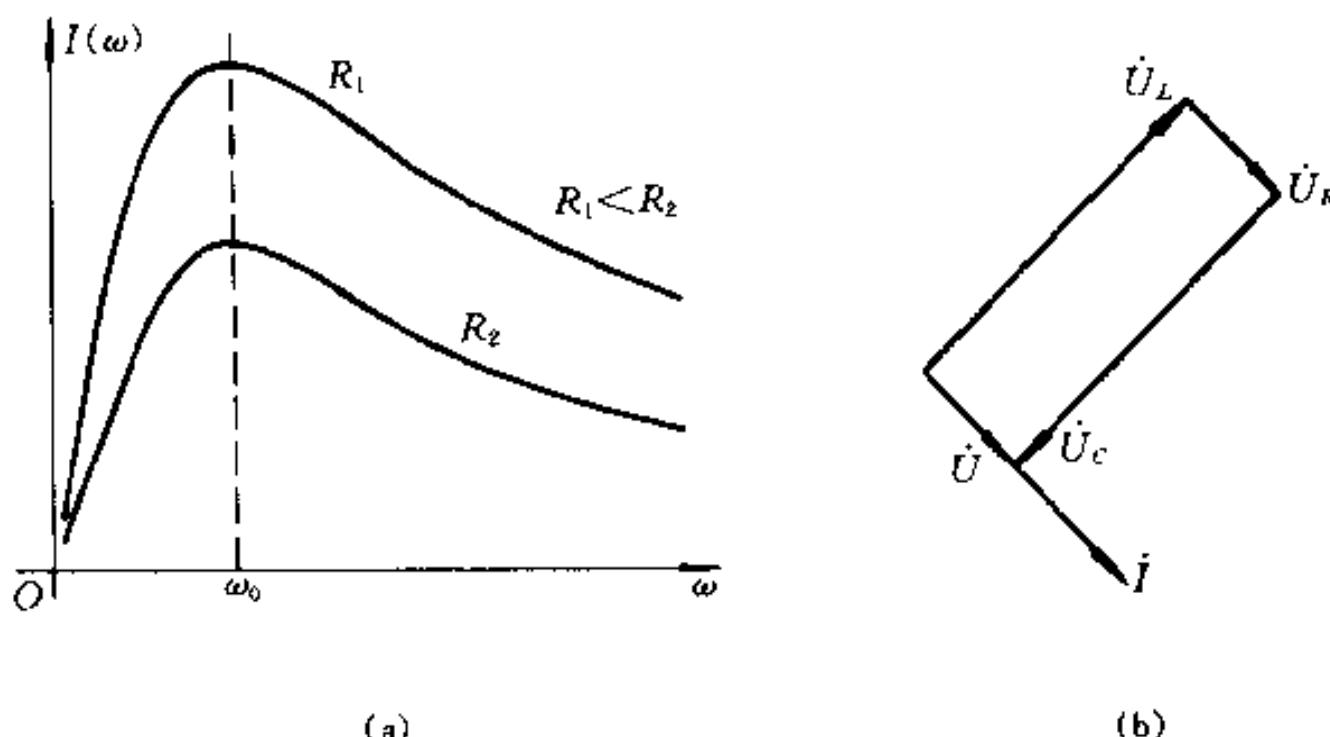


图 9-18 串联谐振

谐振时还有 $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$ (所以串联谐振又称为电压谐振), 而

$$\dot{U}_L = j\omega_0 L I = j \frac{\omega_0 L}{R} \dot{U} = j Q \dot{U}$$

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega_0 C} I = -j \frac{1}{\omega_0 C R} \dot{U} = -j Q \dot{U}$$

式中 Q^{\circledR} 称为串联谐振电路的品质因数,有

$$Q = \frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R\sqrt{C}}$$

电路的相量图如图 9-18(b)所示。如果 $Q > 1$, 则有 $U_L = U_C > U$, 当 $Q \gg 1$, 表明在谐振时或接近谐振时,会在电感和电容两端出现大大高于外施电压 U 的高电压,称为过电压现象,往往会造成元件的损坏。但谐振时 L 和 C 两端的等效阻抗为零(相当于短路)。

谐振时,电路的无功功率为零值,这是由于阻抗角 $\varphi(\omega_0) = 0$,所以电路的功率因数 $\lambda = \cos \varphi = 1$ 。

$$P(\omega_0) = UI\lambda = UI = \frac{1}{2} U_m I_m$$

$$Q_L(\omega_0) = \omega_0 L I^2, Q_C(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0 C} I^2$$

整个电路的复功率 $\bar{S} = P + j(Q_L + Q_C) = P$, 即有 $Q_L(\omega_0) + Q_C(\omega_0) = 0$, 但 $Q_L(\omega_0)、Q_C(\omega_0)$ 分别不等于零。谐振时电路不从外部吸收无功功率,但电路内部的电感与电容之间周期性地进行磁场能量与电场能量的交换,这一能量的总和为

$$W(\omega_0) = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u_c^2$$

谐振时有: $i = \sqrt{2} \frac{U}{R} \cos(\omega_0 t)$, $u_c = \sqrt{2} Q U \sin(\omega_0 t)$, 并有: $Q^2 = \frac{1}{R^2} \frac{L}{C}$, 将这些量代入上式,有

$$\begin{aligned} W(\omega_0) &= \frac{L}{R^2} U^2 \cos^2(\omega_0 t) + C Q^2 U^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ &= C Q^2 U^2 = \frac{1}{2} C Q^2 U_m^2 = \text{常量} \end{aligned}$$

另外还可以得出

$$Q = \omega_0 W(\omega_0) / P(\omega_0)$$

串联电阻的大小虽然不影响串联谐振电路的固有频率,但有控制和调节谐振时电流和电压幅度的作用。

例 9-13 图 9-17(a)所示电路中,正弦电压有效值 $U = 10 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$,当电容 $C = 200 \text{ pF}$ 时,电流 $I = 1 \text{ A}$ 。求正弦电压 u 的频率 ω 、电压 U_L 、 U_C 和 Q 值。

解 令 $\dot{U} = 10 / 0^\circ \text{ V}$, 根据电流值有

① “ Q ”也表示无功功率,应根据上下文加以区别。

$$\left| \frac{U}{R + jX} \right| = \left| \frac{10 / 0^\circ}{10 + jX} \right| = 1$$

显然有 $X(\omega) = 0$, 表明电路处于谐振状态, 所以, 正弦电压的频率等于电路的固有频率, 即

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^{-12}}} \text{ rad/s} = 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

电压 U_L 、 U_C 为:

$$U_L = U_C = \frac{\omega L}{R} U = \frac{5 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3}}{10} \times 10 \text{ V} = 10000 \text{ V}$$

$$Q = \frac{U_L}{U} = 1000$$

除了阻抗 $Z(j\omega)$ 的特性外, 还应分析电流和电压随频率变化的特性, 例如 RLC 串联电路中的 $I(\omega)$ 、 $U_L(\omega)$ 、 $U_C(\omega)$ 等。这些特性称为频率特性, 或称频率响应, 它们随频率变化的曲线称为谐振曲线。为了突出电路的频率特性, 常分析输出量与输入量之比的频率特性, 如 $U_R(\omega)/U$ 、 $U_L(\omega)/U$ 、 $U_C(\omega)/U$ 等, 而这些电压比值可以用分贝表示^①。

将电路的阻抗 $Z(j\omega)$ 变换为下述形式

$$Z(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R \left[1 + jQ\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)\right]$$

式中 $\eta = \omega/\omega_0$, $U_R(\eta)$ 为

$$U_R(\eta) = \frac{U}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}$$

得

$$\frac{U_R(\eta)}{U} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}$$

上述关系式可以用于不同的 RLC 串联谐振电路, 它们都在同一个坐标(η)下, 根据 Q 取值不同, 曲线将仅与 Q 值有关, 并明显地看出 Q 值对谐振曲线形状的影响。图 9-19 给出 3 个不同 Q 值($Q_3 > Q_2 > Q_1$)的谐振曲线, 该谐振曲线称为通用谐振曲线。从图中可以看出: 串联谐振电路的这种输入-输出形式, 对输出具有明显的选择性能, 在 $\eta = 1$ (谐振点)时, 曲线出现了高峰, 输出达到了最大(等于 U)。当 $\eta < 1$ 和 $\eta > 1$ (偏离谐振点)时, 输出逐渐下降, 随 $\eta \rightarrow 0$ 和 $\eta \rightarrow \infty$

^① 工程上常用分贝(dB)表示 2 个电压的比值。分贝是根据常用对数定义的, 即有: $\text{dB} = 20 \log(U_2/U_1)$ 。分贝的定义同样适用于 2 个电流的比值。

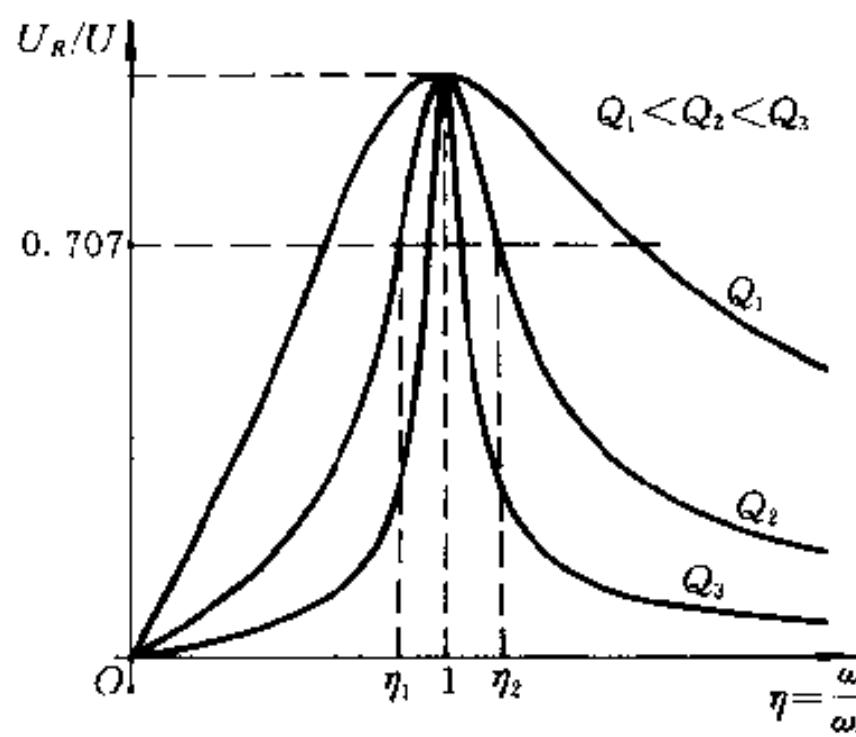


图 9-19 串联谐振电路的通用曲线

∞而逐渐下降至零,说明串联谐振电路对偏离谐振点的输出有抑制能力。只有在谐振点附近的频域内,即 $\eta = 1 + \Delta\eta$,才有较大的输出幅度,电路的这种性能称为选择性。电路选择性的优劣取决于对非谐振频率的输入信号的抑制能力。从图中可以看出,Q 值大,曲线在谐振点附近的形状尖锐,当稍微偏离谐振频率,输出就急剧下降,说明对非谐振频率的输入具有较强的抑制能力,选择性能好。反之,Q 值小(例如 Q_1),在谐振频率附近曲线顶部形状平缓,选择性就差。

工程中为了定量地衡量选择性,常用发生 $\frac{U_R(\omega)}{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ ^① 时的两个频率 ω_2 和 ω_1 之间的差说明,这个频率差称为通频带。按这个条件应当有

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

或:

$$Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 = 1$$

$$\eta^2 \mp \frac{1}{Q}\eta - 1 = 0$$

从上式可解得其中 2 个正根分别为:

$$\eta_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

所以有:

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{Q}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$$

① 按分贝的定义,此电压比值相当于 $20\log(0.707) = -3$ dB; 即电压下降了 3 dB。

可见 Q 值大, 通频带窄, 选择性就好。

可以用类似方法分析 $U_C(\omega)/U$ 和 $U_L(\omega)/U$ 的频率特性:

$$\frac{U_C(\eta)}{U} = \frac{U_R(\eta)}{U} \frac{1}{\omega CR} = \frac{U_R(\eta) Q}{U \eta} = \frac{Q}{\sqrt{\eta^2 + Q^2(\eta^2 - 1)^2}}$$

$$\frac{U_L(\eta)}{U} = \frac{U_R(\eta)}{U} \frac{\omega L}{R} = \frac{U_R(\eta) Q \eta}{U} = \frac{Q}{\sqrt{\frac{1}{\eta^2} + Q^2 \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)^2}}$$

它们的曲线如图 9-20 所示。

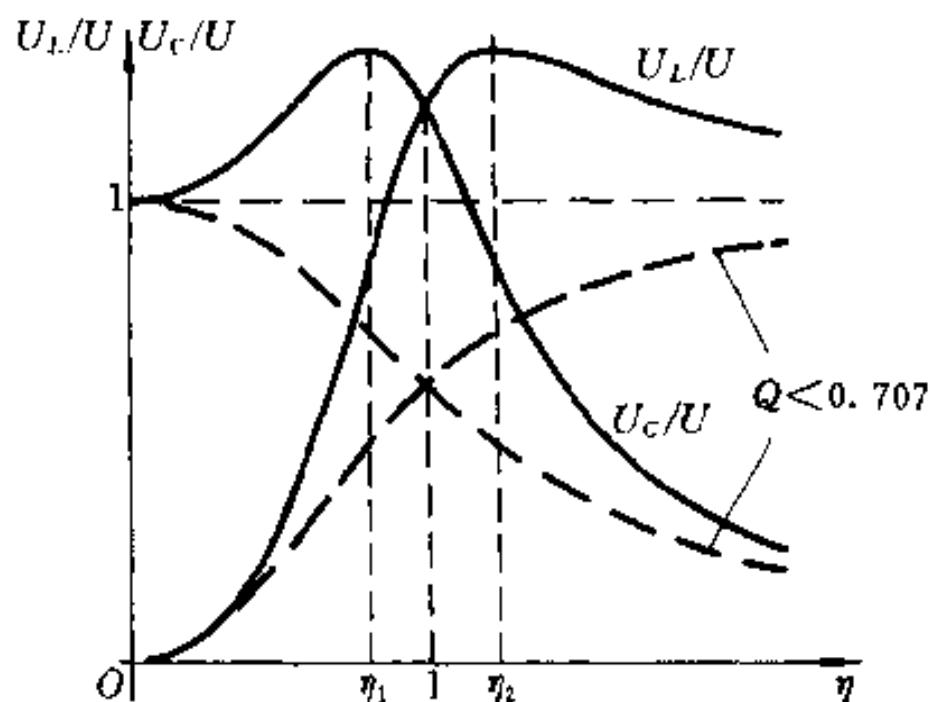


图 9-20 串联谐振电路 $U_C(\eta)/U$ 、 $U_L(\eta)/U$ 的频率特性

可以证明, 当 $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 时, 特性曲线会出现峰值。对于 $U_C(\eta)/U$, 峰值的频率为

$$\eta_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1$$

或

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

而峰值为

$$\left. \frac{U_C(\eta)}{U} \right|_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}$$

对于 $\frac{U_L(\eta)}{U}$, 峰值的频率为

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} > 1$$

或

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} > \omega_0$$

峰值为

$$\left. \frac{U_L(\eta)}{U} \right|_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

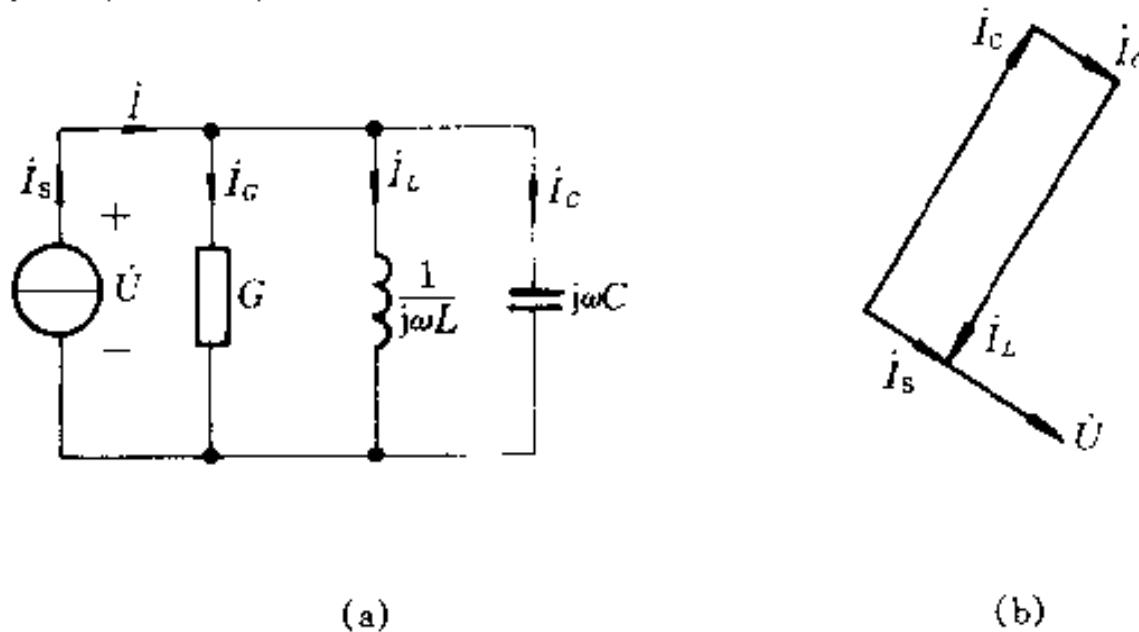
图 9-20 示出了两种不同 Q 值的相应曲线。

可以看出 $U_{C_{\max}} = U_{L_{\max}}$ 。当 Q 值很大时, 两峰值的频率向谐振频率接近。当 $Q < 0.707$ 时, 两者都没有峰值。

如果改变的变量不是频率, 而是参数 L 或 C , 要另作分析。

§ 9-9 并联谐振电路

图 9-21(a) 所示电路为 GLC 并联电路, 是另一种典型的谐振电路, 分析方法与 RLC 串联谐振电路相同(具有对偶性)。



(a)

(b)

图 9-21 并联谐振电路

并联谐振的定义与串联谐振的定义相同, 即端口上的电压 U 与输入电流 I 同相时的工作状况称为谐振。由于发生在并联电路中, 所以称为并联谐振。并联谐振的条件为

$$\text{Im}[Y(j\omega_0)] = 0$$

因为 $Y(j\omega_0) = G + j\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right)$, 可解得谐振时的角频率 ω_0 和频率 f_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

该频率称为电路的固有频率。

并联谐振时, 输入导纳 $Y(j\omega_0)$ 为最小

$$Y(j\omega_0) = G + j\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right) = G$$

或者说输入阻抗最大, $Z(j\omega_0) = R$, 所以谐振时端电压达最大值

$$U(\omega_0) = |Z(j\omega_0)| I_s = RI_s$$

可以根据这一现象判别并联电路谐振与否。

并联谐振时有 $\dot{I}_L + \dot{I}_C = 0$ (所以并联谐振又称电流谐振):

$$\dot{I}_L(\omega_0) = -j \frac{1}{\omega_0 L} U = -j \frac{1}{\omega_0 L G} I_s = -j Q I_s$$

$$\dot{I}_C(\omega_0) = j\omega_0 C U = j \frac{\omega_0 C}{G} I_s = j Q I_s$$

式中 Q 称为并联谐振电路的品质因数

$$Q = \frac{I_L(\omega_0)}{I_s} = \frac{I_C(\omega_0)}{I_s} = \frac{1}{\omega_0 L G} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

如果 $Q \gg 1$, 则谐振时在电感和电容中会出现过电流, 但从 L 、 C 两端看进去的等效电纳等于零, 即阻抗为无限大, 相当于开路。图 9-21(b) 为并联谐振时的电流相量图。

谐振时无功功率 $Q_L = \frac{1}{\omega_0 L} U^2$, $Q_C = -\omega_0 C U^2$, 所以 $Q_L + Q_C = 0$, 表明在谐振时, 电感的磁场能量与电容的电场能量彼此相互交换, 两种能量的总和为

$$W(\omega_0) = W_L(\omega_0) + W_C(\omega_0) = LQ^2 I_s^2 = \text{常数}$$

谐振曲线可以参照对偶关系按串联谐振曲线获得。

工程中采用的电感线圈和电容并联的谐振电路, 如图 9-22(a) 所示, 其中电感线圈用 R 和 L 串联组合表示。谐振时, 有

$$\operatorname{Im}[Y(j\omega_0)] = 0$$

而

$$Y(j\omega_0) = j\omega_0 C + \frac{1}{R + j\omega_0 L} = j\omega_0 C + \frac{R}{|Z(j\omega_0)|^2} - j \frac{\omega_0 L}{|Z(j\omega_0)|^2}$$

故有

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{|Z(j\omega_0)|^2} = 0$$

由上式可解得

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

显然, 只有当 $1 - \frac{CR^2}{L} > 0$, 即 $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, ω_0 才是实数, 所以 $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 电路不会发生谐振。

发生电流谐振时的电流相量图如图 9-22(b) 所示, 这时有

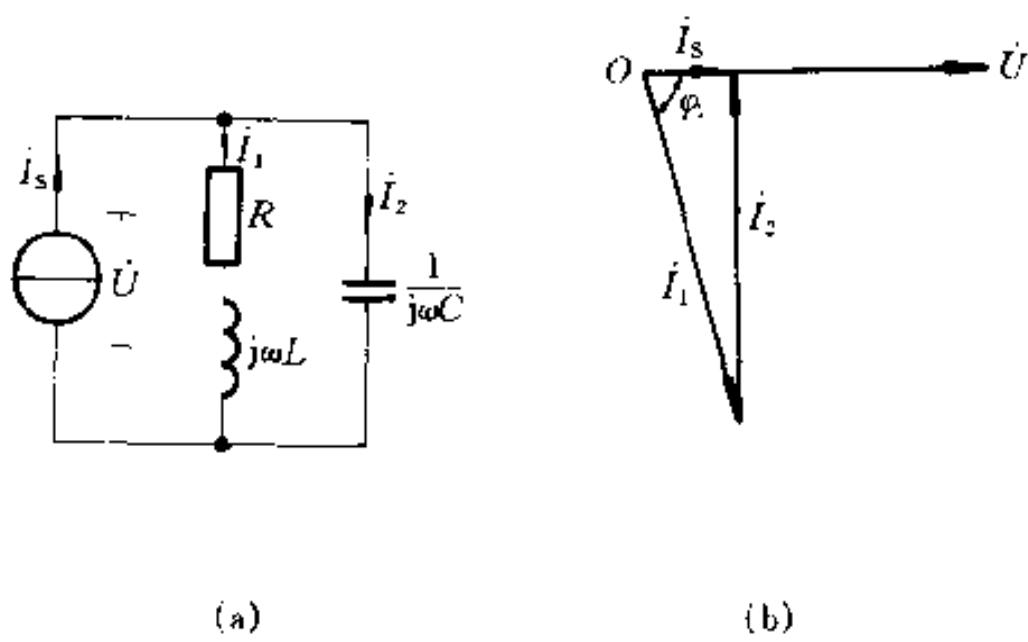


图 9-22 一种并联谐振电路

$$I_2 = I_1 \sin \varphi_1 = I_s \tan \varphi_1$$

当电感线圈的阻抗角 φ_1 很大, 谐振时有过电流出现在电感支路和电容中。

谐振时的输入导纳为

$$Y(j\omega_0) = \frac{R}{|Z(j\omega_0)|^2} = \frac{CR}{L}$$

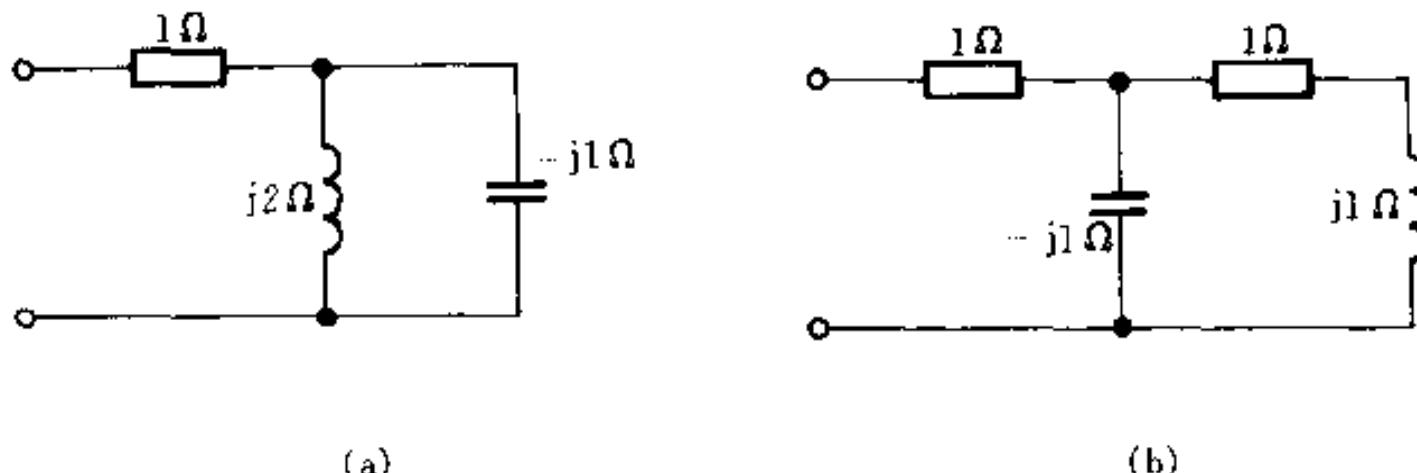
可以证明, 该电路发生谐振时的输入导纳不是最小值(即输入阻抗不是最大值), 所以谐振时的端电压不是最大值。这种电路只有当 $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 它发生谐振时的特点才与图 9-21(a)所示 GLC 并联谐振的接近。

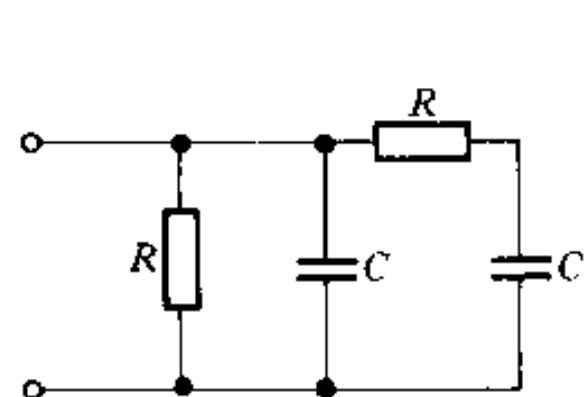
习 题

9-1 试求图示各电路的输入阻抗 Z 和导纳 Y 。

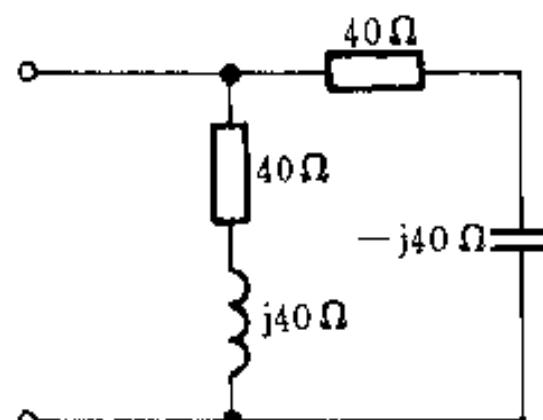
9-2 已知图示电路中 $u = 50\sin(10t + \pi/4)$ V, $i = 400 \cos(10t + \pi/6)$ A。试求电路中合适的元件值(等效)。

9-3 附图中 N 为不含独立源的一端口, 端口电压 u 、电流 i 分别如下列各式所示。试求每一种情况下的输入阻抗 Z 和导纳 Y , 并给出等效电路图(包括元件的参数值)

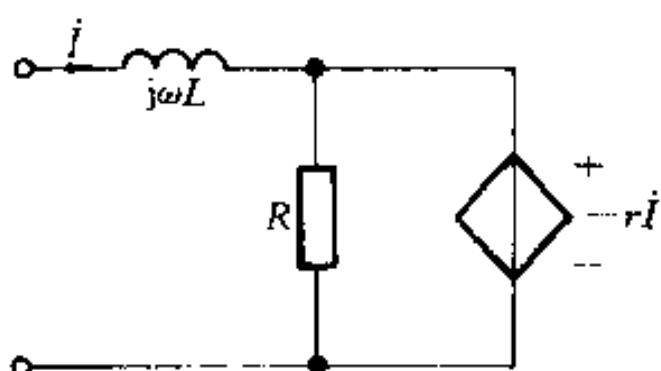




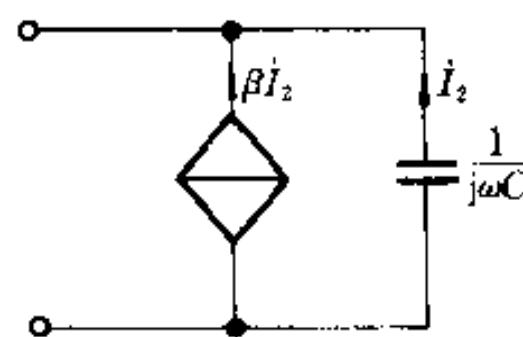
(c)



(d)

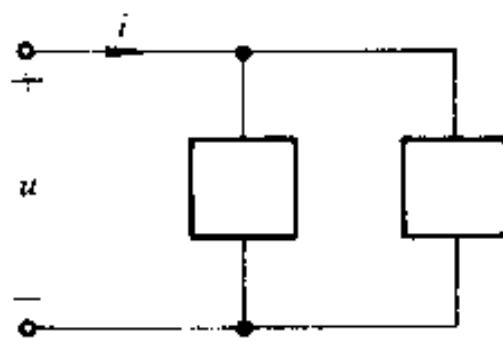


(e)

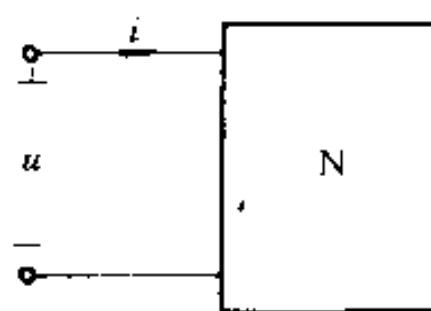


(f)

题 9-1 图



题 9-2 图



题 9-3 图

$$(1) \begin{cases} u = 200\cos(314t) \text{ V} \\ i = 10\cos(314t) \text{ A} \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} u = 10\cos(10t + 45^\circ) \text{ V} \\ i = 2\cos(10t - 90^\circ) \text{ A} \end{cases};$$

$$(3) \begin{cases} u = 100\cos(2t + 60^\circ) \text{ V} \\ i = 5\cos(2t - 30^\circ) \text{ A} \end{cases};$$

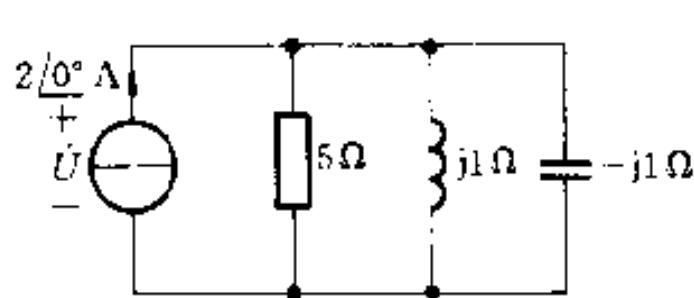
$$(4) \begin{cases} u = 40\cos(100t + 17^\circ) \text{ V} \\ i = 8\sin(100t + \pi/2) \text{ A} \end{cases}.$$

9-4 求附图(a)、(b)中的电压 \dot{U} , 并画出电路的相量图。

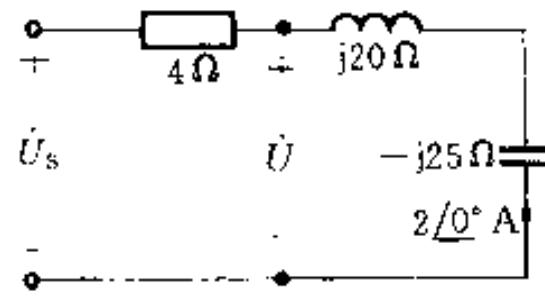
9-5 已知图示电路中 $I = 2/\underline{0^\circ} \text{ A}$, 求电压 \dot{U}_s , 并作电路的相量图。

9-6 附图电路中, $I_1 = 10 \text{ A}$, $U_s = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ V}$, 求电流 \dot{I} 和电压 \dot{U}_s , 并画出电路的相量图。

9-7 附图中已知 $u_s = 200\sqrt{2}\cos(314t + \pi/3) \text{ V}$, 电流表 A 的读数为 2 A, 电压表 V_1, V_2 的读数均为 200 V。求参数 R, L, C , 并作出该电路的相量图(提示: 可先作相量图辅助计算)。

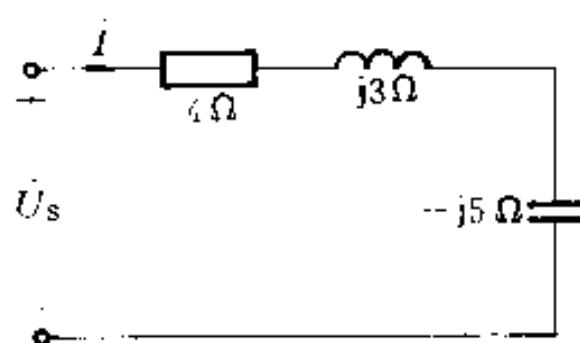


(a)

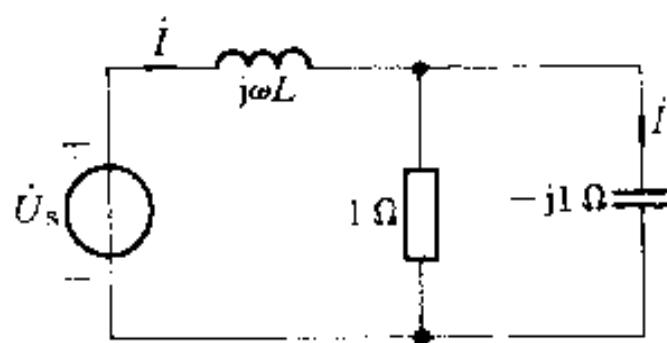


(b)

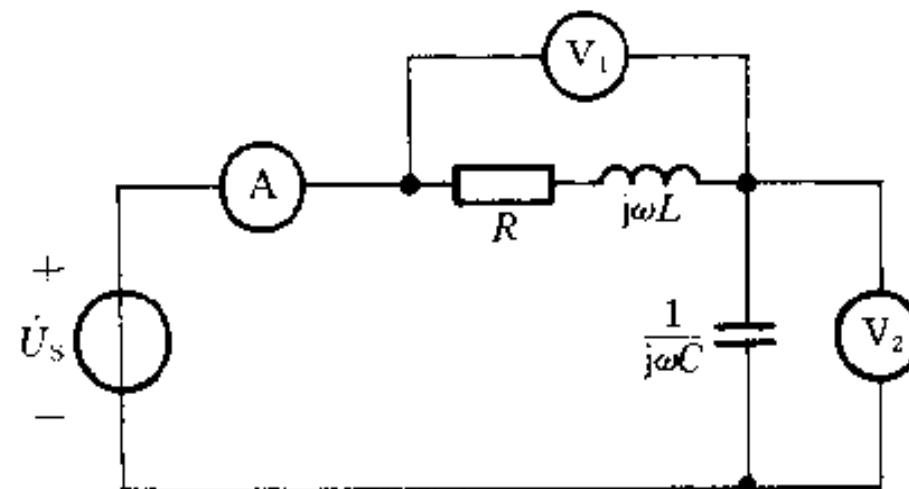
题 9-4 图



题 9-5 图



题 9-6 图



题 9-7 图

9-8 附图中 $i_s = 14\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi) \text{ mA}$, 调节电容, 使电压 $U = U/\psi$, 电流表 A_1 的读数为 50 mA。求电流表 A_2 的读数。

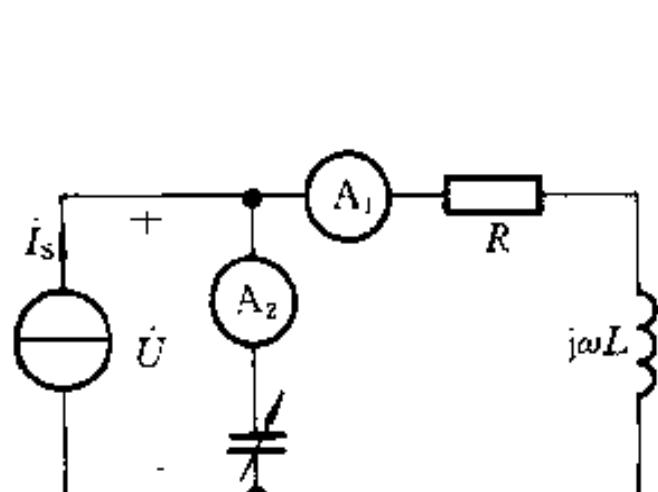
9-9 附图中 $Z_1 = (10 + j50) \Omega$, $Z_2 = (400 + j1000) \Omega$, 如果要使 I_2 和 U_s 的相位差为 90° (正交), β 应等于多少? 如果把图中 CCCS 换为可变电容 C , 求 ωC 。

9-10 已知附图电路中 $Z_2 = j60 \Omega$, 各交流电表的读数分别为 V_1 : 100 V; V_1 : 171 V; V_2 : 240 V。求阻抗 Z_1 。

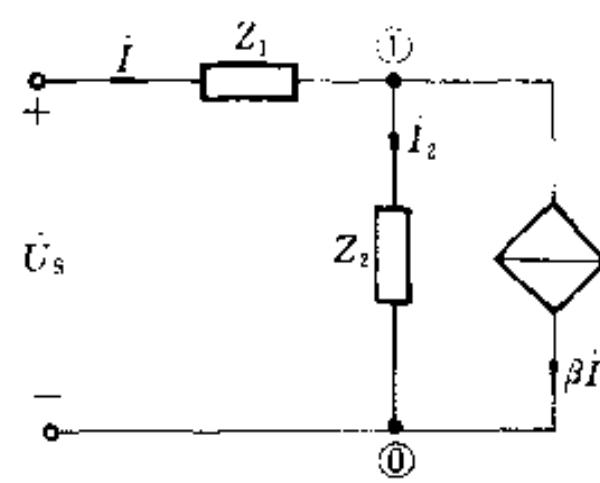
9-11 已知附图电路中, $u = 220\sqrt{2}\cos(250t + 20^\circ) \text{ V}$, $R = 110 \Omega$, $C_1 = 20 \mu\text{F}$, $C_2 = 80 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$ 。求电路中各电流表的读数和电路的输入阻抗, 画出电路的相量图。

9-12 已知附图电路中 $U = 8 \text{ V}$, $Z = (1 - j0.5) \Omega$, $Z_1 = (1 + j1) \Omega$, $Z_2 = (3 - j1) \Omega$ 。求

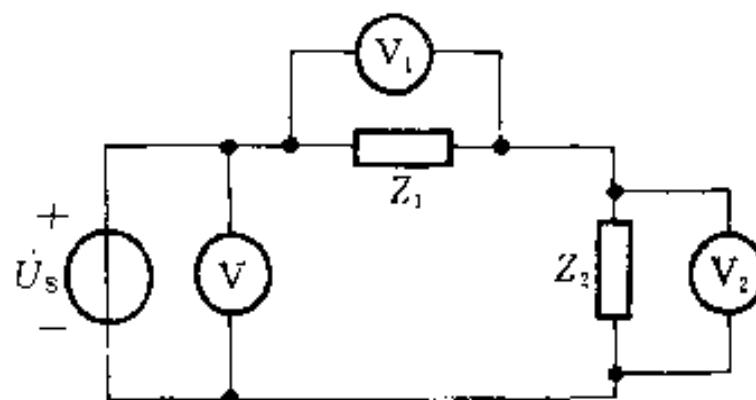
各支路的电流和电路输入导纳,画出电路的相量图。



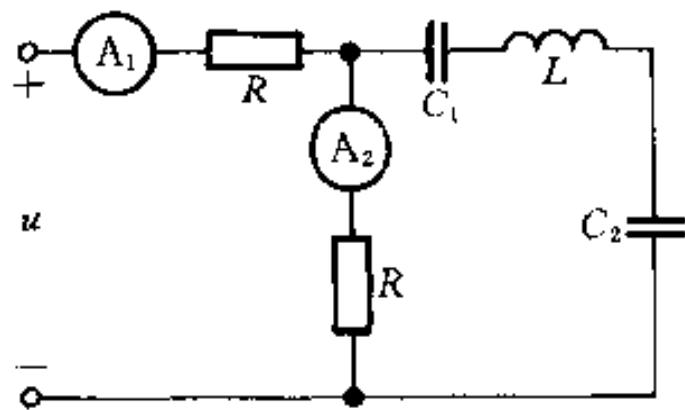
题 9-8 图



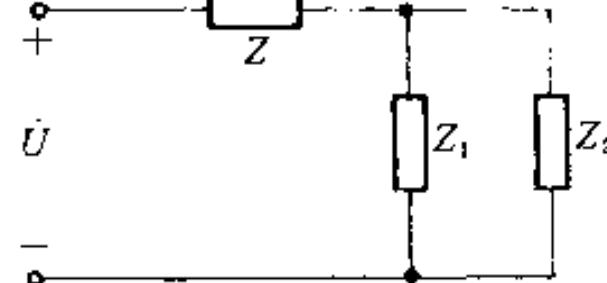
题 9-9 图



题 9-10 图



题 9-11 图



题 9-12 图

9-13 已知附图电路中, $U = 100 \text{ V}$, $U_c = 100\sqrt{3} \text{ V}$, $X_C = -100\sqrt{3} \Omega$, 阻抗 Z_x 的阻抗角 $|\varphi_x| = 60^\circ$ 。求 Z_x 和电路的输入阻抗。

9-14 附图电路中,当 S 闭合时,各表读数如下:V 为 220 V、A 为 10 A、W 为 1 000 W; 当 S 打开时,各表读数依次为 220 V、12 A 和 1 600 W。求阻抗 Z_1 和 Z_2 ,设 Z_1 为感性。

9-15 已知附图电路中, $I_s = 10 \text{ A}$, $\omega = 5 000 \text{ rad/s}$, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$, $\mu = 0.5$ 。求各支路电流并作出电路的相量图。

9-16 已知附图电路中, $R_1 = 100 \Omega$, $L_1 = 1 \text{ H}$, $R_2 = 200 \Omega$, $L_2 = 1 \text{ H}$, 电压 $U_s = 100\sqrt{2} \text{ V}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$, $I_2 = 0$ 。求其它各支路电流。

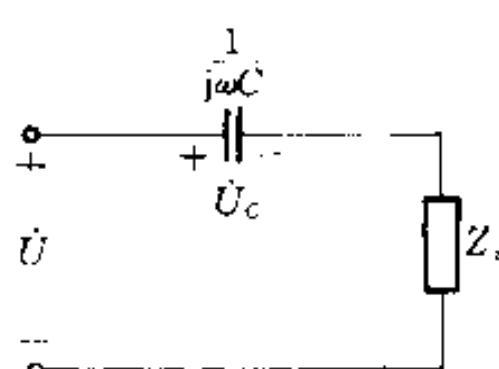
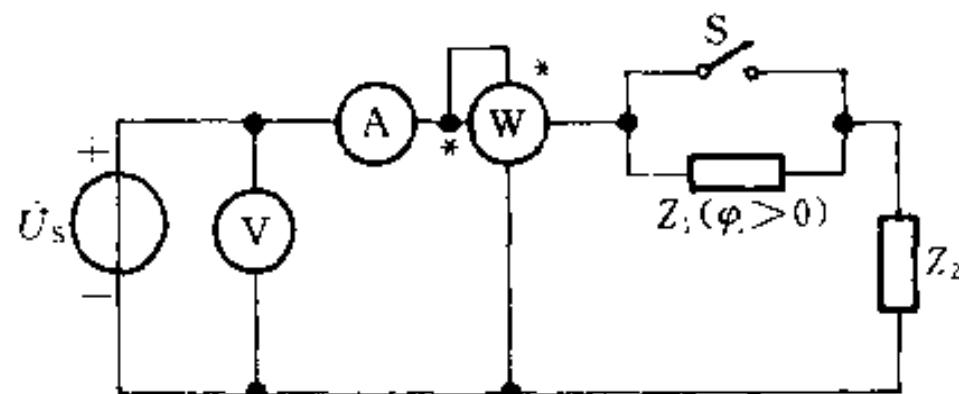
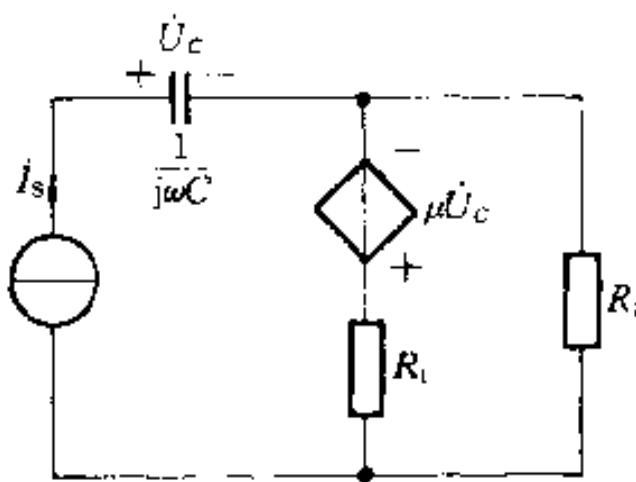


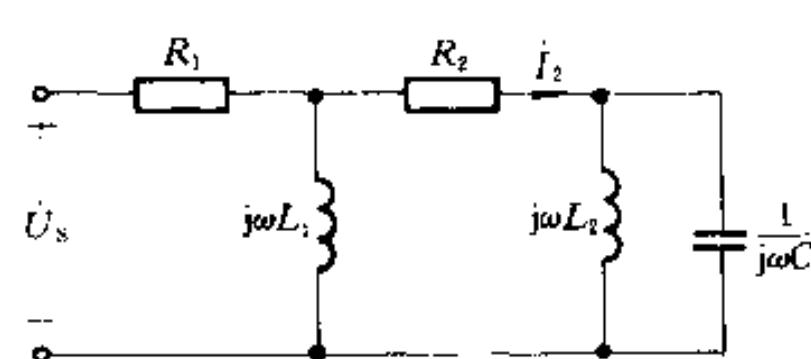
图 9-13 图



题 9-14 图



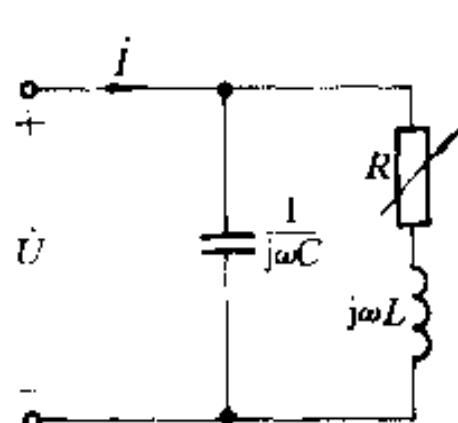
题 9-15 图



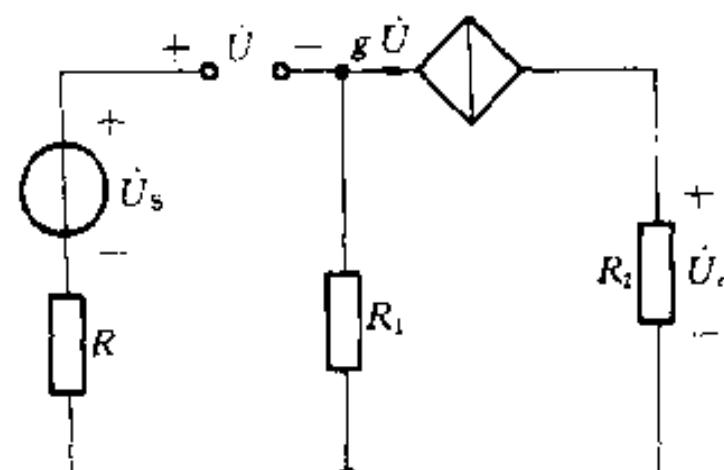
题 9-16 图

9-17 如果图示电路中 R 改变时电流 I 保持不变, L 、 C 应满足什么条件?

9-18 求附图电路电阻 R_2 的端电压 U_2 。



题 9-17 图

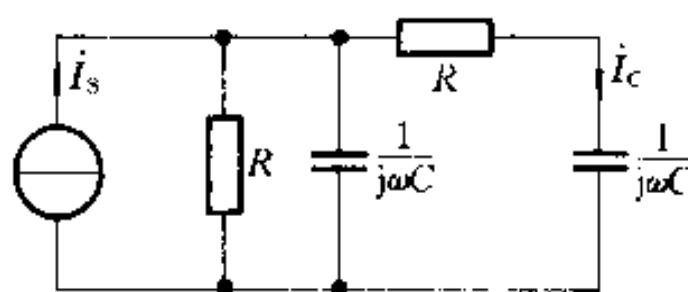


题 9-18 图

9-19 图示电路中,已知 $I_s = 60 \text{ mA}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ 。如果电流源的角频率可变,问在什么频率时,流经最右端电容 C 的电流 I_C 为最大? 求此电流。

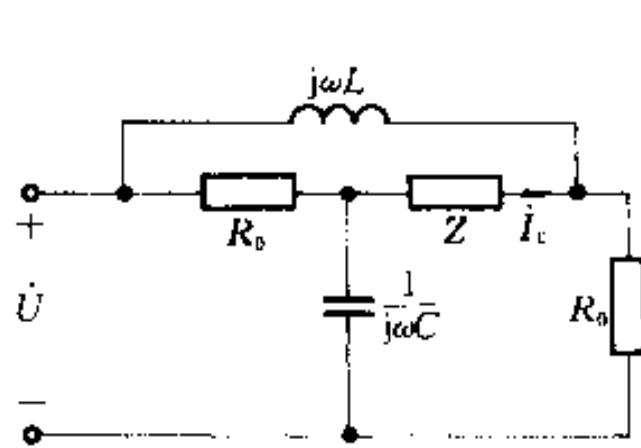
9-20 已知附图电路中的电压源为正弦量, $L = 1 \text{ mH}$, $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$, $Z = (3 + j5) \Omega$ 。试求:(1)当 $I_0 = 0$ 时, C 值为多少? (2)当条件(1)满足时,试证明输入阻抗为 R_0 。

9-21 在附图电路中,已知 $U = 100 \text{ V}$, $R_1 = 6.5 \Omega$, $R = 20 \Omega$, 当调节触点 c 使 R_{ac}

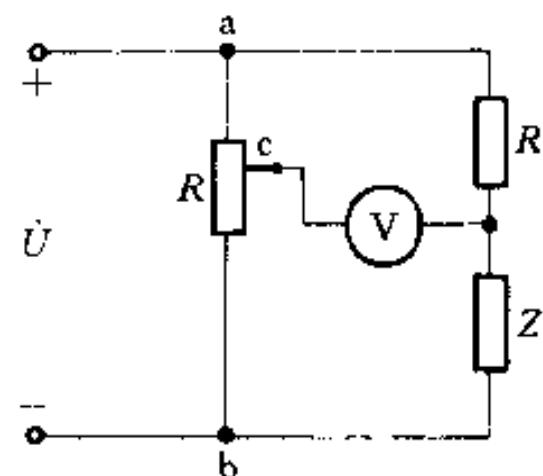


题 9-19 图

$= 4 \Omega$ 时, 电压表的读数最小, 其值为 30 V。求阻抗 Z 。



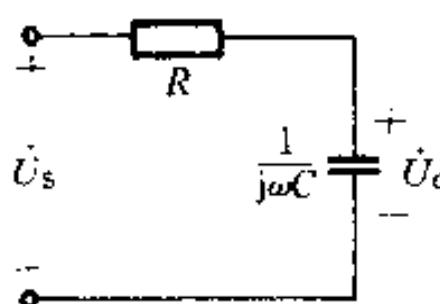
题 9-20 图



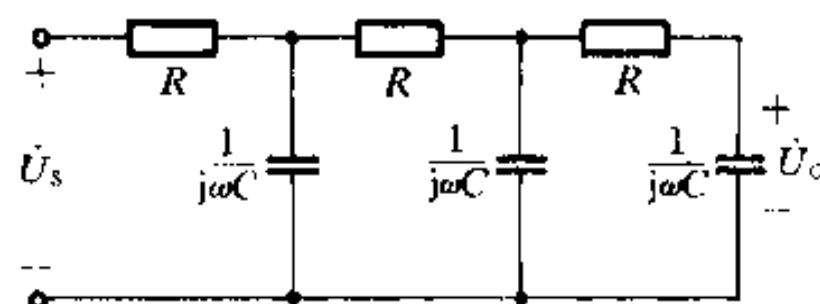
题 9-21 图

9-22 附图电路是阻容移相装置。

- (1) 如果要求图(a)中 U_c 滞后电压 U_s 的角度为 $\pi/3$, 参数 R 、 C 应如何选择?
- (2) 如果要求图(b)中的 U_c 滞后 U_s 的角度为 π , 即反相, R 、 C 应如何选择?
- (3) 如果图(b)中 R 和 C 的位置互换, 又如何选择 R 、 C ?



(a)



(b)

题 9-22 图

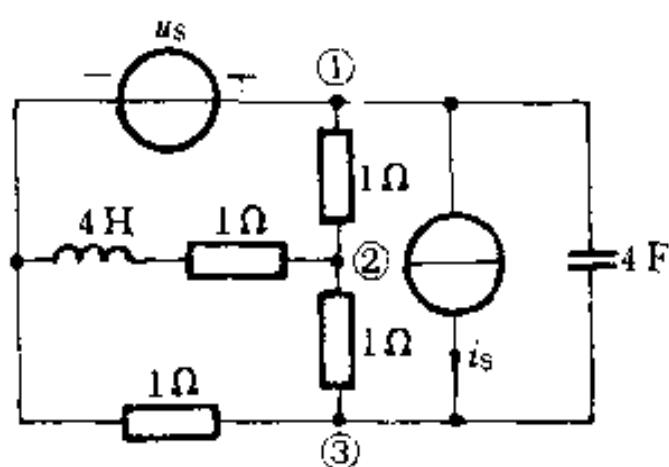
9-23 列出下列电路的回路电流方程和结点电压方程。已知 $u_s = 14.14\cos(2t)$ V, $i_s = 1.414\cos(2t + 30^\circ)$ A。

9-24 求图示一端口的戴维宁(或诺顿)等效电路。

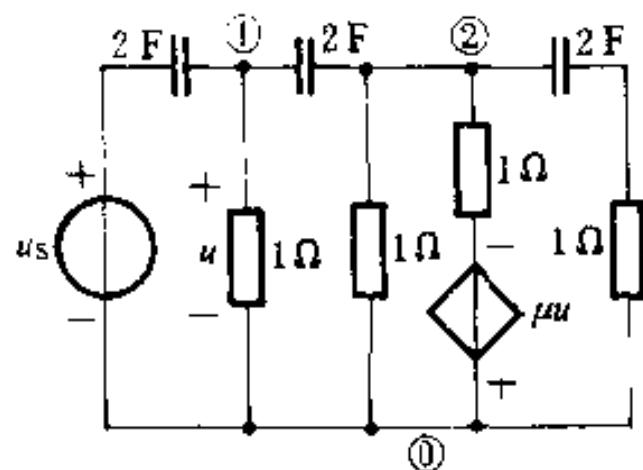
9-25 设 $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 0.01 \mu\text{F}$ 。求图示电路的 U_2/U_1 。

9-26 求图示电路的 U_2/U_1 。

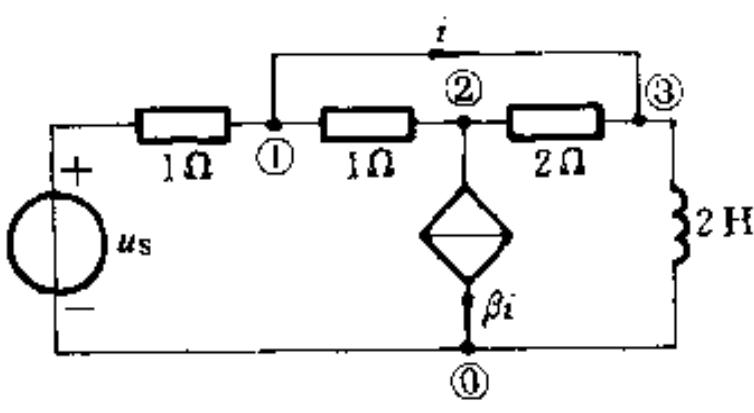
9-27 图示电路中 $u_s = 141.4\cos(314t - 30^\circ)$ V, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $L = 9.55 \text{ mH}$ 。试求各元件的端电压并作电路的相量图, 计算电源发出的复功率。



(a)

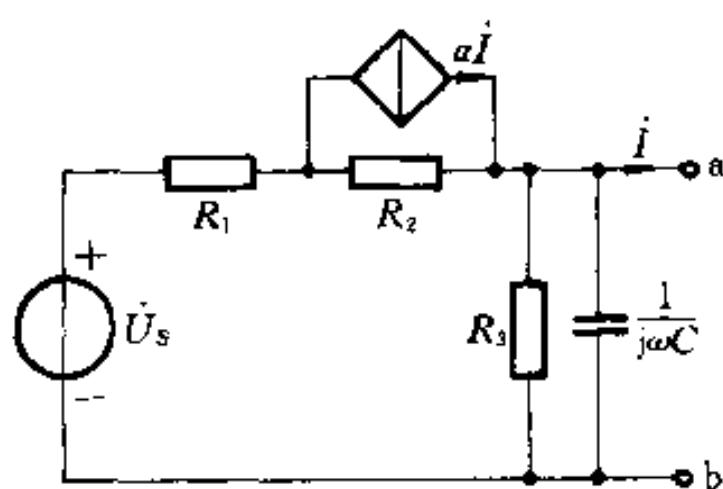


(b)

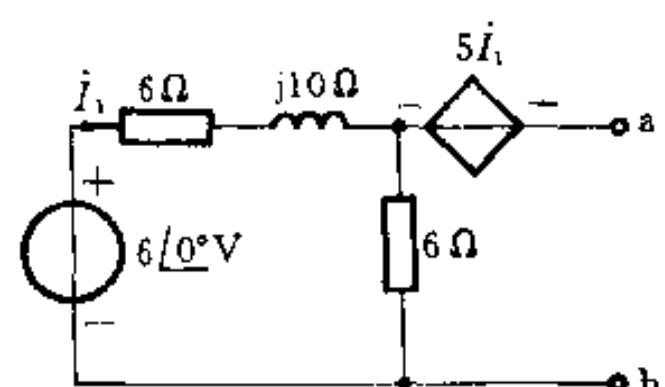


(c)

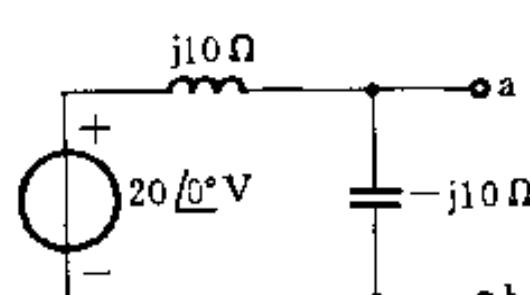
题 9-23 图



(a)



(b)



(c)

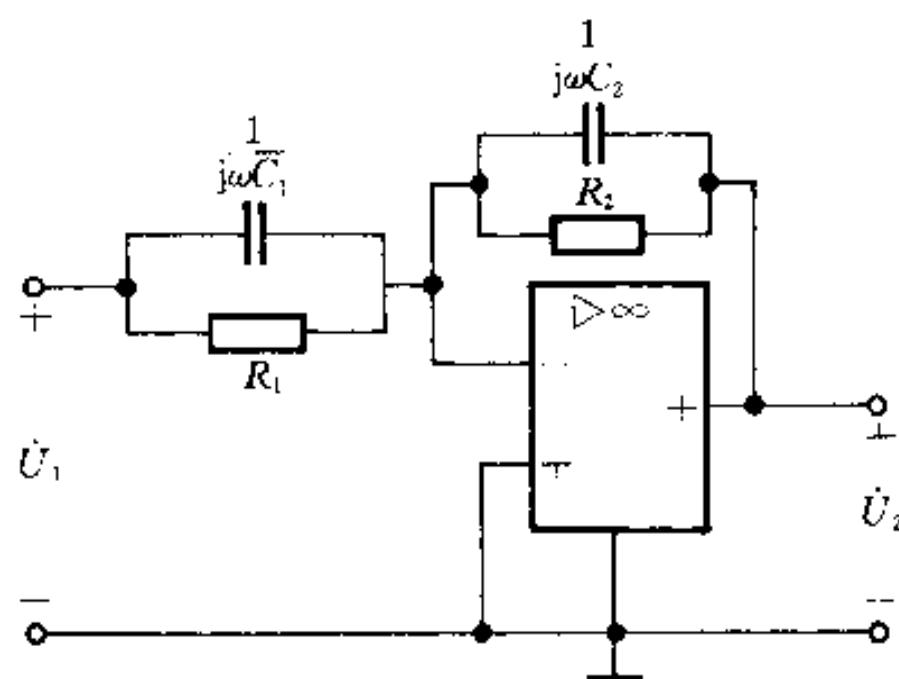
题 9-24 图

9-28 附图电路中 $i_s = \sqrt{2} \cos(10^4 t)$ A, $Z_1 = (10 + j50)$ Ω, $Z_2 = -j50$ Ω。求 Z_1, Z_2 吸收的复功率, 并验证整个电路复功率守恒, 即有 $\sum \bar{S} = 0$ 。

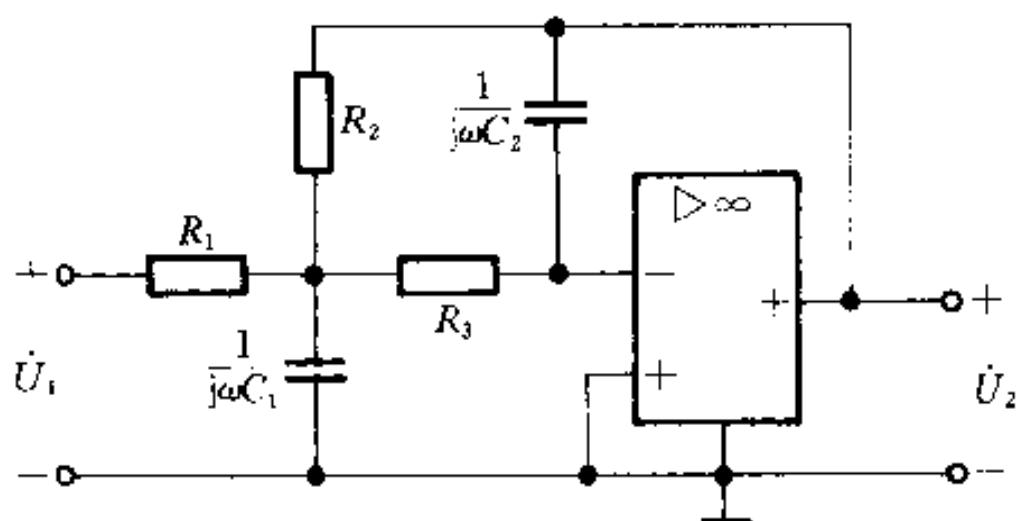
9-29 图示电路中 $I_s = 10$ A, $\omega = 1000$ rad/s, $R_1 = 10$ Ω, $j\omega L_1 = j25$ Ω, $R_2 = 5$ Ω, $\frac{1}{\omega C_2} = -j15$ Ω。求各支路吸收的复功率和电路的功率因数。

9-30 图示电路中 $R = 2$ Ω, $\omega L = 3$ Ω, $\omega C = 2$ S, $\dot{U}_c = 10 \angle 45^\circ$ V。求各元件的电压、电流和电源发出的复功率。

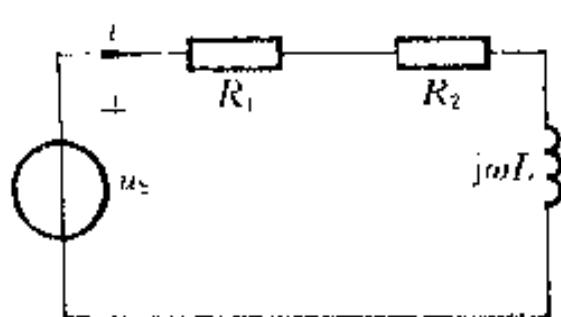
9-31 图示电路中 $R_1 = R_2 = 10$ Ω, $L = 0.25$ H, $C = 10^{-3}$ F, 电压表的读数为 20 V, 功率表的读数为 120 W。试求 $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s}$ 和电源发出的复功率 \bar{S} 。



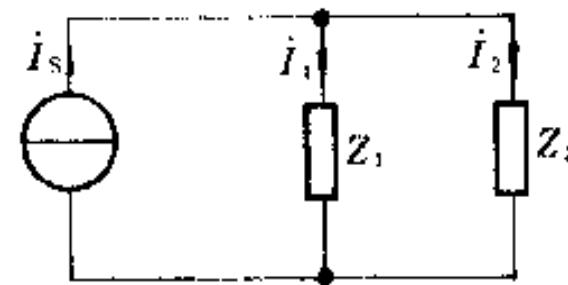
题 9-25 图



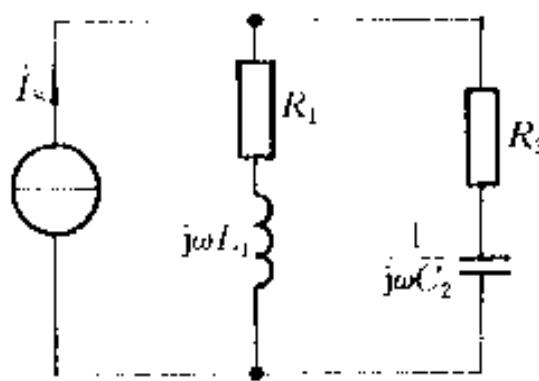
题 9-26 图



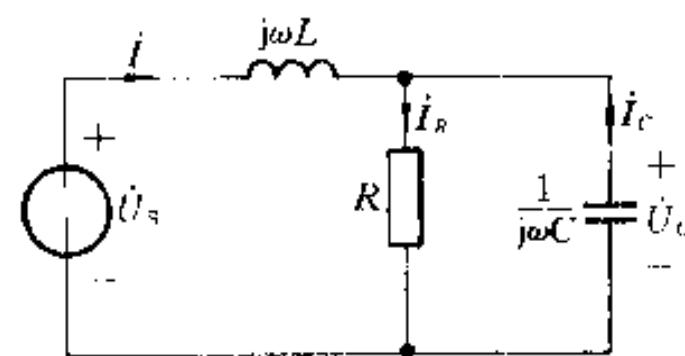
题 9-27 图



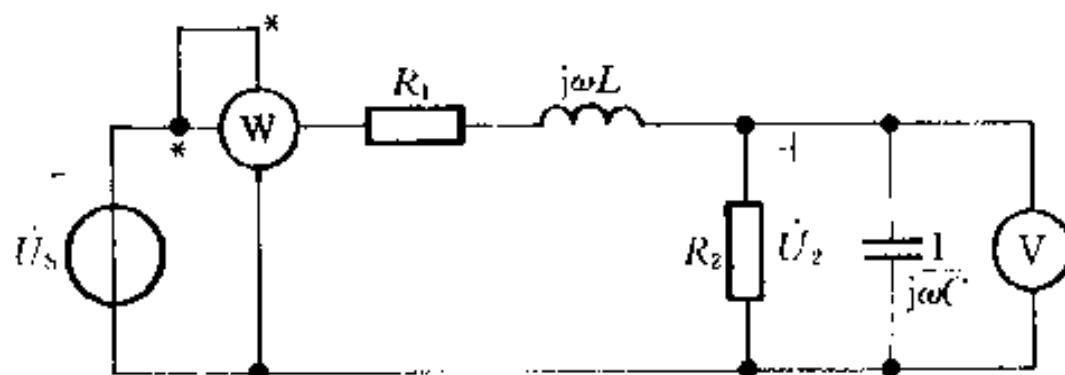
题 9-28 图



题 9-29 图

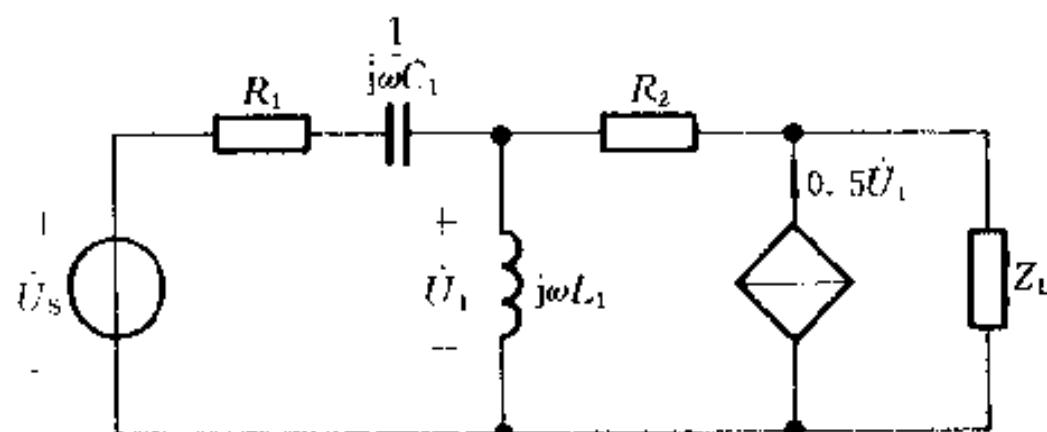


题 9-30 图



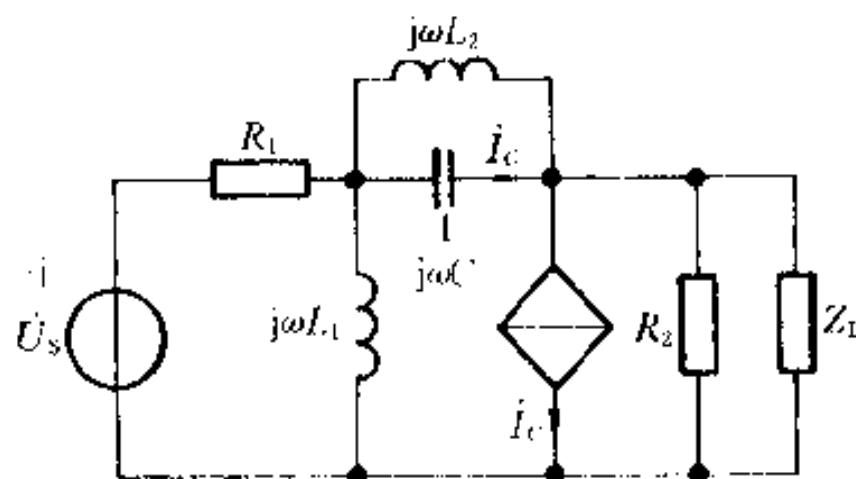
题 9-31 图

9-32 图示电路中 $R_1 = 1 \Omega$, $C_1 = 10^3 \mu F$, $L_1 = 0.4 \text{ mH}$, $R_2 = 2 \Omega$, $\dot{U}_s = 10 \angle -45^\circ \text{ V}$, $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, 求 Z_L (可任意变动) 能获得的最大功率。



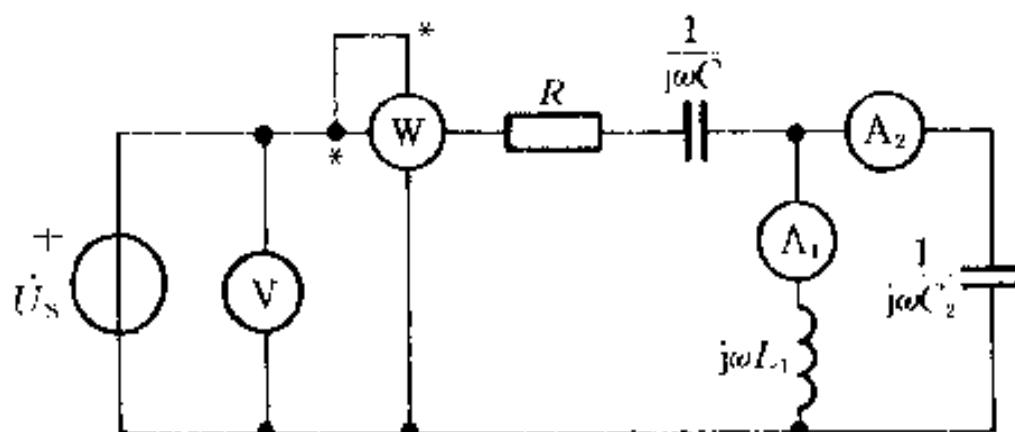
题 9-32 图

9-33 附图中 $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $L_1 = L_2 = 1 \text{ H}$, $C = 100 \mu F$, $\dot{U}_s = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$, 求 Z_L 能获得的最大功率。



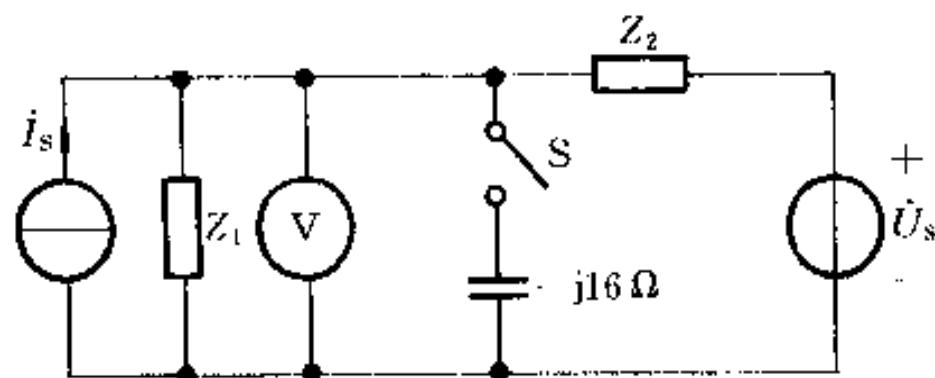
题 9-33 图

- 9-34 附图电路中已知: $\frac{1}{j\omega C_2} = 1.5 \omega L_1$, $R = 1 \Omega$, $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$, 电压表的读数为 10 V, 电流表 A_1 的读数为 30 A。求图中电流表 A_2 、功率表 W 的读数和电路的输入阻抗 Z_{in} 。



题 9-34 图

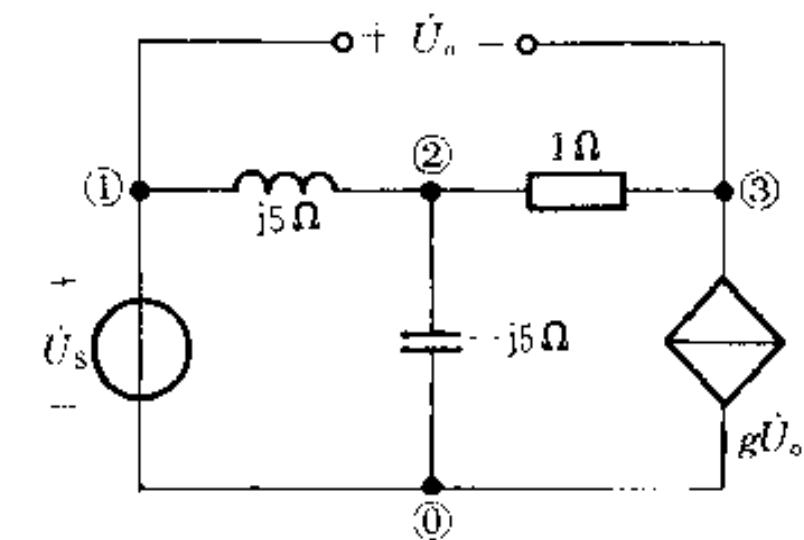
- 9-35 附图中的独立电源为同频正弦量,当 S 打开时,电压表的读数为 25 V。电路中的阻抗为 $Z_1 = (6 + j12) \Omega$, $Z_2 = 2Z_1$ 。求 S 闭合后电压表的读数。



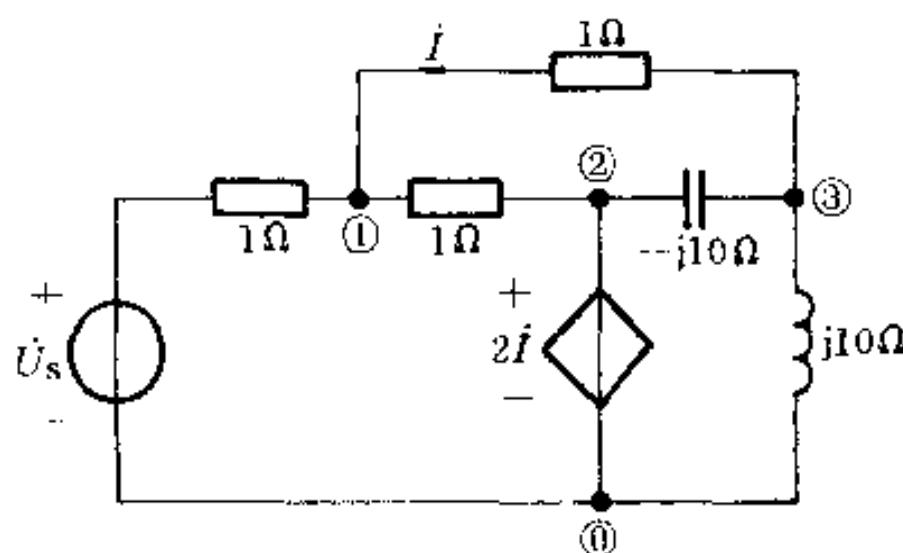
题 9-35 图

- 9-36 列出附图电路的结点电压方程和网孔电流(顺时针)方程。

- 9-37 把 3 个负载并联接到 220 V 正弦电源上,各负载取用的功率和电流分别为: $P_1 = 4.4 \text{ kW}$, $I_1 = 44.7 \text{ A}$ (感性); $P_2 = 8.8 \text{ kW}$, $I_2 = 50 \text{ A}$ (感性); $P_3 = 6.6 \text{ kW}$, $I_3 = 60 \text{ A}$ (容性)。求电源供给的总电流和电路的功率因数。



(a)



(b)

题 9-36 图

9-38 功率为 60 W , 功率因数为 0.5 的日光灯(感性)负载与功率为 100 W 的白炽灯各 50 只并联在 220 V 的正弦电源上($f=50\text{ Hz}$)。如果要把电路的功率因数提高到 0.92 , 应并联多大电容?

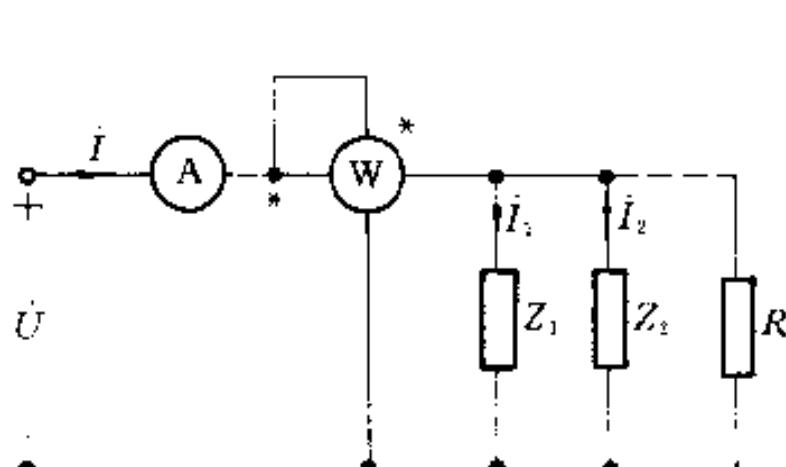
9-39 已知附图电路中, $I_1 = 10\text{ A}$, $I_2 = 20\text{ A}$, 其功率因数分别为 $\lambda_1 = \cos \varphi_1 = 0.8$ ($\varphi_1 < 0$), $\lambda_2 = \cos \varphi_2 = 0.5$ ($\varphi_2 > 0$), 端电压 $U = 100\text{ V}$, $\omega = 1000\text{ rad/s}$ 。(1)求图中电流表、功率表的读数和电路的功率因数;(2)若电源的额定电流为 30 A , 那么还能并联多大的电阻?求并联该电阻后功率表的读数和电路的功率因数;(3)如使原电路的功率因数提高到 $\lambda = 0.9$, 需要并联多大电容?

9-40 求图示电路中 Z 的最佳匹配值。

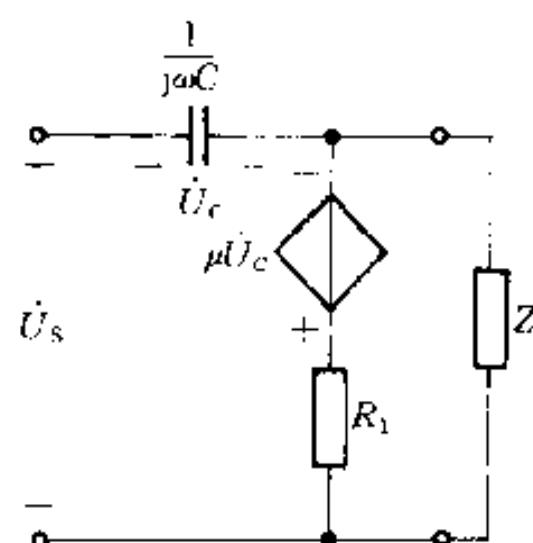
9-41 当 $\omega = 5000\text{ rad/s}$ 时, RLC 串联电路发生谐振, 已知 $R = 5\Omega$, $L = 400\text{ mH}$, 端电压 $U = 1\text{ V}$ 。求电容 C 的值及电路中的电流和各元件电压的瞬时表达式。

9-42 RLC 串联电路的端电压 $u = 10\sqrt{2}\cos(2500t + 10^\circ)\text{ V}$, 当 $C = 8\mu\text{F}$ 时, 电路中吸收的功率为最大, $P_{\max} = 100\text{ W}$ 。(1)求电感 L 和 Q 值;(2)作出电路的相量图。

9-43 RLC 串联电路中, $R = 10\Omega$, $L = 1\text{ H}$, 端电压为 100 V , 电流为 10 A 。如把 R 、 L 、 C 改成并联接到同一电源上。求并联各支路的电流。电源的频率为 50 Hz 。

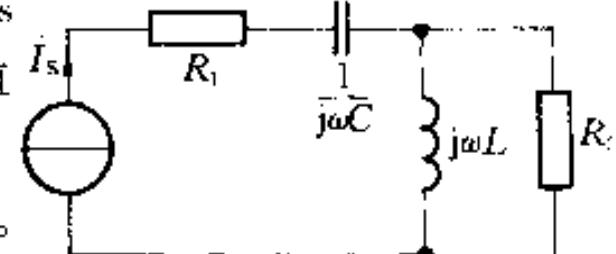


题 9-39 图



题 9-40 图

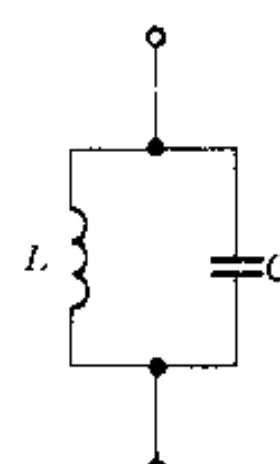
9-44 附图电路中, $I_s = 1 \text{ A}$, 当 $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$ 时电路发生谐振, $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $L = 0.2 \text{ H}$ 。求 C 值和电流源端电压 U_s 。



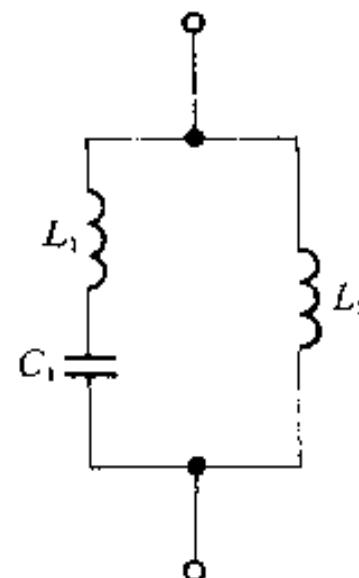
题 9-44 图



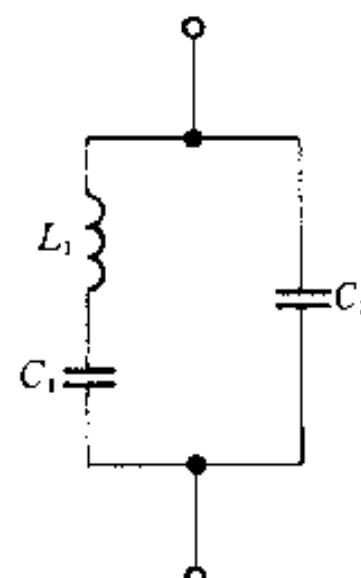
(a)



(b)



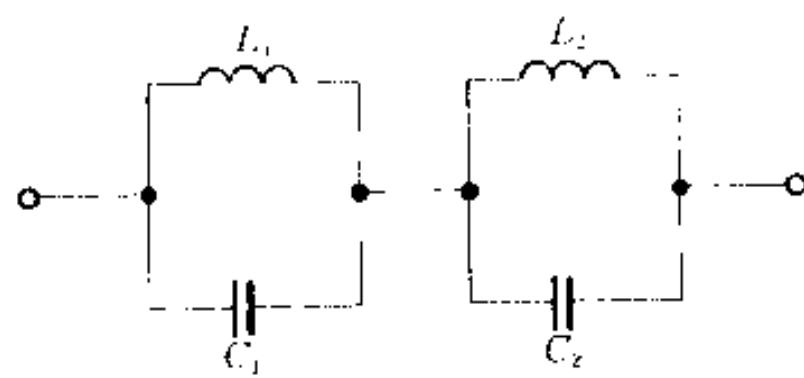
(a)



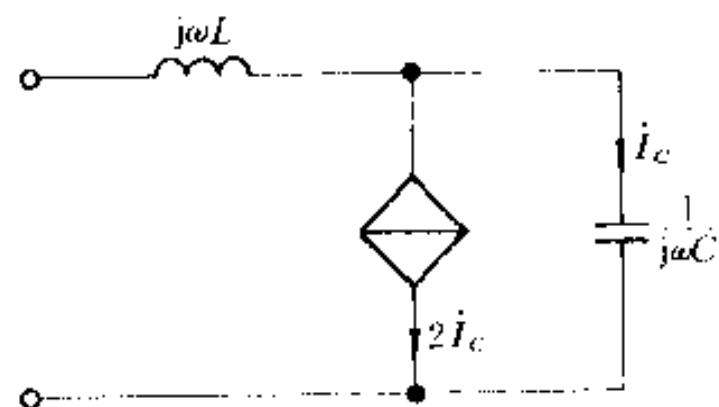
(b)

题 9-45 图

第九章 正弦稳态电路的分析



(a)



(b)

题 9-46 图

第十章

含有耦合电感的电路

· 内容提要 ·

耦合电感在工程中有着广泛的应用。本章主要介绍耦合电感中的磁耦合现象、互感和耦合因数、耦合电感的同名端和耦合电感的磁通链方程、电压电流关系；还介绍含有耦合电感电路的分析计算及空心变压器、理想变压器的初步概念。

§ 10-1 互 感

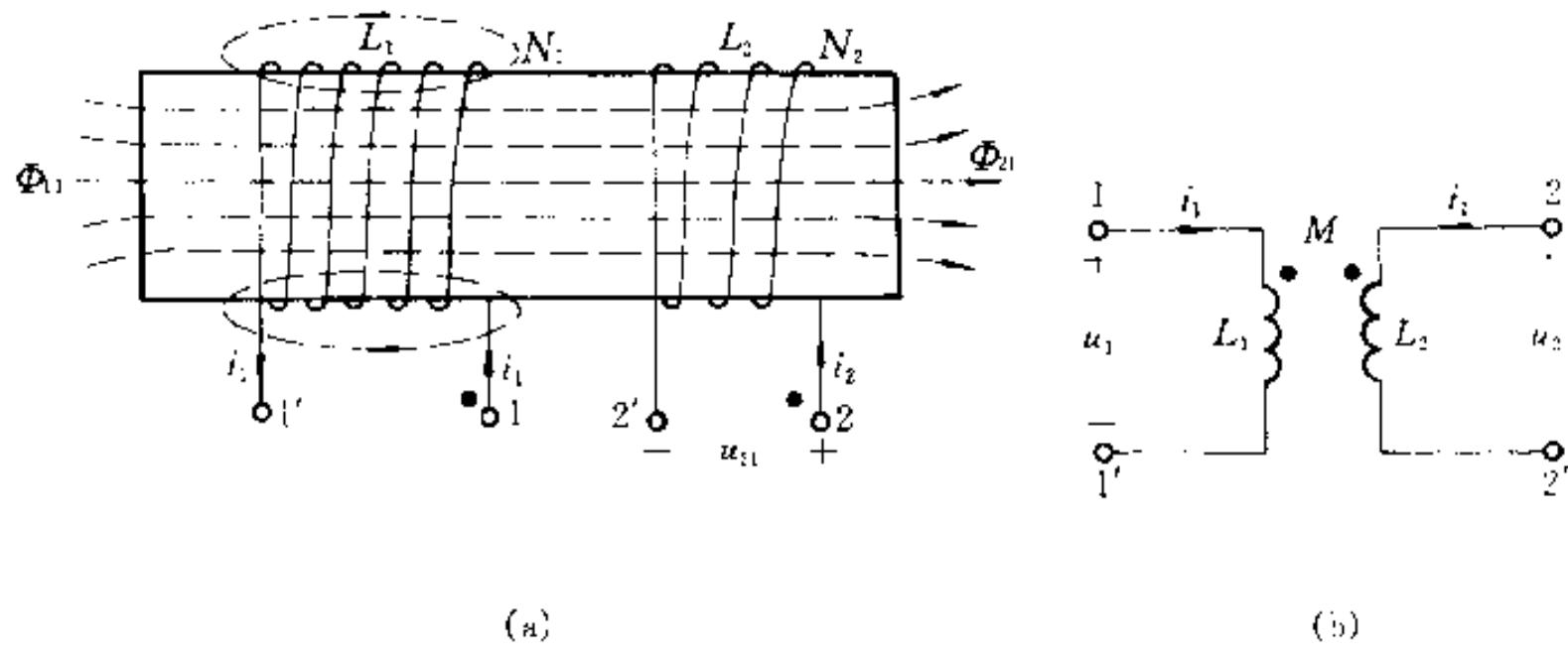
载流线圈之间通过彼此的磁场相互联系的物理现象称为磁耦合。图 10-1(a)为两个有耦合的载流线圈(即电感 L_1 和 L_2)^①，载流线圈中的电流 i_1 和 i_2 称为施感电流，线圈的匝数分别为 N_1 和 N_2 。根据两个线圈的绕向、施感电流的参考方向和两线圈的相对位置，按右螺旋法则确定施感电流产生的磁通方向和彼此交链的情况。线圈 1 中的电流 i_1 产生的磁通设为 Ψ_{11} ^②，方向如图所示，在穿越自身的线圈时，所产生的磁通链设为 Ψ_{11} ，此磁通链称为自感磁通链； Ψ_{11} 中的一部分或全部交链线圈 2 时产生的磁通链设为 Ψ_{21} ，称为互感磁通链。同样，线圈 2 中的电流 i_2 也产生自感磁通链 Ψ_{22} 和互感磁通链 Ψ_{12} (图中未画出)，这就是彼此耦合的情况。耦合线圈中的磁通链等于自感磁通链和互感磁通链两部分的代数和，如线圈 1 和 2 中的磁通链分别为 Ψ_1 和 Ψ_2 ，则有

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12}$$

$$\Psi_2 = \mp \Psi_{21} + \Psi_{12}$$

① 这里用“载流线圈”，主要是为了便于描述磁通的彼此交链情况，而电感（元件）是“线圈”的电路模型，所以实际上讨论的是“耦合电感”。

② 磁通(链)符号中双下标的含义：第 1 个下标表示该磁通(链)所在线圈的编号，第 2 个下标表示产生该磁通(链)的施感电流所在线圈的编号。



(a)

(b)

图 10-1 两个线圈的互感

当周围空间是各向同性的线性磁介质时,每一种磁通链都与产生它的施感电流成正比,即有自感磁通链:

$$\Psi_{11} = L_1 i_1, \quad \Psi_{22} = L_2 i_2$$

互感磁通链:

$$\Psi_{12} = M_{12} i_2, \quad \Psi_{21} = M_{21} i_1$$

上式中 \$M_{12}\$ 和 \$M_{21}\$ 称为互感系数,简称互感。互感用符号 \$M\$ 表示,单位为 H,本书中 \$M\$ 恒取正值。可以证明, \$M_{12} = M_{21}\$, 所以当只有两个线圈(电感)有耦合时,可以略去 \$M\$ 的下标,即可令 \$M = M_{12} = M_{21}\$。

两个耦合线圈的磁通链可表示为:

$$\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$$

$$\Psi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2$$

上式表明,耦合线圈中的磁通链与施感电流成线性关系,是各施感电流独立产生的磁通链叠加的结果。\$M\$ 前的“\$\pm\$”号是说明磁耦合中,互感作用的两种可能性。“+”号表示互感磁通链与自感磁通链方向一致,称为互感的“增助”作用[如图 10-1(a)所示];“-”号则相反,表示互感的“削弱”作用。为了便于反映“增助”或“削弱”作用和简化图形表示,采用同名端标记方法。对两个有耦合的线圈各取一个端子,并用相同的符号标记,如小圆点或“*”号等,这一对端子称为“同名端”。当一对施感电流 \$i_1\$ 和 \$i_2\$ 从同名端流进(或流出)各自的线圈时,互感起增助作用。例如,图 10-1(a)中端子 1、2 或 1'、2' 为同名端,在图中是用小圆点标出。如果电流 \$i_1\$ 从端子 1 流进,而电流 \$i_2\$ 从端子 2 流出,则互感将起削弱作用。两个有耦合的线圈的同名端可以根据它们的绕向和相对位置判别,也可以通过实验方法确定。引入同名端的概念后,两个耦合线圈可以用带有同名端标记的电感(元件)\$L_1\$ 和 \$L_2\$ 表示,如图 10-1(b),其中 \$M\$ 表示互感。这样有:

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Psi_2 = M i_1 + L_2 i_2$$

式中含有 M 的项之前取“+”号, 表示“增助”。两个有耦合的电感可以看作是一个具有 4 个端子的电路元件。

当有 2 个以上电感彼此之间存在耦合时, 同名端应当一对一对地加以标记, 每一对宜用不同符号。如果每一电感都有电流时, 则每一个电感中的磁通链将等于自感磁通链与所有互感磁通链的代数和。凡与自感磁通链同方向的互感磁通链(增助), 求和时该项前面取“+”号, 反之(削弱)则取“-”号。

例 10-1 图 10-1(b) 中, $i_1 = 10 \text{ A}$, $i_2 = 5\cos(10t) \text{ A}$, $L_1 = 2 \text{ H}$, $L_2 = 3 \text{ H}$, $M = 1 \text{ H}$ 。求两耦合线圈中的磁通链。

解 因为施感电流 i_1 、 i_2 都是从标记的同名端流进线圈, 互感起“增助”作用, 各磁通链计算如下:

$$\Psi_{11} = L_1 i_1 = 20 \text{ Wb}$$

$$\Psi_{22} = L_2 i_2 = 15\cos(10t) \text{ Wb}$$

$$\Psi_{12} = M i_2 = 5\cos(10t) \text{ Wb}$$

$$\Psi_{21} = M i_1 = 10 \text{ Wb}$$

最后得(按右螺旋法则指定磁通链的参考方向):

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = [20 + 5\cos(10t)] \text{ Wb}$$

$$\Psi_2 = M i_1 + L_2 i_2 = [10 + 15\cos(10t)] \text{ Wb}$$

如果两个耦合的电感 L_1 和 L_2 中有变动的电流, 各电感中的磁通链将随电流变动而变动。设 L_1 和 L_2 的电压和电流分别为 u_1 、 i_1 和 u_2 、 i_2 , 且都取关联参考方向, 互感为 M , 则有:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \frac{d\Psi_2}{dt} = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (10-1)$$

上式表示两耦合电感的电压电流关系。令自感电压 $u_{11} = L_1 \frac{di_1}{dt}$, $u_{22} = L_2 \frac{di_2}{dt}$, 互感电压 $u_{12} = M \frac{di_2}{dt}$, $u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$, u_{12} 是变动电流 i_2 在 L_1 中产生的互感电压, u_{21} 是变动电流 i_1 在 L_2 中产生的互感电压。所以耦合电感的电压是自感电压和互感电压叠加的结果。互感电压前的“+”或“-”号的正确选取是写出耦合电感端电压的关键, 选取原则可简明地表述如下: 如果互感电压“+”极性端子与产生它的电流流进的端子为一对同名端, 互感电压前应取“+”号, 反之取“-”号。对于图 10-1(b), u_1 (u_{12} 同)的“+”极性在 L_1 的“1”端, 电流 i_2 从“2”端流

进 L_2 , 而这两个端子是同名端, 故有 $u_{12} = M \frac{di_2}{dt}$, 同理, $u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$ 。

例 10-2 求例 10-1 中两耦合电感的端电压 u_1, u_2 。

解 按图 10-1(b) 和式(10-1), 得:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = -50 \sin(10t) \text{ V}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = -150 \sin(10t) \text{ V}$$

电压 u_1 中只含有互感电压 u_{12} , 电压 u_2 中只含有自感电压 u_{22} , 这说明不变动的电流 i_1 (直流) 虽产生自感和互感磁通链, 但不产生自感和互感电压。

当施感电流为同频正弦量时, 在正弦稳态情况下, 电压、电流方程可用相量形式表示, 以图 10-1(b) 电路为例, 有:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

如令 $Z_M = j\omega M$, ωM 称为互感抗。

还可以用电流控制电压源 CCVS 表示互感电压的作用。对图 10-1(b) 的耦合电感, 用 CCVS 表示的电路如图 10-2(相量形式) 所示。

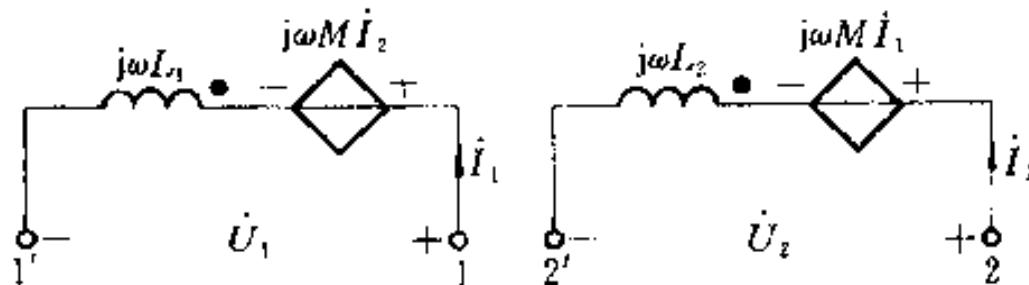


图 10-2 用 CCVS 表示的耦合电感电路

工程上为了定量地描述两个耦合线圈的耦合紧密程度, 把两线圈的互感磁通链与自感磁通链的比值的几何平均值定义为耦合因数, 记为 k

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{|\Psi_{12}|}{\Psi_{11}}} \cdot \sqrt{\frac{|\Psi_{21}|}{\Psi_{22}}}$$

由于 $\Psi_{11} = L_1 i_1$, $|\Psi_{12}| = Mi_2$, $\Psi_{22} = L_2 i_2$, $|\Psi_{21}| = Mi_1$, 代入上式后有

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

k 的大小与两个线圈的结构、相互位置以及周围磁介质有关。改变或调整它们的相互位置有可能改变耦合因数的大小; 当 L_1 和 L_2 一定时, 也就相应地改变了互感 M 的大小。

§ 10-2 含有耦合电感电路的计算

含有耦合电感电路(简称互感电路)的正弦稳态分析可采用相量法。同时应注意耦合电感上的电压是包含互感电压的,在列 KVL 方程时,要正确使用同名端计入互感电压;必要时可引用 CCVS 表示互感电压的作用。耦合电感支路的电压不仅与本支路电流有关,还与其他某些支路电流有关,列结点电压方程时会遇到困难,要另行处理。

图 10-3(a)所示耦合电感电路是一种串联电路,由于互感起“削弱”作用,故称反向串联(另一种为顺向串联,互感起“增助”作用),按图示参考方向,KVL 方程为:

$$u_1 = R_1 i + \left(L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \right) = R_1 i + (L_1 - M) \frac{di}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i + \left(L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \right) = R_2 i + (L_2 + M) \frac{di}{dt}$$

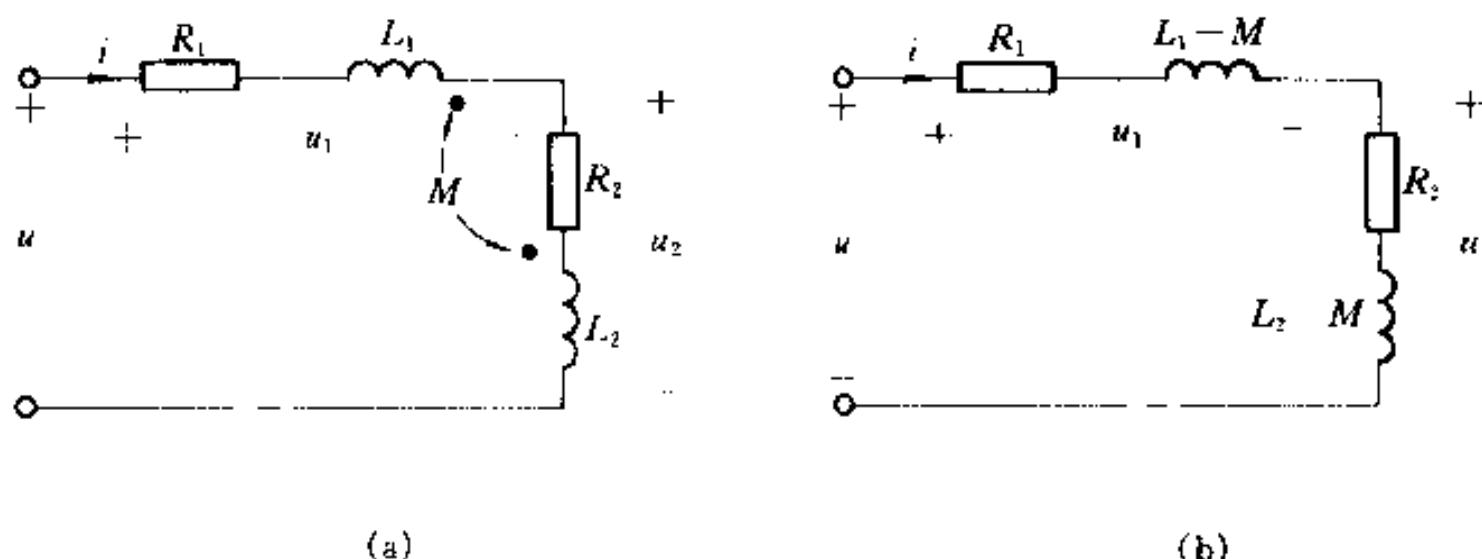


图 10-3 耦合电路的串联电路

根据上述方程可以给出一个无互感等效电路,如图(b)所示,有

$$u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}$$

等效电路为电阻 R_1, R_2 和电感 $L (= L_1 + L_2 - 2M)$ 的串联电路。对正弦稳态电路,可采用相量形式表示为:

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - M)] I$$

$$\dot{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 + M)] I$$

$$\dot{U} = [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] I$$

电流 I 为

$$I = \frac{U}{(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}$$

每一条耦合电感支路的阻抗和电路的输入阻抗分别为：

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M)$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega(L_2 - M)$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

可以看出，反向串联时，每一条耦合电感支路阻抗和输入阻抗都比无互感时的阻抗小（电抗变小），这是由于互感的削弱作用，它类似于串联电容的作用，常称为互感的“容性”效应。每一耦合电感支路的等效电感分别为 $(L_1 - M)$ 和 $(L_2 - M)$ ，有可能其中之一为负值，但不可能都为负，整个电路仍呈感性^①。

对顺向串联电路，不难得出每一耦合电感支路的阻抗为：

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 + M)$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega(L_2 + M)$$

而

$$Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

例 10-3 图 10-3(a)所示电路中，正弦电压的 $U = 50 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $\omega L_1 = 7.5 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $\omega L_2 = 12.5 \Omega$, $\omega M = 8 \Omega$ 。求该耦合电感的耦合因数 k 和该电路中各支路吸收的复功率 \bar{S}_1 和 \bar{S}_2 。

解 耦合因数 k 为

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{(\omega L_1)(\omega L_2)}} = \frac{8}{\sqrt{7.5 \times 12.5}} = 0.826$$

求得支路的电流和阻抗，就能求得支路的复功率。支路的等效阻抗分别为：

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M) = (3 - j0.5) \Omega = 3.04 / -9.46^\circ \Omega \text{ (容性)}$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega(L_2 - M) = (5 + j4.5) \Omega = 6.73 / 42^\circ \Omega \text{ (感性)}$$

输入阻抗 Z 为

$$Z = Z_1 + Z_2 = (8 + j4) \Omega = 8.94 / 26.57^\circ \Omega$$

令 $U = 50 / 0^\circ \text{ V}$ ，解得电流 I 为

$$I = U/Z = \frac{50 / 0^\circ}{8.94 / 26.57^\circ} \text{ A} = 5.59 / -26.57^\circ \text{ A}$$

各支路吸收的复功率分别为：

$$\bar{S}_1 = I^2 Z_1 = (93.75 - j15.63) \text{ V}\cdot\text{A}$$

^① 根据 $\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$ ，可以证明 $L_1 + L_2 - 2M \geq 0$ 。

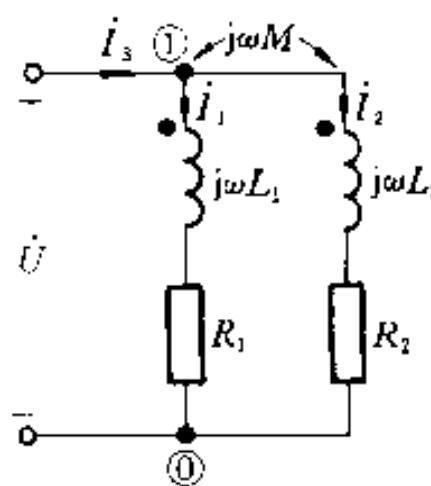
$$\bar{S}_2 = I^2 Z_2 \approx (156.25 + j140.63) \text{ V}\cdot\text{A}$$

电源发出的复功率 \bar{S} 为

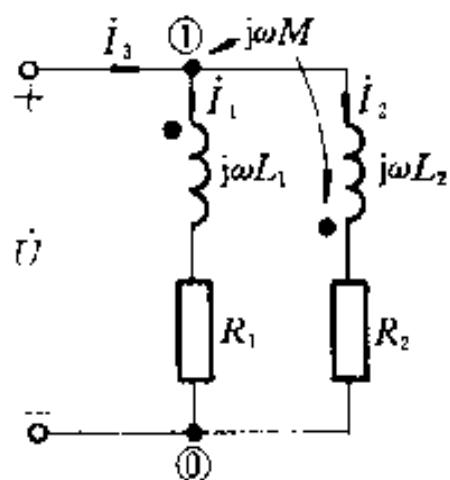
$$S = \dot{U}I^* = (250 + j125) \text{ V}\cdot\text{A} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

图 10-4(a)所示电路为耦合电感的一种并联电路,由于同名端连接在同一个结点上,称为同侧并联电路。当异名端连接在同一结点上时,则称为异侧并联电路,见图 10-4(b)。正弦稳态情况下,对同侧并联电路有

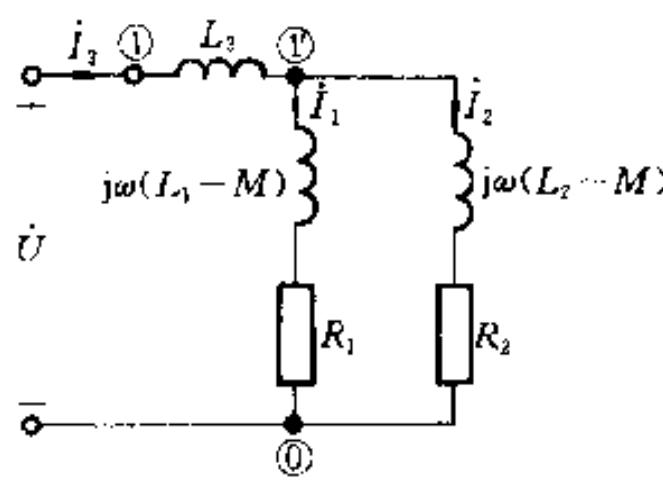
$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= (R_1 + j\omega L_1)I_1 + j\omega M I_2 \\ \dot{U} &= j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 \end{aligned} \right\} \quad (10-3a)$$



(a)



(b)



(c)

图 10-4 耦合电感的并联电路

对异侧并联电路可类似地得出

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 \\ \dot{U} &= -j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 \end{aligned} \right\} \quad (10-3b)$$

令 $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$, $Z_M = j\omega M$, 按式(10-3a), 即同侧并联电路, 有:

$$I_1 = \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U} = \frac{1 - Z_M Y_2}{Z_1 - Z_M^2 Y_2} \dot{U}$$

$$I_2 = \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} U = \frac{1 - Z_M Y_1}{Z_2 - Z_M^2 Y_1} U$$

式中 $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$, $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$ 。根据 KCL 可求得

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{Z_1 + Z_2 + 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} U$$

用 $I_2 = I_3 - I_1$ 消去支路 1 方程中的 I_2 , 用 $I_1 = I_3 - I_2$ 消去支路 2 方程中的 I_1 , 有:

$$\begin{aligned} U &= j\omega M I_3 + [R_1 + j\omega(L_1 - M)] I_1 \\ U &= j\omega M I_3 + [R_2 + j\omega(L_2 - M)] I_2 \end{aligned}$$

根据上述方程可获得无互感的等效电路, 如图 10-4(c) 所示。无互感等效电路又称去耦等效电路。同理, 按式(10-3b)可得出异侧并联的去耦等效电路, 其差别仅在于互感 M 前的“+”、“-”号。可以归纳出如下的去耦方法: 如果耦合电感的 2 条支路各有一端与第 3 支路形成一个仅含 3 条支路的共同结点, 则可用 3 条无耦合的电感支路等效替代, 3 条支路的等效电感分别为:

(支路 3) $L_3 = \pm M$ (同侧取“+”, 异侧取“-”)

(支路 1) $L'_1 = L_1 \mp M$
 (支路 2) $L'_2 = L_2 \mp M$

M 前所取符号与 L_3 中的相反

等效电感与电流参考方向无关。这 3 条支路中的其他元件不变。注意去耦等效电路中的结点[如图 10-4(c) 中①所示]不是原电路的结点①, 原结点①移至 L_3 的前面。

例 10-4 图 10-4(a) 中, 设正弦电压的 $U = 50 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $\omega L_1 = 7.5 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $\omega L_2 = 12.5 \Omega$, $\omega M = 8 \Omega$ (与例 10-3 相同)。求支路 1、2 吸收的复功率。

解 令 $U = 50 / 0^\circ \text{ V}$, 按以上公式有:

$$Y_2 = \frac{1}{5 + j12.5} \text{ S} = (0.028 - j0.069) \text{ S}$$

$$I_1 = \frac{[1 - j8(0.028 - j0.069)] U}{3 + j7.5 + 64(0.028 - j0.069)} = 4.39 / -59.33^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U - Z_1 I_1}{j\omega M} = \frac{14.96 - j5.47}{j8} = 1.99 / -101.1^\circ \text{ A}$$

支路 1、2 的复功率 \bar{S}_1 和 \bar{S}_2 为:

$$\bar{S}_1 = U I_1^* = (111.97 + j188.74) \text{ V} \cdot \text{A}$$

$$\bar{S}_2 = U I_2^* = (-34.35 + j93.7) \text{ V} \cdot \text{A}$$

§ 10-3 空心变压器

变压器是电工、电子技术中常用的电气设备,它是由两个耦合线圈绕在一个共同的心子上制成,其中,一个线圈作为输入,接入电源后形成一个回路,称为原边回路(或初级回路);另一线圈作为输出,接入负载后形成另一个回路,称为副边回路(或次级回路)。空心变压器的心子是非铁磁材料制成的,其电路模型如图 10-5,图中的负载设为电阻和电感串联。变压器通过耦合作用,将原边的输入传递到副边输出。对图 10-5,正弦稳态下,有

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1)I_1 + j\omega M I_2 &= \dot{U}_1 \\ j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + R_L + jX_L)I_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

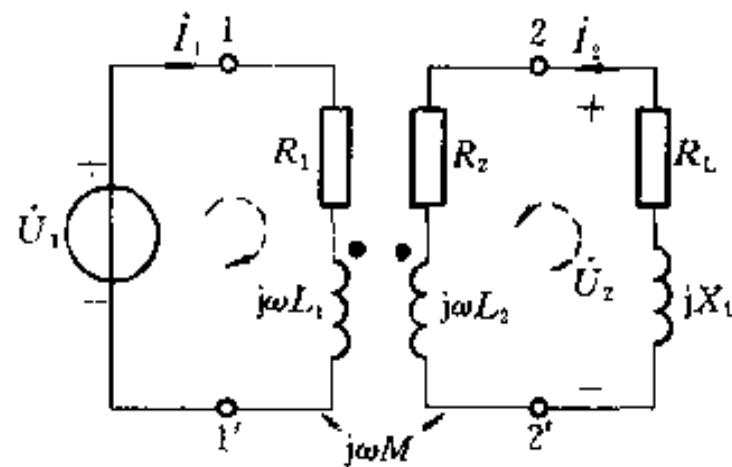


图 10-5 空心变压器电路模型

令 $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$, 称为原边回路阻抗, $Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + R_L + jX_L$, 称为副边回路阻抗, $Z_M = j\omega M$, 由上列方程可求得:

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} - Z_M^2 Y_{22}} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} + (\omega M)^2 Y_{22}} \quad (10-5a)$$

$$I_2 = \frac{-Z_M Y_{11} \dot{U}_1}{Z_{22} - Z_M^2 Y_{11}} = \frac{-j\omega M Y_{11} \dot{U}_1}{R_2 + j\omega L_2 + R_L + jX_L + (\omega M)^2 Y_{11}} \quad (10-5b)$$

其中 $Y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$, $Y_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$ 。式(10-5a)中的分母 $Z_{11} + (\omega M)^2 Y_{22}$ 是原边的输入阻抗, 其中 $(\omega M)^2 Y_{22}$ 称为引入阻抗, 或反映阻抗, 它是副边的回路阻抗通过互感反映到原边的等效阻抗。引入阻抗的性质与 Z_{22} 相反, 即感性(容性)变为容性(感性)。式(10-5a)可以用图 10-6(a)所示等效电路表示, 称为原边等效电路。

应用同样的方法分析式(10-5b), 可以得出图 10-6(b)所示等效电路, 它是从副边看进去的含源一端口的一种等效电路。令 $I_2 = 0$, 可以得到此含源一端口在端子 2-2' 的开路电压 $j\omega M Y_{11} \dot{U}_1$, 戴维宁等效阻抗 $Z_{eq} = R_2 + j\omega L_2 +$

$(\omega M)^2 Y_{22}$

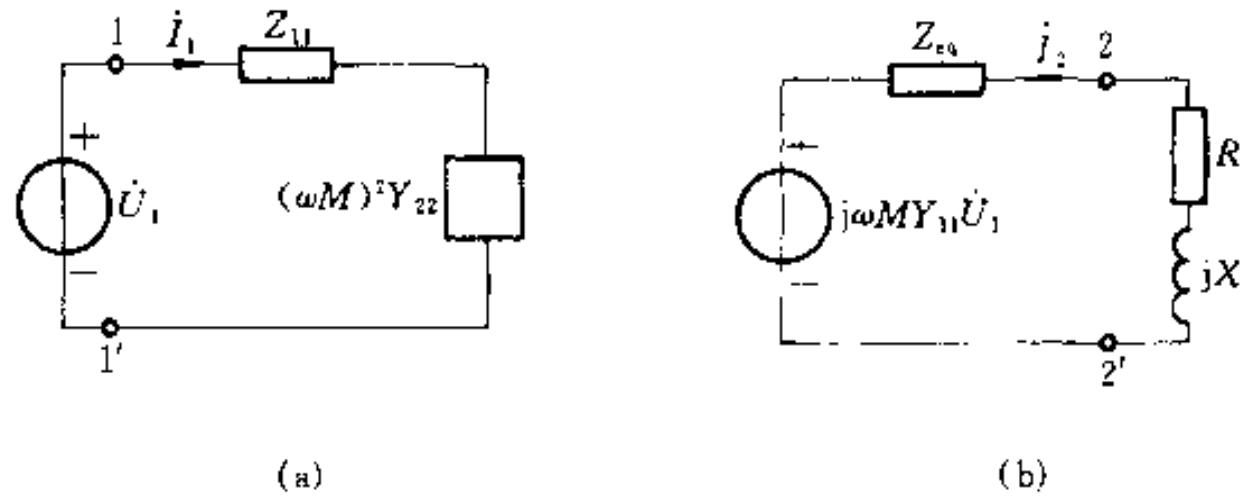


图 10-6 空心变压器的等效电路

例 10-5 图 10-5 所示电路中, $R_1 = R_2 = 0$, $L_1 = 5 \text{ H}$, $L_2 = 1.2 \text{ H}$, $M = 2 \text{ H}$, $u_1 = 100\cos(10t) \text{ V}$, 负载阻抗为 $Z_L = R_L + jX_L = 3 \Omega$ 。求原副边电流 i_1 , i_2 。

解 用图 10-6(a) 原边等效回路求电流 \bar{I}_1 :

$$Z_{11} = j\omega L_1 = j50 \Omega$$

$$(\omega M)^2 Y_{22} = \frac{400}{3 + j12} = (7.84 - j31.37) \Omega$$

令 $\bar{U}_1 = \frac{100}{\sqrt{2}}[0^\circ] \text{ V}$, 电流 \bar{I}_1 为

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{Z_{11} + (\omega M)^2 Y_{22}} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{j50 + 7.84 - j31.37} \text{ A} = 3.50[-67.2^\circ] \text{ A}$$

按式(10-4), 电流 \bar{I}_2 为

$$\bar{I}_2 = \frac{-j\omega M \bar{I}_1}{Z_{22}} = \frac{-j20 \times 3.50 / -67.2^\circ}{3 + j12} \text{ A} = 5.66[126.84^\circ] \text{ A}$$

即有:

$$i_1 = 3.50\sqrt{2}\cos(10t - 67.2^\circ) \text{ A}$$

$$i_2 = 5.66\sqrt{2}\cos(10t + 126.84^\circ) \text{ A}$$

§ 10-4 理想变压器

理想变压器的电路模型如图 10-7(a) 所示, N_1 和 N_2 分别为原边和副边的匝数, 原、副边电压和电流满足下列关系

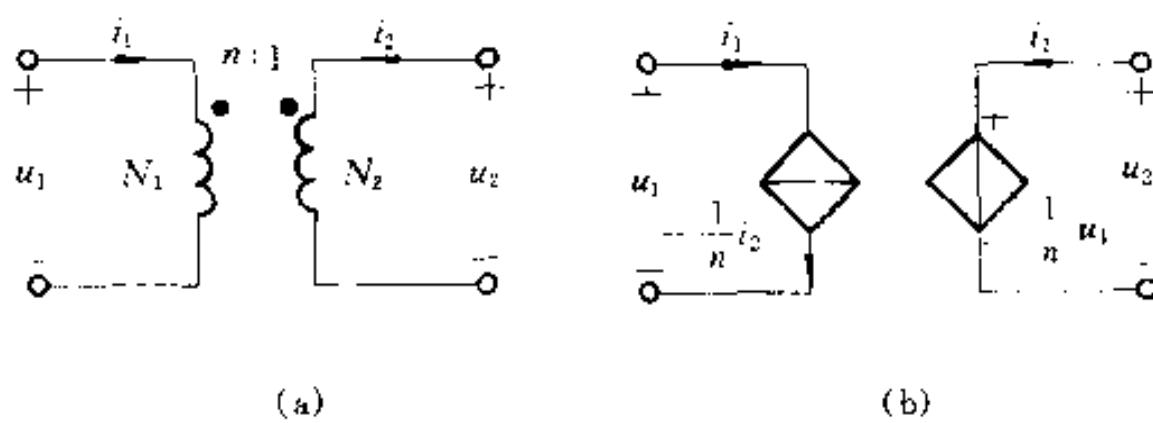


图 10 · 7 理想变压器电路

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{N_1} &= \frac{u_2}{N_2} \quad \text{或} \quad u_1 = \frac{N_1}{N_2} u_2 = n u_2 \\ N_1 i_1 + N_2 i_2 &= 0 \quad \text{或} \quad i_1 = -\frac{N_2}{N_1} i_2 = -\frac{1}{n} i_2 \end{aligned} \quad (10 \cdot 6)$$

上式是根据图中所示参考方向和同名端列出的。式中 $n = N_1/N_2$, 称为理想变压器的变比。理想变压器的电压、电流方程是通过一个参数 n (变比) 描述的代数方程, 所以理想变压器不是一个动态元件。

将理想变压器的两个方程相乘后得

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

即输入理想变压器的瞬时功率等于零, 所以它既不耗能也不储能, 它将能量由原边全部传输到副边输出, 在传输过程中, 仅仅将电压、电流按变比作数值变换。

空心变压器如同时满足下列 3 个条件, 即经“理想化”和“极限化”就演变为理想变压器。这 3 个条件是(1)空心变压器本身无损耗;(2)耦合因数 $k = 1$;(3) L_1 、 L_2 和 M 均为无限大,

但保持 $\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n$ 不变, n 为匝数比。

空心变压器如无损耗, 即有 $R_1 = R_2 = 0$ 。此时按式(10 · 4)有

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= u_1 \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} &= u_2 \end{aligned} \quad (10 \cdot 7)$$

当 $k = 1$, 即全耦合时, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, 代入上列方程, 得

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} &= u_1 \\ \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} &= u_2 \end{aligned} \right\}$$

两式相比, 得

$$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{u_1}{u_2} \quad \text{或} \quad \frac{u_1}{u_2} = n$$

按式(10 · 7)的第一式, 可得出

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int u_1 dt - \frac{M}{L_1} \int \frac{di_2}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{L_1} \int u_1 dt + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \int di_2$$

当 $L_1 \rightarrow \infty$, 而 $\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n$ 保持不变, 有

$$i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \text{ (D)}$$

工程上为了近似获得理想变压器的特性, 通常采用磁导率 μ 很高的磁性材料做变压器的心子, 而在保持匝数比 N_1/N_2 不变的情况下, 增加线圈的匝数, 并尽量紧密耦合, 使 k 接近于 1, 同时使 L_1 、 L_2 和 M 增为很大。

理想变压器用受控源表示的电路模型如图 10-7(b) 所示。

例 10-6 图 10-8(a) 所示理想变压器, 匝数比为 1:10, 已知 $u_s = 10\cos(10t)$ V, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$ 。求 u_2 。

解 按图(a)可以列出电路方程:

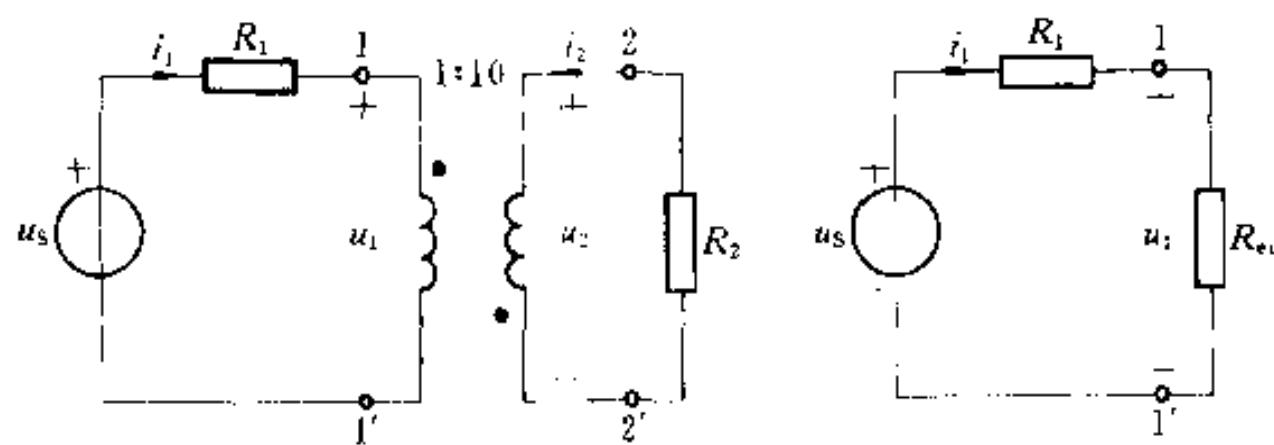
$$R_1 i_1 + u_1 = u_s$$

$$R_2 i_2 + u_2 = 0$$

根据理想变压器的 VCR, 有:

$$u_1 = -\frac{1}{10} u_2$$

$$i_1 = 10 i_2$$



(a)

(b)

代入数据可解得

图 10-8 例 10-6 图

$$u_2 = -5 u_s = -50\cos(10t) \text{ V}$$

另一种解法是先用原边等效电路求 u_1 , 再按电压方程求 u_2 。端子 1-1' 右侧电路的输入电阻 R_{eq}

(D) 此式说明理想变压器副边开路时(即 $i_2 = 0$)有电流 $i_1 = 0$, 即原边也无电流。对空心变压器则不是如此, 当 $i_2 = 0$ 时, $i_1 \neq 0$ 。空心变压器的这种原边电流称为“空载电流”, 也称为励磁电流。就是说, 空心变压器空载时, 需要有一定的原边电流维持其磁通。理想变压器不需要励磁电流。

$$R_{\text{eq}} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{-10u_2}{10i_2} = (0.1)^2 \left(\frac{u_2}{i_2} \right) = (0.1)^2 R_2 = 1 \Omega$$

等效电路如图(b)所示,求得:

$$u_1 = \frac{u_s}{R_1 + R_{\text{eq}}} R_{\text{eq}} = \frac{1}{2} u_s$$

$$u_2 = -10u_1 = -5u_s$$

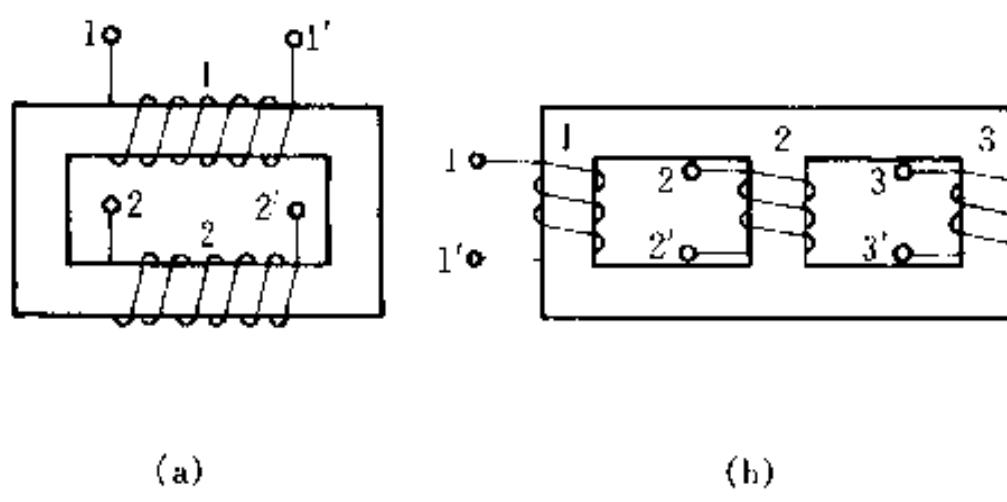
理想变压器对电压、电流按变比变换的作用,还反映在阻抗的变换上。在正弦稳态的情况下,当理想变压器副边终端 $2-2'$ 接入阻抗 Z_L 时,则变压器原边 $1-1'$ 的输入阻抗 $Z_{11'}$:

$$Z_{11'} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{n\dot{I}_2} = n^2 Z_L$$

$n^2 Z_L$ 即为副边折合至原边的等效阻抗,如副边分别接入 R 、 L 、 C 时,折合至原边将为 $n^2 R$ 、 $n^2 L$ 、 $\frac{C}{n^2}$,也就是变换了元件的参数。

习 题

10-1 试确定图示耦合线圈的同名端。

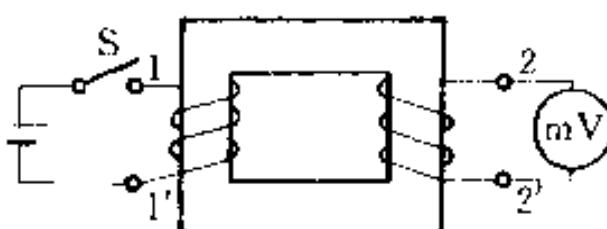


题 10-1 图

10-2 两个具有耦合的线圈如图所示。

(1) 标出它们的同名端;

(2) 当图中开关 S 闭合时或闭合后再打开时,试根据毫伏表的偏转方向确定同名端。



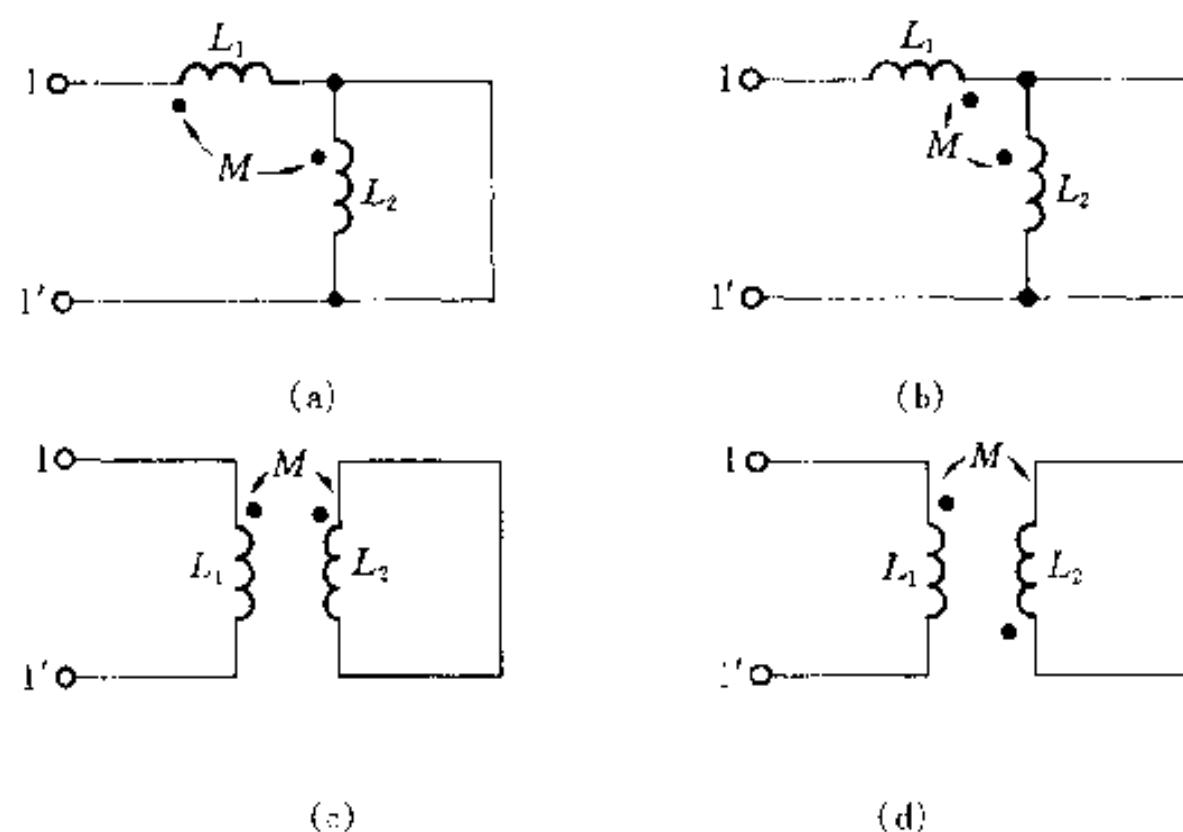
题 10-2 图

10-3 若有电流 $i_1 = 2 + 5\cos(10t + 30^\circ)$ A, $i_2 = 10e^{-5t}$ A, 各从图 10-1(a) 所示线圈的 1 端和 2 端流入, 并设线圈 1 的电感 $L_1 = 6$ H, 线圈 2 的电感

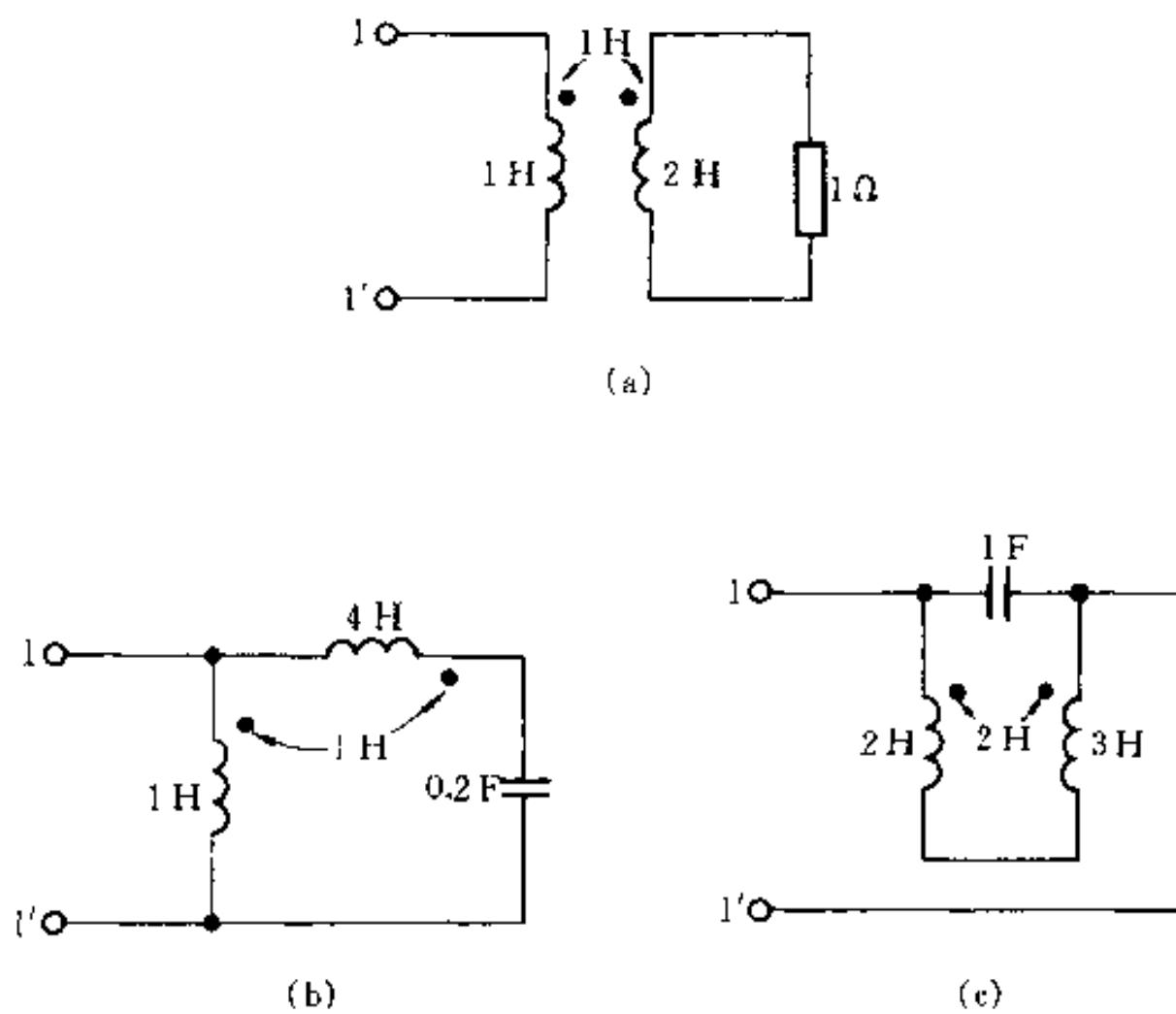
$L_2 = 3$ H, 互感为 $M = 4$ H。试求:(1) 各线圈的磁通链;(2) 端电压 $u_{11'}$ 和 $u_{22'}$;(3) 耦合因数 k 。

10-4 能否使两个耦合线圈的耦合因数 $k=0$ 。

10-5 图示电路中 $L_1 = 6$ H, $L_2 = 3$ H, $M = 4$ H。试求从端子 $1-1'$ 看进去的等效电感。



题 10-5 图

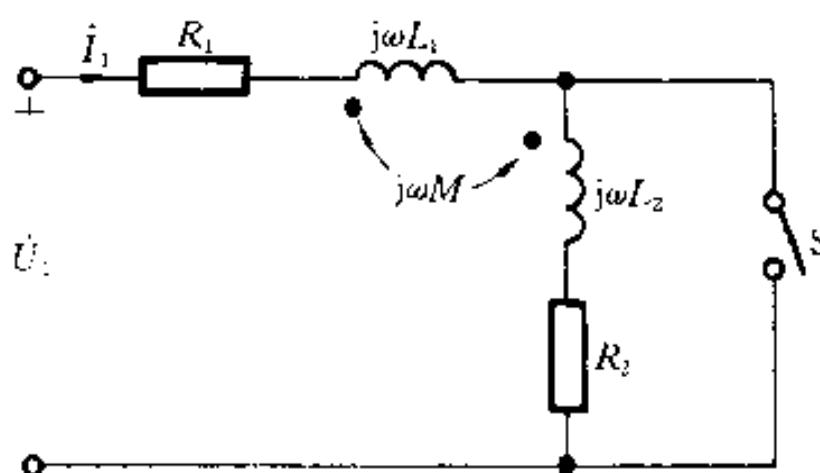
10-6 求图示电路的输入阻抗 Z ($\omega = 1 \text{ rad/s}$)。

题 10-6 图

10-7 图示电路中 $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $\omega L_1 = 3 \Omega$, $\omega L_2 = 2 \Omega$, $\omega M = 2 \Omega$, $U_1 = 100 \text{ V}$ 。求：
 (1) 开关 S 打开和闭合时的电流 I_1 ; (2) S 闭合时各部分的复功率。

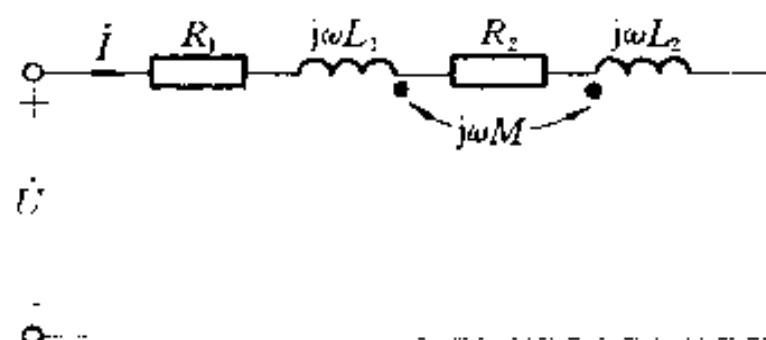
10-8 把两个线圈串联起来接到 $50 \text{ Hz}, 220 \text{ V}$ 的正弦电源上, 顺接时得电流 $I = 2.7 \text{ A}$, 吸收的功率为 218.7 W ; 反接时电流为 7 A 。求互感 M 。

10-9 电路如图所示, 已知两个线圈的参数为: $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $L_1 = 3 \text{ H}$, $L_2 = 10 \text{ H}$, $M = 5 \text{ H}$, 正弦电源的电压 $U = 220 \text{ V}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$ 。



题 10-7 图

- (1) 试求两个线圈端电压，并作出电路的相量图；
- (2) 证明两个耦合电感反接串联时不可能有 $L_1 + L_2 - 2M \leq 0$ ；
- (3) 电路中串联多大的电容可使电路发生串联谐振；
- (4) 画出该电路的去耦等效电路。

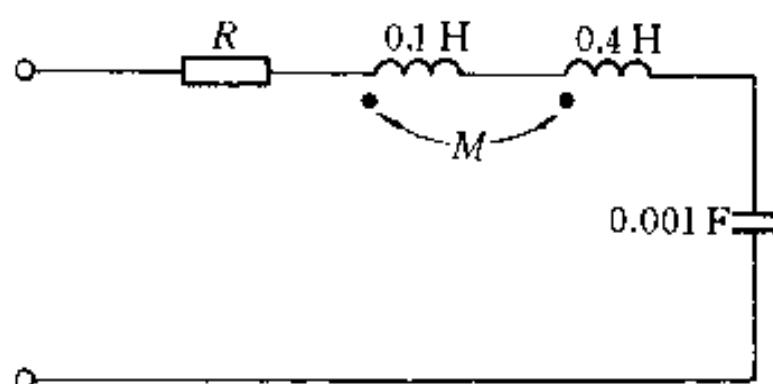


题 10-9 图

10-10 把题 10-9 中的两个线圈改为同侧并联接至相同的电源上。

- (1) 此时要用两个功率表分别测量两个线圈的功率，试画出它们的接线图，求出功率表的读数，并作必要的解释，作出电路的相量图；
- (2) 求电路的等效阻抗。

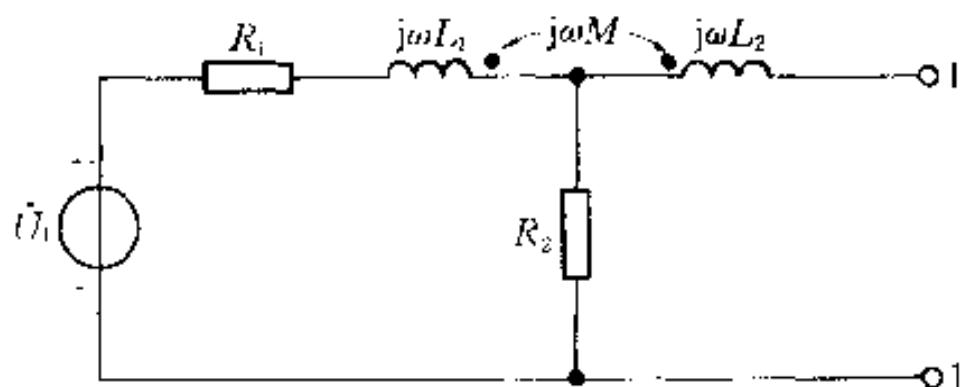
10-11 图示电路中 $M = 0.04 \text{ H}$ 。求此串联电路的谐振频率。



题 10-11 图

10-12 求图示一端口电路的戴维宁等效电路。已知 $\omega L_1 = \omega L_2 = 10 \Omega$, $\omega M = 5 \Omega$, $R_1 = R_2 = 6 \Omega$, $U_1 = 60 \text{ V}$ (正弦)。

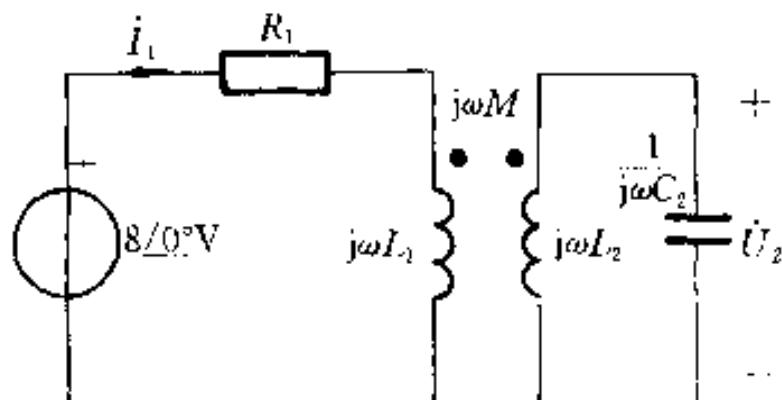
10-13 图示电路中 $R_1 = 1 \Omega$, $\omega L_1 = 2 \Omega$, $\omega L_2 = 32 \Omega$, $\omega M = 8 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 32 \Omega$ 。求电流 I_1 和电压 U_{2e} 。



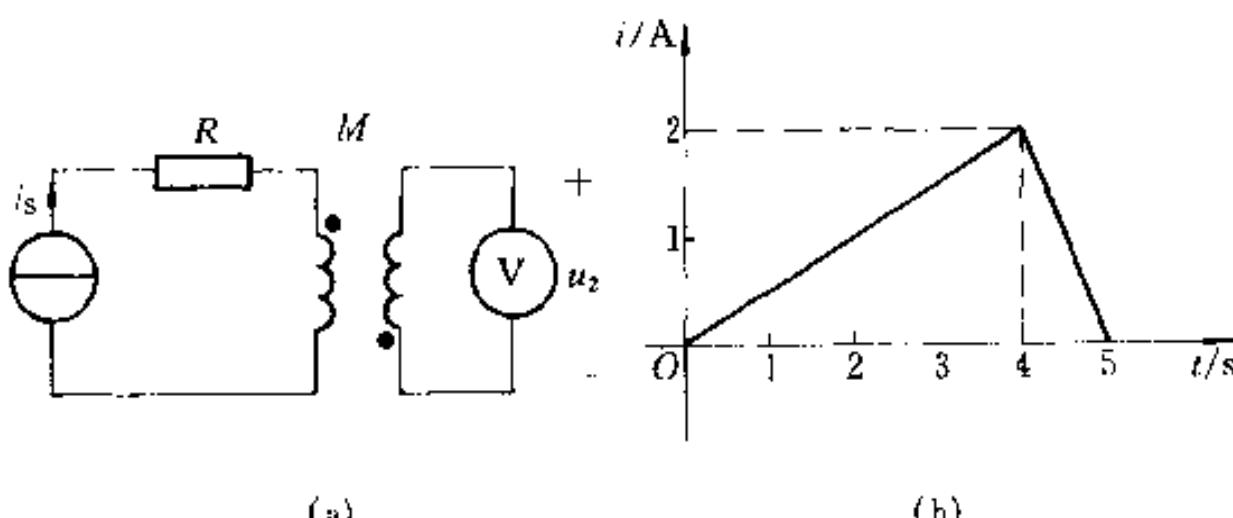
题 10-12 图

10-14 已知空心变压器如图(a)所示,原边的周期性电流源波形如图(b)所示(一个周期),副边的电压表读数(有效值)为 25 V。

- (1) 画出原、副边端电压的波形,并计算互感 M ;
- (2) 给出它的等效受控源(CCVS)电路;
- (3) 如果同名端弄错,对(1)、(2)的结果有无影响?



题 10-13 图



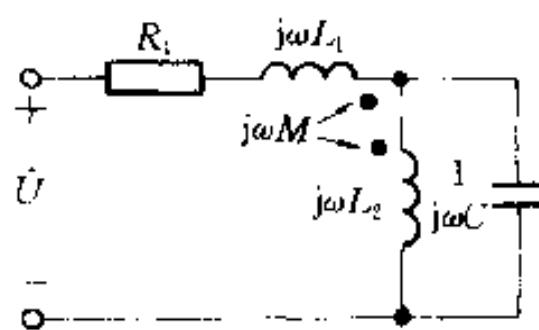
题 10-14 图

10-15 图示电路中 $R_1 = 50 \Omega$, $L_1 = 70 \text{ mH}$, $L_2 = 25 \text{ mH}$, $M = 25 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$, 正弦电源的电压 $\dot{U} = 500 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ 。求各支路电流。

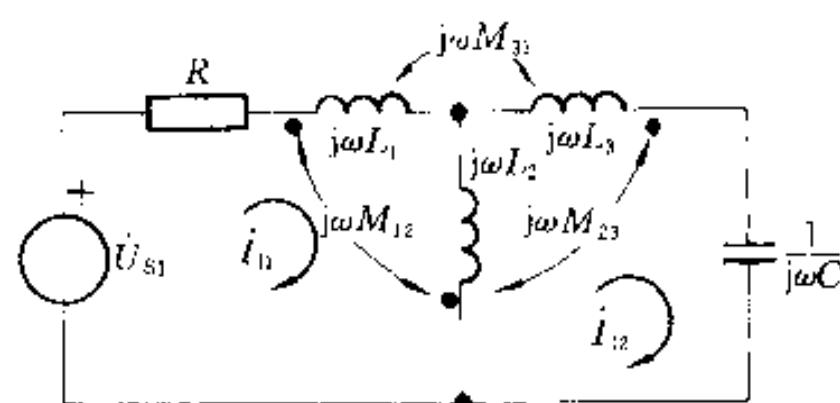
10-16 列出图示电路的回路电流方程。

10-17 图示电路中 $L_1 = 3.6 \text{ H}$, $L_2 = 0.06 \text{ H}$, $M = 0.465 \text{ H}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 0.08 \Omega$, $R_L = 42 \Omega$, $u_s = 115 \cos(314t) \text{ V}$ 。求:(1) 电流 i_1 ; (2) 用戴维宁定理求 i_2 。

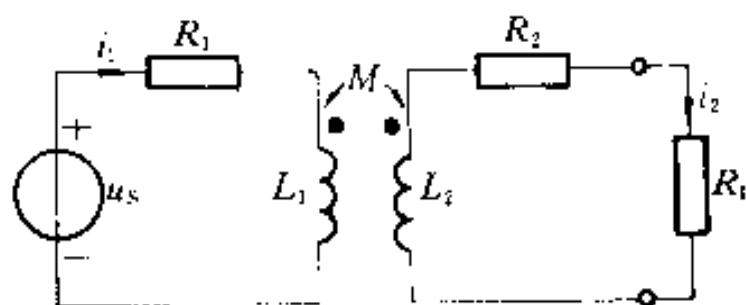
10-18 图示电路中的理想变压器的变比为 10:1。



题 10-15 图

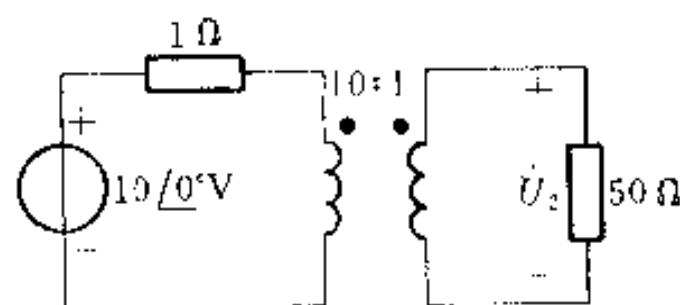


题 10-16 图



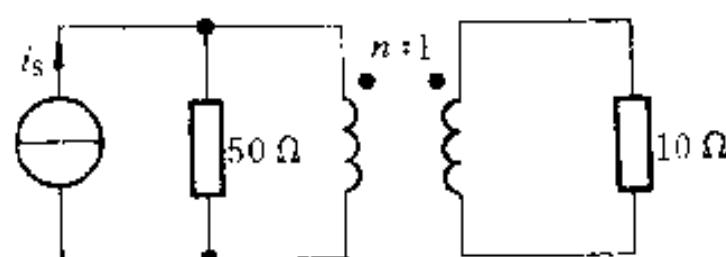
题 10-17 图

求电压 \dot{U}_2 。



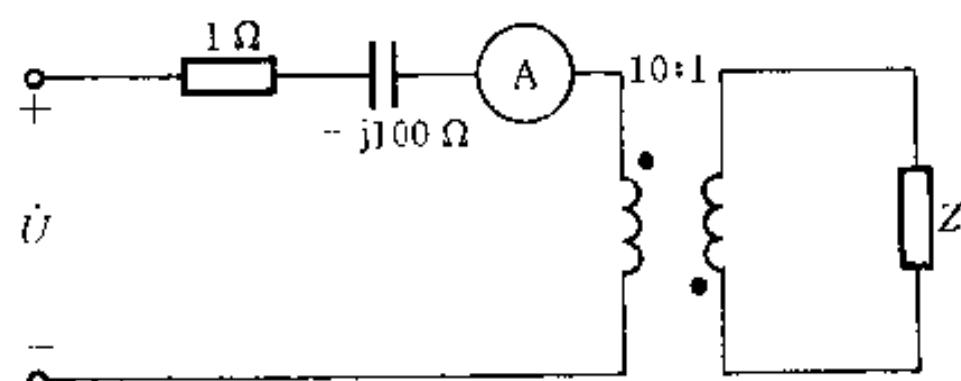
题 10-18 图

10-19 如果使 10Ω 电阻能获得最大功率, 试确定图示电路中理想变压器的变比 n 。



题 10-19 图

10-20 求图示电路中的阻抗 Z 。已知电流表的读数为 10 A , 正弦电压 $U=10\text{ V}$



题 10-20 图

第十一章

三相电路

———— 内容提要 ————

本章主要内容有：三相电源和三相电路的组成，对称三相电路及归结为一相计算方法；电压和电流的相值和线值之间的关系；三相电路的功率和测量。简要介绍了不对称三相电路的计算。

§ 11-1 三相电路

目前，世界各国的电力系统中电能的生产、传输和供电方式绝大多数都采用三相制。三相电力系统是由三相电源、三相负载和三相输电线路三部分组成。

对称三相电源是由 3 个等幅值、同频率、初相依次相差 120° 的正弦电压源连接成星形(Y)或三角形(Δ)组成的电源，如图 11-1(a)、(b)所示。这 3 个电源依次称为 A 相、B 相和 C 相，它们的电压为：

$$u_A = \sqrt{2} U \cos(\omega t)$$

$$u_B = \sqrt{2} U \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$u_C = \sqrt{2} U \cos(\omega t + 120^\circ)$$

式中以 A 相电压 u_A 作为参考正弦量。它们对应的相量形式为：

$$\dot{U}_A = U / 0^\circ$$

$$\dot{U}_B = U / -120^\circ = a^2 \dot{U}_A$$

$$\dot{U}_C = U / 120^\circ = a \dot{U}_A$$

式中 $a = 1 / 120^\circ$ ，它是工程上为了方便而引入的单位相量算子。

上述三相电压的相序(次序)A、B、C 称为正序或顺序。与此相反，如 B 相超前 A 相 120° ，C 相超前 B 相 120° ，这种相序称为反序或逆序。电力系统一般采用正序。

对称三相电压各相的波形和相量图参见图 11-1(c)、(d)。对称三相电压满足：

$$u_A + u_B + u_C = 0 \quad \text{或} \quad \dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$$

对称三相电压是由三相发电机提供的。

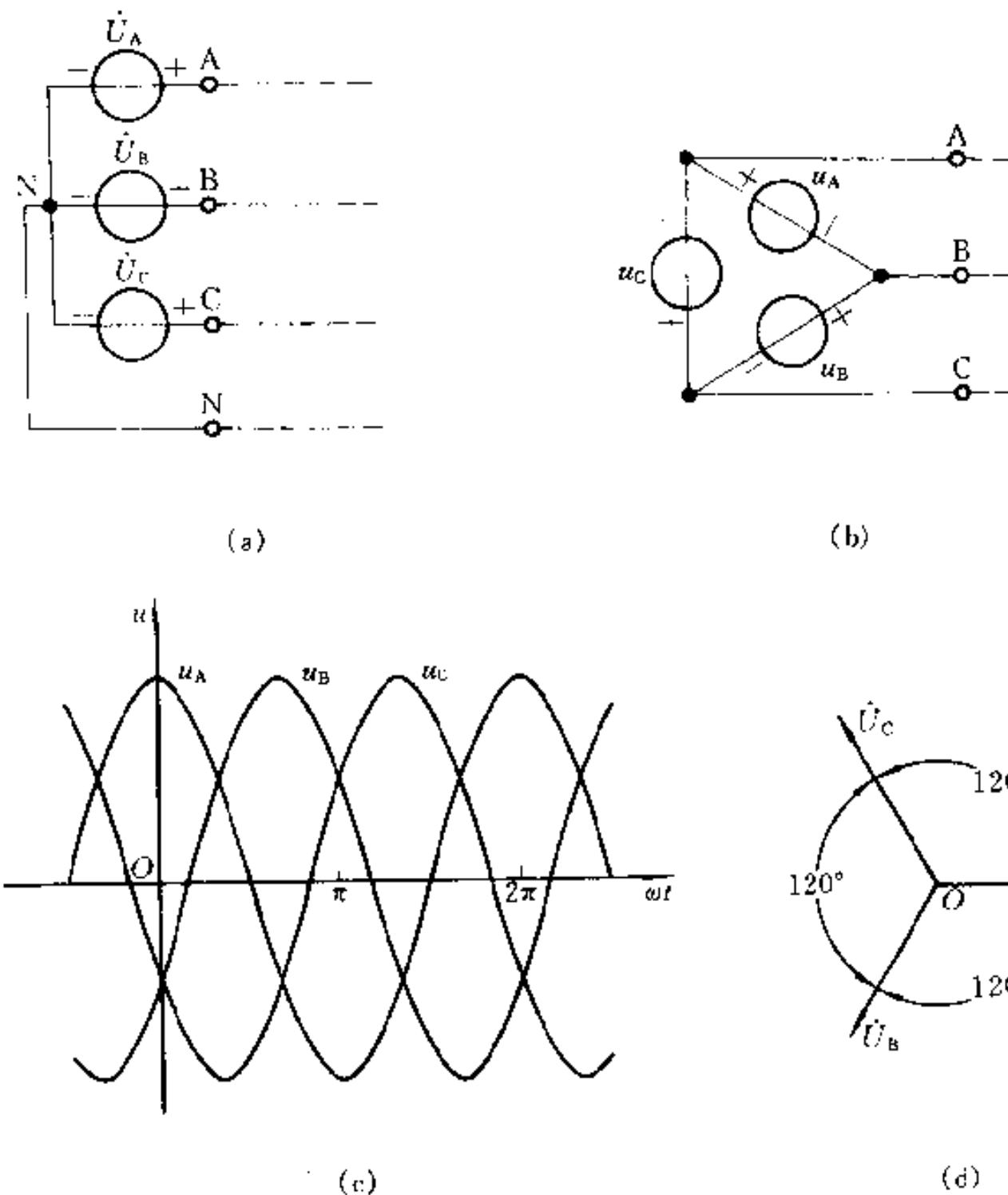


图 11-1 对称三相电压及其波形和相量图

图 11-1(a)所示为三相电压源的星形连接方式，简称星形或 Y 形电源。从 3 个电压源正极性端子 A、B、C 向外引出的导线称为端线，从中(性)点 N 引出的导线称为中线。端线 A、B、C 之间(即端线之间)的电压称为线电压。电源每一相的电压称为相电压。端线中的电流称为线电流，各相电压源中的电流称为相电流。把三相电压源依次连接成一个回路，再从端子 A、B、C 引出端线，如图 11-1(b)，就成为三相电源的三角形连接，简称三角形或 Δ 形电源。三角形电源的线电压、相电压、线电流和相电流的概念与星形电源相同。三角形电源不能引出中线。

3个阻抗连接成星形(三角形)就构成星形(三角形)负载,见图11-2。当这3个阻抗相等时,就称为对称三相负载。三相负载的相电压和相电流是指各阻抗的电压和电流。三相负载的3个端子A'、B'、C'向外引出的导线中的电流称为负载的线电流;任两个端子之间的电压则称为负载的线电压。

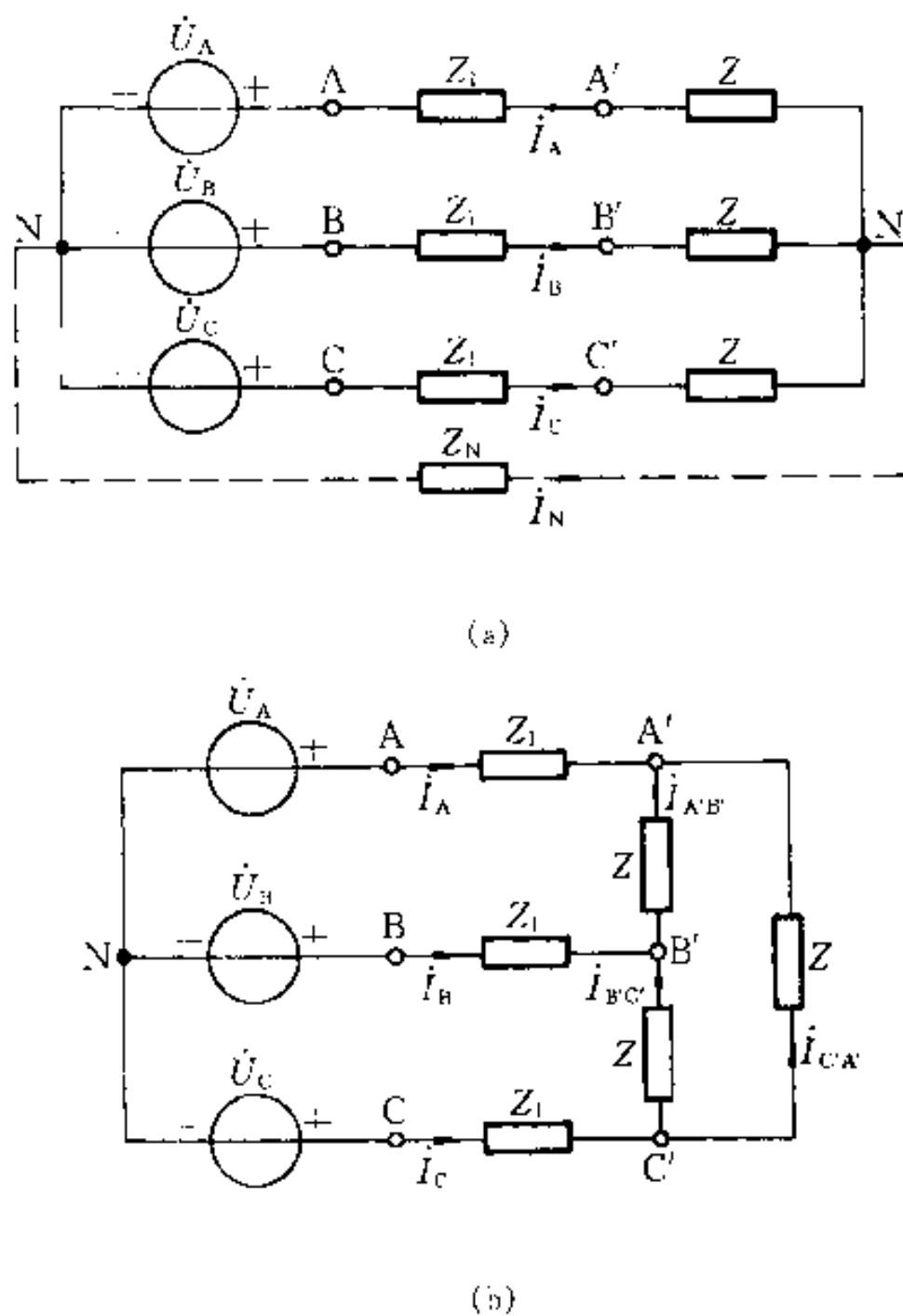


图 11-2 对称三相电路

从对称三相电源的3个端子引出具有相同阻抗的3条端线(或输电线),把一些对称三相负载连接在端线上就形成了对称三相电路。图11-2(a)、(b)为两个对称三相电路的例子。图(a)中的三相电源为星形电源,负载为星形负载,称为Y-Y连接方式;图(b)中,三相电源为星形电源,负载为三角形负载,称为Y-△连接方式。还有△-Y和△-△连接方式。

在Y-Y连接中,如把三相电源的中点N和负载的中点N'用一条具有阻抗为 Z_N 的中线连接起来,如图中虚线所示,这种连接方式称为三相四线制方式。上述其余连接方式均属三相三线制。

实际三相电路中,三相电源是对称的,3条端线阻抗是相等的,但负载则不一定是对称的。

§ 11-2 线电压(电流)与相电压(电流)的关系

三相电源的线电压和相电压、线电流和相电流之间的关系都与连接方式有关。对于三相负载也是如此。

对于对称星形电源,依次设其线电压为 \dot{U}_{AB} 、 \dot{U}_{BC} 、 \dot{U}_{CA} ,相电压为 \dot{U}_A 、 \dot{U}_B 、 \dot{U}_C (或 \dot{U}_{AN} 、 \dot{U}_{BN} 、 \dot{U}_{CN}),根据 KVL,有

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B = (1 - a^2) \dot{U}_A = \sqrt{3} \dot{U}_A / 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C = (1 - a^2) \dot{U}_B = \sqrt{3} \dot{U}_B / 30^\circ \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A = (1 - a^2) \dot{U}_C = \sqrt{3} \dot{U}_C / 30^\circ\end{aligned}\quad (11-1)$$

另有 $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$ 。所以式(11-1)中,只有两个方程是独立的。对称的 Y 形三相电源端的线电压与相电压之间的关系,可以用电压相量图表示,如

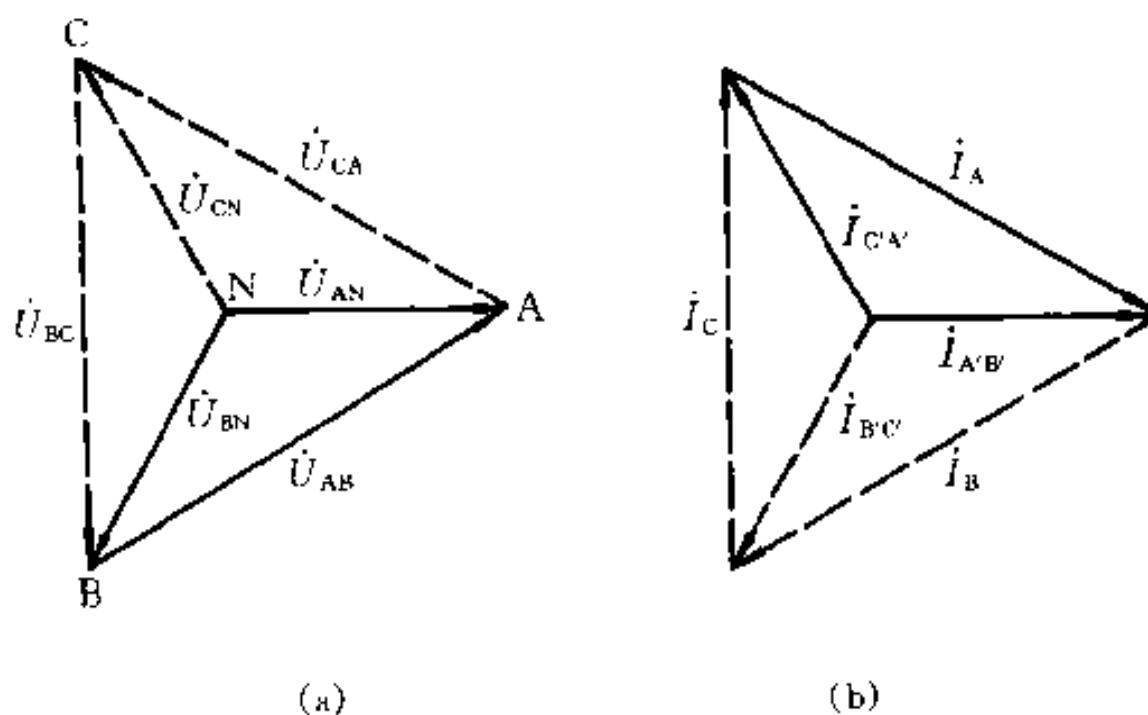


图 11-3 线值和相值之间的关系

图 11-3(a)所示^①。图中实线所示部分表示 \dot{U}_{AB} 的图解求法,其他线电压的图解求法类同。从图中可以看出,线电压与对称相电压之间的关系可以用图示电压正三角形说明,相电压对称时,线电压也一定依序对称,它是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍,依次超前 \dot{U}_A 、 \dot{U}_B 、 \dot{U}_C 的相位为 30° ,实际计算时,只要算出 \dot{U}_{AB} ,就可以依序写出 $\dot{U}_{BC} = a^2 \dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{CA} = a \dot{U}_{AB}$ 。

对于三角形电源[见图 11-1(b)],有:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A, \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B, \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C$$

^① 注意,图中的电压相量是按该电压下标的相反次序画的。例如画 \dot{U}_{AN} 时,应从 N 点指向 A 点,画 \dot{U}_{AB} 时,应从 B 点指向 A 点。A、B、C、N 点则表示电压源的对应端子。

所以线电压等于相电压，相电压对称时，线电压也一定对称。

以上有关线电压和相电压的关系也适用于对称星形负载和三角形负载。

对称三相电源和三相负载中线电流和相电流之间的关系叙述如下。

对于星形连接，线电流显然等于相电流，对三角形连接则不是如此。以图 11-2(b)所示三角形负载为例，设每相负载中的对称相电流分别为 \dot{I}_{AB} 、 \dot{I}_{BC}
($= a^2 \dot{I}_{AB}$)、 \dot{I}_{CA} ($= a\dot{I}_{AB}$)，3 个线电流依次分别为 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 、 \dot{I}_C ，电流的参考方向如图示。根据 KCL，有

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = (1-a)\dot{I}_{AB} = \sqrt{3}\dot{I}_{AB}/[-30^\circ] \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = (1-a)\dot{I}_{BC} = \sqrt{3}\dot{I}_{BC}/[-30^\circ] \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} + \dot{I}_{BC} = (1+a)\dot{I}_{CA} = \sqrt{3}\dot{I}_{CA}/[-30^\circ]\end{aligned}\quad (11-2)$$

另有 $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ 。所以，上述 3 个方程中，只有 2 个方程是独立的。线电流与对称相电流之间的关系，可以用电流相量图表示，如图 11-3(b)所示，图中实线部分表示 \dot{I}_A 的图解求法，其他线电流的图解求法类同。从图中可以看出，线电流与对称的三角形负载相电流之间的关系，可以用一个电流正三角形说明，相电流对称时，线电流也一定对称，它是相电流的 $\sqrt{3}$ 倍，依次滞后 \dot{I}_{AB} 、 \dot{I}_{BC} 、 \dot{I}_{CA} 的相位为 30° 。实际计算时，只要计算出 \dot{I}_A ，就可依次写出 $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A$ ， $\dot{I}_C = a\dot{I}_A$ 。

上述分析方法也适用于三角形电源。

§ 11-3 对称三相电路的计算

三相电路实际上是正弦电流电路的一种特殊类型。因此，前面对正弦电流电路的分析方法对三相电路完全适用。对称三相电路的一些特点，可以简化对称三相电路分析计算。

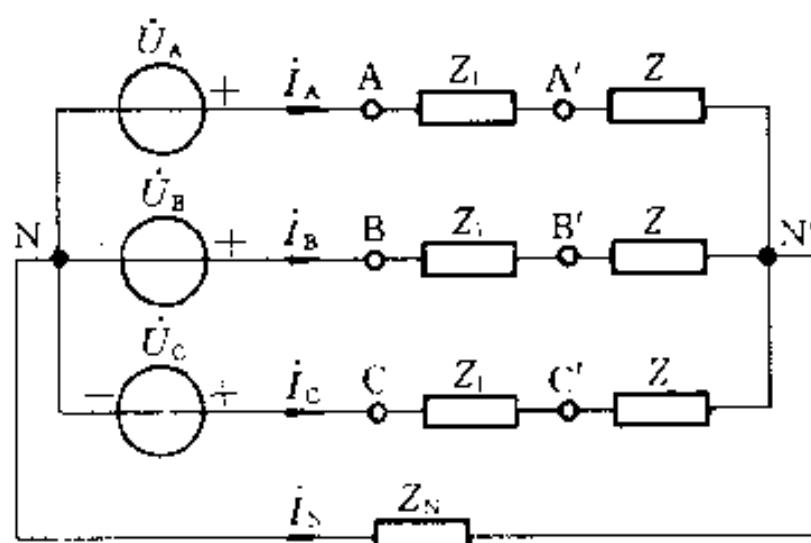


图 11-4 对称三相四线制 Y-Y 电路

现在,先分析对称三相四线制电路,如图 11·4 所示,其中 Z_1 为端线阻抗, Z_N 为中线阻抗。 N 和 N' 为中点。对于这种电路,一般可用结点法先求出中点 N' 与 N 之间的电压。以 N 为参考结点,可得

$$\left(\frac{1}{Z_N} + \frac{3}{Z + Z_1} \right) U_{NN'} = \frac{1}{Z_1 + Z} (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)$$

由于 $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$,所以 $\dot{U}_{NN'} = 0$ 。各相电源和负载中的电流等于线电流,它们是:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{NN'}}{Z + Z_1} = \frac{\dot{U}_A}{Z + Z_1}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z + Z_1} = \alpha^2 \dot{I}_A$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z + Z_1} = \alpha \dot{I}_A$$

中线的电流为

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

所以,在对称 Y-Y 三相电路中,中线如同开路。

可以看出,由于 $\dot{U}_{NN'} = 0$,各相电流独立,彼此无关;又由于三相电源、三相负载对称,所以相电流构成对称组。因此,只要分析计算三相中的任一相,而其他两相的电压、电流就能按对称顺序写出。这就是对称三相电路归结为一相的计算方法。图 11-5 为一相计算电路(A 相)。注意,在一相计算电路中,连接 N 、 N' 的是短路线,与中线阻抗 Z_N 无关。

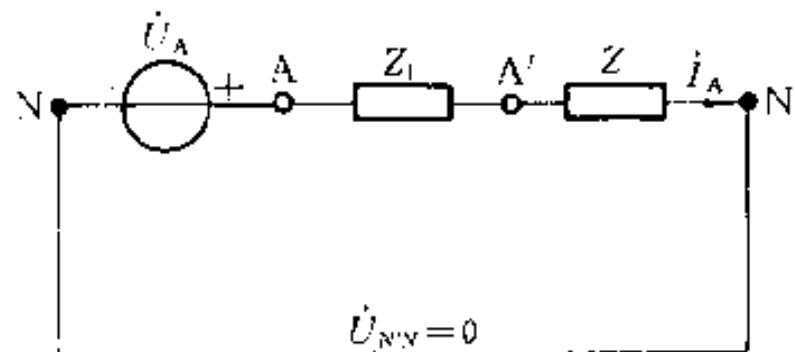


图 11-5 一相计算电路

对于其他连接方式的对称三相电路,可以根据星形和三角形的等效互换,化成对称的 Y-Y 三相电路,然后用归结为一相的计算方法。

例 11-1 对称三相电路见图 11-4,已知: $Z_1 = (1 + j2) \Omega$, $Z = (5 + j6) \Omega$, $u_{AB} = 380\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ) V$ 。试求负载中各电流相量。

解 设有一组对称三相电压源与该组对称线电压对应。根据前面式(11-1)的关系,有

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{\Phi}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

据此可画出一相(A相)计算电路,如图11-5。可以求得

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z + Z_1} = \frac{220 \angle 0^\circ}{6 + j8} \text{ A} = 22 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

根据对称性可以写出:

$$\dot{I}_B = \alpha^2 \dot{I}_A = 22 \angle -173.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \alpha \dot{I}_A = 22 \angle 66.9^\circ \text{ A}$$

例 11-2 对称三相电路如图11-2(b)所示。已知: $Z = (19.2 + j14.4) \Omega$, $Z_1 = (3 + j4) \Omega$, 对称线电压 $\dot{U}_{AB} = 380 \text{ V}$ 。求负载端的线电压和线电流。

解 该电路可以变换为对称的Y-Y电路,如图11-6所示。图中 Z' 为(三角形变换为星形)

$$Z' = \frac{Z}{3} = \frac{19.2 + j14.4}{3} \Omega = (6.4 + j4.8) \Omega$$

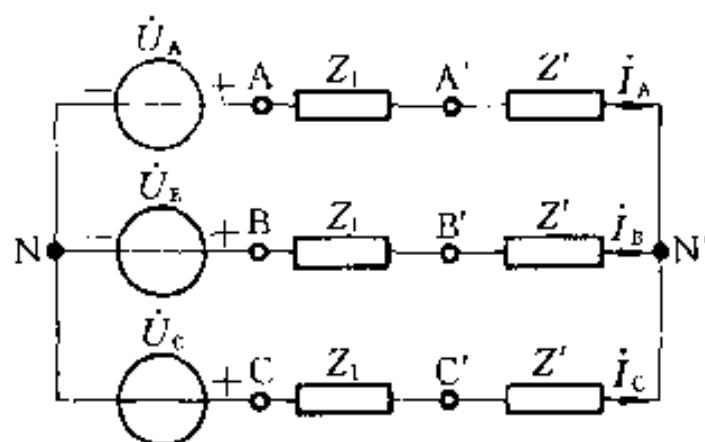


图 11-6 例 11-2 图

令 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。根据一相计算电路有

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_1 + Z'} = 17.1 \angle -43.2^\circ \text{ A}$$

而:

$$\dot{I}_B = \alpha^2 \dot{I}_A = 17.1 \angle -163.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \alpha \dot{I}_A = 17.1 \angle 76.8^\circ \text{ A}$$

此电流即为负载端的线电流。再求出负载端的相电压,利用线电压与相电压的关系就可得负载端的线电压。 \dot{U}_{AN} 为

$$\dot{U}_{AN} = \dot{I}_A Z' = 136.8 \angle -6.3^\circ \text{ V}$$

根据式(11-1),有

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_{AN} \angle 30^\circ = 236.9 \angle 23.7^\circ \text{ V}$$

根据对称性可写出:

$$\dot{U}_{BC} = a^2 \dot{U}_{AB} = 236.9 / -96.3^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{CA} = a \dot{U}_{AB} = 236.9 / 143.7^\circ \text{ V}$$

根据负载端的线电压可以求得负载中的相电流,有:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z} = 9.9 / 13.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{BC} = a^2 \dot{I}_{AB} = 9.9 / -133.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA} = a \dot{I}_{AB} = 9.9 / 106.8^\circ \text{ A}$$

也可以利用式(11-2)计算负载的相电流。

§ 11-4 不对称三相电路的概念

在三相电路中,只要有一部分不对称就称为不对称三相电路,例如,对称三相电路的某一条端线断开,或某一相负载发生短路或开路,它就失去了对称性,成为不对称的三相电路。对于不对称三相电路的分析,不能引用上一节介绍的方法。本节只简要地介绍由于负载不对称而引起的一些特点。

图 11-7(a)的 Y-Y 连接电路中三相电源是对称的,但负载不对称。先讨论开关 S 打开(即不接中线)时的情况。用结点电压法,可以求得结点电压 $\dot{U}_{NN'}$ 为

$$\dot{U}_{NN'} = \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

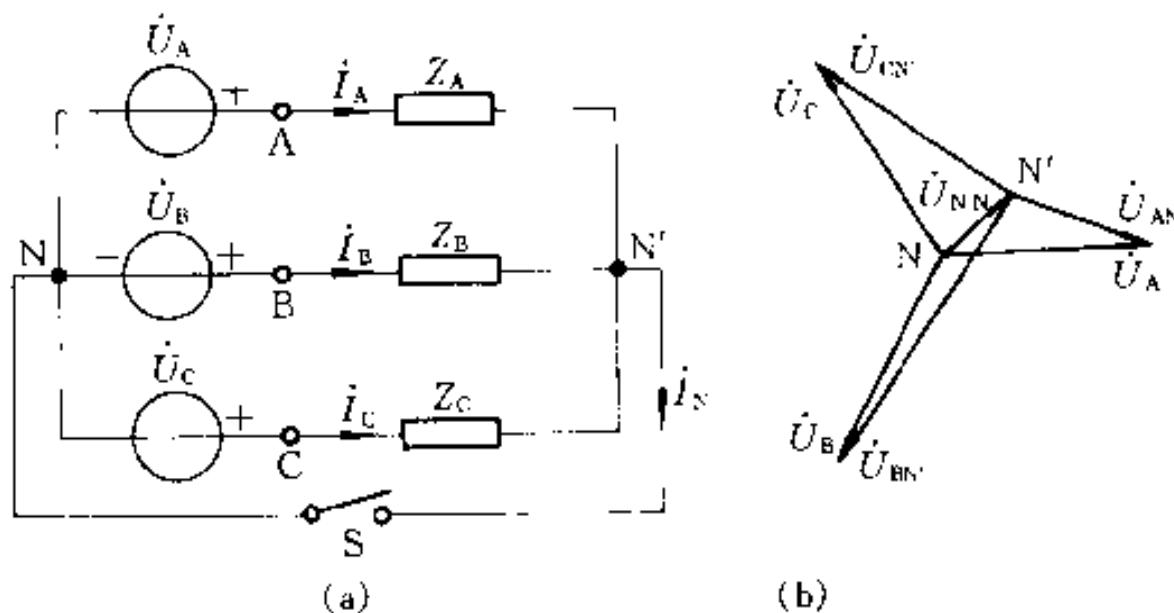


图 11-7 不对称三相电路

由于负载不对称,一般情况下 $\dot{U}_{NN'} \neq 0$,即 N' 点和 N 点电位不同了。从图 11-7(b)的相量关系可以清楚看出,N' 点和 N 点不重合,这一现象称为中点位移。在电源对称的情况下,可以根据中点位移的情况判断负载端不对称的程度。当中点位移较大时,会造成负载端的电压严重的不对称,从而可能使负载的工作不正

常。另一方面,如果负载变动时,由于各相的工作相互关联,因此彼此都互有影响。

合上开关S(接上中线),如果 $Z_N \approx 0$,则可强使 $\dot{U}_{NN} = 0$ 。尽管电路是不对称,但在这个条件下,可使各相保持独立性,各相的工作互不影响,因而各相可以分别独立计算。这就克服了无中线时引起的缺点。因此,在负载不对称的情况下中线的存在是非常重要的。

由于相电流的不对称,中线电流一般不为零,即

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \neq 0$$

例 11-3 图 11-8 所示电路是一种测定相序的仪器,称为相序指示器。图中电阻 R 是用两个相同的灯泡代替。如果使 $\frac{1}{\omega C} = R$ ($= \frac{1}{G}$),试说明在相电压对称的情况下,如何根据两个灯泡的亮度确定电源的相序。

解 图示电路中点电压 \dot{U}_{NN} 为

$$\dot{U}_{NN} = \frac{j\omega C(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{j\omega C + 2G}$$

令 $\dot{U}_A = U[0^\circ]$ V,代入给定的参数关系后,有

$$\dot{U}_{NN} = (-0.2 + j0.6)U = 0.63U[108.4^\circ]$$

B 相灯泡承受的电压 \dot{U}_{BN} 为

$$\dot{U}_{BN} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{NN} = 1.5U[-101.5^\circ]$$

所以

$$U_{BN} = 1.5U$$

经类似的计算可求得 \dot{U}_{CN} 为

$$\dot{U}_{CN} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{NN} = 0.4U[133.4^\circ]$$

即

$$U_{CN} = 0.4U$$

根据上述结果可以判断:若电容所在那一相设为 A 相,则灯泡较亮的一相为 B 相,较暗的为 C 相。

其实,根据中点电压 \dot{U}_{NN} 即可判断 $U_{BN} > U_{CN}$ 。

§ 11-5 三相电路的功率

在三相电路中,三相负载吸收的复功率等于各相复功率之和,即

$$\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C$$

如图 11-7(a) 电路(S 打开时)有

$$S = \dot{U}_{AN} I_A^* + \dot{U}_{BN} I_B^* + \dot{U}_{CN} I_C^*$$

在对称的三相电路中, 显然有 $\bar{S}_A = S_B = S_C$, 因而

$$S = 3\bar{S}_A$$

三相电路的瞬时功率为各相负载瞬时功率之和。以图 11-4 对称三相电路为例, 有:

$$\begin{aligned} p_A &= u_{AN} i_A = \sqrt{2} U_{AN} \cos(\omega t) \times \sqrt{2} I_A \cos(\omega t - \varphi) \\ &= U_{AN} I_A [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_B &= u_{BN} i_B = \sqrt{2} U_{AN} \cos(\omega t - 120^\circ) \times \sqrt{2} I_A \cos(\omega t - \varphi - 120^\circ) \\ &= U_{AN} I_A [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi - 240^\circ)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C &= u_{CN} i_C = \sqrt{2} U_{AN} \cos(\omega t + 120^\circ) \times \sqrt{2} I_A \cos(\omega t - \varphi + 120^\circ) \\ &= U_{AN} I_A [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi + 240^\circ)] \end{aligned}$$

它们的和为

$$p = p_A + p_B + p_C = 3 U_{AN} I_A \cos \varphi$$

此式表明, 对称三相电路的瞬时功率是一个常量, 其值等于平均功率。这是对称三相电路的一个优越的性能。习惯上把这一性能称为瞬时功率平衡。

在三相三线制电路中, 不论对称与否, 可以使用两个功率表的方法测量三相功率。两个功率表的一种连接方式如图 11-9 所示。两个功率表的电流线圈分别串入两端线中(图示为 A、B 两端线), 它们的电压线圈的非电源端(即无 * 端)共同接到非电流线圈所在的第 3 条端线上(图示为 C 端线)。可以看出, 这种测量方法中功率表的接线只触及端线, 而与负载和电源的连接方式无关。这种方法习惯上称为二瓦计法。

可以证明图中两个功率表读数的代数和为三相三线制中右侧电路吸收的平均功率。

设两个功率表的读数分别用 P_1 和 P_2 表示, 根据功率表的工作原理, 有:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{AC} I_A^*], P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{BC} I_B^*]$$

所以

$$P_1 + P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^*]$$

因为 $\dot{U}_{AC} = \dot{U}_A - \dot{U}_C$, $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C$, $I_A^* + I_B^* = -I_C^*$, 代入上式有

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \operatorname{Re}[\dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C I_C^*] = \operatorname{Re}[\bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C] \\ &= \operatorname{Re}[\bar{S}] \end{aligned}$$

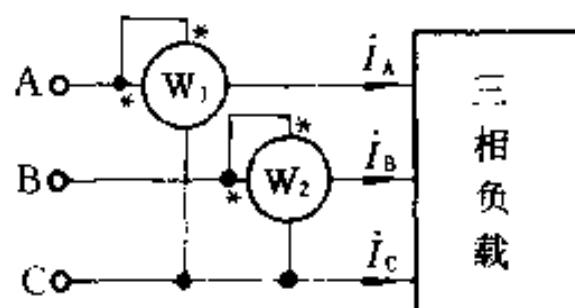


图 11-9 二瓦计法

而 $\text{Re}[\bar{S}]$ 则表示右侧三相负载的有功功率。还可以证明，在对称三相制中有：

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \text{Re}[\dot{U}_{AC}\dot{I}_A^*] = U_{AC}I_A \cos(\varphi - 30^\circ) \\ P_2 &= \text{Re}[\dot{U}_{BC}\dot{I}_B^*] = U_{BC}I_B \cos(\varphi + 30^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (11-3)$$

式中 φ 为负载的阻抗角。应当注意，在一定的条件下，(例如 $\varphi > 60^\circ$) 两个功率表之一的读数可能为负，求代数和时该读数应取负值。一般来讲，单独一个功率表的读数是没有意义的。

三相四线制不用二瓦计法测量三相功率，这是因为在一般情况下， $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \neq 0$ 。

例 11-4 若图 11-9 所示电路为对称三相电路，已知对称三相负载吸收的功率为 2.5 kW，功率因数 $\lambda = \cos \varphi = 0.866$ (感性)，线电压为 380 V。求图中两个功率表的读数。

解 对称三相负载吸收的功率是一相负载所吸收功率的 3 倍，即

$$P = 3 U_A I_A \cos \varphi = \sqrt{3} U_{AB} I_A \cos \varphi$$

求得电流 I_A 为

$$I_A = \frac{P}{\sqrt{3} U_{AB} \cos \varphi} = 4.386 \text{ A}$$

又

$$\varphi = \arccos \lambda = 30^\circ$$

令 $\dot{U}_A = 220 / 0^\circ$ V (A 相电源)，则图中功率表相关的电压、电流相量为：

$$\dot{I}_A = 4.386 / -30^\circ \text{ A}, \quad \dot{U}_{AC} = 380 / 30^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_B = 4.386 / -150^\circ \text{ A}, \quad \dot{U}_{BC} = 380 / -90^\circ \text{ V}$$

则功率表的读数如下：

$$P_1 = \text{Re}[\dot{U}_{AC}\dot{I}_A^*] = \text{Re}[380 \times 4.386 / 0^\circ] \text{ W} = 1666.68 \text{ W}$$

$$P_2 = \text{Re}[\dot{U}_{BC}\dot{I}_B^*] = \text{Re}[380 \times 4.386 / 60^\circ] \text{ W} = 833.34 \text{ W}$$

其实，只要求得两个功率表之一的读数，另一功率表的读数等于负载的功率减去该表的读数，例如，求得 P_1 后， $P_2 = P - P_1$ 。

习题

11-1 已知对称三相电路的星形负载阻抗 $Z = (165 + j 84) \Omega$ ，端线阻抗 $Z_t = (2 + j 1) \Omega$ ，中线阻抗 $Z_N = (1 + j 1) \Omega$ ，线电压 $U_l = 380 \text{ V}$ 。求负载端的电流和线电压，并作电路的相量图。

11-2 已知对称三相电路的线电压 $U_l = 380 \text{ V}$ (电源端)，三角形负载阻抗 $Z = (4.5 + j 14) \Omega$ ，端线阻抗 $Z_t = (1.5 + j 2) \Omega$ 。求线电流和负载的相电流，并作相量图。

11-3 对称三相电路的线电压 $U_l = 230 \text{ V}$ ，负载阻抗 $Z = (12 + j 16) \Omega$ 。试求：

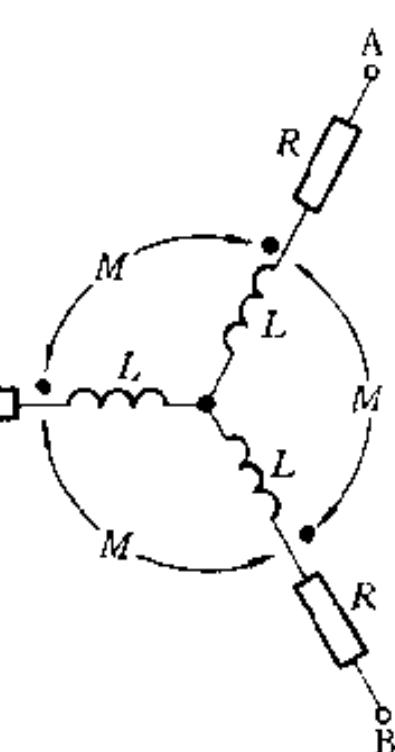
- (1) 星形连接负载时的线电流及吸收的总功率;
- (2) 三角形连接负载时的线电流、相电流和吸收的总功率;
- (3) 比较(1)和(2)的结果能得到什么结论?

11-4 图示对称工频三相耦合电路接于对称三相电源, 线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, $R = 30 \Omega$, $L = 0.29 \text{ H}$, $M = 0.12 \text{ H}$ 。求相电流和负载吸收的总功率。

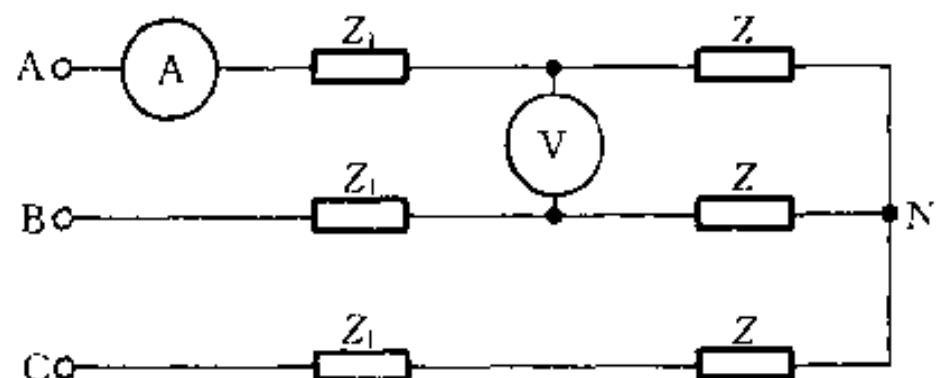
11-5 图示对称 Y-Y 三相电路中, 电压表的读数为 1143.16 V , $Z = (15 + j15\sqrt{3}) \Omega$, $Z_l = (1 + j2) \Omega$ 。求图示电路电流表的读数和线电压 U_{AB} 。

11-6 图示为对称的 Y-Y 三相电路, 电源相电压为 220 V , 负载阻抗 $Z = (30 + j20) \Omega$ 。求:

- (1) 图中电流表的读数;

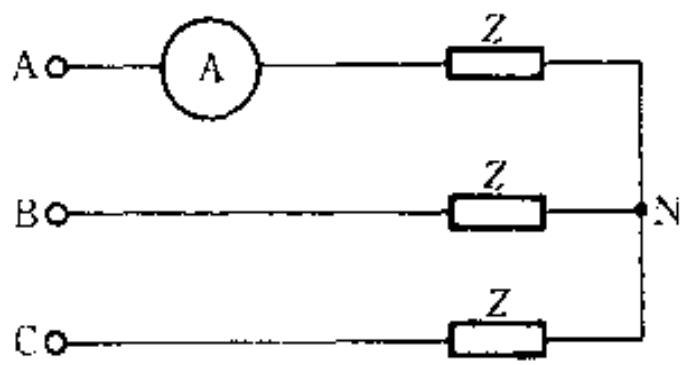


题 11-4 图

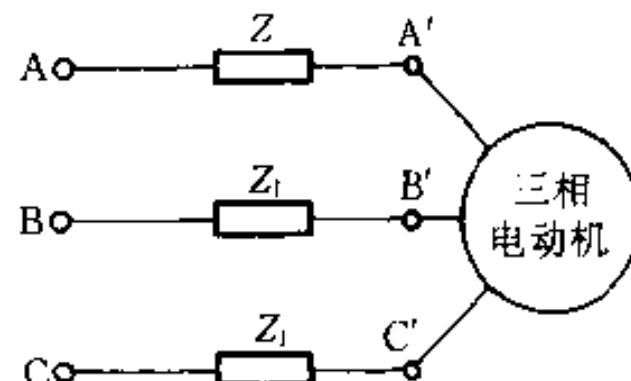


题 11-5 图

- (2) 三相负载吸收的功率;
- (3) 如果 A 相的负载阻抗等于零(其他不变), 再求(1)、(2);
- (4) 如果 A 相负载开路, 再求(1)、(2)。



题 11-6 图



题 11-7 图

11-7 图示对称三相电路中, $U_{AN} = 380 \text{ V}$, 三相电动机吸收的功率为 1.4 kW , 其功率因数 $\lambda = 0.866$ (滞后), $Z_l = -j55 \Omega$ 。求 U_{AB} 和电源端的功率因数 λ' 。

11-8 图示为对称的 Y-Δ 三相电路, $U_{AB} = 380 \text{ V}$, $Z = (27.5 + j47.64) \Omega$ 。求:(1) 图中功率表的读数及其代数和有无意义? (2) 若开关 S 打开, 再求(1)。

11-9 已知不对称三相四线制电路中的端线阻抗为零, 对称电源端的线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, 不对称的星形连接负载分别是 $Z_A = (3 + j2) \Omega$, $Z_B = (4 + j4) \Omega$, $Z_C = (2 + j1) \Omega$ 。试求:

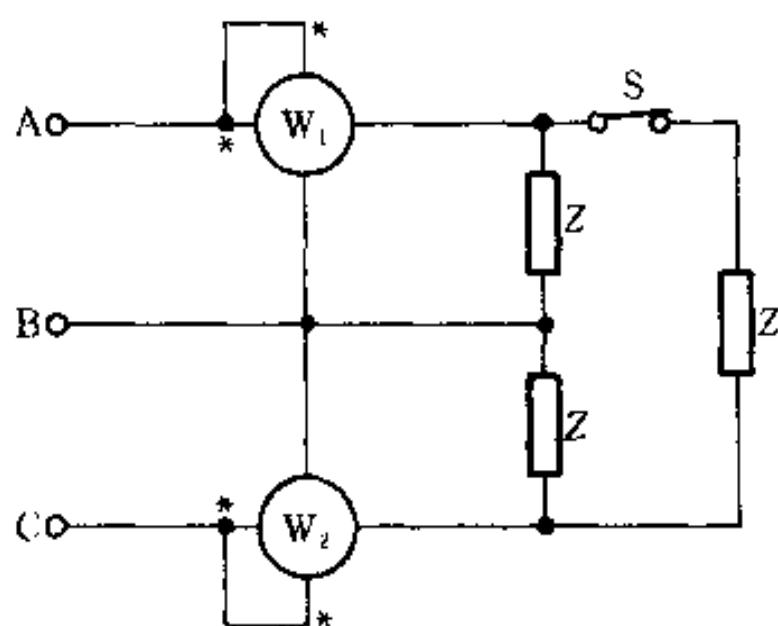
(1) 当中线阻抗 $Z_N = (4 + j3) \Omega$ 时的中点电压、线电流和负载吸收的总功率;

(2) 当 $Z_N = 0$ 且 A 相开路时的线电流。如果无中线(即 $Z_N = \infty$)又会怎样?

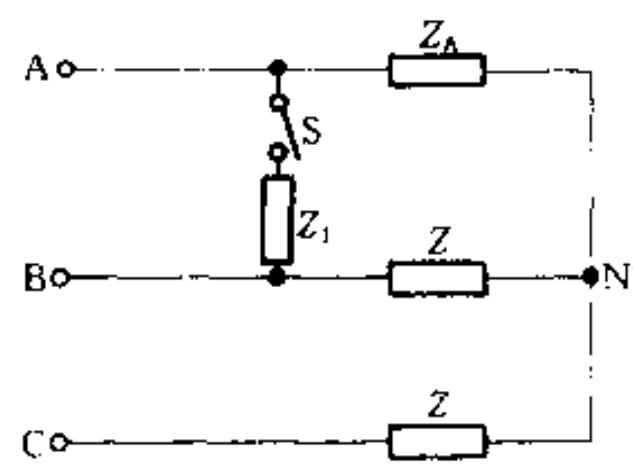
11-10 图示电路中,对称三相电源端的线电压 $U_1 = 380 \text{ V}$, $Z = (50 + j50) \Omega$, $Z_1 = (100 + j100) \Omega$, Z_A 为 R 、 L 、 C 串联组成, $R = 50 \Omega$, $X_L = 314 \Omega$, $X_C = -264 \Omega$ 。试求:

(1) 开关 S 打开时的线电流;

(2) 若用二瓦计法测量电源端三相功率,试画出接线图,并求两个功率表的读数(S 闭合时)。



题 11-8 图



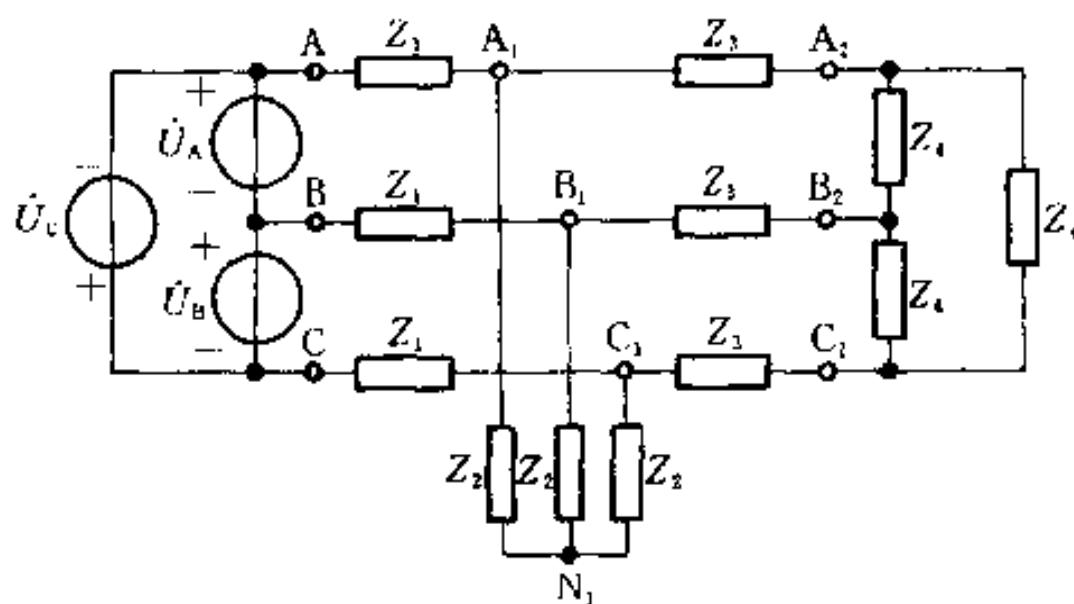
题 11-10 图

11-11 图(a)为对称三相电路,经变换后可获得图(b)所示一相计算电路。试说明变换的步骤并给出必要的关系。

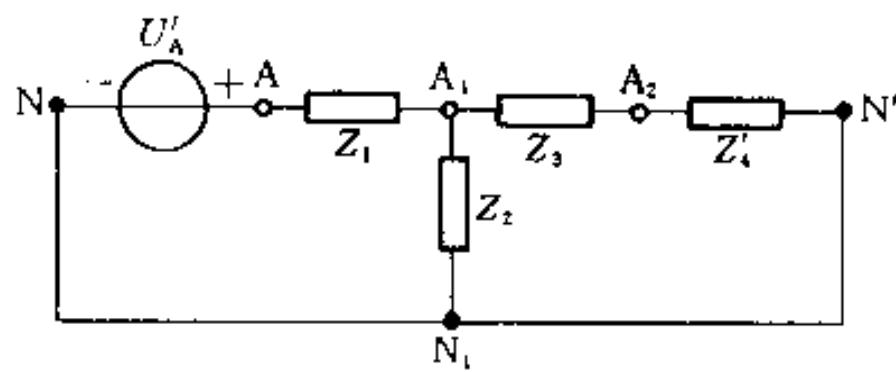
11-12 已知对称三相电路的负载吸收的功率为 2.4 kW, 功率因数为 0.4(感性)。试求:

(1) 两个功率表的读数(用二瓦计法测量功率时);

(2) 怎样才能使负载端的功率因数提高到 0.8? 并再求出两个功率表的读数。



(a)



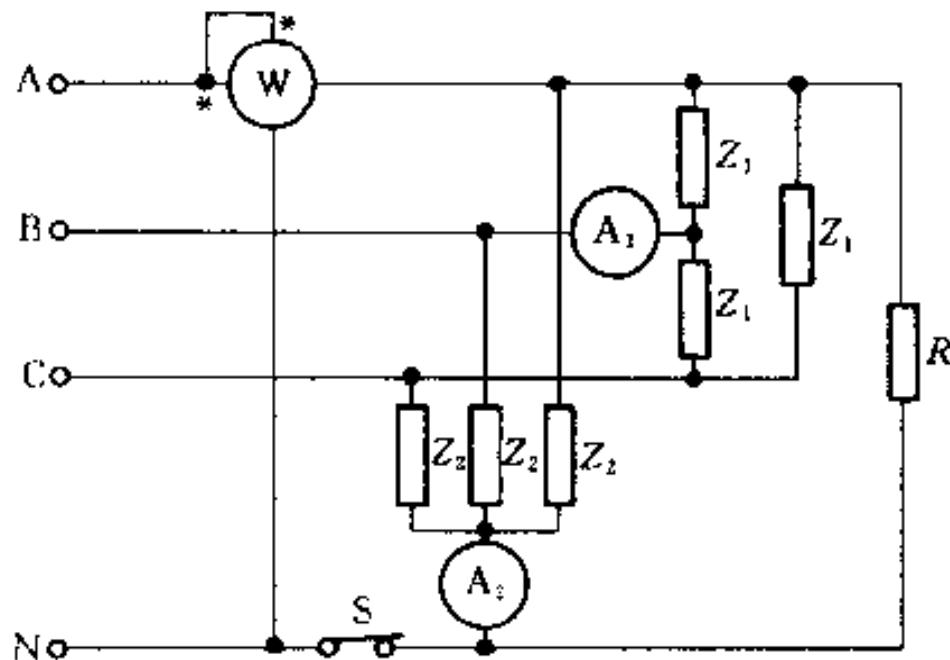
(b)

题 11-11 图

11-13 图示三相(四线)制电路中, $Z_1 = -j10 \Omega$, $Z_2 = (5 + j12) \Omega$, 对称三相电源的线电压为 380 V, 图中电阻 R 吸收的功率为 24 200 W(S 闭合时)。试求:

(1) 开关 S 闭合时图中各表的读数。根据功率表的读数能否求得整个负载吸收的总功率;

(2) 开关 S 打开时图中各表的读数有无变化, 功率表的读数有无意义?

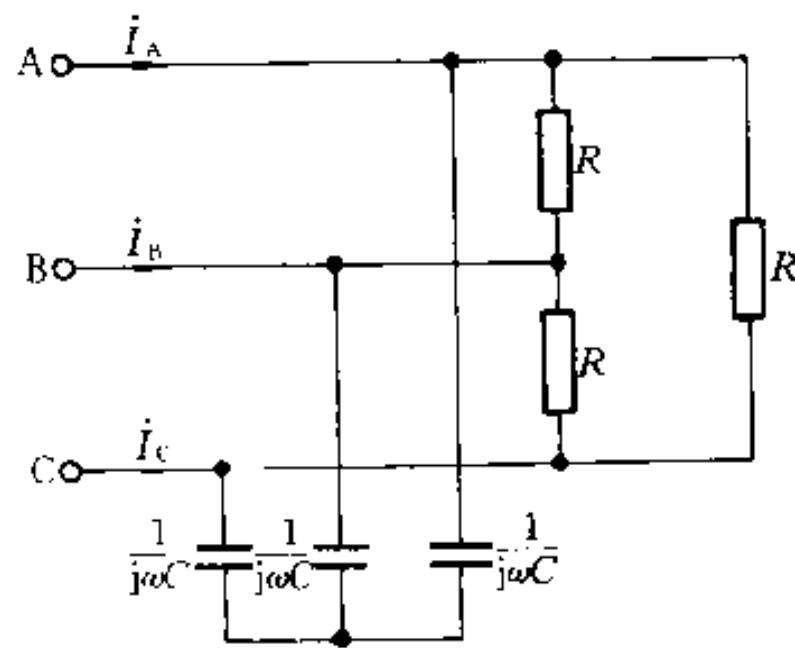


题 11-13 图

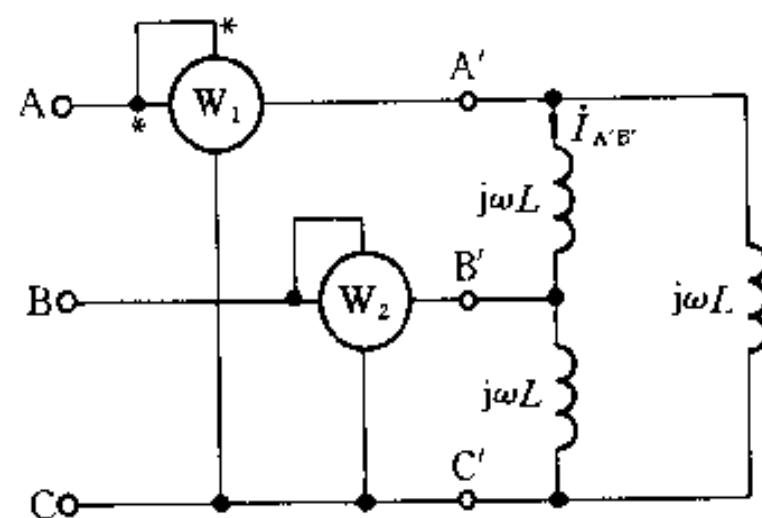
11-14 图示为对称三相电路, 线电压为 380 V, $R = 200 \Omega$, 负载吸收的无功功率为 $1520\sqrt{3} \text{ var}$, 试求:(1)各线电流;(2)电源发出的复功率。

11-15 图示为对称三相电路, 线电压为 380 V, 相电 $I_{A\text{eff}} = 2 \text{ A}$, 求图中功率表的读数。

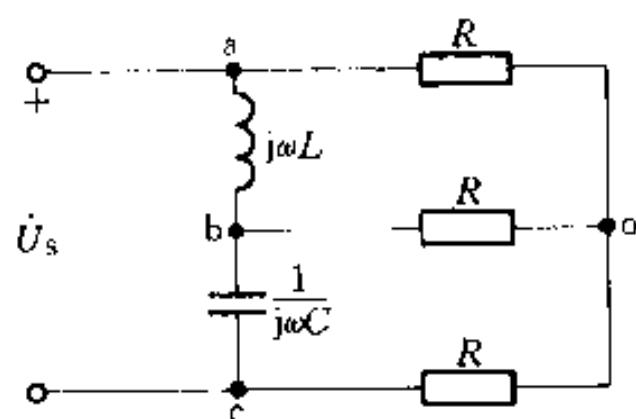
11-16 图示电路中的 U_s 是频率 $f = 50 \text{ Hz}$ 的正弦电压源。若要使 $U_{a_0}, U_{b_0}, U_{c_0}$ 构成对称三相电压, 试求 R, L, C 之间应当满足什么关系。设 $R = 20 \Omega$, 求 L 和 C 的值。



题 11·14 图



题 11·15 图



题 11·16 图

第十二章

非正弦周期电流电路和信号的频谱

•———— 内容提要 ———•

本章主要介绍非正弦周期电流电路的一种分析方法——谐波分析法，它是正弦电流电路分析方法的推广。其次介绍信号频谱的初步概念。主要内容有：周期函数分解为傅里叶级数和信号的频谱，周期量的有效值、平均值，非正弦周期电流电路的计算和平均功率，滤波器的概念，三相电路中的高次谐波，及傅里叶积分简介。

§ 12-1 非正弦周期信号

在一个线性电路中有一个正弦电源作用或多个同频电源同时作用时，电路各部分的稳态电压、电流都是同频的正弦量。但在生产实践和科学实验中，通常还会遇到按非正弦规律变动的电源和信号。例如，实际的交流发电机发出的电压波形与正弦波或多或少有些差别，严格讲是非正弦周期波。通信工程方面传输的各种信号，如收音机、电视机收到的信号电压或电流，它们的波形都是非正弦波。在自动控制、电子计算机等技术领域中用到的脉冲信号也都是非正弦波。图 12-1 所示非正弦周期波形都是工程中常见的例子。

另外，如果电路存在非线性元件，即使在正弦电源的作用下，电路中也将产生非正弦周期的电压和电流。

非正弦电流又可分为周期的和非周期的两种。本章主要讨论在非正弦周期电压、电流或信号的作用下，线性电路的稳态分析和计算方法，并简要地介绍信号频谱的初步概念。首先应用数学中的傅里叶级数（傅氏级数）展开方法，将非正弦周期激励电压、电流或信号分解为一系列不同频率的正弦量之和，再根据线性电路的叠加定理，分别计算在各个正弦量单独作用下在电路中产生的同频正弦电流分量和电压分量；最后，把所得分量按时域形式叠加，就可以得到电路在

非正弦周期激励下的稳态电流和电压。这种方法称为谐波分析法。它实质上是把非正弦周期电流电路的计算化为一系列正弦电流电路的计算。

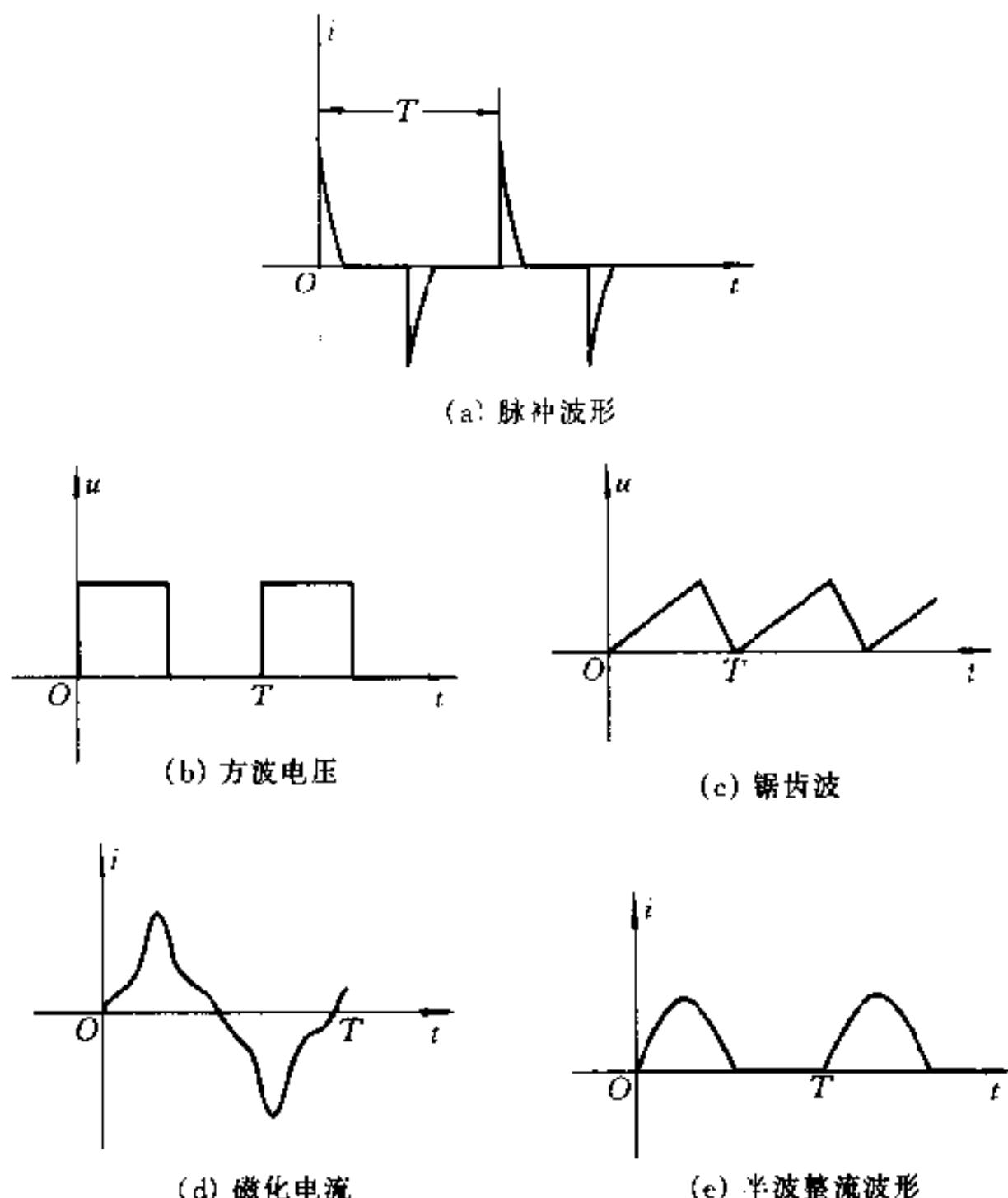


图 12-1 非正弦周期电流、电压波形

§ 12-2 周期函数分解为傅里叶级数

周期电流、电压、信号等都可以用一个周期函数表示，即

$$f(t) = f(t + kT)$$

式中 T 为周期函数 $f(t)$ 的周期， $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

如果给定的周期函数满足狄里赫利条件，它就能展开成一个收敛的傅里叶级数，即

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + [a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t)] + [a_2 \cos(2\omega_1 t) + b_2 \sin(2\omega_1 t)] \\ &\quad + \cdots + [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \end{aligned} \quad (12-1)$$

式(12-1)还可合并成另一种形式

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_{1m} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{2m} \cos(2\omega_1 t + \phi_2) + \cdots \\ &\quad + A_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_k) + \cdots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \end{aligned} \quad (12-2)$$

不难得出上述两种形式系数之间有如下关系:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_{km} &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k &= A_{km} \cos \phi_k \\ b_k &= -A_{km} \sin \phi_k \\ \phi_k &= \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \end{aligned}$$

傅里叶级数是一个无穷三角级数。式(12-2)的第1项 A_0 称为周期函数 $f(t)$ 的恒定分量(或直流分量);第2项 $A_{1m} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ 称为1次谐波(或基波分量),其周期或频率与原周期函数 $f(t)$ 相同,其他各项统称为高次谐波,即2次、3次、4次、…谐波。这种将一个周期函数展开或分解为一系列谐波之和的傅里叶级数称为谐波分析。

式(12-1)中的系数,可按下列公式计算:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) \end{aligned} \right\} \quad (12-3)$$

上述计算公式中 $k = 1, 2, 3, \dots$

由以上讨论可见,一个周期函数可以展开成傅里叶级数,它是如式(12-1)和式(12-2)的三角级数形式。这样一种数学表示式虽然详尽而又准确地表达了周期函数分解的结果,但不很直观。为了表示一个周期函数分解为傅氏级数后包含那些频率分量以及各分量所占“比重”,用长度与各次谐波振幅大小相对应的线段,按频率的高低顺序把它们依次排列起来,就得到图 12-2 所示图形。

这种图形称为 $f(t)$ 的频谱(图)。这种频谱只表示各谐波分量的振幅, 所以称为幅度频谱。如果把各次谐波的初相用相应线段依次排列就可以得到相位频谱。如无特别说明, 一般所说频谱是专指幅度频谱而言。由于各谐波的角频率是 ω_1 的整数倍, 所以这种频谱是离散的, 有时又称为线频谱。

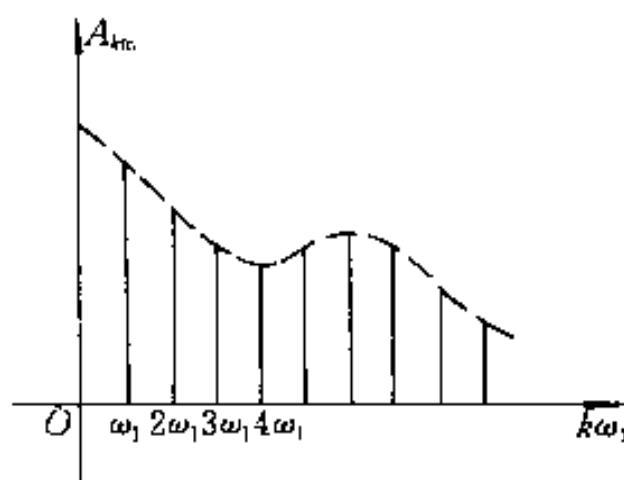


图 12-2 幅度频谱

例 12-1 求图 12-3 所示周期性矩形信号 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式及其频谱。

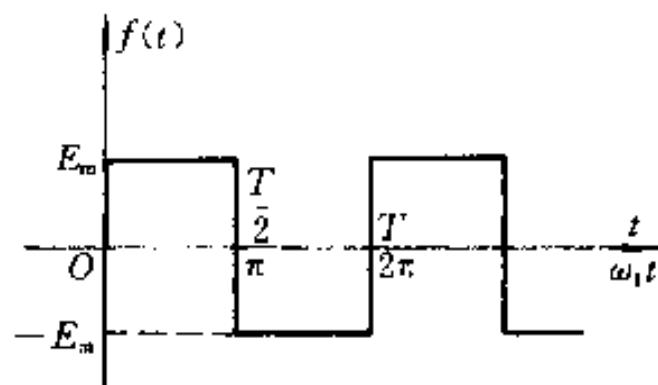


图 12-3 矩形波

解 $f(t)$ 在第一个周期内的表达式为

$$\begin{cases} f(t) = E_m & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ f(t) = -E_m & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

根据式(12-3)求得所需要的系数为:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi E_m \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) - \int_\pi^{2\pi} E_m \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) \right] \\ &= \frac{2E_m}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi E_m \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) - \int_\pi^{2\pi} E_m \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2E_m}{\pi} \int_0^\pi \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t) = \frac{2E_m}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos(k\omega_1 t) \right]_0^\pi \\
 &= \frac{2E_m}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)]
 \end{aligned}$$

当 k 为偶数时：

$$\cos(k\pi) = 1, \quad b_k = 0$$

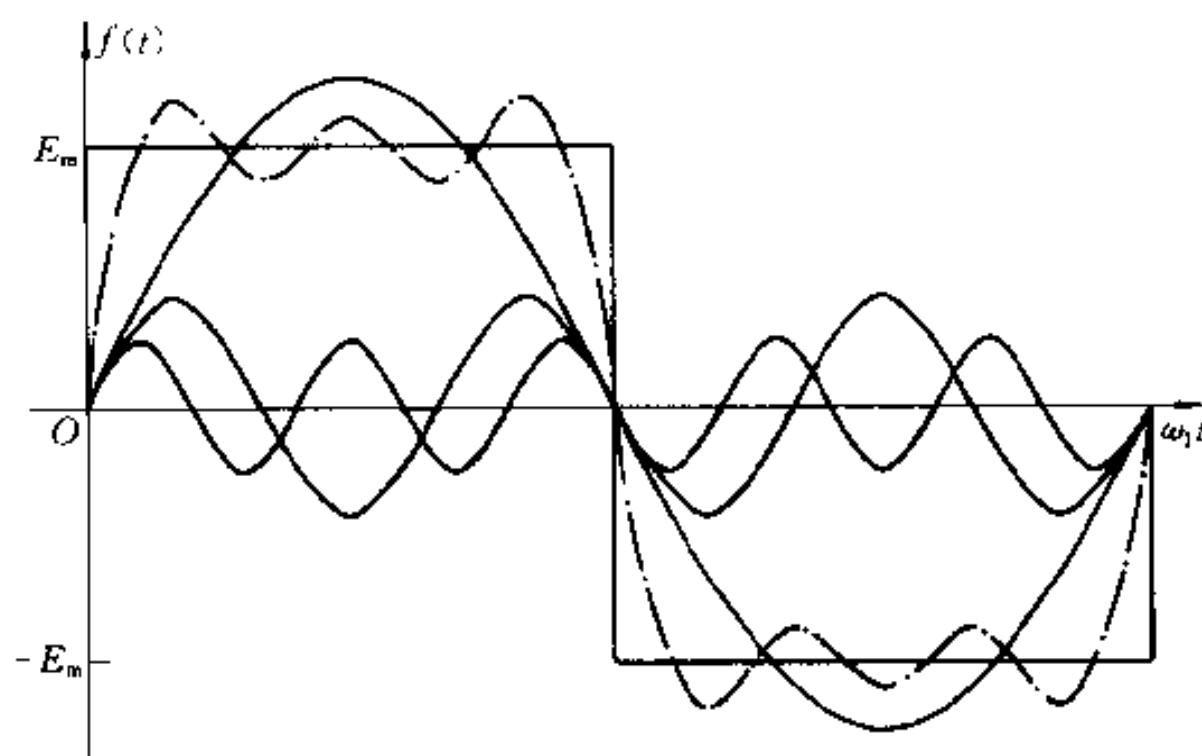
当 k 为奇数时：

$$\cos(k\pi) = -1, \quad b_k = \frac{4E_m}{k\pi}$$

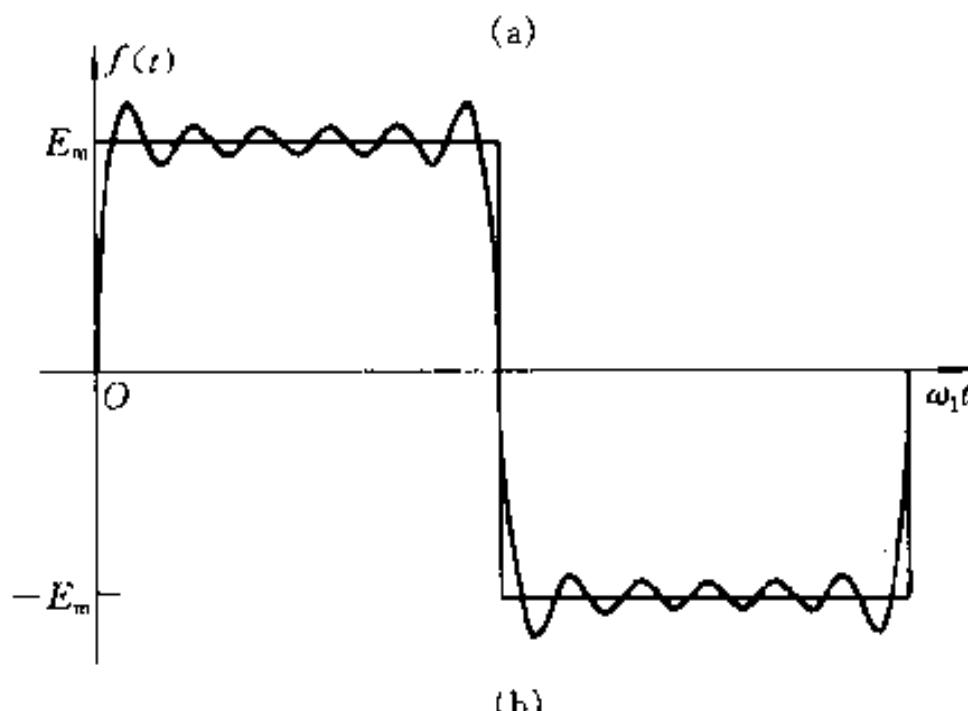
由此求得

$$f(t) = \frac{4E_m}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right]$$

图 12-4(a) 中虚线所示曲线是取展开式中前 3 项，即取到 5 次谐波时画出



(a)



(b)

图 12-4 谱波合成示意图

的合成曲线。图 12-4(b)是取到 11 次谐波时合成的曲线。比较两个图形可见,谐波项数取得越多,合成曲线就越接近于原来的波形。

图 12-5 为 $f(t)$ 的频谱。

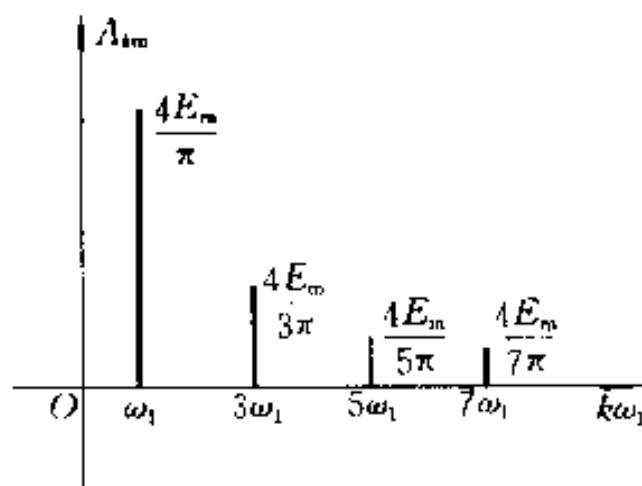


图 12-5 矩形波的频谱

本章最后附表 12-1 是几个典型的周期函数的傅里叶级数展开式。

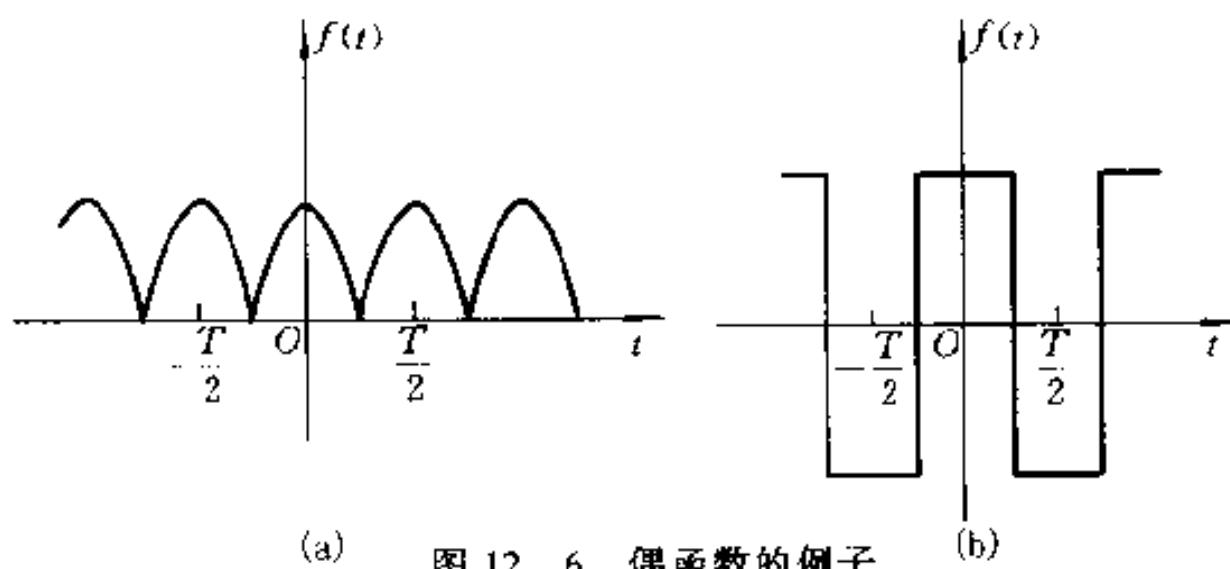
电工技术中遇到的周期函数常具有某种对称性,利用函数的对称性可使系数 a_0, a_k, b_k 的确定简化。

图 12-6 所示偶函数有纵轴对称的性质,即

$$f(t) = f(-t)$$

故

$$b_k = 0$$



(a) 图 12-6 偶函数的例子

(b)

图 12-7 所示奇函数有原点对称的性质,即

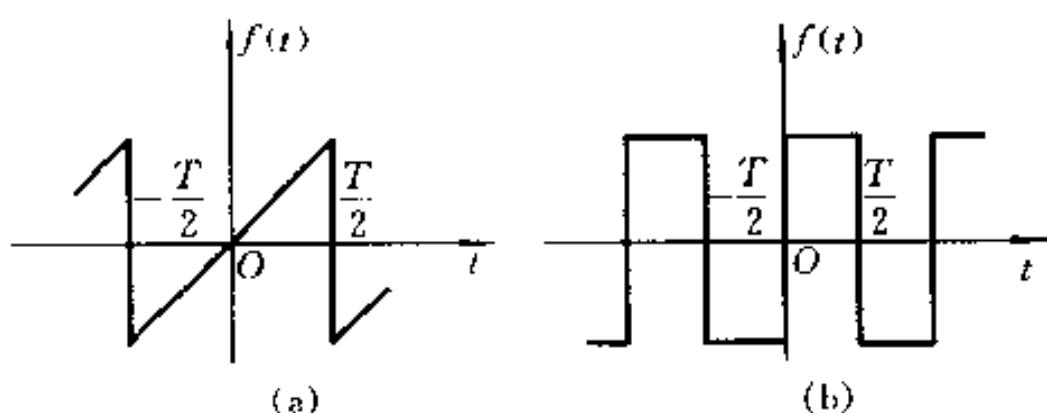


图 12-7 奇函数的例子

$$f(t) = -f(-t)$$

故

$$a_k = 0$$

图 12-8 所示奇谐波函数有镜对称性质, 即

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

故

$$a_{2k} = b_{2k} = 0$$

该波形移动半周期后与横轴对称(见图 12-8 虚线)。

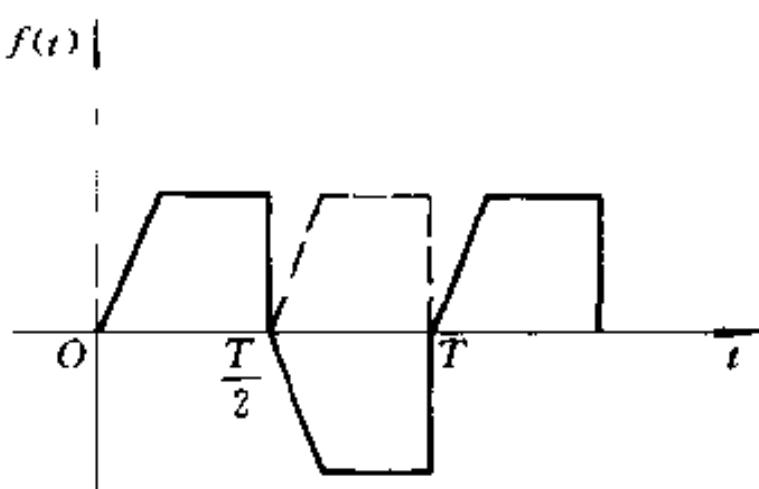


图 12-8 奇谐波函数的例子

应当指出式(12-2)中的系数 A_{km} 与计时起点无关, 而 ϕ_k 与计时起点有关, 这是因为构成非正弦周期函数的各谐波的振幅以及各次谐波对该函数波形的相对位置总是一定的, 并不会因计时起点的变动而变动; 因此, 计时起点的变动只能使各次谐波的初相作相应地改变。由于系数 a_k 和 b_k 与初相 ϕ_k 有关, 所以它们也随计时起点变动而改变。

由于 a_k 和 b_k 与计时起点的选择有关, 所以函数的奇、偶性质可能与计时起点的选择有关, 例如, 图 12-6(b)和图 12-7(b)所示波形由于计时起点的选择不同, 所以函数的奇、偶性质也不同。但是, 函数是否为奇谐波函数与计时起点无关。因此适当选择计时起点有时会使函数的分解简化。

傅里叶级数是一个无穷级数, 因此把一个非正弦周期函数分解为傅里叶级数后, 从理论上讲, 必须取无穷多项方能准确地代表原有函数。从实际运算看, 只能截取有限的项数, 因此就产生了误差问题。截取项数的多少, 视要求而定。这里就涉及到级数收敛的快慢问题; 或者简单地说, 就是相继项系数比值的大小问题。如果级数收敛很快, 只取级数的前面几项也就够了, 5 次以上谐波一般可以略去。通常, 函数的波形越光滑和越接近于正弦形, 其展开级数就收敛得越快(可以分析表 12-1 所列各种函数)。而像例 12-1 所示矩形波, 其级数的收敛是较慢的。例如, 如取 $\omega_1 t = \frac{\pi}{2}$, 或 $t = \frac{T}{4}$, 则

$$f\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{4E_m}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots\right)$$

当取无穷多项时,将有 $f\left(\frac{T}{4}\right) = E_m$, 这是准确值。但是如取到 11 次谐波时, 合成的结果约为 $0.95E_m$; 取到 13 次谐波时约为 $1.05E_m$; 取到 35 次谐波时, 将得 $0.98E_m$, 这时尚有 2% 的误差。但有时还需要考虑电路的频率响应, 很可能在某一频率下电路发生谐振(或接近谐振), 或者在某些频段内, 响应的幅度特别大。

§ 12-3 有效值、平均值和平均功率

前已指出,任一周期电流 i 的有效值 I 已经定义为

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

当然可以用非正弦周期函数直接进行上述定义的积分求有效值。这里主要是寻找有效值与各次谐波有效值之间的关系。

假设一非正弦周期电流 i 可以分解为傅里叶级数

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \psi_k)$$

将 i 代入有效值公式, 则得此电流的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \psi_k) \right]^2 dt}$$

上式中 i 的展开式平方后将含有下列各项:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \cos^2(k\omega_1 t + \psi_k) dt = I_k^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 \cos(k\omega_1 t + \psi_k) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_{km} \cos(k\omega_1 t + \psi_k) I_{qn} \cos(q\omega_1 t + \psi_q) dt = 0 \quad k \neq q$$

这样可以求得 i 的有效值为

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

即非正弦周期电流的有效值等于恒定分量的平方与各次谐波有效值的平方之和的平方根。此结论可推广用于其他非正弦周期量。

在实践中还用到平均值的概念, 以电流 i 为例, 其定义由下式表示

$$I_{av} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt$$

即非正弦周期电流的平均值等于此电流绝对值的平均值。按上式可求得正弦电流的平均值为

$$\begin{aligned} I_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T |I_m \cos(\omega t)| dt = \frac{4I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{4I_m}{\omega T} [\sin(\omega t)]_0^{\frac{T}{4}} = 0.637 I_m = 0.898 I \end{aligned}$$

它相当于正弦电流经全波整流后的平均值(见图 12-9)，这是因为取电流的绝对值相当于把负半周的值变为对应的正值。

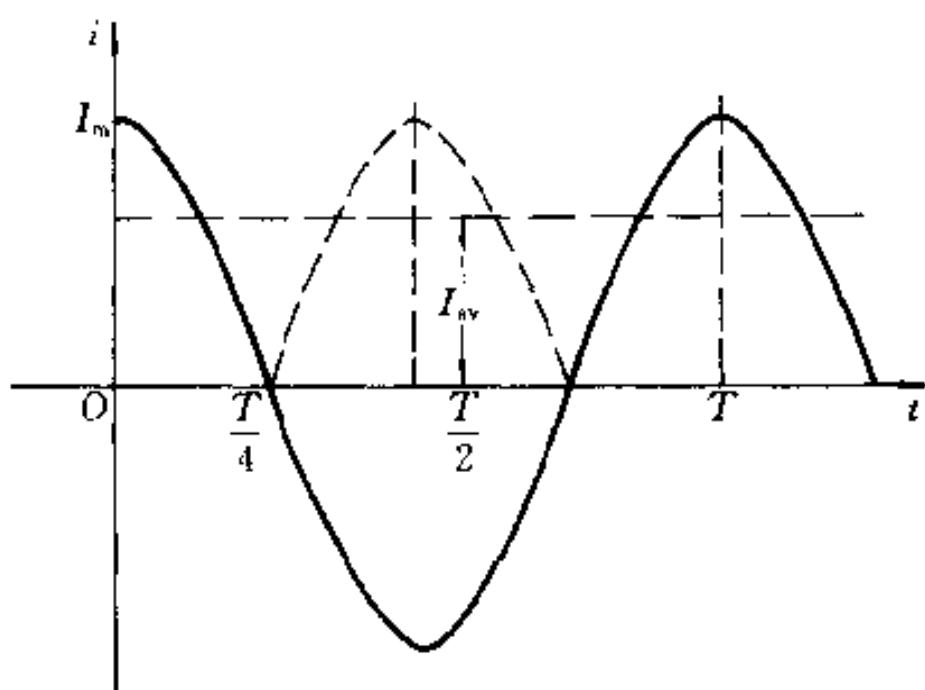


图 12-9 正弦电流的平均值

对于同一非正弦周期电流，当用不同类型的仪表进行测量时，会得到不同的结果。例如用磁电系仪表(直流仪表)测量，所得结果将是电流的恒定分量，这是因为磁电系仪表的偏转角 $\alpha \propto \frac{1}{T} \int_0^T i dt$ 。用电磁系仪表测得的结果为电流的有效值，因为这种仪表的偏转角 $\alpha \propto \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$ 。如用全波整流仪表测量时，所得结果为电流的平均值，因为这种仪表的偏转角与电流的平均值成正比。由此可见，在测量非正弦周期电流和电压时，要注意选择合适的仪表，并注意不同类型仪表读数表示的含义(关于仪表的知识可参阅实验指导书)。

现在讨论非正弦周期电流电路的功率问题。任意一端口的瞬时功率(吸收)为

$$p = ui = \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_{ik}) \right] \times \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_{ik}) \right]$$

式中 u 、 i 取关联参考方向。它的平均功率(有功功率)仍定义为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

不同频率的正弦电压与电流乘积的上述积分为零(即不产生平均功率);同频的正弦电压、电流乘积的上述积分不为零。这样不难证明

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \cdots + U_k I_k \cos \varphi_k + \cdots$$

式中:

$$U_k = \frac{U_{k\text{m}}}{\sqrt{2}}, I_k = \frac{I_{k\text{m}}}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots$$

即平均功率等于恒定分量构成的功率和各次谐波平均功率的代数和。

非正弦周期电流电路无功功率的情况较为复杂,本书不予讨论。有时候也定义非正弦周期电流电路的视在功率,即有

$$S = UI$$

§ 12-4 非正弦周期电流电路的计算

在 § 12-1 中已指出非正弦周期电流电路的计算原则,具体步骤如下:

(1) 把给定的非正弦周期电压或电流分解为傅里叶级数,高次谐波取到哪一项为止,要根据所需准确度的高低而定。

(2) 分别求出电源电压或电流的恒定分量及各次谐波分量单独作用时的响应。对恒定分量($\omega = 0$),求解时把电容看作开路,把电感看作短路。对各次谐波分量可以用相量法求解,但要注意感抗、容抗与频率的关系,并把计算结果转换为时域形式。

(3) 应用叠加定理,把步骤(2)计算出的结果进行叠加,从而求得所需响应。注意把表示不同频率正弦电流相量或电压相量直接相加是没有意义的。

下面通过具体例子说明上述步骤。

例 12-2 图 12-10 所示电路中, $R = 3 \Omega$, $\frac{1}{\omega_1 C} = 9.45 \Omega$, 输入电源为 $u_s = [10 + 141.40 \cos(\omega_1 t) + 47.13 \cos(3\omega_1 t) + 28.28 \cos(5\omega_1 t) + 20.20 \cos(7\omega_1 t) + 15.71 \cos(9\omega_1 t) + \dots] V$ 。求电流 i 和电阻吸收的平均功率 P 。

解 电路中的非正弦周期电压已分解为傅里叶级数形式,现写出电流相量的一般表达式

$$\dot{I}_{m(k)} = \frac{\dot{U}_{sm(k)}}{R - j \frac{1}{k\omega_1 C}}$$

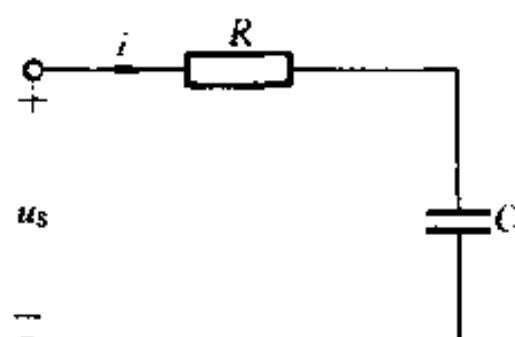


图 12-10 例 12-2 图

式中 $\dot{I}_{m(k)}$ 为 k 次谐波电流的振幅。根据叠加定理,按 $k = 0, 1, 2, \dots$ 的顺序,逐

—求解如下：

$$k=0, \text{ 直流分量 } U_0 = 10 \text{ V}, I_0 = 0, P_0 = 0$$

$$k=1, \dot{U}_{\text{sm}(1)} = 141.4 / 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_{\text{m}(1)} = \frac{141.4 / 0^\circ}{3 - j9.45} \text{ A} = 14.26 / 72.39^\circ \text{ A}$$

$$P_{(1)} = \frac{1}{2} I_{\text{m}(1)}^2 R = 305.02 \text{ W}$$

$$k=3, \dot{U}_{\text{sm}(3)} = 47.13 / 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_{\text{m}(3)} = \frac{47.13 / 0^\circ}{3 - j3.15} \text{ A} = 10.83 / 46.4^\circ \text{ A}$$

$$P_{(3)} = \frac{1}{2} I_{\text{m}(3)}^2 R = 175.93 \text{ W}$$

同理求得：

$$\dot{I}_{\text{m}(5)} = 7.98 / 32.21^\circ \text{ A}, \quad P_{(5)} = 95.52 \text{ W}$$

$$\dot{I}_{\text{m}(7)} = 6.14 / 24.23^\circ \text{ A}, \quad P_{(7)} = 56.55 \text{ W}$$

$$\dot{I}_{\text{m}(9)} = 4.94 / 19.29^\circ \text{ A}, \quad P_{(9)} = 36.60 \text{ W}$$

最后按时域形式叠加为：

$$i = [14.26 \cos(\omega_1 t + 72.39^\circ) + 10.83 \cos(3\omega_1 t + 46.4^\circ) + 7.98 \cos(5\omega_1 t + 32.21^\circ) + 6.14 \cos(7\omega_1 t + 24.23^\circ) + \dots] \text{ A}$$

$$P = P_0 + P_{(1)} + P_{(3)} + \dots + P_{(9)} = 669.80 \text{ W}$$

通过本例可以看出,对于电路中 u_s ,它的各次谐波的振幅与 k 成反比衰减,而电路输入阻抗的虚部也与 k 成反比减小,所以各次谐波的电流振幅衰减非常缓慢。

例 12-3 图示电路中 $L = 5 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$, 负载电阻 $R = 2 \text{ k}\Omega$, u_s 为正弦全波整流波形,如图(b)。设 $\omega_1 = 314 \text{ rad/s}$, $U_m = 157 \text{ V}$, 求负载两端电压的各谐波分量。

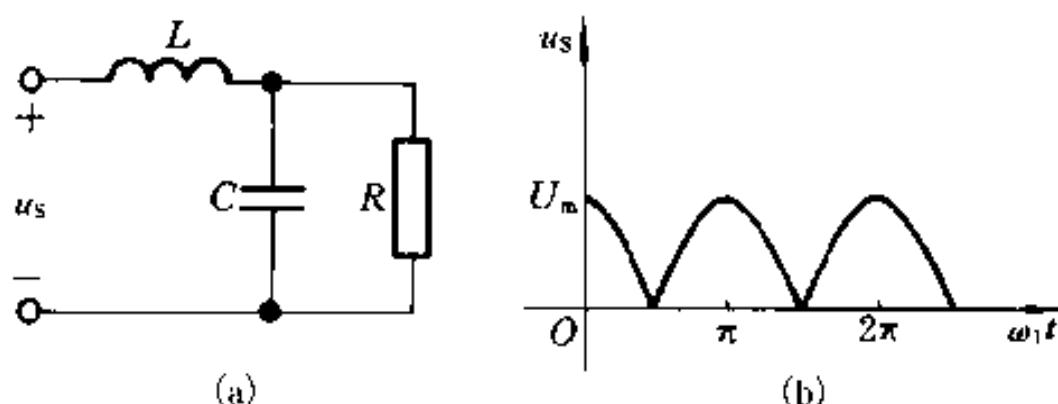


图 12-11 例 12-3 图

解 参阅表 12-1, 将给定的 u_s 分解为傅里叶级数, 得

$$u_s = \frac{4}{\pi} \times 157 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos(2\omega_1 t) - \frac{1}{15} \cos(4\omega_1 t) + \dots \right]$$

设负载两端电压的第 k 次谐波为 $\dot{U}_{lm(k)}$ (采用复振幅相量), 用结点电压法有:

$$\left[\frac{1}{jk\omega_1 L} + \frac{1}{R} + jk\omega_1 C \right] \dot{U}_{lm(k)} = \frac{1}{jk\omega_1 L} \dot{U}_{sm(k)}$$

$$\dot{U}_{lm(k)} = \frac{\dot{U}_{sm(k)}}{\left(\frac{1}{R} + jk\omega_1 C \right) jk\omega_1 L + 1}$$

令 $k=0, 2, 4, \dots$, 并代入数据, 可分别求得:

$$U_0 = 100 \text{ V} \quad (k=0 \text{ 时为直流分量})$$

$$\dot{U}_{lm(2)} = 3.53 \text{ V}$$

$$\dot{U}_{lm(4)} = 0.171 \text{ V}$$

图 12-11(a) 所示电路为一全波整流电路的滤波电路。它利用了电感对高频电流的抑制作用, 电容对高频电流的分流作用, 使得输入电压中的 2 次和 4 次谐波分量大大削弱, 而负载两端的电压接近直流电压, 但尚有 3.5% 的 2 次谐波。

感抗和容抗对各次谐波的反应不同, 这种性质在工程上有广泛的应用。例如可以组成含有电感和电容的各种不同电路, 将这种电路接在输入和输出之间, 可以让某些所需频率分量顺利通过而抑制某些不需要的分量。这种电路称为滤波器。图 12-12(a) 所示为一个简单的低通滤波器, 图中的电感 L 对高频电流有抑制作用, 电容 C 对高频电流起分流作用, 输出端中的高频电流分量就被大大削弱, 低频电流则能顺利通过。图 12-12(b) 是一个简单的高通滤波器, 其中电容 C 对低频分量有抑制作用, 电感 L 对低频分量有分流作用。实际滤波电路要复杂一些, 而且需要根据不同要求确定相应的电路结构及其元件值。

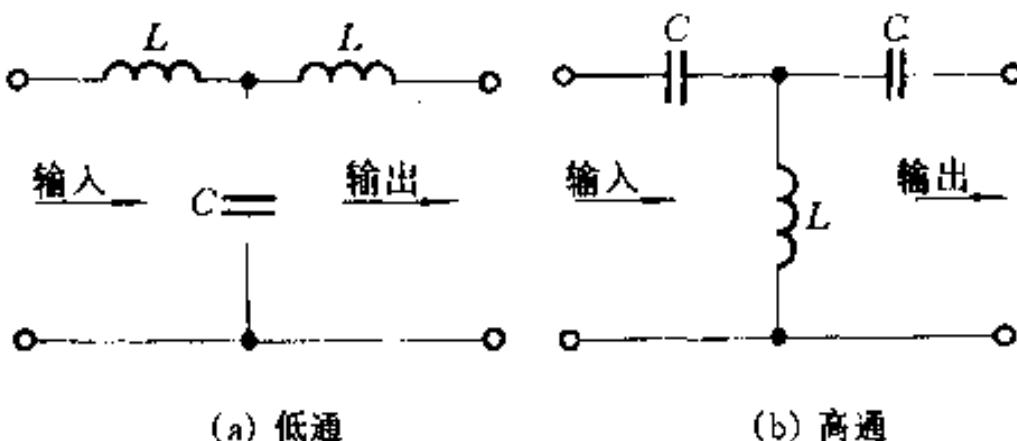


图 12-12 简单滤波器

* § 12-5 对称三相电路中的高次谐波

三相发电机产生的电压波形或多或少与正弦波有些差别，因此，含有一定的谐波分量；变压器的励磁电流是非正弦周期波，含有高次谐波分量。所以，在对称三相电路中，电压、电流都可能含有高次谐波分量。

对于对称的三相制，3个对称的非正弦周期相电压在时间上依次滞后 $\frac{1}{3}$ 周期，但其变化规律则相似；如果 A 相电压可表示为

$$u_A = u(t)$$

则 B 相和 C 相电压为：

$$u_B = u\left(t - \frac{T}{3}\right), \quad u_C = u\left(t + \frac{2T}{3}\right)$$

如果把 A 相电压 u_A 展开成傅里叶级数（发电机的每相电压为奇谐波函数），则有

$$u_A = \sqrt{2}U_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \sqrt{2}U_3 \cos(3\omega_1 t + \psi_3) + \sqrt{2}U_5 \cos(5\omega_1 t + \psi_5) \\ + \sqrt{2}U_7 \cos(7\omega_1 t + \psi_7) + \dots$$

而 u_B, u_C 为（注意 $k\omega_1 T = 2k\pi$ ）：

$$u_B = \sqrt{2}U_1 \cos\left(\omega_1 t + \psi_1 - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{2}U_3 \cos(3\omega_1 t + \psi_3) + \\ \sqrt{2}U_5 \cos\left(5\omega_1 t + \psi_5 - \frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt{2}U_7 \cos\left(7\omega_1 t + \psi_7 - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \\ u_C = \sqrt{2}U_1 \cos\left(\omega_1 t + \psi_1 - \frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt{2}U_3 \cos(3\omega_1 t + \psi_3) + \\ \sqrt{2}U_5 \cos\left(5\omega_1 t + \psi_5 - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{2}U_7 \cos\left(7\omega_1 t + \psi_7 - \frac{4\pi}{3}\right) + \dots$$

由上式不难看出，基波、7 次谐波（13 次、19 次等）分别都是正序的对称的三相电压，所以构成正序对称组；5 次（11 次、17 次等）谐波构成负序对称组；而 3 次（9 次、15 次）谐波却彼此同相，构成所谓零序对称组（3 个相量，其有效值相等，且初相也相同，就构成零序对称组）。总之，三相对称非正弦周期量可分解为三类对称组，即正序、负序和零序组。

现在分析对称非正弦情况下 Y-Y 连接中电源的线电压和相电压之间的关系。相电压中含有全部谐波分量，其有效值为

$$U_{ph} = \sqrt{U_{ph1}^2 + U_{ph3}^2 + U_{ph5}^2 + \dots}$$

式中下标“ph”表示相。线电压等于相应的两个相电压之差，对于基波、5 次谐波等正序和负序组相电压，其相对应的线电压中各谐波分量的有效值等于相电压中同次谐波有效值的 $\sqrt{3}$ 倍，即：

$$U_{11} = \sqrt{3}U_{ph1}, U_{15} = \sqrt{3}U_{ph5}, U_{17} = \sqrt{3}U_{ph7} \dots$$

$$\text{而 } U_1 = \sqrt{U_{11}^2 + U_{15}^2 + U_{17}^2 + \dots} \\ = \sqrt{3} \sqrt{U_{ph1}^2 + U_{ph5}^2 + U_{ph7}^2 + \dots}$$

线电压中不含零序对称组谐波分量,即线电压中零序组各谐波分量的有效值为零,这是因为零序对称组中各谐波分量的相电压相等,两个零序相电压相减后为零。所以,线电压的有效值一般小于相电压有效值的 $\sqrt{3}$ 倍,即

$$U_L < \sqrt{3} U_{ph}$$

在负载方面,如果星形负载没有中线(见图 12-13),对基波、5 次谐波等正序和负序对称组电源仍可分别用相量法,按对称三相电路归结为一相计算方法处理。这时电源的中点和负载中点之间的电压应为零,即 $U_{NN'} = 0$,负载中电流和线电流中都将有基波、5 次谐波等正序和负序对称组电流。对于 3 次、9 次等零序组,中点之间的电压不等于零,而等于零序组相电压,因此不能用归结为一相的方法计算,负载电流和线电流中将不包含 3 次、9 次等零序对称组电流(根据 KCL,在无中线情况下,线电流也不能含有零序组)。中点间的电压有效值只含有零序组分量,即

$$U_{NN'} = \sqrt{U_{ph3}^2 + U_{ph9}^2 + \dots}$$

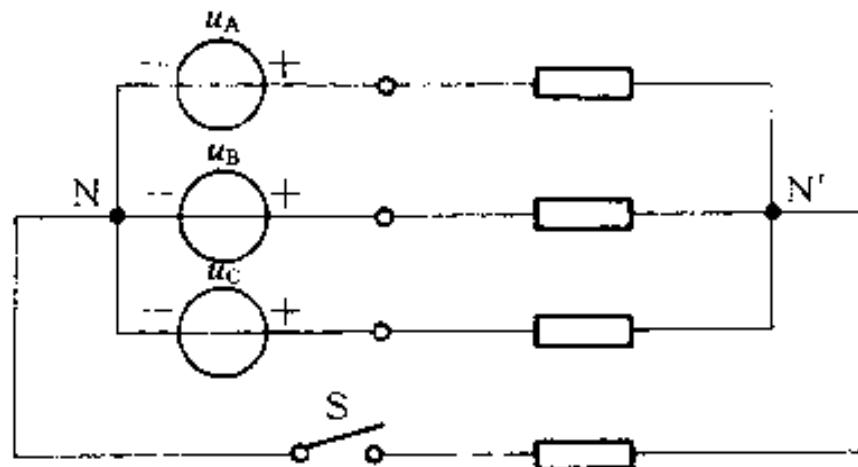


图 12-13 Y-Y 连接时的高次谐波

由于负载中不含有 3 次、9 次等零序组谐波电流,所以相电压中也不含这些谐波分量,负载端的线电压的有效值仍是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍。

如果把中线接上(图 12-13 中的 S 合上),则线电流中将有零序组谐波电流。(详细计算留作习题。)

当对称三相非正弦电源连成三角形时,回路中正、负组对称电压之和为零,电源相电压中的零序组谐波,例如 3 次谐波,沿回路之和将不等于零,而等于每相电压中该谐波分量的 3 倍。回路将有 $3k$ ($k = 1, 3, 5, \dots$) 次谐波的环行电流,其有效值为:

$$I_{(3)} = \frac{3U_{ph3}}{3Z_3} = \frac{U_{ph3}}{Z_3}$$

$$I_{(9)} = \frac{U_{ph9}}{Z_9}$$

因为上述环流在阻抗上的电压与 $3k$ 次相电压之和为零,所以,三角形电源端线电压只含正、负对称组成分,即有

$$U_L = \sqrt{U_{ph1}^2 + U_{ph5}^2 + U_{ph7}^2 + \dots}$$

有关三相电路的高次谐波的分析计算见有关习题。

* § 12-6 傅里叶级数的指数形式

傅里叶级数可以用指数形式表示。非正弦周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数的三角函数形式为

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_k)$$

利用欧拉公式有

$$\begin{aligned} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_k) &= \frac{1}{2} [A_{km} (e^{j(k\omega_1 t + \phi_k)} + e^{-j(k\omega_1 t + \phi_k)})] \\ &= \frac{1}{2} A_{km} e^{j\phi_k} e^{-jk\omega_1 t} + \frac{1}{2} A_{km} e^{-j\phi_k} e^{-jk\omega_1 t} \\ &= c_k e^{jk\omega_1 t} + c_k^* e^{-jk\omega_1 t} \end{aligned}$$

式中 $c_k = \frac{1}{2} A_{km} e^{j\phi_k}$, $c_k^* = \frac{1}{2} A_{km} e^{-j\phi_k}$ 。于是有

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_1 t} \quad (12-4)$$

上式中 $c_k e^{jk\omega_1 t}$ 可以看作以 $k\omega_1$ 角速度逆时针旋转向量, $c_k^* e^{-jk\omega_1 t}$ 为具有同样角速度的顺时针旋转向量。每一次谐波为两项之和。

由于 $a_k = A_{km} \cos \phi_k$, $b_k = -A_{km} \sin \phi_k$, 故 $A_{km} e^{j\phi_k} = a_k - jb_k$, 将根据式(12-3)得出的 a_k 和 b_k 代入, 有

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos(k\omega_1 t) - j \sin(k\omega_1 t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \end{aligned}$$

同理, 可求得

$$c_k^* = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jk\omega_1 t} dt$$

可见, 若令 c_k 中的“ k ”等于“ $-k$ ”, 则将等于 c_k^* 。所以式(12-4)可改写为

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

令 $a_0 = c_0$ [a_0 见式(12-3)], 最后可得出傅氏级数的指数形式

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} \quad (12-5)$$

在画傅里叶级数指数形式的频谱时, 要画出 $|c_k|$ 对正、负 k 的关系。由于指数形式中的 k 的取值是正、负整数, 所以画出的幅度频谱图对于纵轴对称。同样, 画出 c_k 的辐角与 k 的关系, 就能获得相位频谱。具体画法参阅下面的例子。

注意, 指数形式表述的幅度频谱除了上述特点外, 其线谱“高度”是傅氏频谱的一半, 另一方面由于正、负 k 完全对称, 所以只要研究“半边”即可。

例 12-4 试将例 12-1 的矩形波展开为指数形式的傅氏级数，并画出幅度频谱和相位频谱。

解

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T E_m e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T E_m e^{-jk\omega_1 t} dt \\&= \frac{E_m}{jk\omega_1 T} (1 - 2e^{-jk\omega_1 \frac{T}{2}} + e^{-jk\omega_1 T})\end{aligned}$$

由于 $k\omega_1 T = 2k\pi$, 故

$$c_k = \frac{E_m}{j2k\pi} (1 - 2e^{-jk\pi} + e^{-j2k\pi})$$

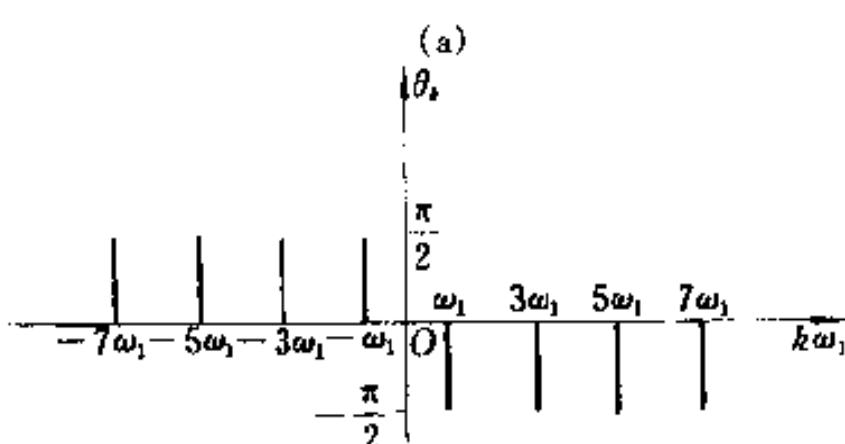
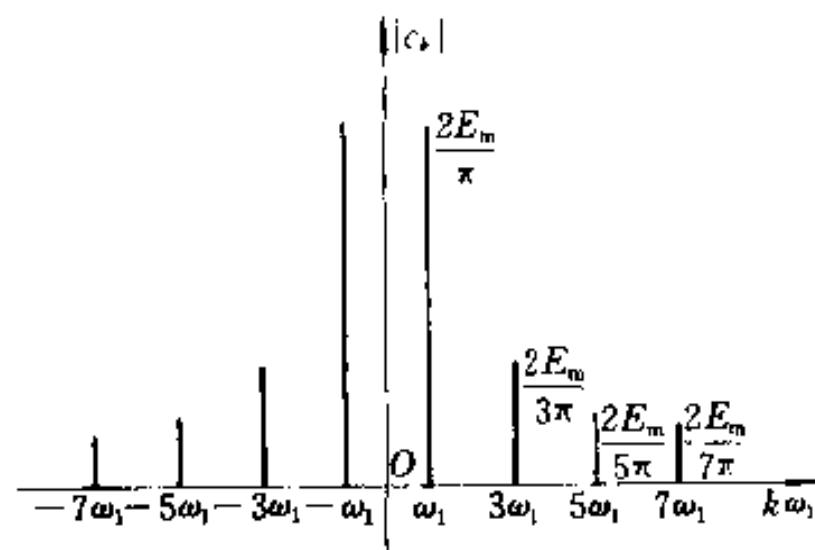
所以

$$\begin{cases} c_k = \frac{E_m}{j2k\pi} \times 4 = \frac{2E_m}{jk\pi} & \text{当 } k \text{ 为奇数时} \\ 0 & \text{当 } k \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

注意，直接用上式计算 a_0 是不行的。这样，可以得到指数形式的傅氏级数为

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{2E_m}{j\pi} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) + \frac{2E_m}{j3\pi} (e^{j3\omega_1 t} + e^{-j3\omega_1 t}) + \frac{2E_m}{j5\pi} (e^{j5\omega_1 t} + e^{-j5\omega_1 t}) \\&\quad + \frac{2E_m}{j7\pi} (e^{j7\omega_1 t} + e^{-j7\omega_1 t}) + \dots\end{aligned}$$

所得结果与例 12-1 相比完全一致。图 12-14(a) 所示为矩形波的傅氏级数的指数形式的



(b)

图 12-14 例 12-4 的幅度频谱和相位频谱

幅度频谱(注意与图 12-5 比较),其相位频谱如图 12-14(b)所示。

例 12-5 图 12-15(a)所示为常用于电视、雷达、计算机等方面的一种重复性矩形脉冲波。试画出其频谱。

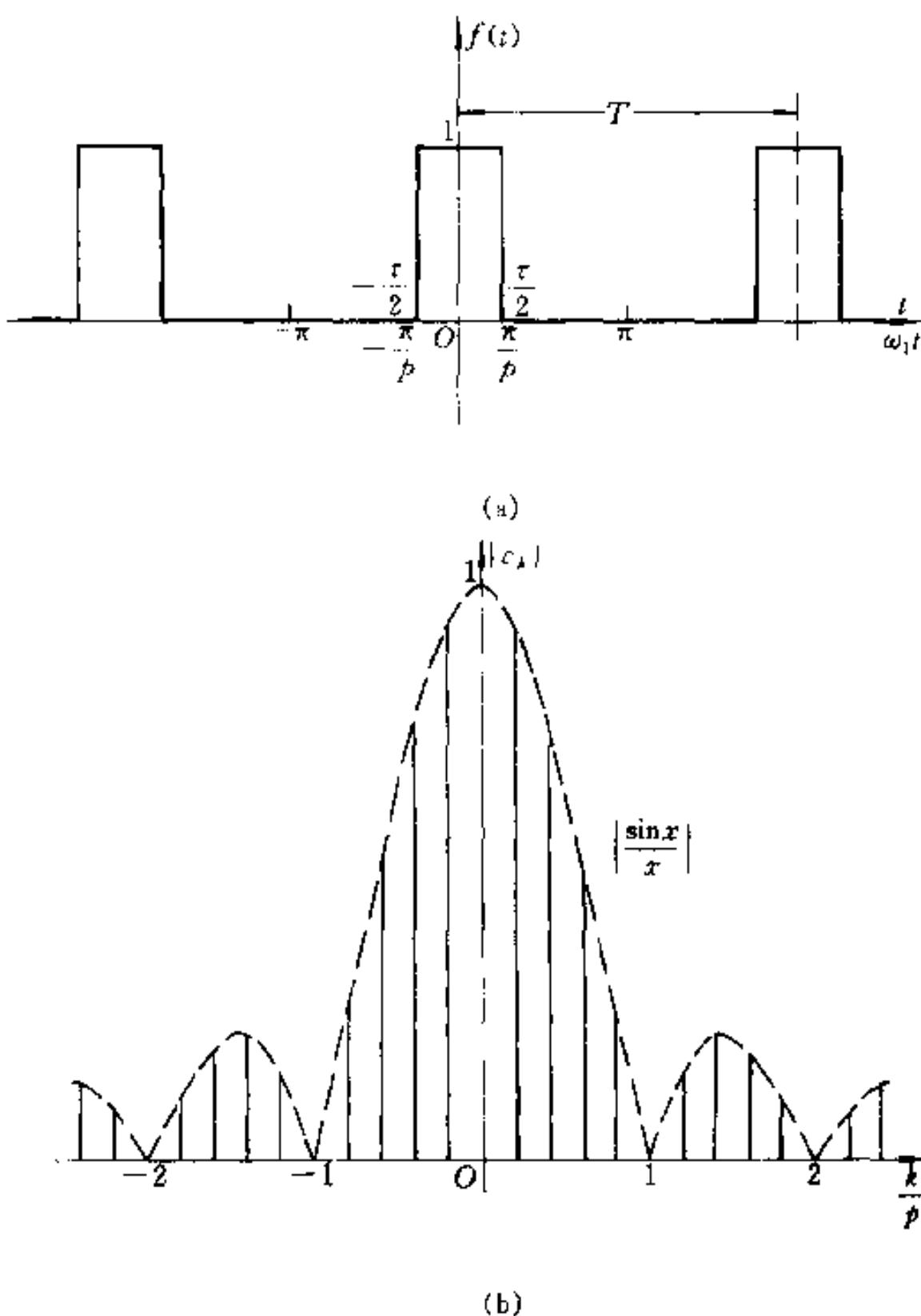


图 12-15 例 12-5 的重复性矩形脉冲及其频谱

解

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jk\omega_1 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{jk\omega_1} \right) (e^{-jk\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{jk\omega_1 \frac{\tau}{2}}) \\
 &= \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(k \frac{\omega_1 \tau}{2}\right)}{k \frac{\omega_1 \tau}{2}}
 \end{aligned}$$

如令 $\frac{\omega_1 \tau}{2} = \frac{\pi}{p}$ (或 $p = \frac{T}{\tau}$), τ 为脉冲的宽度, 则有

$$c_k = \frac{1}{p} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{p}\right)}{\frac{k\pi}{p}}$$

根据式(12-5)可写出重复性矩形脉冲的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{p}\right)}{\frac{k\pi}{p}} e^{jk\omega_1 t}$$

图 12-15(b)所示频谱是在 $p=5$ 的情况下画出的。5 次谐波及所有 $5k$ 次谐波的幅值都等于零。如令 $x = \frac{k\pi}{p}$, 则谱线的包线大体上具有函数 $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ 的形式[见图 12-15(b)]。如果按图 12-15(b)那样用比值 $\frac{k}{p}$ 画横坐标, 那么不论 p 的大小, 包线的形状不变。如果脉冲宽度不变但重复次数减少, 即 T 增大(相当于 p 增大), 基波频率与相邻谐波之间的频率差就越来越小, 谱线就越来越靠近。这种极限情况, 将在下一节研究。

* § 12-7 傅里叶积分简介

不重复的单个波形是一种非周期性函数, 它不能直接用傅氏级数表示。但是, 如果把这种非周期函数仍看作一种周期函数, 在周期趋于无限大的条件下, 求出其极限形式的傅氏级数展开式, 就得到了表示这种非周期函数的傅氏积分公式。下面要介绍的就是基于这一思想的傅氏积分公式的推导过程; 这样做并不很严格, 但比较直观。根据式(12-5)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

其中

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (12-6)$$

c_k 的幅度频谱和相位频谱是 $k\omega_1$ 的函数, 且为线状的, 其相邻间隔(频率差)为

$$\Delta\omega_k = (k+1)\omega_1 - k\omega_1 = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

当 T 越来越大时, c_k 的值及相邻谱线的间隔就越来越小(见例 12-5)。当 T 趋于无限大时, 谱线就变成连续的, 而其幅度 $|c_k|$ 将趋于无限小。不过 Tc_k 仍可能是有限值。这样从式(12-6)可以定义一个新的函数

$$F(jk\omega_1) = Tc_k = \frac{2\pi c_k}{\Delta\omega_k} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad (12-7)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ 。而相邻谐波之间的频率差也越来越小, 即谱线越来越靠近, 将无法分辨。这时, 原来离散的各次谐波, 其频率用 $k\omega_1$ 表示, 现在可以把 $k\omega_1$ 看作是一个连续

变量 ω 。这样取极限时式(12-7)可以写成

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (12-8)$$

上式称为傅里叶积分或傅里叶变换。它把一个时间函数变成了一个频率函数。

另外,从式(12-7)有

$$c_k = \frac{F(jk\omega_1)}{T} = \frac{\Delta\omega_k F(jk\omega_1)}{2\pi}$$

把上式代入式(12-5),得

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega_k F(jk\omega_1)}{2\pi} e^{jk\omega_1 t}$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时,上式的求和变成积分,可以写成

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (12-9)$$

此式称为傅氏反变换。

用傅氏积分可以求出非周期函数的各频率分量,正如傅氏级数对周期函数所做的那样。不过这时频率是连续变化的,各次谐波分量的幅值则应是无限小量 $\frac{F(j\omega) d\omega}{2\pi}$ [见式(12-9)]。

$F(j\omega)$ 一般是复变函数,并可写为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \text{Re}[F(j\omega)] + j\text{Im}[F(j\omega)] \\ |F(j\omega)| &= \sqrt{|\text{Re}[F(j\omega)]|^2 + |\text{Im}[F(j\omega)]|^2} \\ \theta(j\omega) &= \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[F(j\omega)]}{\text{Re}[F(j\omega)]} \right\} \end{aligned}$$

式中 $|F(j\omega)|$ 称为幅度频谱或幅频特性, $\theta(j\omega)$ 称为相位频谱或相频特性, $F(j\omega)$ 则称为 $f(t)$ 的频率特性。傅氏反变换把 $F(j\omega)$ 变成为原时间函数 $f(t)$ 。

傅里叶变换和反变换构成傅里叶变换对。它们的存在是有一定条件的。一般要求 $f(t)$ 满足狄里赫利条件,同时还要求 $f(t)$ 为绝对可积,即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 为有限值。

例 12-16 求图 12-16(a)所示脉冲波形的傅氏变换及其频谱。

解 根据式(12-8),给定脉冲波形的傅氏变换为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{+j\omega\frac{\tau}{2}}) \\ &= \frac{\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}} = \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

式中 $x = \frac{\omega\tau}{2}$,而 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$ 。 $|F(j\omega)|$ 的频谱或幅频特性如图 12-16(b)。当 $\frac{\omega\tau}{2} = \pm\pi$, $\pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ 时, $|F(j\omega)| = 0$ 。频谱是连续的,而不像图 12-15(b)频谱是离散的。但是不

难发现它们惊人地相似。

从图 12-16(b)可见,各频率分量随频率的增高而显著地减小,主要频率分量大体上集中在

$$\frac{1}{\tau} \leq f \leq \frac{1}{\tau}$$

之间。当脉冲宽度变小时,此区间就变宽,但幅度则相应地减小。所以,当要求一个窄脉冲基本上无畸变地通过一个电路时,那么此电路必须能让较宽频率范围的分量顺利通过;反之,对于宽脉冲,则对电路的频率响应要求可窄一些。

傅里叶变换在信号分析领域有广泛的应用,也可以用来进行线性电路的分析。

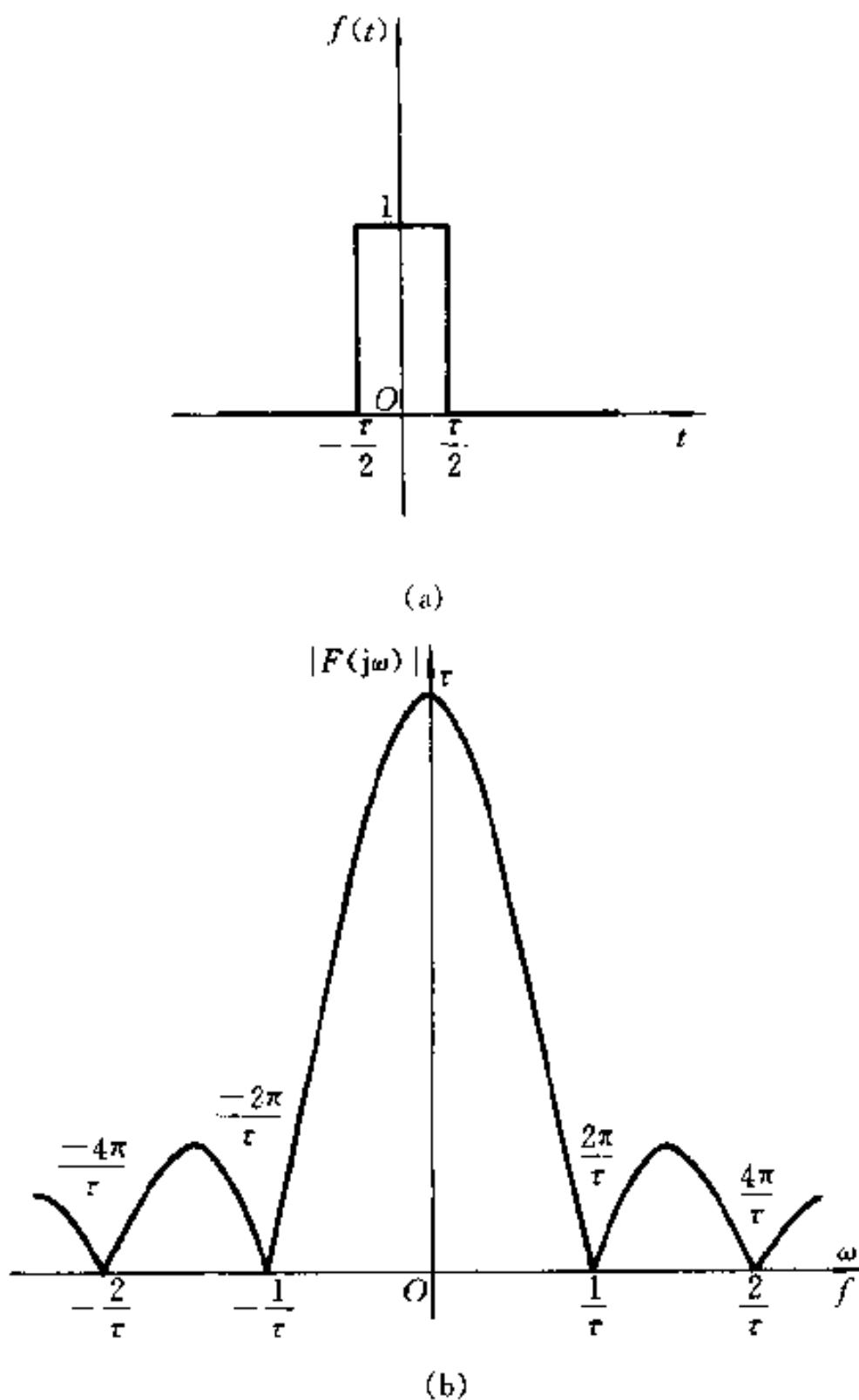


图 12-16 矩形脉冲及其幅频特性

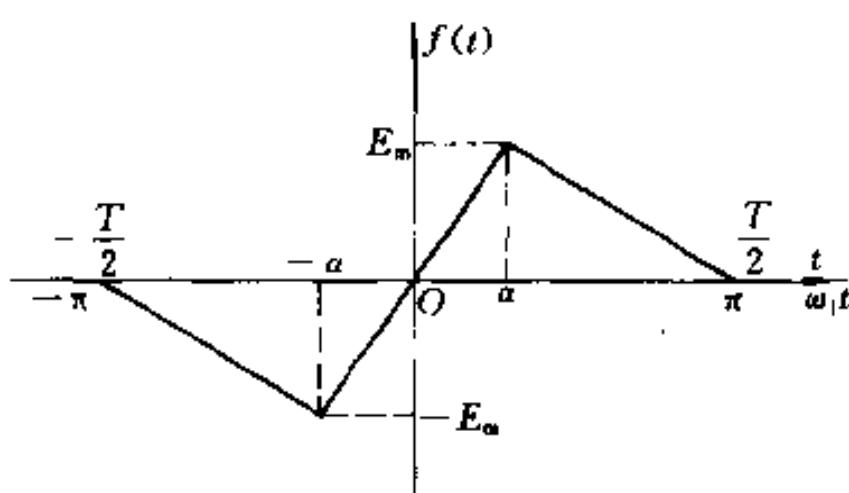
习题

12-1 求图示波形的傅里叶级数的系数。

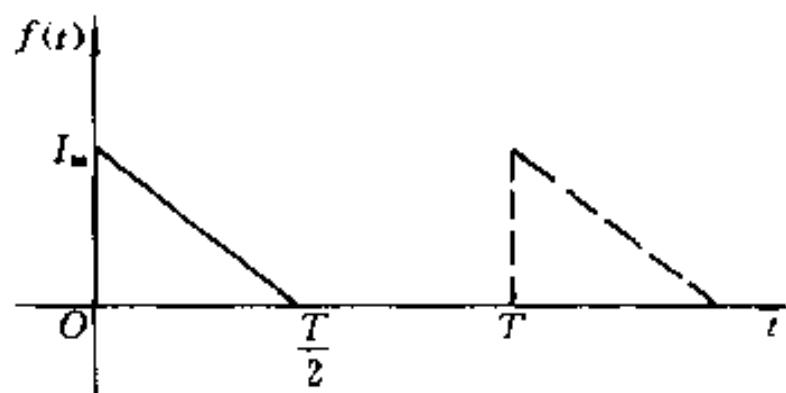
12-2 已知某信号半周期的波形如图所示。试在下列各不同条件下画出整个周期的

波形：

- (1) $a_0 = 0$;
- (2) 对所有 k , $b_k = 0$;
- (3) 对所有 k , $a_k = 0$;
- (4) a_k 和 b_k 为零, 当 k 为偶数时。



题 12·1 图



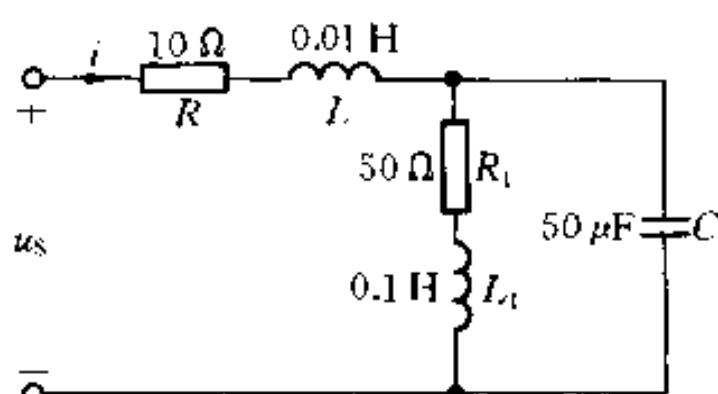
题 12·2 图

12·3 一个 $R L C$ 串联电路, 其 $R = 11 \Omega$, $L = 0.015 \text{ H}$, $C = 70 \mu\text{F}$, 外加电压为

$$u(t) = [11 + 141.4\cos(1000t) - 35.4\sin(2000t)] \text{ V}$$

试求电路中的电流 $i(t)$ 和电路消耗的功率。

12·4 电路如图所示, 电源电压为



题 12·4 图

$$u_s(t) = [50 + 100\sin(314t) - 40\cos(628t) + 10\sin(942t + 20^\circ)] \text{ V}$$

试求电流 $i(t)$ 和电源发出的功率及电源电压和电流的有效值。

12·5 有效值为 100 V 的正弦电压加在电感 L 两端时, 得电流 $I = 10 \text{ A}$, 当电压中有 3 次谐波分量, 而有效值仍为 100 V 时, 得电流 $I = 8 \text{ A}$ 。试求这一电压的基波和 3 次谐波电压的有效值。

12·6 已知一 RLC 串联电路的端口电压和电流为:

$$u(t) = [100\cos(314t) + 50\cos(942t - 30^\circ)] \text{ V}$$

$$i(t) = [10\cos(314t) + 1.755\cos(942t + \theta_3)] \text{ A}$$

试求:(1) R 、 L 、 C 的值;

(2) θ_3 的值;

(3) 电路消耗的功率。

12·7 图示电路各电源的电压为:

$$U_0 = 60 \text{ V}$$

$$u_1 = [100\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 20\sqrt{2}\cos(5\omega_1 t)] \text{ V}$$

$$u_2 = 50\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t) \text{ V}$$

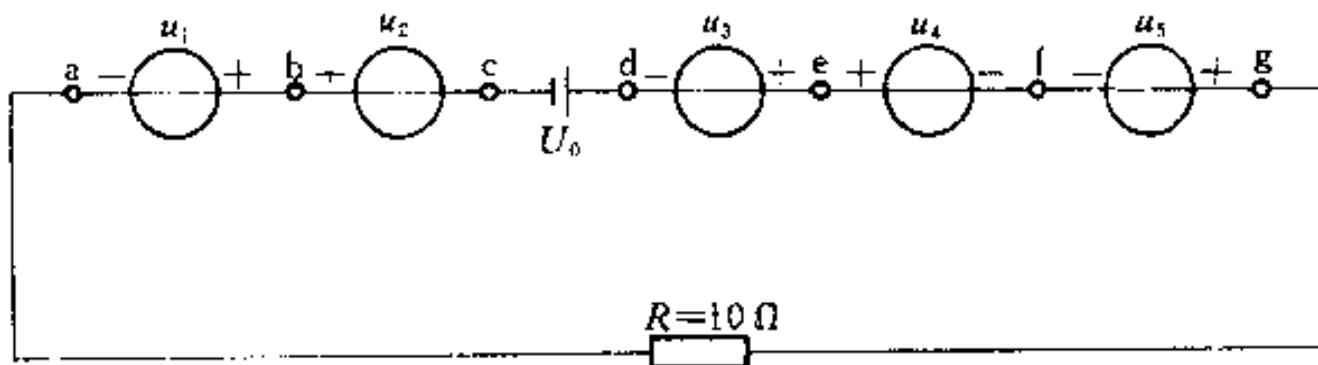
$$u_3 = [30\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 20\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t)] \text{ V}$$

$$u_4 = [80\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 10\sqrt{2}\cos(5\omega_1 t)] \text{ V}$$

$$u_5 = 10\sqrt{2}\sin(\omega_1 t) \text{ V}$$

(1) 试求 U_{ab} 、 U_{ac} 、 U_{ad} 、 U_{ae} 、 U_{af} ;

(2) 如将 U_0 换为电流源 $i_s = 2\sqrt{2}\cos(7\omega_1 t)$, 试求电压 U_{ac} 、 U_{ad} 、 U_{ae} 、 U_{af} (U_{ab} 等为对应电压的有效值)。

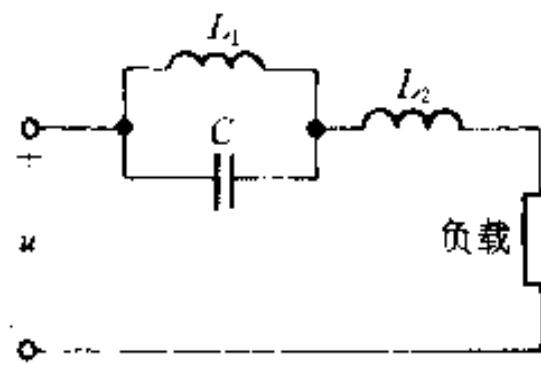


题 12-7 图

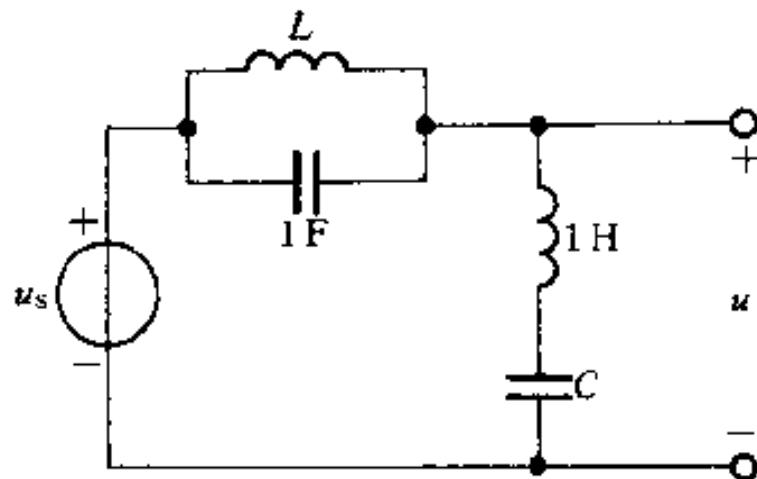
12·8 图示为滤波电路, 要求负载中不含基波分量, 但 $4\omega_1$ 的谐波分量能全部传送至负载。如 $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$, $C = 1 \mu\text{F}$, 求 L_1 和 L_2 。

12·9 图示电路中 $u_s(t)$ 为非正弦周期电压, 其中含有 $3\omega_1$ 及 $7\omega_1$ 的谐波分量。如果要求在输出电压 $u(t)$ 中不含这两个谐波分量, 问 L 、 C 应为多少?

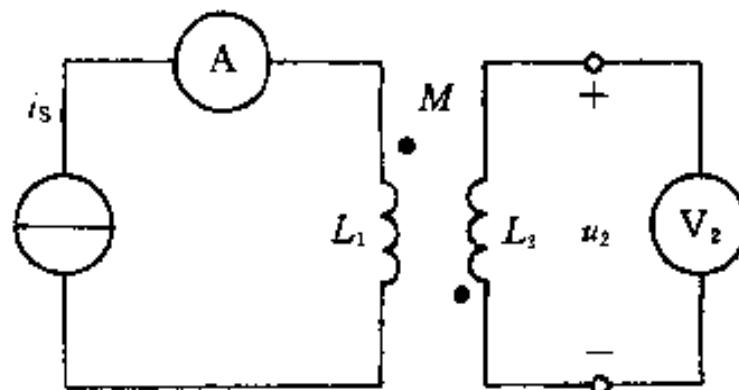
12·10 图示电路中 $i_s = [5 + 10\cos(10t - 20^\circ) - 5\sin(30t + 60^\circ)] \text{ A}$, $L_1 = L_2 = 2 \text{ H}$, $M = 0.5 \text{ H}$ 。求图中交流电表的读数和 u_2 。



题 12-8 图

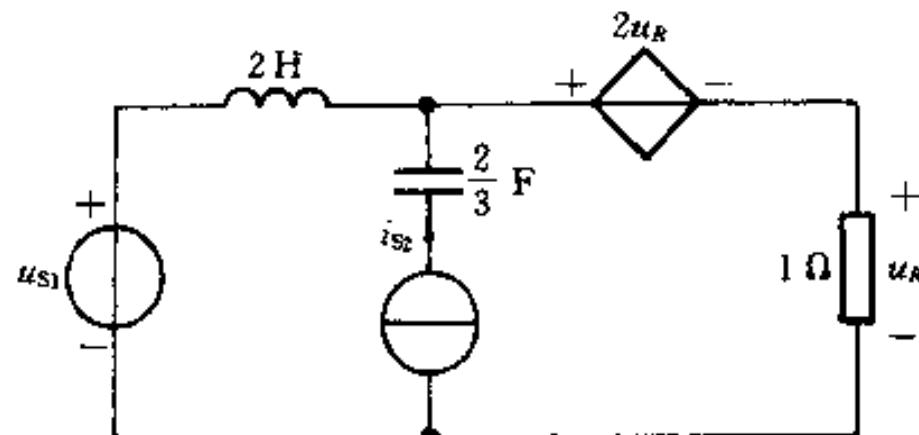


题 12-9 图



题 12-10 图

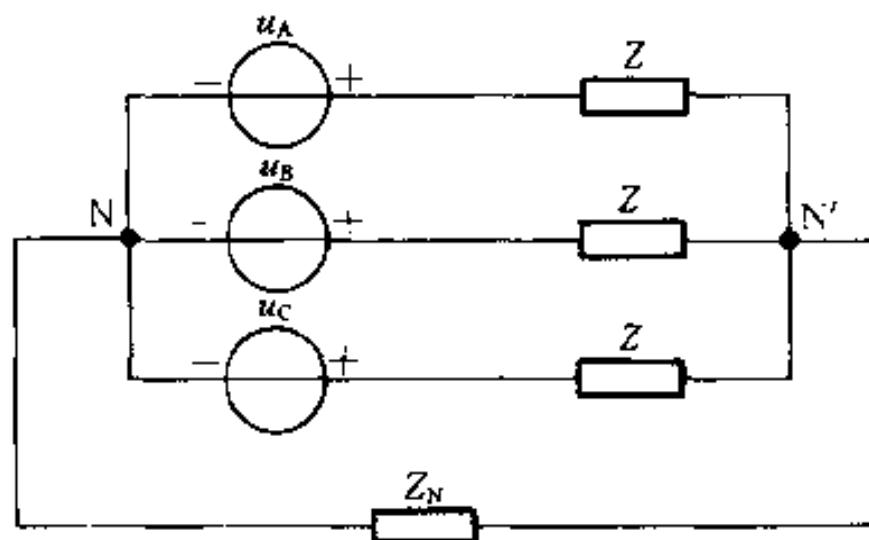
12-11 图示电路中 $u_{s1} = [1.5 + 5\sqrt{2}\sin(2t + 90^\circ)]$ V, 电流源电流 $i_{s2} = 2\sin(1.5t)$ A, 求 u_R 及 u_{s1} 发出的功率。



题 12-11 图

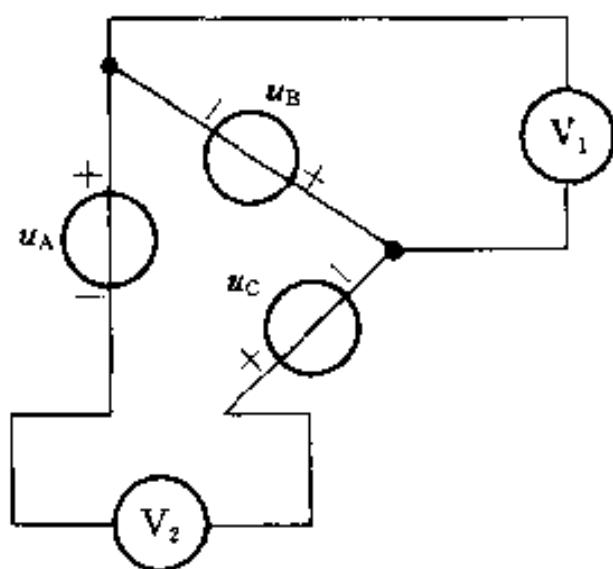
12-12 对称三相星形连接的发电机的 A 相电压为 $u_A = [215\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) - 30\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t) + 10\sqrt{2}\cos(5\omega_1 t)]$ V, 在基波频率下负载阻抗为 $Z = (6 + j3)$ Ω, 中线阻抗 $Z_N = (1 +$

j2) Ω 。试求各相电流、中线电流及负载消耗的功率。如不接中线,再求各相电流及负载消耗的功率;这时中点电压 $U_{N'N}$ 为多少?



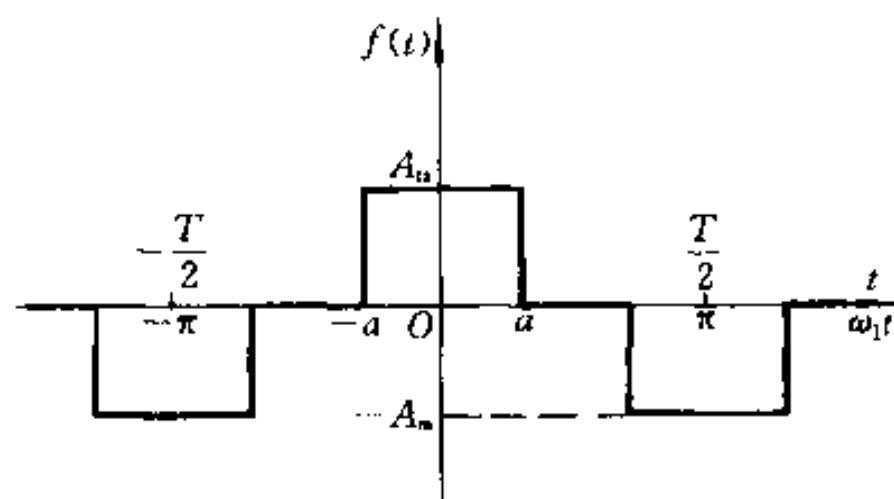
题 12-12 图

12-13 如果将上题中三相电源连接成三角形并计及每相电源的阻抗,(1)试求测各相电压的电压表读数,即题图中 V_1 的读数,但三角形电源没有插入电压表 V_2 ;(2)打开三角形电源接入电压表 V_2 ,如图示,试求此时两个电压表的读数。



题 12-13 图

12-14 求图示波形的傅里叶级数的指数形式的系数。

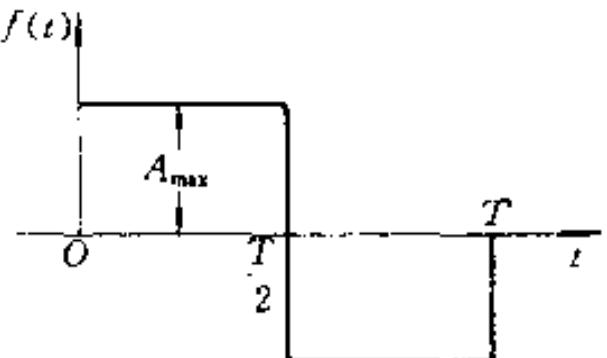
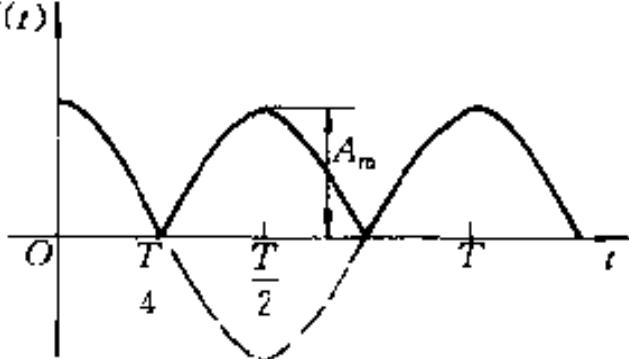


题 12-14 图

表 12-1

$f(t)$ 的波形图	$f(t)$ 分解为傅里叶级数	A (有效值)	A_{av} (平均值)
	$f(t) = A_m \cos(\omega_1 t)$	$\frac{A_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2A_m}{\pi}$
	$f(t) = \frac{4A_{\text{max}}}{\alpha\pi} \left[\sin\alpha \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{9} \sin(3\alpha) \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{25} \sin(5\alpha) \sin(5\omega_1 t) + \dots + \frac{1}{k^2} \alpha \sin(k\alpha) \sin(k\omega_1 t) + \dots \right]$ <p style="text-align: center;">(式中 $\alpha = \frac{2\pi d}{T}$, k 为奇数)</p>	$A_{\text{max}} \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi}}$	$A_{\text{max}} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right)$
	$f(t) = A_{\text{max}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \dots \right] \right\}$	$\frac{A_{\text{max}}}{\sqrt{3}}$	$\frac{A_{\text{max}}}{2}$
	$f(t) = A_{\text{max}} \left\{ \alpha + \frac{2}{\pi} \left[\sin(\alpha\pi) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \sin(2\alpha\pi) \cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\alpha\pi) \cos(3\omega_1 t) + \dots \right] \right\}$	$\sqrt{\alpha} A_{\text{max}}$	αA_{max}
	$f(t) = \frac{8A_{\text{max}}}{\pi^2} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{9} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{25} \sin(5\omega_1 t) - \dots + \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \sin(k\omega_1 t) + \dots \right] \quad (k \text{ 为奇数})$	$\frac{A_{\text{max}}}{\sqrt{3}}$	$\frac{A_{\text{max}}}{2}$

续表

$f(t)$ 的波形图	$f(t)$ 分解为傅里叶级数	A (有效值)	A_m (平均值)
	$f(t) = \frac{4A_{\max}}{\pi} [\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + \dots + \frac{1}{k}\sin(k\omega_1 t) + \dots]$ <p style="text-align: center;">(k 为奇数)</p>	A_{\max}	A_{\max}
	$f(t) = \frac{4A_m}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \times 3} \cos(2\omega_1 t) - \frac{1}{3 \times 5} \cos(4\omega_1 t) + \frac{1}{5 \times 7} \cos(6\omega_1 t) - \dots \right]$	$\frac{A_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2A_m}{\pi}$

第十三章

拉普拉斯变换

•————— 内容提要 —————•

本章介绍拉普拉斯变换法在线性电路分析中的应用。主要内容有：拉普拉斯变换的定义，拉普拉斯变换与电路分析有关的一些基本性质，求拉普拉斯反变换的部分分式法（分解定理），还将介绍 KCL 和 KVL 的运算形式，运算阻抗，运算导纳及运算电路，并通过实例说明它们在电路分析中的应用。

§ 13-1 拉普拉斯变换的定义

对于具有多个动态元件的复杂电路，用直接求解微分方程的方法比较困难。例如对于一个 n 阶方程，直接求解时需要知道变量及其各阶导数[直至 $(n-1)$ 阶导数]在 $t=0_+$ 时刻的值，而电路中给定的初始状态是各电感电流和电容电压在 $t=0_-$ 时刻的值，从这些值得求得所需初始条件的工作量很大。积分变换法是通过积分变换，把已知的时域函数变换为频域函数，从而把时域的微分方程化为频域函数的代数方程。求出频域函数后，再作反变换，返回时域，可以求得满足电路初始条件的原微分方程的解答，而不需要确定积分常数。拉普拉斯变换和傅里叶变换都是积分变换，但拉普拉斯变换比傅里叶变换有更广泛的适用性，所以拉普拉斯变换法是求解高阶复杂动态电路的有效而重要的方法之一。

一个定义在 $[0, \infty)$ 区间的函数 $f(t)$ ，它的拉普拉斯变换式 $F(s)$ 定义为

$$F(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (13-1)$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复数， $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数， $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数。拉普拉斯变换简称为拉氏变换。

式(13-1)表明拉氏变换是一种积分变换。还可以看出 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 存在条件是该式右边的积分为有限值，故 e^{-st} 称为收敛因子。对于一个的

数 $f(t)$, 如果存在正的有限值常数 M 和 c , 使得对于所有 t 满足条件

$$|f(t)| \leq M e^c$$

则 $f(t)$ 的拉氏变换式 $F(s)$ 总存在, 因为总可以找到一个合适的 s 值, 使式 (13-1) 中的积分为有限值^①。假设本书涉及的 $f(t)$ 都满足此条件。

从式(13-1)还可看出, 把原函数 $f(t)$ 与 e^{-st} 的乘积从 $t=0$ 到 ∞ 对 t 进行积分, 则此积分的结果不再是 t 的函数, 而是复变量 s 的函数。所以拉氏变换是把一个时间域的函数 $f(t)$ 变换到 s 域内的复变函数 $F(s)$ 。变量 s 称为复频率。应用拉氏变换法进行电路分析称为电路的一种复频域分析方法, 又称为运算法。定义中拉氏变换的积分从 $t=0$ 开始, 可以计及 $t=0$ 时 $f(t)$ 包含的冲激, 从而给计算存在冲激函数电压和电流的电路带来方便。

如果 $F(s)$ 已知, 要求出与它对应的原函数 $f(t)$, 由 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换称为拉普拉斯反变换, 它定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (13-2)$$

式中 c 为正的有限常数。

通常可用符号 $\mathcal{L}[]$ 表示对方括号里的时域函数作拉氏变换, 用符号 $\mathcal{L}^{-1}[]$ 表示对方括号里的复变函数作拉氏反变换。

例 13-1 求以下函数的象函数:

- (1) 单位阶跃函数;
- (2) 单位冲激函数;
- (3) 指数函数。

解 (1) 单位阶跃函数的象函数

$$f(t) = \epsilon(t)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \epsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

(2) 单位冲激函数的象函数

$$f(t) = \delta(t)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^0 \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s(0)} = 1 \end{aligned}$$

^① 本书着重拉氏变换在电路分析中的应用, 关于式(13-1)存在的条件以及 s 的取值问题等有关拉氏变换的数学理论问题, 可参阅有关教材。

可以看出按式(13-1)的定义,能计及 $t=0$ 时 $f(t)$ 所包含的冲激函数。

(3) 指数函数的象函数

$$f(t) = e^{\alpha t} \quad (\alpha \text{ 为实数})$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0+}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{(s-\alpha)} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{0+}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-\alpha} \end{aligned}$$

§ 13-2 拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换有许多重要性质,本节仅介绍与分析线性电路有关的一些基本性质。

1. 线性性质

设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是两个任意的时间函数,它们的象函数分别为 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$, A_1 和 A_2 是两个任意实常数,则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] &= A_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + A_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \\ &= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \mathcal{L}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] &= \int_{0+}^{\infty} [A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= A_1 \int_{0+}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + A_2 \int_{0+}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s) \end{aligned}$$

例 13-2 若:(1) $f(t) = \sin(\omega t)$

$$(2) f(t) = K(1 - e^{-\alpha t})$$

上述函数的定义域为 $[0, \infty]$,求其象函数。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \mathcal{L}[K(1 - e^{-\alpha t})] &= \mathcal{L}[K] - \mathcal{L}[K e^{-\alpha t}] \\ &= \frac{K}{s} - \frac{K}{s+\alpha} \end{aligned}$$

$$= \frac{K\alpha}{s(s + \alpha)}$$

由此可见,根据拉氏变换的线性性质,求函数乘以常数的象函数以及求几个函数相加减的结果的象函数时,可以先求各函数的象函数再进行计算。

2. 微分性质

函数 $f(t)$ 的象函数与其导数 $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ 的象函数之间有如下关系

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

则 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0_+)$

证 $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$

设 $e^{-st} = u, f'(t) dt = dv$, 则 $du = -se^{-st} dt, v = f(t)$ 。由于 $\int u dv = uv - \int v du$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt &= f(t)e^{-st} \Big|_{0_+}^{\infty} - \int_{0_+}^{\infty} f(t)(-se^{-st}) dt \\ &= -f(0_+) + s \int_{0_+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

只要 s 的实部 σ 取得足够大, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$, 则 $F(s)$ 存在, 于是得

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0_+)$$

例 13-3 应用导数性质求下列函数的象函数:

$$(1) f(t) = \cos(\omega t);$$

$$(2) f(t) = \delta(t).$$

解 (1) 由于 $\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega \cos(\omega t)$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega} \frac{d\sin(\omega t)}{dt}$$

而 $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ (例 13-1 中已求得)

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d\sin(\omega t)}{dt}\right] = \frac{1}{\omega} \left(s \frac{1}{s^2 + \omega^2} - 0\right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(2) 由于 $\delta(t) = \frac{d}{dt} \epsilon(t)$, 而 $\mathcal{L}[\epsilon(t)] = \frac{1}{s}$, 所以

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right] = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$$

此结果与例 13-1 所得结果完全相同。

3. 积分性质

函数 $f(t)$ 的象函数与其积分 $\int_{0+}^{\infty} f(\xi) d\xi$ 的象函数之间满足如下关系

若

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

则

$$\mathcal{L}\left[\int_{0+}^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{F(s)}{s}$$

证 令 $u = \int f(t) dt$, $dv = e^{-st} dt$, 则 $du = f(t) dt$, $v = -\frac{e^{-st}}{s}$, 利用分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$, 所以

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\left(\int_{0+}^t f(\xi) d\xi \right) e^{-st} dt \right] \\ &= \left(\int_{0+}^t f(\xi) d\xi \right) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0+}^\infty - \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) dt \\ &= \left(\int_{0+}^t f(\xi) d\xi \right) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0+}^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

只要 s 的实部 σ 足够大, 当 $t \rightarrow \infty$ 时和 $t = 0$ 时, 等式右边第一项都为零, 所以有

$$\mathcal{L}\left[\int_{0+}^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{F(s)}{s}$$

例 13-4 利用积分性质求函数 $f(t) = t$ 的象函数。

解 由于 $f(t) = t = \int_0^t \varepsilon(\xi) d\xi$, 所以

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

4. 延迟性质

函数 $f(t)$ 的象函数与其延迟函数 $f(t - t_0)$ 的象函数之间有如下关系

若

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

则

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

其中, 当 $t < t_0$ 时, $f(t - t_0) = 0$. 令 $\tau = t - t_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - t_0)] &= \int_0^\infty f(t - t_0) e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^\infty f(t - t_0) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s(r+t_0)} d\tau \\
 &= e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-sr} d\tau \\
 &= e^{-st_0} F(s)
 \end{aligned}$$

例 13-5 求图 13-1 所示矩形脉冲的象函数。

解 图 13-1 中的矩形脉冲可用解析式表示为

$$f(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t-t)$$

因为 $\mathcal{L}[\epsilon(t)] = \frac{1}{s}$, 根据延迟性质

$$\mathcal{L}[\epsilon(t-\tau)] = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

又根据拉氏变换的线性性质, 得

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\epsilon(t) - \epsilon(t-t)]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-st}$$

$$= \frac{1}{s}(1 - e^{-st})$$

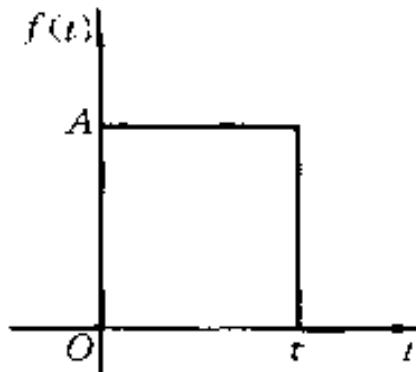


图 13-1 例 13-5 图

根据以上介绍的拉氏变换的定义及与电路分析有关的拉氏变换的一些基本性质, 可以方便地求得一些常用的时间函数的象函数, 表 13-1 为常用函数的拉氏变换表。

表 13-1

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$A\delta(t)$	A	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
$A\epsilon(t)$	A/s	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Ae^{-at}	$\frac{A}{s+a}$	t	$\frac{1}{s^2}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{s \sin \psi + \omega \cos \psi}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^n + 1}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$

§ 13-3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

用拉氏变换求解线性电路的时域响应时,需要把求得的响应的拉氏变换式反变换为时间函数。拉氏反变换可以用式(13-2)求得,但涉及到计算一个复变函数的积分,一般比较复杂。如果象函数比较简单,往往能从拉氏变换表中查出其原函数。对于不能从表中查出原函数的情况,如果能设法把象函数分解为若干较简单的、能够从表中查到的项,就可查出各项对应的原函数,而它们之和即为所求原函数。电路响应的象函数通常可表示为两个实系数的 s 的多项式之比,即 s 的一个有理分式

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} \quad (13-3)$$

式中 m 和 n 为正整数,且 $n \geq m$ ^①。

把 $F(s)$ 分解成若干简单项之和,而这些简单项可以在拉氏变换表中找到,这种方法称为部分分式展开法,或称为分解定理。

用部分分式展开有理分式 $F(s)$ 时,需要把有理分式化为真分式。若 $n > m$,则 $F(s)$ 为真分式。若 $n = m$,则

$$F(s) = A + \frac{N_0(s)}{D(s)}$$

式中 A 是一个常数,其对应的时间函数为 $A\delta(t)$,余数项 $\frac{N_0(s)}{D(s)}$ 是真分式。

用部分分式展开真分式时,需要对分母多项式作因式分解,求出 $D(s) = 0$ 的根。 $D(s) = 0$ 的根可以是单根,共轭复根和重根几种情况。

1. 如果 $D(s) = 0$ 有 n 个单根,设 n 个单根分别是 p_1, p_2, \dots, p_n 。于是 $F(s)$ 可以展开为

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \quad (13-4)$$

式中 K_1, K_2, \dots, K_n 是待定系数。

将上式两边都乘以 $(s - p_1)$,得

$$(s - p_1)F(s) = K_1 + (s - p_1)\left(\frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}\right)$$

令 $s = p_1$,则等式除第一项外都变为零,这样求得

$$K_1 = [(s - p_1)F(s)]_{s=p_1}$$

① 在电路分析中,通常不出现 $n < m$ 的情况。

同理可求得 K_2, K_3, \dots, K_n 。所以确定式(13-4)中各待定系数的公式为

$$K_i = [(s - p_i)F(s)]_{s=p_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

因为 p_i 是 $D(s)=0$ 的一个根, 故上面关于 K_i 的表达式为 $\frac{0}{0}$ 的不定式, 可以用求极限的方法确定 K_i 的值, 即

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s - p_i)N(s)}{D(s)} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s - p_i)N'(s) + N(s)}{D'(s)} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

所以确定式(13-4)中各待定系数的另一公式为

$$K_i = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (13-5)$$

确定了式(13-4)中各待定系数后, 相应的原函数为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}$$

例 13-6 求 $F(s) = \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解 因为 $F(s) = \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s} = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}$

所以: $D(s)=0$ 的根为

$$p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -5$$

$$D'(s) = 3s^2 + 14s + 10$$

根据式(13-5)确定各系数

$$K_1 = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=p_1} = \left. \frac{2s+1}{3s^2+14s+10} \right|_{s=0} = 0.1$$

同理求得:

$$K_2 = 0.5$$

$$K_3 = -0.6$$

所以 $f(t) = 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t}$

2. 如果 $D(s)=0$ 具有共轭复根 $p_1 = \alpha + j\omega, p_2 = \alpha - j\omega$, 则

$$K_1 = [(s - \alpha - j\omega)F(s)]_{s=\alpha+j\omega} = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=\alpha+j\omega}$$

$$K_2 = [(s - \alpha + j\omega)F(s)]_{s=\alpha-j\omega} = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=\alpha-j\omega}$$

由于 $F(s)$ 是实系数多项式之比, 故 K_1, K_2 为共轭复数。

设 $K_1 = |K_1|e^{j\theta_1}$, 则 $K_2 = |K_1|e^{-j\theta_1}$, 有

$$f(t) = K_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + K_2 e^{(\alpha-j\omega)t}$$

$$\begin{aligned}
 &= |K_1| e^{j\theta_1} e^{(\sigma + j\omega)t} + |K_1| e^{-j\theta_1} e^{(\sigma - j\omega)t} \\
 &= |K_1| e^{\sigma t} [e^{j(\omega t + \theta_1)} + e^{-j(\omega t + \theta_1)}] \\
 &= 2|K_1| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta_1) \tag{13-6}
 \end{aligned}$$

例 13-7 求 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解 $D(s)=0$ 的根 $p_1 = -1+j2, p_2 = -1-j2$ 为共轭复根。

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=p_1} = \frac{s+3}{2s+2} \Big|_{s=-1+j2} \\
 &= 0.5 - j0.5 = 0.5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
 K_2 &= |K_1| e^{-j\theta_1} = 0.5\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

根据式(13-6)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 2|K_1| e^{-t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{2}e^{-t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

3. 如果 $D(s)=0$ 具有重根, 则应含 $(s-p_1)^n$ 的因式。现设 $D(s)$ 中含有 $(s-p_1)^3$ 的因式, p_1 为 $D(s)=0$ 的三重根, 其余为单根, $F(s)$ 可分解为

$$F(s) = \frac{K_{13}}{s-p_1} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{K_{11}}{(s-p_1)^3} + \left(\frac{K_2}{s-p_2} + \dots \right)^{\textcircled{1}} \tag{13-7}$$

对于单根, 仍采用 $K_i = \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=p_i}$ 公式计算。为了确定 K_{11}, K_{12} 和 K_{13} , 可以将式(13-7)两边都乘以 $(s-p_1)^3$, 则 K_{11} 被单独分离出来, 即

$$(s-p_1)^3 F(s) = (s-p_1)^2 K_{13} + (s-p_1) K_{12} + K_{11} + (s-p_1)^3 \left(\frac{K_2}{s-p_2} + \dots \right) \tag{13-8}$$

则

$$K_{11} = (s-p_1)^3 F(s) \Big|_{s=p_1}$$

再对式(13-8)两边对 s 求导一次, K_{12} 被分离出来, 即

$$\frac{d}{ds} [(s-p_1)^3 F(s)] = 2(s-p_1) K_{13} + K_{12} + \frac{d}{ds} \left[(s-p_1)^3 \left(\frac{K_2}{s-p_2} + \dots \right) \right]$$

所以

$$K_{12} = \frac{d}{ds} [(s-p_1)^3 F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

① 括号中为其余单根项。

用同样的方法可得

$$K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s - p_1)^3 F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

从以上分析过程可以推论得出当 $D(s) = 0$ 具有 q 阶重根, 其余为单根时的分解式为

$$F(s) = \frac{K_{1q}}{s - p_1} + \frac{K_{1(q-1)}}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{11}}{(s - p_1)^q} + \left(\frac{K_2}{s - p_2} + \cdots \right)$$

式中

$$K_{11} = (s - p_1)^q F(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} [(s - p_1)^q F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s - p_1)^q F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

.....

$$K_{1q} = \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} [(s - p_1)^q F(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (13-9)$$

如果 $D(s) = 0$ 具有多个重根时, 对每个重根分别利用上述方法即可得到各系数。

例 13-8 求 $F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解 令 $D(s) = (s+1)^3 s^2 = 0$, 有 $p_1 = -1$ 为三重根, $p_2 = 0$ 为二重根, 所以

$$F(s) = \frac{K_{13}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{s} + \frac{K_{21}}{s^2}$$

首先以 $(s+1)^3$ 乘以 $F(s)$ 得

$$(s+1)^3 F(s) = \frac{1}{s^2}$$

应用式(13-9)得:

$$K_{11} = \frac{1}{s^2} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2} \Big|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s^2} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{6}{s^4} \Big|_{s=-1} = 3$$

同样为计算 K_{21} 和 K_{22} , 首先以 s^2 乘 $F(s)$ 得

$$s^2 F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

应用式(13-9)可求得:

$$K_{21} = 1$$

$$K_{22} = -3$$

所以

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2} = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}$$

相应的原函数为

$$f(t) = 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - 3 + t$$

§ 13-4 运算电路

基尔霍夫定律的时域表示式为

对任一结点, $\sum i(t) = 0$; 对任一回路, $\sum u(t) = 0$

根据拉氏变换的线性性质得出基尔霍夫定律的运算形式如下:

对任一结点 $\sum I(s) = 0$

对任一回路 $\sum U(s) = 0$

根据元件电压、电流的时域关系, 可以推导出各元件电压电流关系的运算形式。

图 13-2(a)所示电阻元件的电压电流关系为 $u(t) = Ri(t)$, 两边取拉氏变换, 得

$$U(s) = RI(s) \quad (13-10)$$

式(13-10)就是电阻 VCR 的运算形式, 图 13-2(b)称为电阻 R 的运算电路

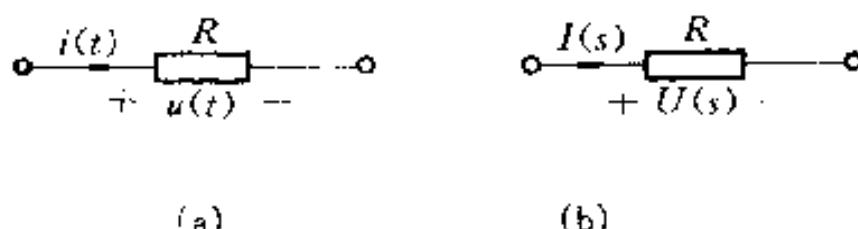


图 13-2 电阻的运算电路

对于图 13-3(a)所示, 电感有 $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, 取拉氏变换并根据拉氏变换的微分性质, 得:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] \\ U(s) &= sLI(s) - Li(0_+) \end{aligned} \quad (13-11a)$$

式中 sL 为电感的运算阻抗, $i(0_+)$ 表示电感中的初始电流。这样就可以得到图 13-3(b)所示运算电路, $Li(0_+)$ 表示附加电压源的电压, 它反映了电感中初始

电流的作用。还可以把式(13-11a)改写为

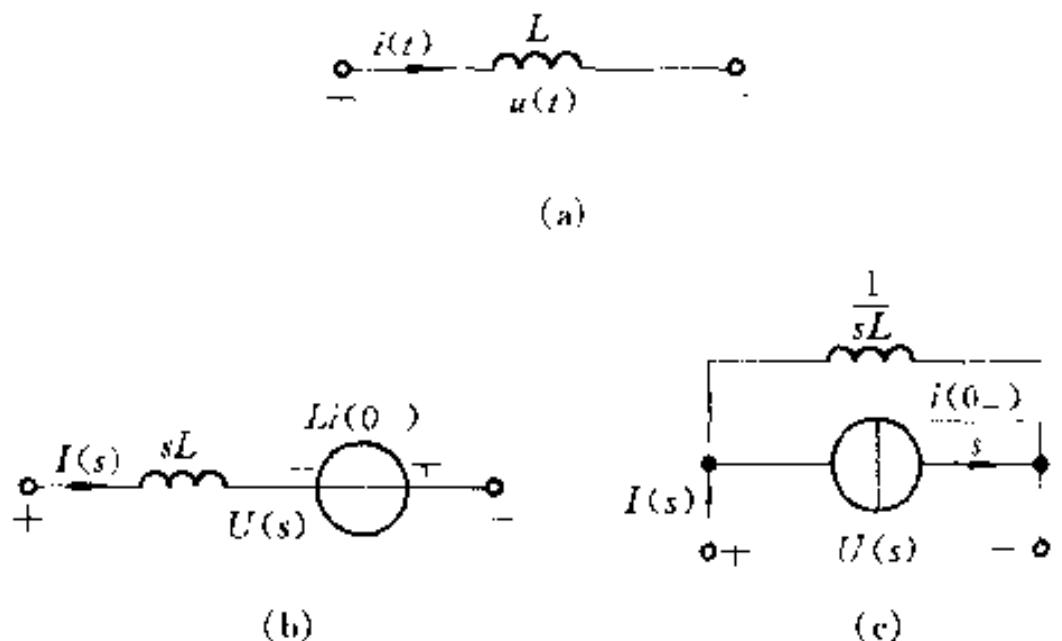


图 13-3 电感的运算电路

$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i(0_-)}{s} \quad (13-11b)$$

就可以获得图 13-3(c)所示运算电路,其中 $\frac{1}{sL}$ 为电感的运算导纳, $\frac{i(0_-)}{s}$ 表示附加电流源的电流。

同理,对于图 13-4(a)所示,电容有 $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt + u(0_-)$,取拉氏变换并根据拉氏变换的积分性质,得

$$\left. \begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u(0_-)}{s} \\ I(s) &= sCU(s) - Cu(0_-) \end{aligned} \right\} \quad (13-12)$$

这样可以分别获得图 13-4(b)、(c)所示运算电路,其中 $\frac{1}{sC}$ 和 sC 分别为电容 C 的运算阻抗和运算导纳, $\frac{u(0_-)}{s}$ 和 $Cu(0_-)$ 分别为反映电容初始电压的附加电压源的电压和附加电流源的电流。

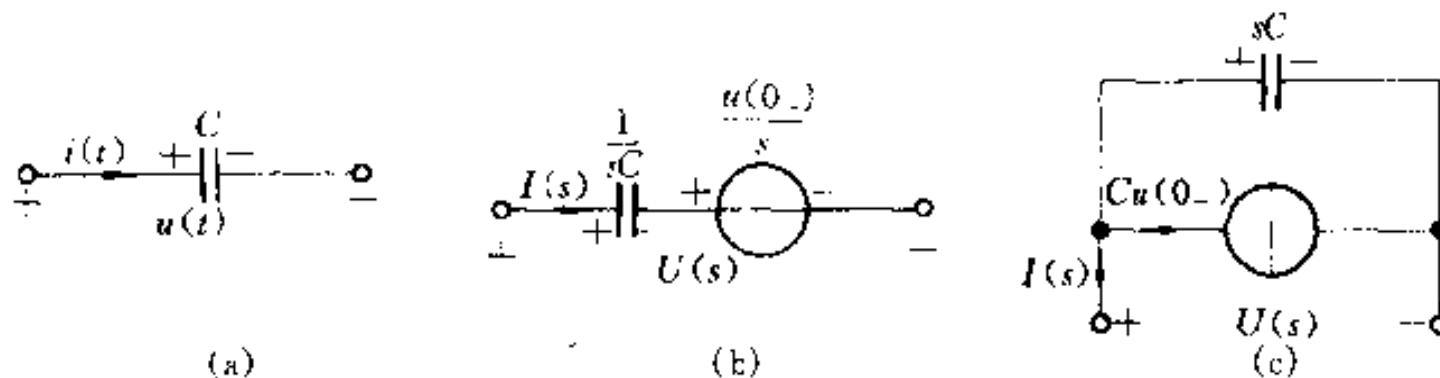


图 13-4 电容的运算电路

对两个耦合电感,运算电路中应包括由于互感引起的附加电源。根据图

13-5(a), 有:

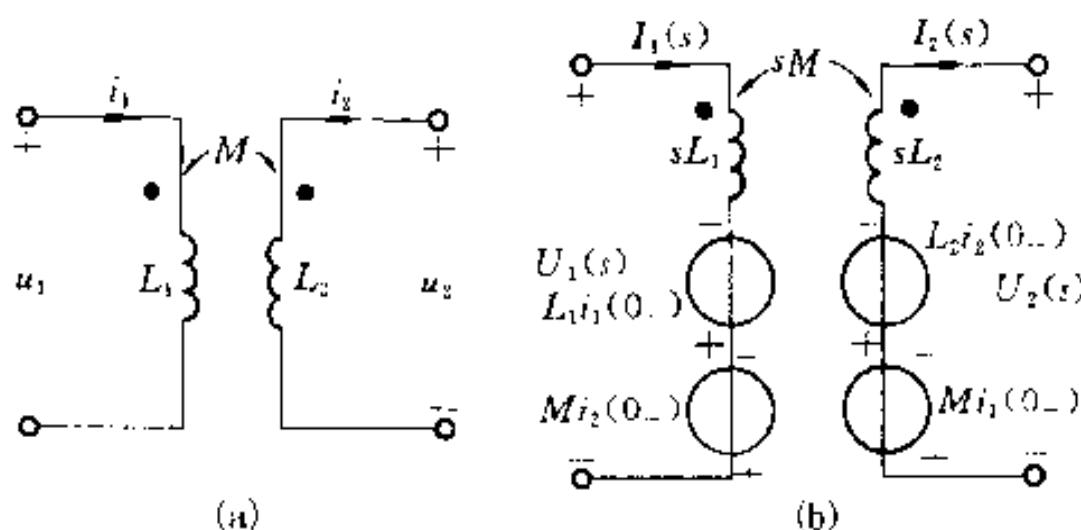


图 13-5 耦合电感的运算电路

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

对上式两边取拉氏变换有

$$\begin{aligned} U_1(s) &= sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) + sMI_2(s) - Mi_2(0_-) \\ U_2(s) &= sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0_-) + sMI_1(s) - Mi_1(0_-) \end{aligned} \quad (13-13)$$

式中 sM 称为互感运算阻抗, $Mi_1(0_-)$ 和 $Mi_2(0_-)$ 都是附加的电压源, 附加电压源的方向与电流 i_1 、 i_2 的参考方向有关。图 13-5(b) 为具有耦合电感的运算电路。

图 13-6(a) 所示为 RLC 串联电路。设电源电压为 $u(t)$, 电感中初始电流为 $i(0_-)$, 电容中初始电压为 $u_c(0_-)$ 。如用运算电路表示, 将得到图 13-6(b)。

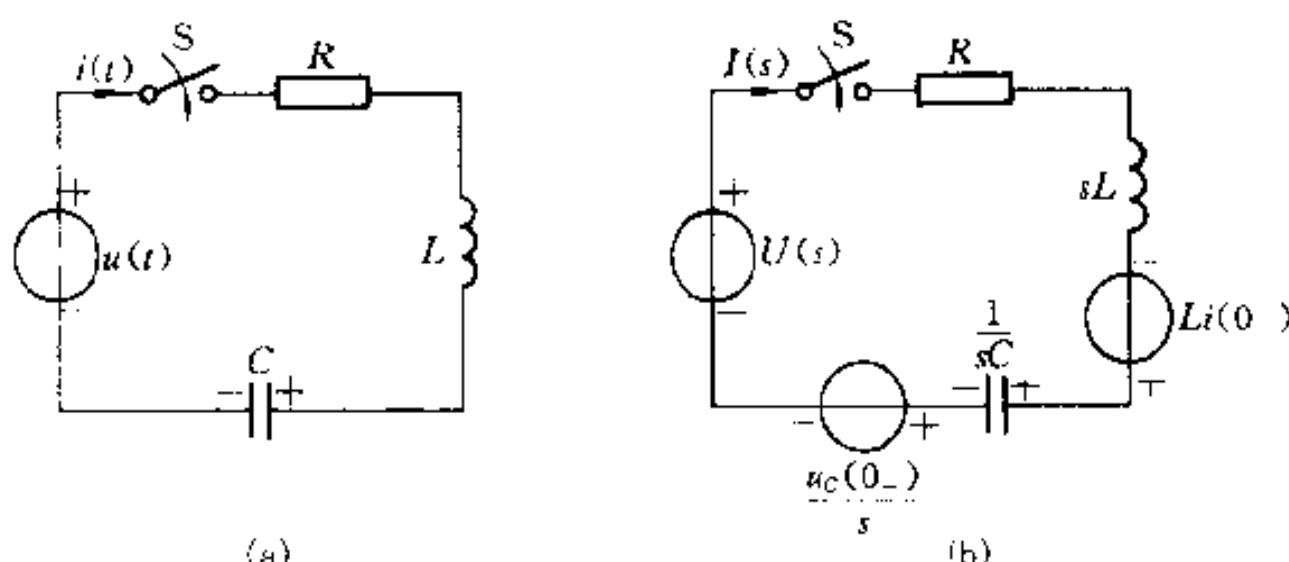


图 13-6 RLC 串联电路

根据 $\sum U(s) = 0$, 有

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0_-) + \frac{1}{sC}I(s) - \frac{u_c(0_-)}{s} = U(s)$$

或：

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = U(s) + Li(0_-) - \frac{u_c(0_-)}{s}$$

$$Z(s)I(s) = U(s) + Li(0_-) - \frac{u_c(0_-)}{s}$$

式中 $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ 为 RLC 串联电路的运算阻抗。在零值初始条件下， $i(0_-) = 0, u_c(0_-) = 0$, 则有

$$Z(s)I(s) = U(s)$$

上式即运算形式的欧姆定律。

§ 13-5 应用拉普拉斯变换法分析线性电路

运算法与相量法的基本思想类似。相量法把正弦量变换为相量(复数), 从而把求解线性电路的正弦稳态问题归结为以相量为变量的线性代数方程。运算法把时间函数变换为对应的象函数, 从而把问题归结为求解以象函数为变量的线性代数方程。当电路的所有独立初始条件为零时, 电路元件 VCR 的相量形式与运算形式是类似的, 加之 KCL 和 KVL 的相量形式与运算形式也是类似的, 所以对于同一电路列出的相量方程和零状态下的运算形式的方程在形式上相似, 但这两种方程具有不同的意义。在非零状态条件下, 电路方程的运算形式中还应考虑附加电源的作用。当电路中的非零独立初始条件考虑成附加电源之后, 电路方程的运算形式仍与相量方程类似。可见相量法中各种计算方法和定理在形式上完全可以移用于运算法。

在运算法中求得象函数之后, 利用拉氏反变换就可以求得对应的时间函数。

根据上述思想, 以下将通过一些实例说明拉氏变换法在线性电路分析中的应用。

例 13-9 图 13-7(a) 电路原处于稳态。 $t = 0$ 时开关 S 闭合, 试用运算法求解电流 $i_1(t)$ 。

解 首先求 U_s 的拉氏变换

$$\mathcal{L}[U(s)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

由于开关闭合前电路已处于稳态, 所以电感电流 $i_L(0_-) = 0$, 电容电压 $u_c(0_-) = 1$ V。该电路的运算电路如图 13-7(b) 所示。

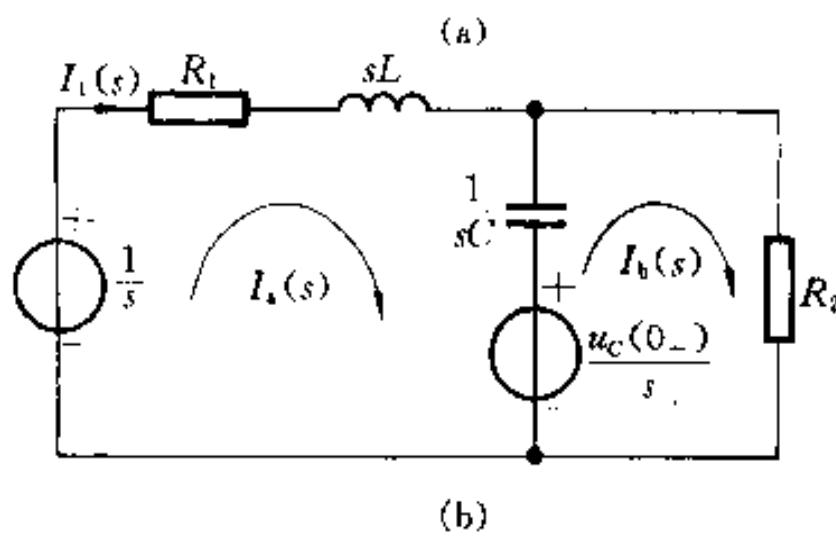
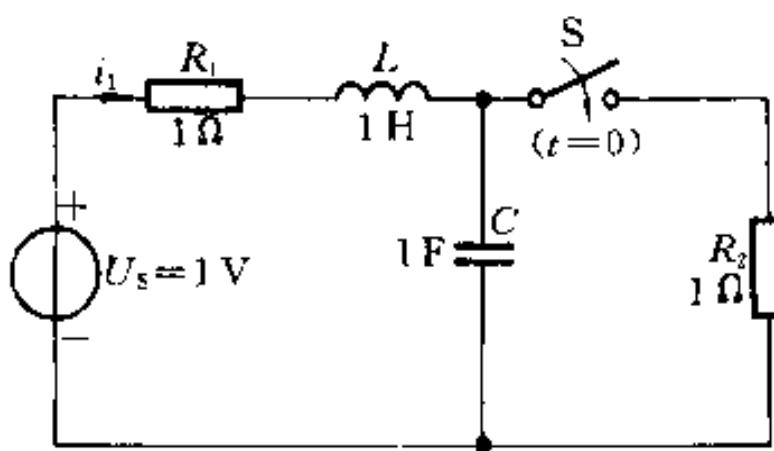


图 13-7 例 13-9 图

应用回路电流法, 设回路电流为 $I_a(s)$ 、 $I_b(s)$, 方向如图示, 可列出方程:

$$\begin{aligned} \left(R_1 + sL + \frac{1}{sC} \right) I_a(s) - \frac{1}{sC} I_b(s) &= \frac{1}{s} - \frac{u_C(0_-)}{s} \\ - \frac{1}{sC} I_a(s) + \left(R_2 + \frac{1}{sC} \right) I_b(s) &= \frac{u_C(0_-)}{s} \end{aligned}$$

代入已知数据, 得:

$$\begin{aligned} \left(1 + s + \frac{1}{s} \right) I_a(s) - \frac{1}{s} I_b(s) &= 0 \\ - \frac{1}{s} I_a(s) + \left(1 + \frac{1}{s} \right) I_b(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

解得

$$I_a(s) = I_b(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

求其反变换

$$\mathcal{L}^{-1}[I_a(s)] = \frac{1}{2}(1 + e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t)$$

所以 $i_1(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) \text{ A}$

例 13-10 图13-8(a)所示为 RC 并联电路, 激励为电流源 $i_s(t)$, 若:

$$(1) i_s(t) = \epsilon(t) \text{ A}$$

$$(2) i_s(t) = \delta(t) \text{ A}$$

试求电路响应 $u(t)$ 。

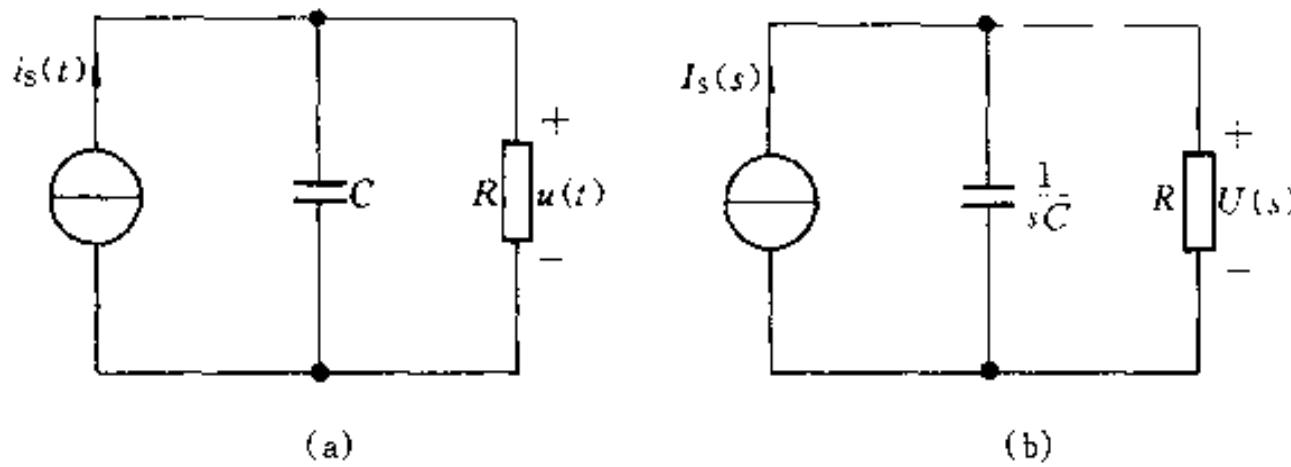


图 13-8 例 13-10 图

解 运算电路如图 13-8(b) 所示。

$$(1) \text{ 当 } i_s(t) = \epsilon(t) \text{ A} \text{ 时, } I_s(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= Z(s)I_s(s) = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{sC \left(s + \frac{1}{RC} \right)} = \frac{R}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

其反变换为

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = R(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})\epsilon(t) \text{ V}$$

$$(2) \text{ 当 } i_s(t) = \delta(t) \text{ A} \text{ 时, } I_s(s) = 1$$

$$U(s) = Z(s)I_s(s) = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

其反变换为

$$u(t) = \frac{1}{C}e^{-\frac{1}{RC}t}\epsilon(t) \text{ V}$$

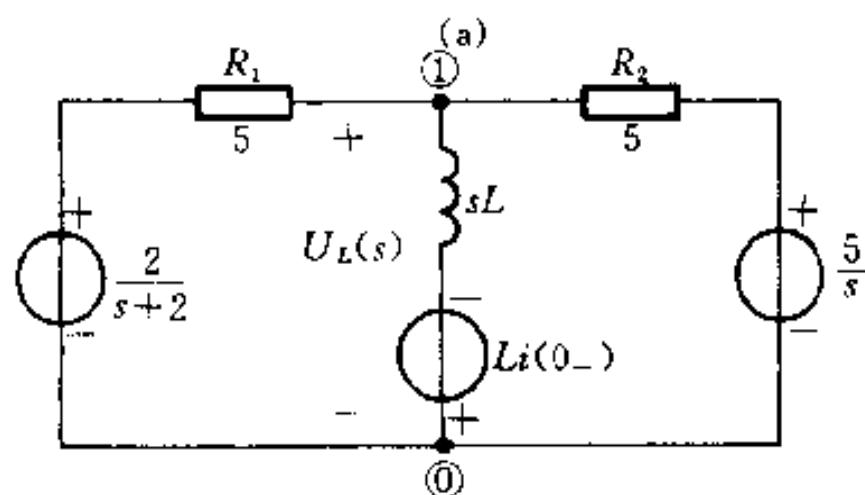
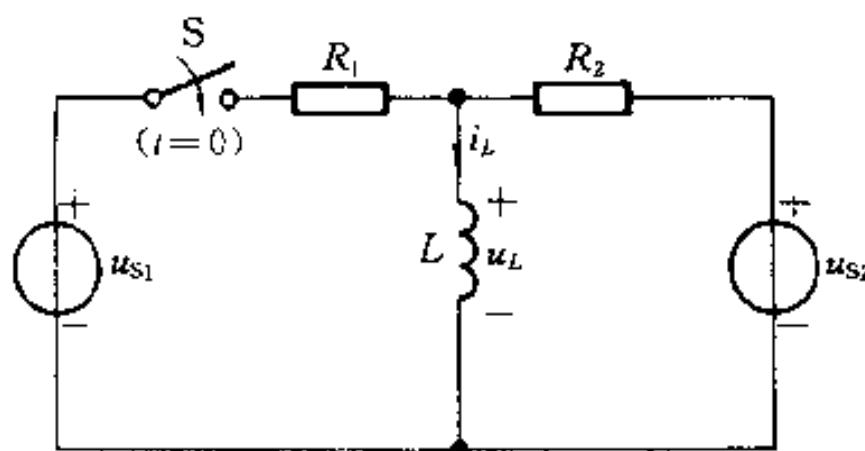
以上结果分别为 RC 并联电路的阶跃响应和冲激响应。用拉氏变换法求得的结果与第六章的结果相同。

例 13-11 图 13-9(a) 所示电路中, 电路原处于稳态, $t=0$ 时将开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 时的 $u_L(t)$, 已知 u_{S1} 为指数电压, $u_{S1} = 2e^{-2t} \text{ V}$, u_{S2} 为直流电压, $u_{S2} = 5 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ 。

解 与图 13-9(a) 相对应的运算电路见图 13-9(b), 其中:

$$\mathcal{L}[u_{S1}] = \mathcal{L}[2e^{-2t}] = \frac{2}{s+2}$$

$$\mathcal{L}[u_{\infty}] = \mathcal{Y}[5] = \frac{5}{s}$$



(b)

图 13-9 例 13-11 图

电感电流的初始值

$$i_L(0^-) = \frac{u_{\infty}}{R_2} = 1 \text{ A}$$

应用结点法求解。设①点为参考结点, 结点电压 $U_{nl}(s)$ 就是 $U_L(s)$ 。有

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}\right)U_L(s) = \frac{\frac{2}{s+2}}{R_1} + \frac{\frac{5}{s}}{R_2} - \frac{Li(0^-)}{sL}$$

代入已知数据, 得:

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{s} + \frac{1}{sL}\right)U_L(s) = \frac{2}{5(s+2)} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s}$$

$$U_L(s) = \frac{2s}{(s+2)(2s+5)}$$

$$U_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_L(s)] = (-4e^{-2t} + 5e^{-2.5t}) \text{ V}$$

例 13-12 图 13-10(a) 所示电路中, 已知 $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $L_1 = L_2 = 0.1 \text{ H}$, $M = 0.05 \text{ H}$, 激励为直流电压 $U_s = 1 \text{ V}$, 试求 $t = 0$ 时开关闭合后的电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。

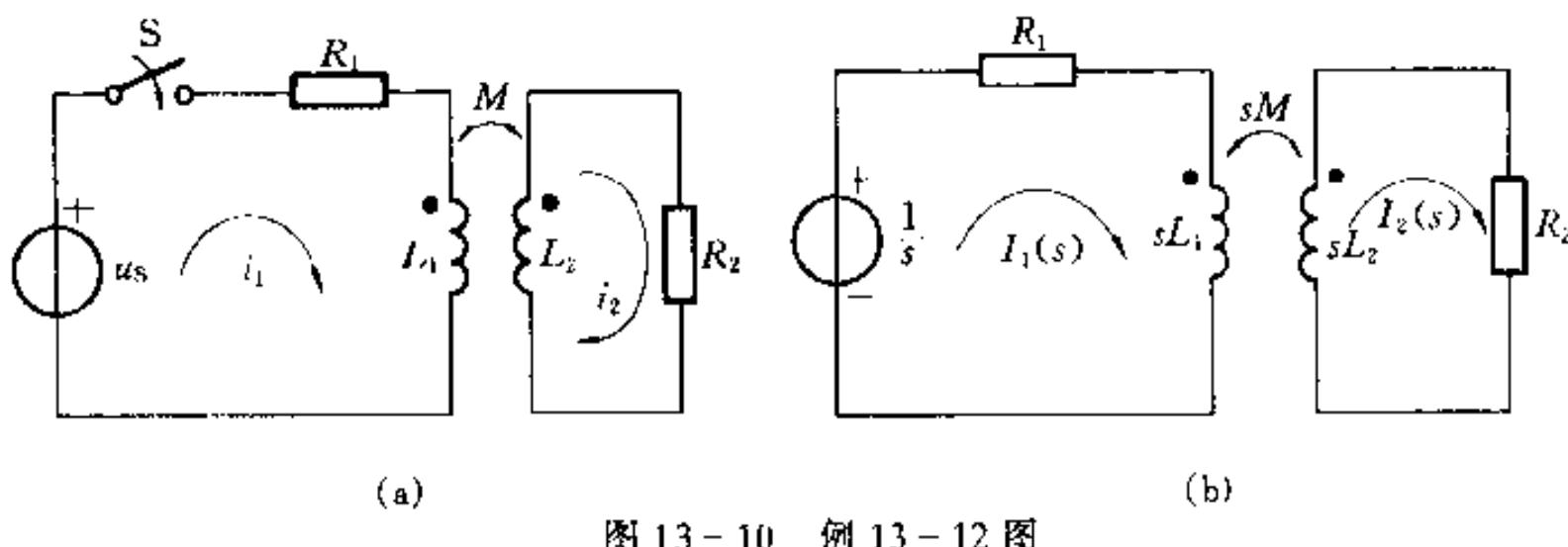


图 13-10 例 13-12 图

解 图 13-10(b) 为与图 13-10(a) 相应的运算电路。列出回路电流方程：

$$(R_1 + sL_1)I_1(s) - sMI_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$-sMI_1(s) + (R_2 + sL_2)I_2(s) = 0$$

代入已知数据，可得：

$$(1 + 0.1s)I_1(s) - 0.05sI_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$-0.05sI_1(s) + (1 + 0.1s)I_2(s) = 0$$

解得：

$$I_1(s) = \frac{0.1s + 1}{s(0.75 \times 10^{-2}s^2 + 0.2s + 1)}$$

$$I_2(s) = \frac{0.05}{0.75 \times 10^{-2}s^2 + 0.2s + 1}$$

$$i_1(t) = (1 - 0.5e^{-0.67t} - 0.5e^{-20t}) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 0.5(e^{-0.67t} - e^{-20t}) \text{ A}$$

例 13-13 电路如图 13-11(a) 所示，开关 S 原来闭合，求打开 S 后电路中的电流及电感元件上的电压。

解 L_1 中的初始电流为 $\frac{U_s}{R_1} = 5 \text{ A}$ ，S 打开后的运算电路如图 13-11(b) 所示，故：

$$I(s) = \frac{\frac{10}{s} + 5L_1}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + s(L_1 + L_2)} = \frac{10}{s(5 + 0.4s)} + \frac{1.5}{5 + 0.4s}$$

$$= \frac{25}{s(s + 12.5)} + \frac{3.75}{s + 12.5}$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{1.75}{s + 12.5}$$

$$i(t) = (2 + 1.75e^{-12.5t}) \text{ A}$$

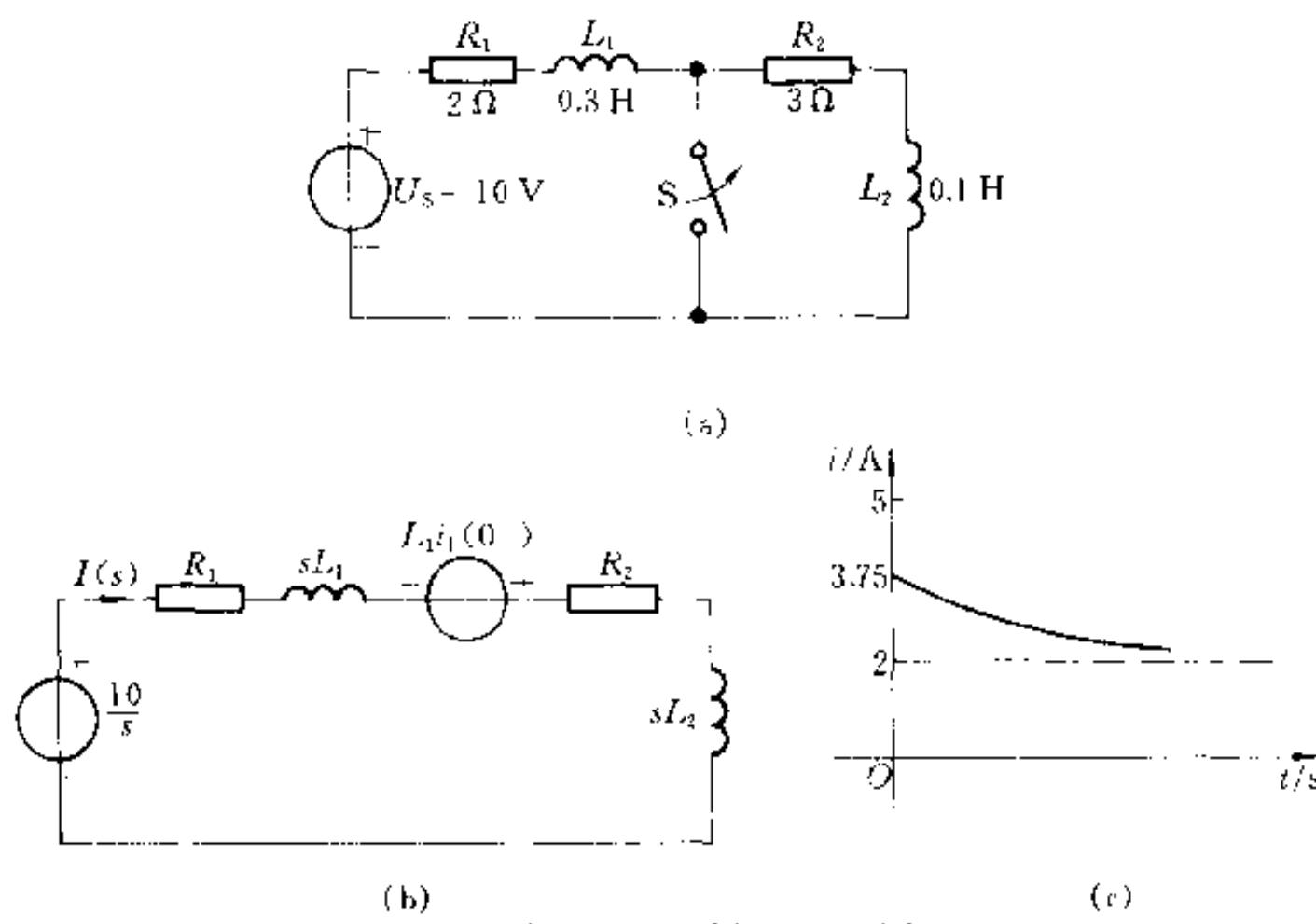


图 13-11 例 13-13 图

电流随时间变化的曲线如图 13-11(c)所示。本题中 L_1 原有电流为 5 A, L_2 中没有电流,但开关打开后, L_1 和 L_2 的电流在 $t = 0$ 时都被强制为同一电流,其数值为 $i(0_+) = 3.75$ A。可见两个电感的电流都发生了跃变。由于电流的跃变,电感 L_1 和 L_2 的电压 u_{L_1} 和 u_{L_2} 中将有冲激函数出现。电压 u_{L_1} 和 u_{L_2} 可求得如下:

$$\begin{aligned} U_{L_1}(s) &= 0.3sI(s) - 1.5 \\ &= 0.6 + \frac{0.3s \times 1.75}{s + 12.5} - 1.5 \\ &= \frac{6.56}{s + 12.5} - 0.375 \\ U_{L_2}(s) &= 0.1sI(s) = 0.2 + \frac{0.175s}{s + 12.5} \\ &= -\frac{2.19}{s + 12.5} + 0.375 \\ u_{L_1}(t) &= [-6.56e^{-12.5t} - 0.375\delta(t)] \text{ V} \\ u_{L_2}(t) &= [-2.19e^{-12.5t} + 0.375\delta(t)] \text{ V} \\ u_{L_1}(t) + u_{L_2}(t) &= -8.75e^{-12.5t} \text{ V} \end{aligned}$$

可见 $u_{L_1} + u_{L_2}$ 中并无冲激函数出现,这是因为虽然 L_1, L_2 中的电流发生了跃变,因而有冲激电压出现,但两者大小相同而方向相反,故在整个回路,不会出现冲激电压,保证满足 KVL。

从这个实例中可以看出,由于拉氏变换式中下限取 0⁻,故自动地把冲激函数考虑进去,因此无需先求 $t = 0_+$ 时的跃变值。

习 题

13-1 求下列各函数的象函数:

$$(1) f(t) = 1 - e^{-at} \quad (2) f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

$$(3) f(t) = e^{-at}(1 - at) \quad (4) f(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

$$(5) f(t) = t^2 \quad (6) f(t) = t + 2 + 3\delta(t)$$

$$(7) f(t) = t \cos(at) \quad (8) f(t) = e^{-at} + at - 1$$

13-2 求下列各函数的原函数:

$$(1) \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} \quad (2) \frac{2s^2 + 16}{(s^2 + 5s + 6)(s + 12)}$$

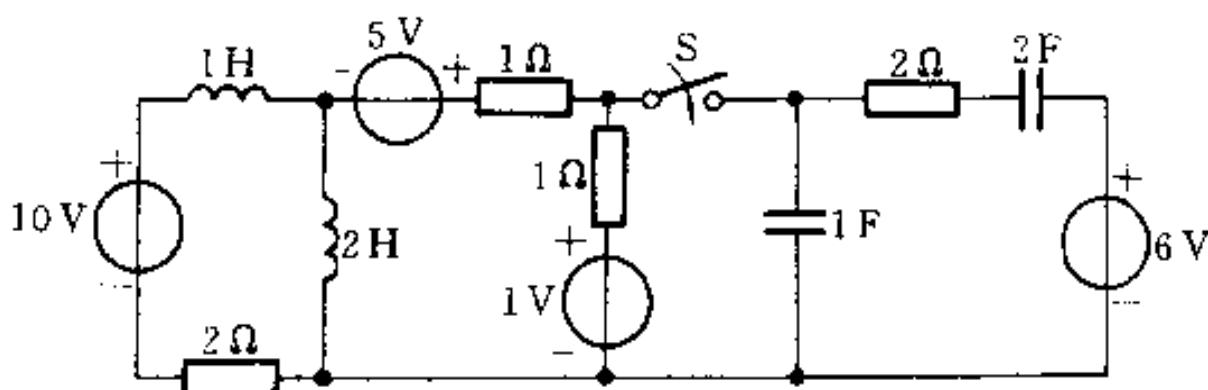
$$(3) \frac{2s^2 + 9s + 9}{s^2 + 3s + 2} \quad (4) \frac{s^3}{(s^2 + 3s + 2)s}$$

13-3 求下列各函数的原函数:

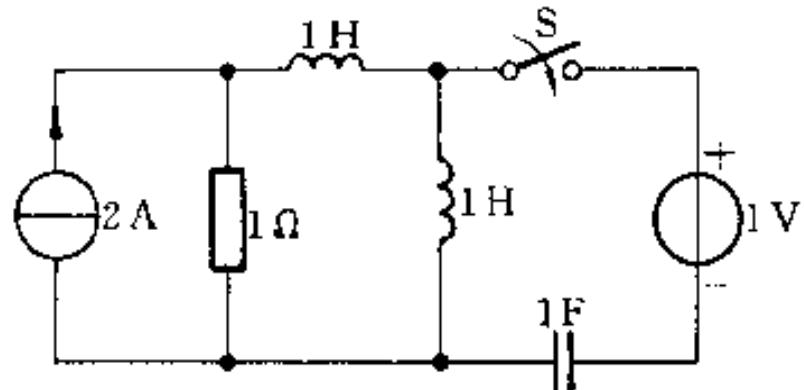
$$(1) \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \quad (2) \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

$$(3) \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s^2 + 4s + 5)} \quad (4) \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

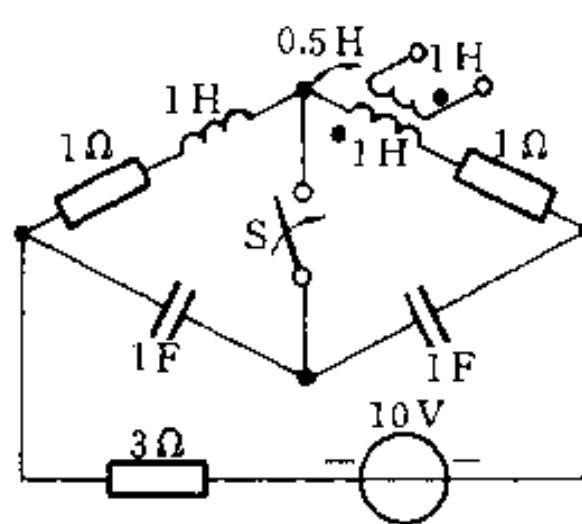
13-4 图(a)、(b)、(c)所示电路原已达稳态, $t = 0$ 时把开关 S 合上, 分别画出运算电路。



(a)



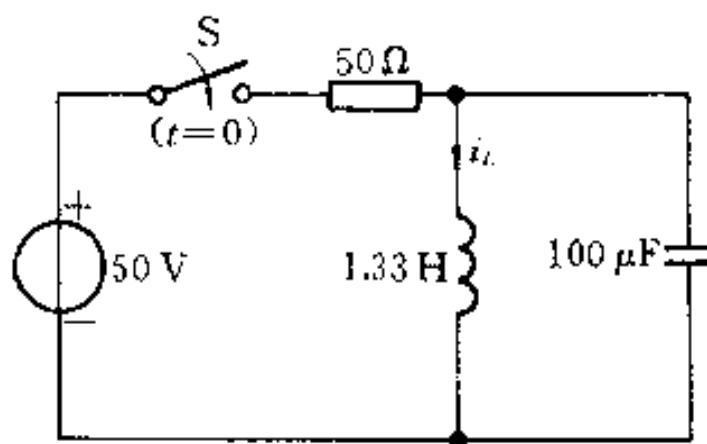
(b)



(c)

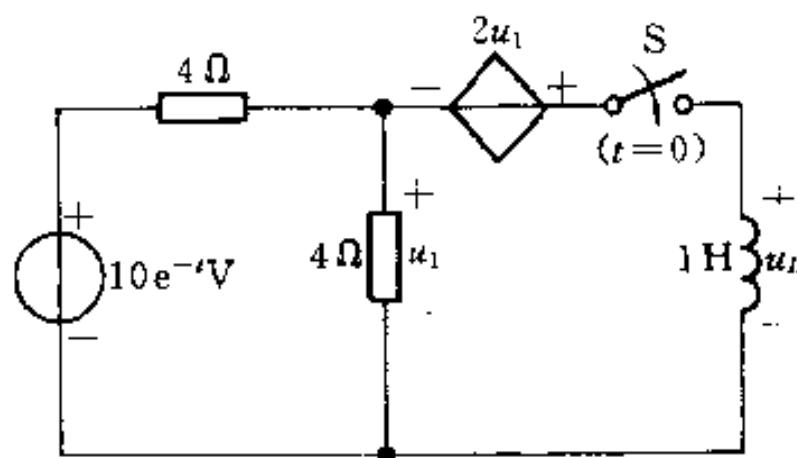
题 13-4 图

13-5 图示电路原处于零状态, $t=0$ 时合上开关 S, 试求电流 i_L 。



题 13-5 图

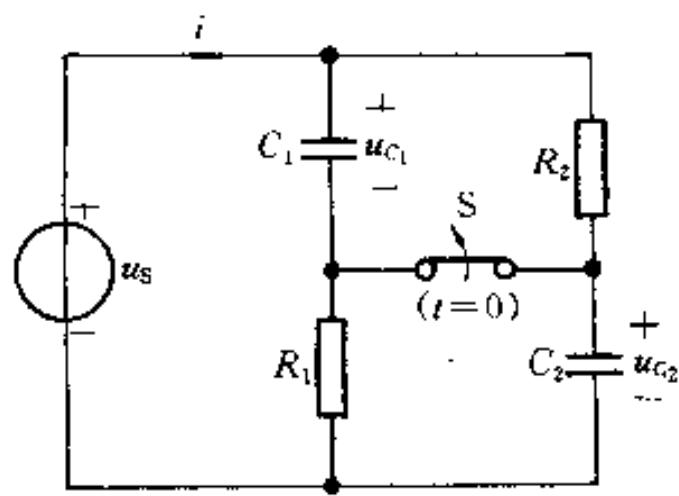
13-6 电路如图所示, 已知 $i_L(0_+)=0$ A, $t=0$ 时将开关 S 闭合, 求 $t>0$ 时的 $u_L(t)$ 。



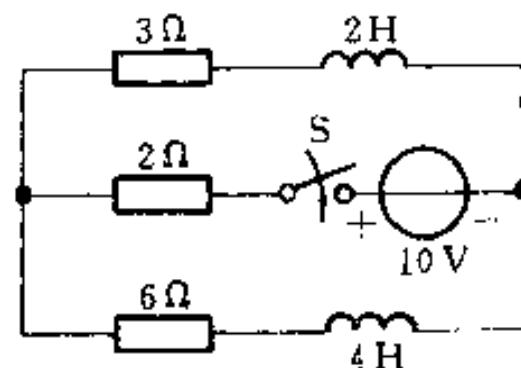
题 13-6 图

13-7 图示电路中 $u_s(t)$ 为直流电压源, 开关原闭合, 已达稳定状态。 $t=0$ 时开关断开, 求开关断开后总电流 i 和电容上电压 u_{C_1} 和 u_{C_2} 。已知 $u_s(t)=30$ V, $C_1=0.2\ \mu F$, $C_2=\frac{1}{2}C_1$, $R_1=100\ \Omega$, $R_2=2R_1$ 。

13-8 图示电路中的电感原无磁场能量, $t=0$ 时, 合上开关 S, 用运算法求电感中的电流。

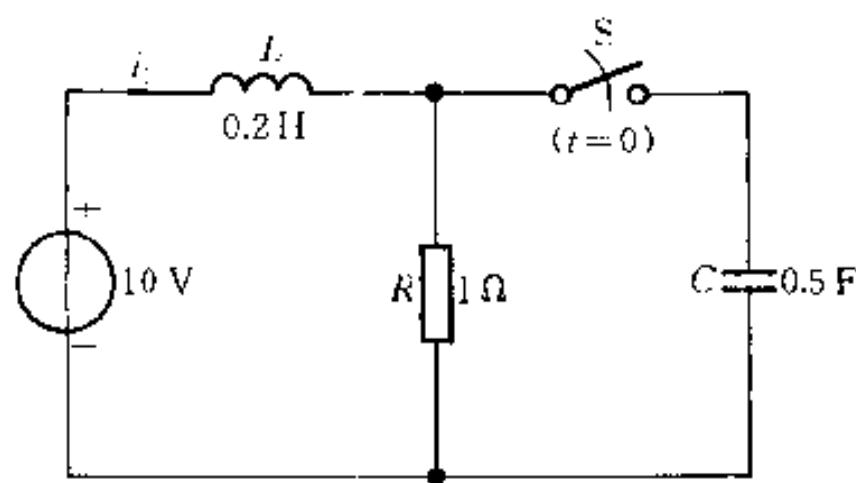


题 13-7 图



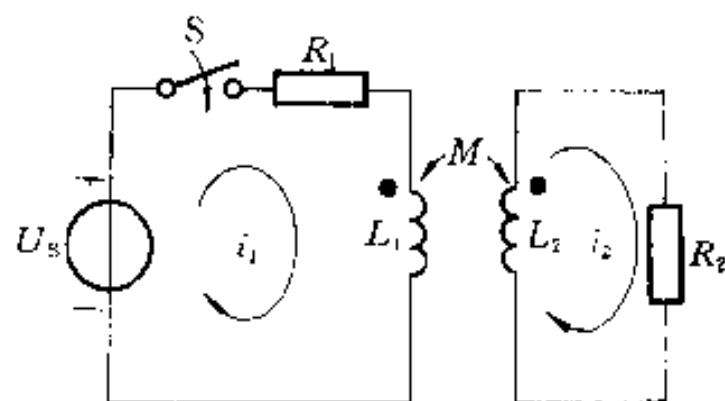
题 13-8 图

13-9 图示电路中开关 S 闭合前电路已处于稳定状态, 电容初始储能为零, 在 $t=0$ 时闭合开关 S, 求 $t>0$ 时电流 $i_1(t)$ 。



题 13-9 图

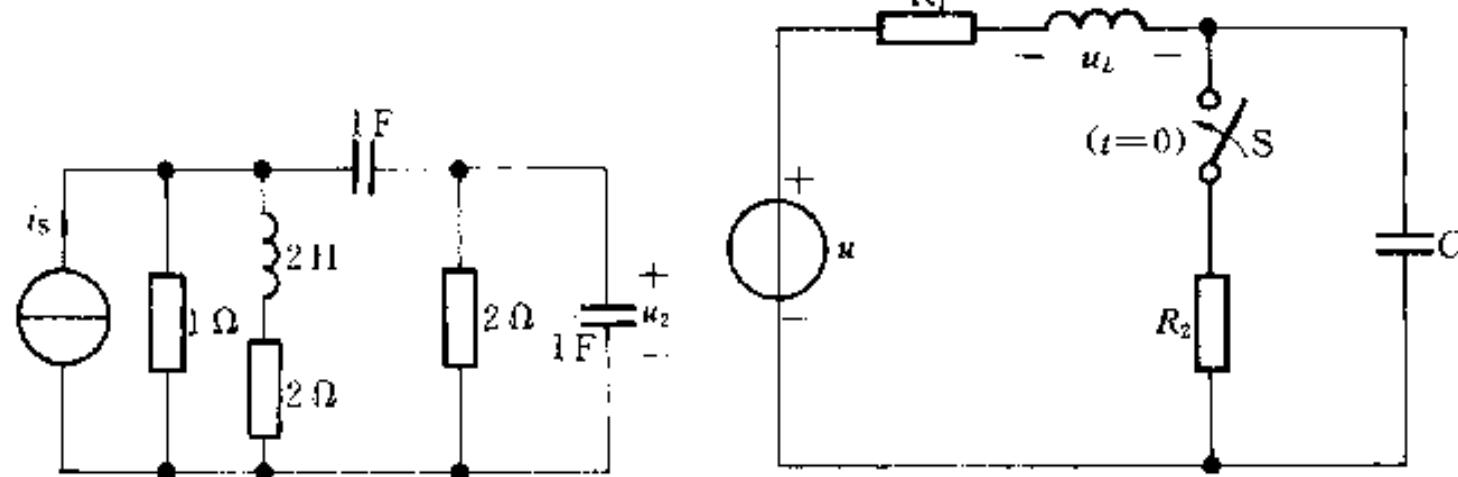
13-10 图示电路中 $L_1 = 1\text{ H}$, $L_2 = 4\text{ H}$, $M = 2\text{ H}$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $U_s = 1\text{ V}$, 电感中原无磁场能量。 $t = 0$ 时合上开关 S , 用运算法求 i_1 , i_2 。



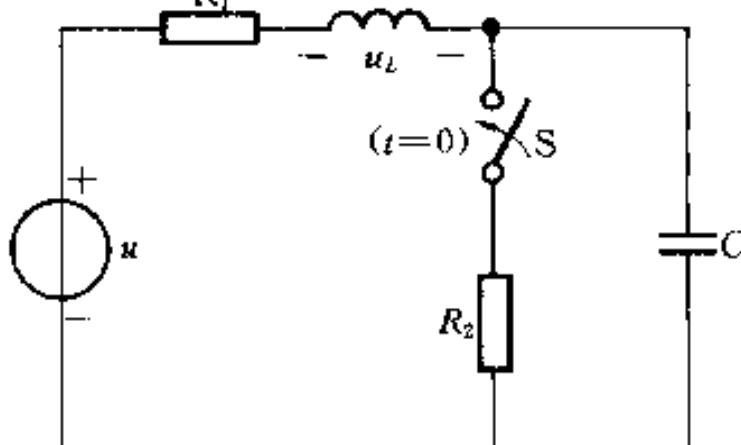
题 13-10 图

13-11 图示电路中 $i_s = 2e^{-t}\epsilon(t)\text{ A}$, 用运算法求 $U_2(s)$ 。

13-12 图示电路中 $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 0.15\text{ H}$, $C = 250\mu\text{F}$, $u = 150\text{ V}$, S 闭合前电路已达稳态。用运算法求合上 S 后的电感电压 u_L 。



题 13-11 图



题 13-12 图

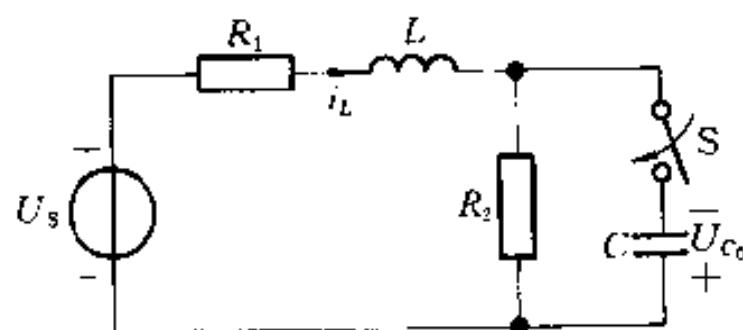
13-13 电路如图, 设电容上原有电压 $U_{C0} = 100\text{ V}$, 电源电压 $U_s = 200\text{ V}$, $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 0.1\text{ H}$, $C = 1000\mu\text{F}$ 。求 S 合上后电感中的电流 $i_L(t)$ 。

13-14 图示电路中的储能元件均为零初始值, $u_s(t) = 5\epsilon(t)\text{ V}$, 在下列条件下求 $U_1(s)$: (1) $r = -3$; (2) $r = 3$ 。

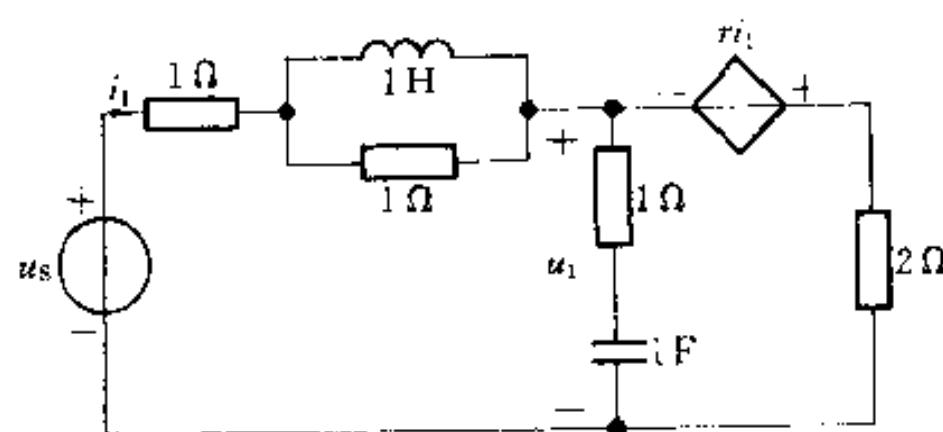
13-15 图示电路中, $i_s = 2\sin(1000t)\text{ A}$, $R_1 = R_2 = 20\Omega$, $C = 1000\mu\text{F}$, $t = 0$ 时合上开

关 S, 用运算法求 $u_c(t)$ 。

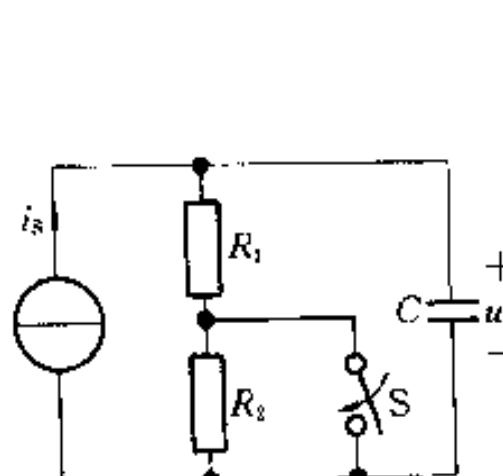
13-16 图示电路在 $t=0$ 时合上开关 S, 用结点法求 $i(t)$ 。



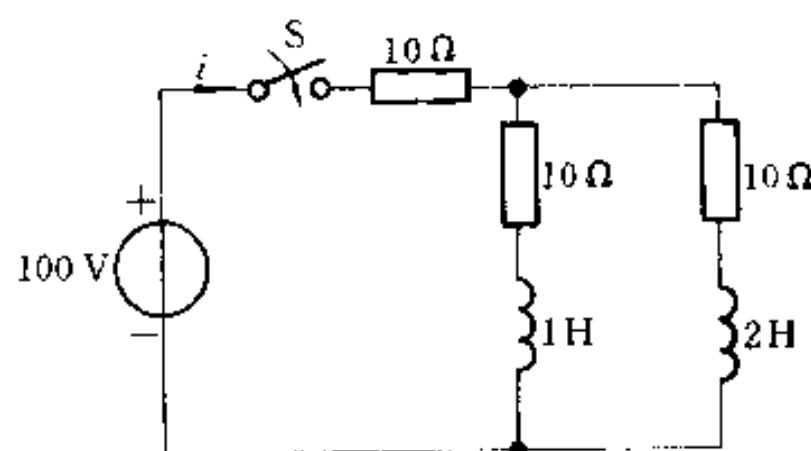
题 13-13 图



题 13-14 图

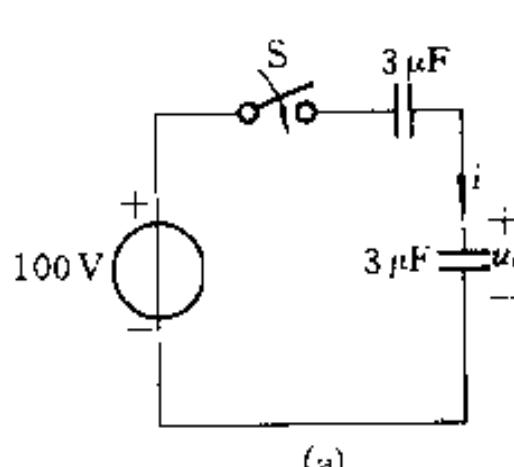


题 13-15 图

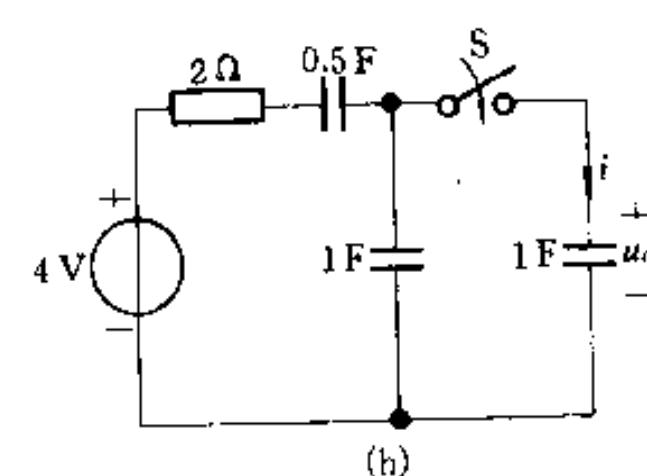


题 13-16 图

13-17 图示各电路在 $t=0$ 时合上开关 S, 用运算法求 $i(t)$ 及 $u_c(t)$ 。



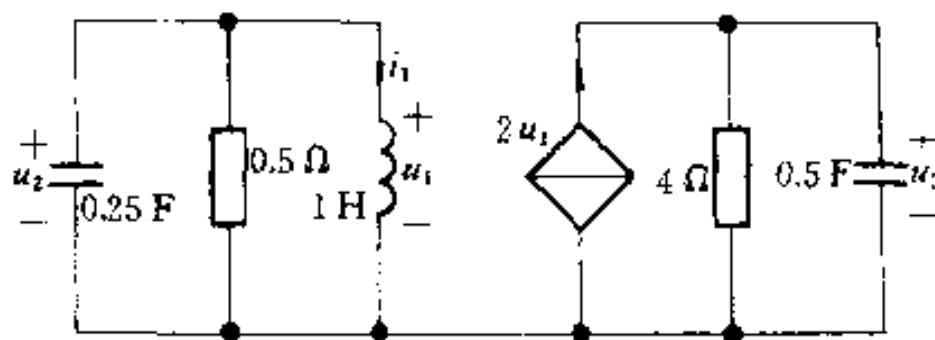
(a)



(b)

题 13-17 图

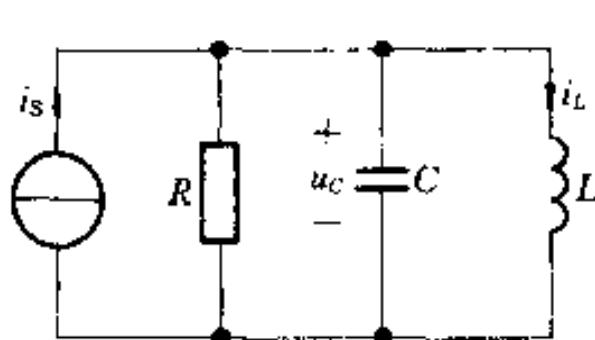
13-18 图示电路中 $i_1(0_+)=1 \text{ A}$, $u_2(0_+)=2 \text{ V}$, $u_3(0_+)=1 \text{ V}$, 试用拉氏变换法求 $t \geq 0$ 时的电压 $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 。



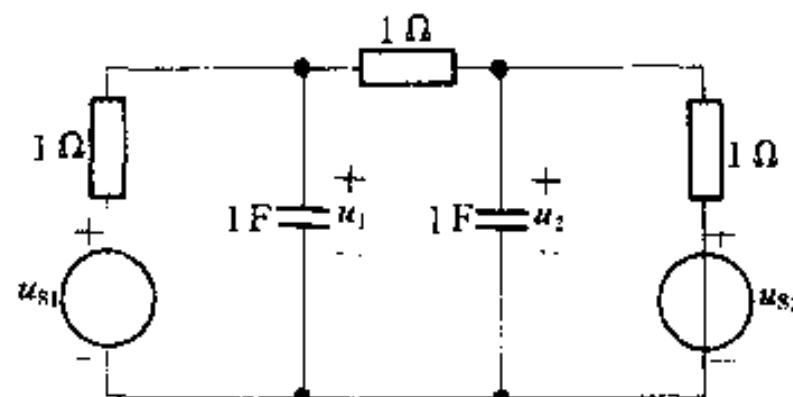
题 13-18 图

13-19 已知图示电路中 $R = 1 \Omega$, $C = 0.5 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$, 电容电压 $u_C(0_-) = 2 \text{ V}$, $i_L(0_+) = 1 \text{ A}$, $i_s(t) = \delta(t) \text{ A}$ 。试求 RLC 并联电路的响应 $u_C(t)$ 。

13-20 电路如图所示,已知 $u_{s1}(t) = \epsilon(t) \text{ V}$, $u_{s2}(t) = \delta(t) \text{ V}$, 试求 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 。

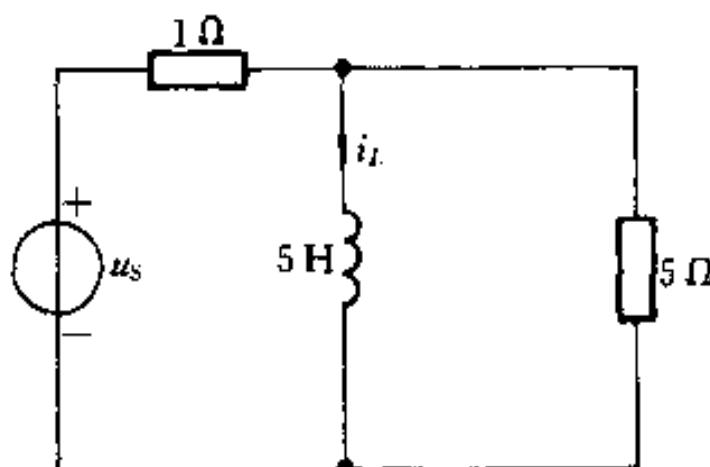


题 13-19 图



题 13-20 图

13-21 电路如图,已知 $u_s(t) = [\epsilon(t) + \epsilon(t-1) - 2\epsilon(t-2)] \text{ V}$, 求 $i_L(t)$ 。



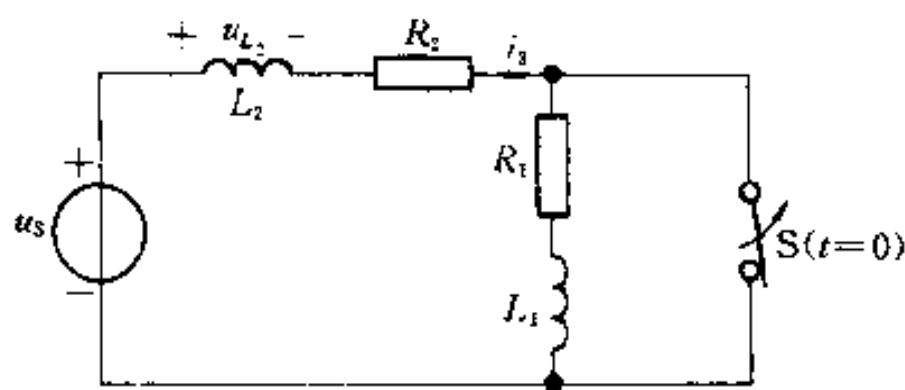
题 13-21 图

13-22 电路如图所示,开关 S 原是闭合的,电路处于稳态。若 S 在 $t = 0$ 时打开,已知 $U_s = 2 \text{ V}$, $L_1 = L_2 = 1 \text{ H}$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$ 。试求 $t \geq 0$ 时的 $i_1(t)$ 和 $u_{L_2}(t)$ 。

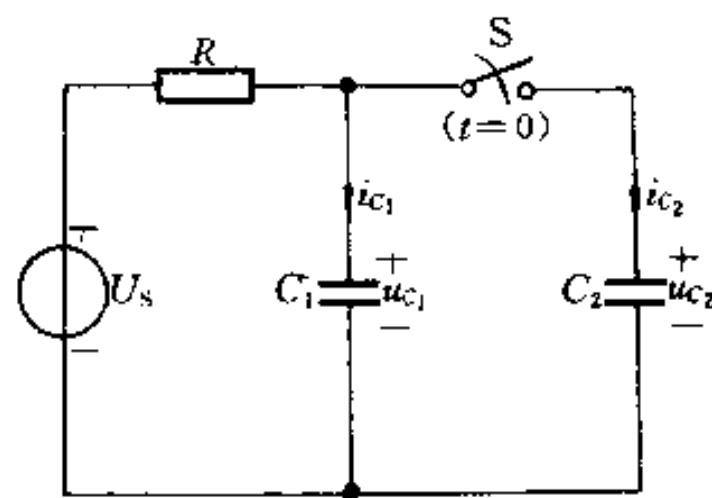
13-23 图示电路中 U_s 为恒定值, $u_{C_2}(0_-) = 0$, 开关闭合前电路已达稳态, $t = 0$ 时 S 闭合,求开关闭合后,电容电压 u_{C_1} 和 u_{C_2} ,电流 i_{C_1} 和 i_{C_2} 。

13-24 图示电路中两电容原来未充电,在 $t = 0$ 时将开关 S 闭合,已知 $U_s = 10 \text{ V}$, R

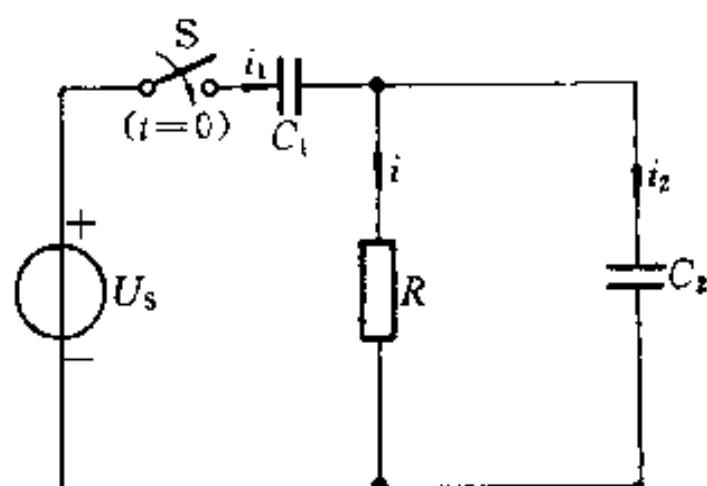
$= 5 \Omega$, $C_1 = 2 F$, $C_2 = 3 F$ 。求 $t \geq 0$ 时的 u_{C_1} , u_{C_2} 及 i_1 , i_2 , i_o



题 13-22 图



题 13-23 图



题 13-24 图

第十四章

网络函数

内容提要

本章主要介绍网络函数及其在电路分析中的应用,网络函数极点和零点的概念,并将讨论极点和零点分布对时域响应和频率特性的影响。

§ 14-1 网络函数的定义

电路在单一的独立激励下,其零状态响应 $r(t)$ 的象函数 $R(s)$ 与激励 $e(t)$ 的象函数 $E(s)$ 之比定义为该电路的网络函数 $H(s)$,即

$$H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R(s)}{E(s)} \quad (14-1)$$

由于激励 $E(s)$ 可以是独立的电压源或独立的电流源,响应 $R(s)$ 可以是电路中任意两点之间的电压或任意一支路的电流,故网络函数可能是驱动点阻抗(导纳),转移阻抗(导纳),电压转移函数或电流转移函数。

根据网络函数的定义,若 $E(s)=1$,则 $R(s)=H(s)$,即网络函数就是该响应的象函数,而当 $E(s)=1$ 时, $e(t)=\delta(t)$,所以网络函数的原函数 $h(t)$ 是电路的单位冲激响应,即

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(s)] = \mathcal{F}^{-1}[R(s)] = r(t) \quad (14-2)$$

例 14-1 图 14-1(a) 中电路激励为 $i_s(t)=\delta(t)$,求冲激响应 $h(t)$,也即电容电压 $u_c(t)$ 。

解 图 14-1(b) 为其运算电路,由于此冲激响应为电路端电压,与冲激电流激励属于同一端口,因而网络函数为驱动点阻抗,即:

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{U_C(s)}{1} = Z(s) = \frac{1}{sC + G} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s + \frac{G}{RC}}$$

$$h(t) = u_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right] = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \epsilon(t)$$

此结果与第六章所得的相同。

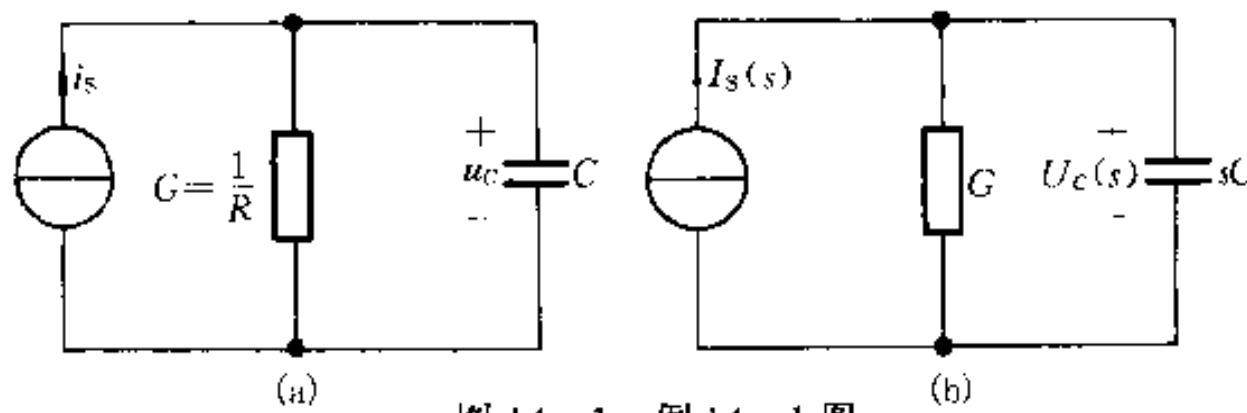


图 14-1 例 14-1 图

例 14-2 图 14-2(a) 所示电路为一低通滤波电路, 激励是电压源 $u_1(t)$ 。已知: $L_1 = 1.5 \text{ H}$, $C_2 = \frac{4}{3} \text{ F}$, $L_3 = 0.5 \text{ H}$, $R = 1 \Omega$ 。求电压转移函数 $H_1(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 和驱动点导纳函数 $H_2(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)}$ 。

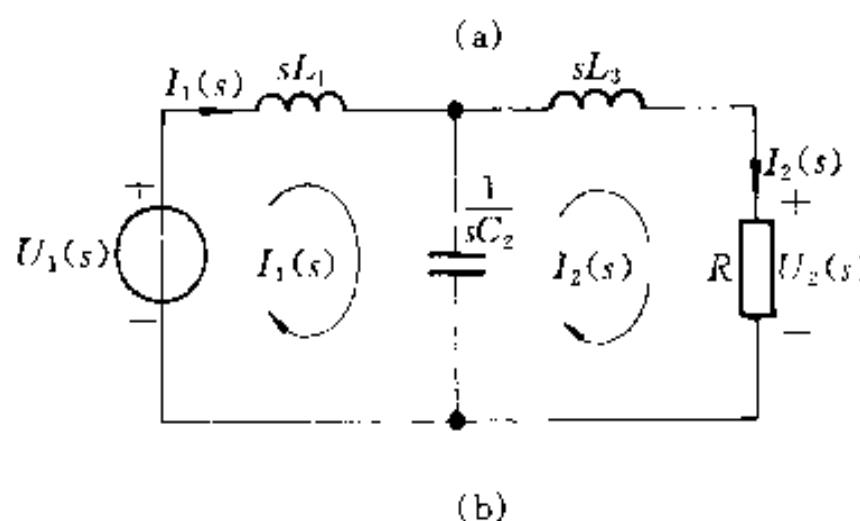
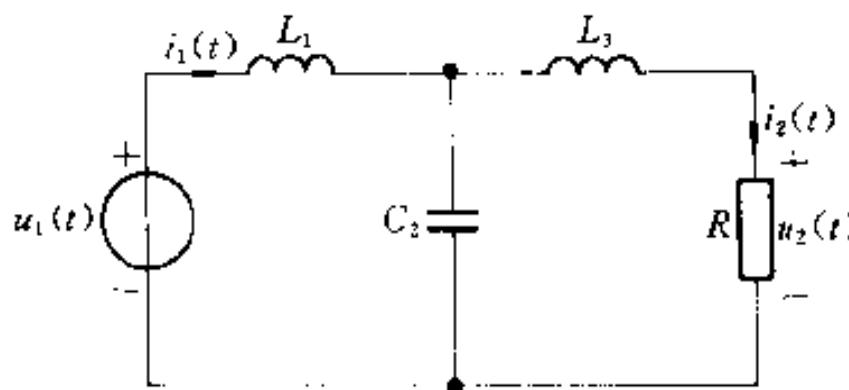


图 14-2 例 14-2 图

解 给定电路的运算电路如图(b)。用回路电流法列出回路电流 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$ 的方程, 有:

$$\begin{aligned} \left(sL_1 + \frac{1}{sC_2} \right) I_1(s) - \frac{1}{sC_2} I_2(s) &= U_1(s) \\ - \frac{1}{sC_2} I_1(s) + \left(sL_3 + \frac{1}{sC_2} + R \right) I_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

解得：

$$I_1(s) = \frac{L_3 C_2 s^2 + R C_2 s + 1}{D(s)} U_1(s)$$

$$I_2(s) = \frac{1}{D(s)} U_1(s)$$

其中 $D(s) = L_1 L_3 C_2 s^3 + R L_1 C_2 s^2 + (L_1 + L_3)s + R$

而 $U_2(s) = RI_2(s)$

代入数据后得

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

电压转移函数为

$$H_1(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

驱动点导纳函数为

$$H_2(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 3}{3(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)}$$

由以上的例题及网络函数的定义，可见对于由 R 、 $L(M)$ 、 C 及受控源等元件组成的电路，网络函数是 s 的实系数有理函数，其分子和分母多项式的根或为实数，或为共轭复数。另外，可以看出网络函数中不会出现激励的象函数。

§ 14-2 网络函数的极点和零点

由于网络函数 $H(s)$ 的分子和分母都是 s 的多项式，故其一般形式可写为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \\ &= H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_i) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_j) \cdots (s - p_n)} \\ &= H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \end{aligned} \quad (14-3)$$

其中 H_0 为一常数， $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_m$ 是 $N(s) = 0$ 的根， $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n$ 是 $D(s) = 0$ 的根。当 $s = z_i$ 时 $H(s) = 0$ ，故 $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_m$ 称为网络函数的零点。当 $s = p_j$ 时， $D(s) = 0$ ， $H(s)$ 将趋近无限大，故 $p_1, \dots, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n$ 称为网络函数的极点。

网络函数的零点和极点可能是实数、虚数或复数。如果以复数 s 的实部 σ 为横轴，虚部 $j\omega$ 为纵轴，就得到一个复频率平面，简称为复平面或 s 平面。在复

平面上把 $H(s)$ 的零点用“○”表示, 极点用“×”表示, 就得到网络函数的零、极点分布图。零、极点在 s 平面上的分布与网络的时域响应和正弦稳态响应有着密切的关系, 后两节中将详细分析。

例 14-3 绘出 $H(s) = \frac{2s^2 + 12s + 16}{s^3 + 4s^2 + 6s + 3}$ 的零、极点图。

解 分子 $N(s) = 2(s^2 - 6s + 8) = 2(s - 2)(s - 4)$

$$\text{分母 } D(s) = (s + 1)(s^2 + 3s + 3)$$

$$= (s + 1) \left(s + \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(s + \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

所以 $H(s)$ 有 2 个零点: $z_1 = 2, z_2 = 4$; 3 个极点: $p_1 = -1, p_2 = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, p_3 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。其零、极点图如图 14-3 所示。

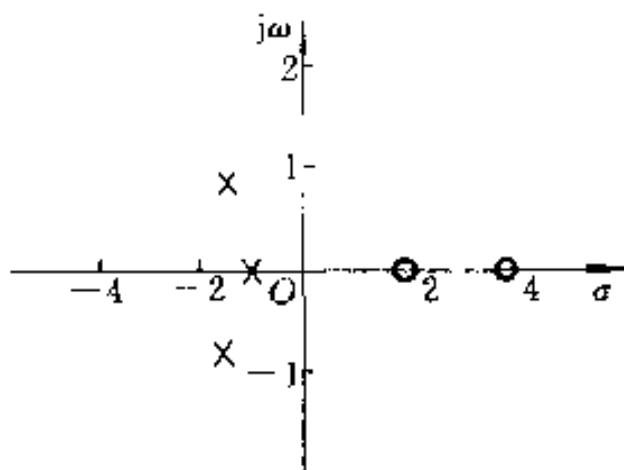


图 14-3 例 14-3 图

如果 $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别有重根, 则称之为重零点和重极点。

§ 14-3 极点、零点与冲激响应

根据网络函数的定义可知, 电路的零状态响应的象函数

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{P(s)}{Q(s)}$$

式中 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, $E(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, 而 $N(s), D(s), P(s), Q(s)$ 都是 s 的多项式。用部分分式法求响应的原函数时, $D(s)Q(s) = 0$ 的根将包含 $D(s) = 0$ 和 $Q(s) = 0$ 的根。响应中包含 $Q(s) = 0$ 的根的那些项属于强制分量, 而包含 $D(s) = 0$ 的根(即网络函数的极点)的那些项则是自由分量或瞬态分量。

由于一般情况下 $h(t)$ 的特性就是时域响应中自由分量的特性, 而 $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$, 所以分析网络函数的极点与冲激响应的关系就可预见时域响应的特点。

若网络函数为真分式且分母具有单根，则网络的冲激响应为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (14-4)$$

式中 p_i 为 $H(s)$ 的极点。从式(14-4)可以看出，当 p_i 为负实根时， $e^{p_i t}$ 为衰减指数函数；当 p_i 为正实根时， $e^{p_i t}$ 为增长的指数函数；而且 $|p_i|$ 越大，衰减或增长的速度越快。这说明若 $H(s)$ 的极点都位于负实轴上，则 $h(t)$ 将随 t 的增大而衰减，这种电路是稳定的；若有一个极点位于正实轴上，则 $h(t)$ 将随 t 的增长而增长，这种电路是不稳定的。当极点 p_i 为共轭复数时，根据式(14-4)可知 $h(t)$ 是以指数曲线为包络线的正弦函数，其实部的正或负确定增长或衰减的正弦项。当 p_i 为虚根时，则将是纯正弦项。图 14-4 画出了网络函数的极点分别

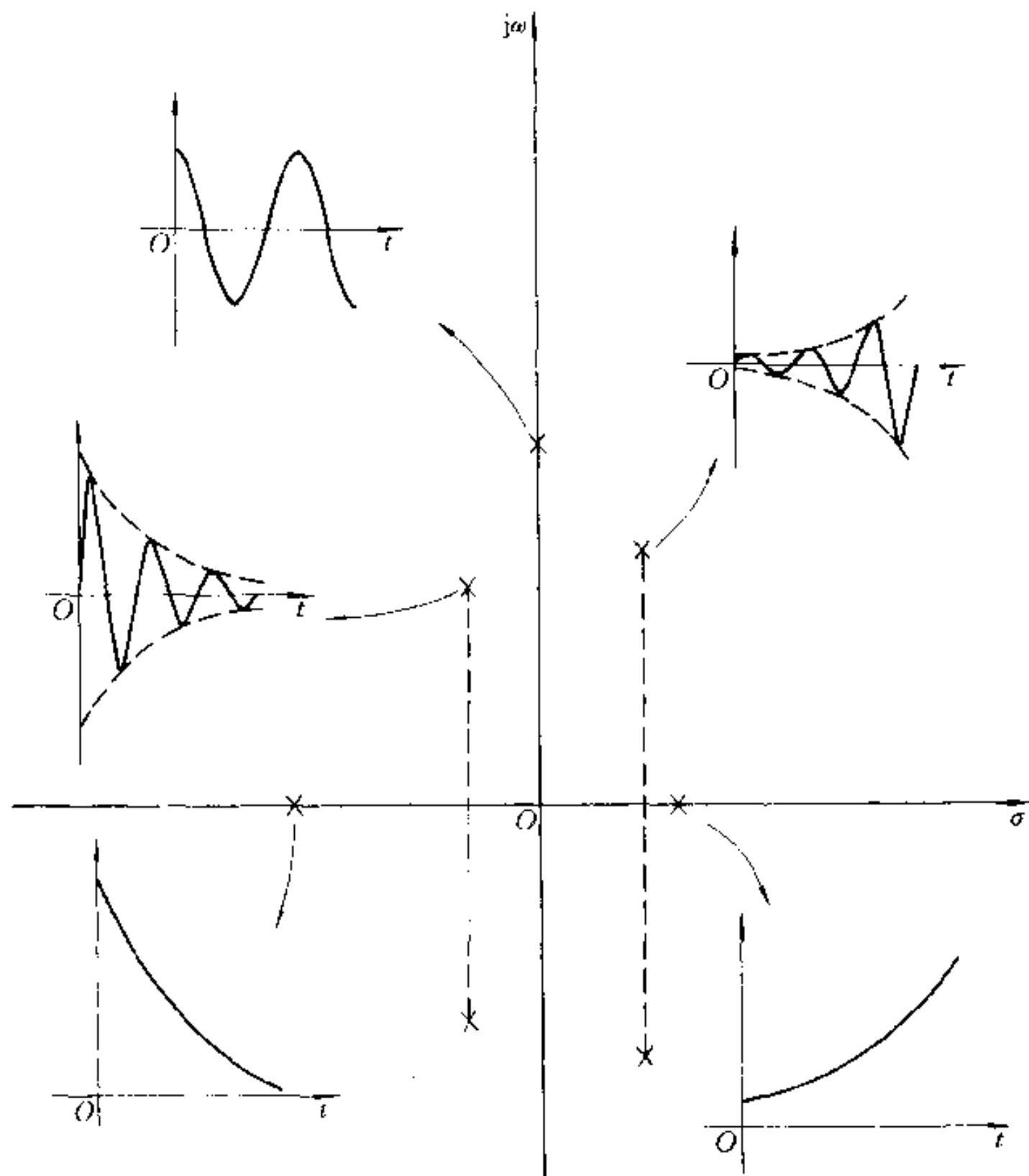


图 14-4 极点与冲激响应的关系

为负实数、正实数、零值以及共轭复数时，对应的时域响应的波形。

从式(14-4)还可以看出, p_i 仅由网络的结构及元件值确定, 因而将 p_i 称为该网络变量的自然频率或固有频率。

例 14-4 RLC 串联电路接通恒定电压源 U_s , 如图 14-5(a) 所示。根据网络函数 $H(s) = \frac{U_c(s)}{U_s(s)}$ 的极点分布情况分析 $u_c(t)$ 的变化规律。

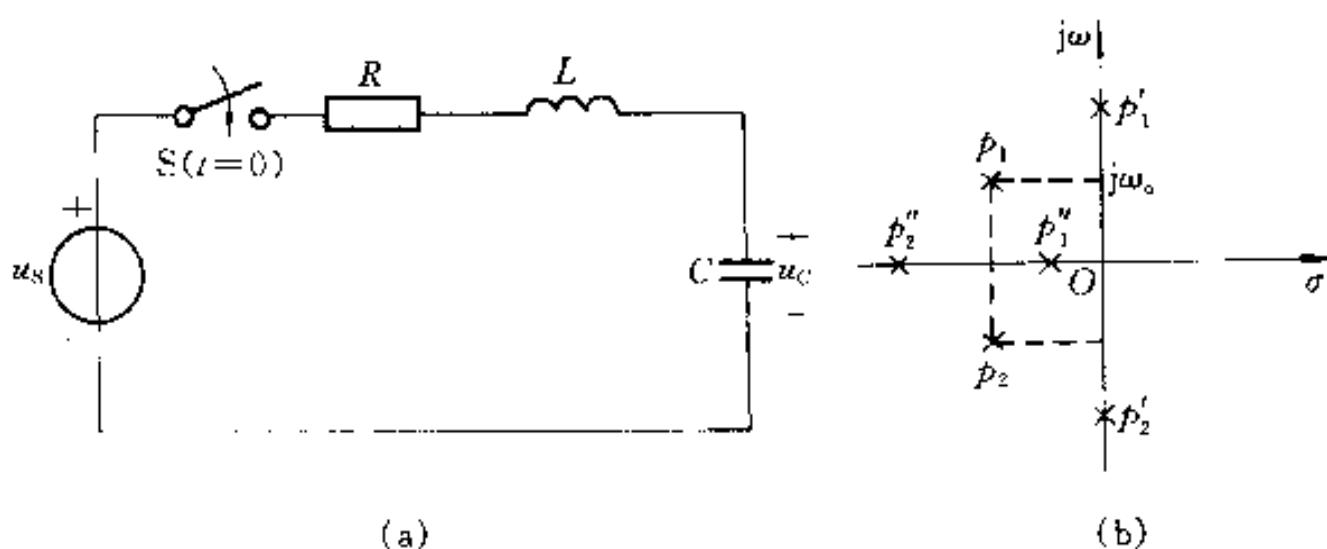


图 14-5 例 14-4 图

$$\begin{aligned} \text{解 } H(s) &= \frac{U_c(s)}{U_s(s)} = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} \\ &= \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} = \frac{1}{LC(s - p_1)(s - p_2)} \end{aligned}$$

(1) 当 $0 < R < 2\sqrt{\frac{2}{C}}$ 时, $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_d$, 其中

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

这时 $H(s)$ 的极点位于左半平面, 如图 14-5(b) 中的 p_1, p_2 , 因此 $u_c(t)$ 的自由分量 $u_c''(t)$ 为衰减的正弦振荡, 其包络线的指数为 $e^{-\delta t}$, 振荡角频率为 ω_d , 且极点离开虚轴越远, 振荡衰减愈快。

(2) 当 $R = 0$ 时, $\delta = 0$, $\omega_d = \omega_0$, 故 $p_{1,2}' = \pm j\omega_0$, 这说明 $H(s)$ 的极点位于虚轴上, 因此, $u_c''(t)$ 为等幅振荡且 ω_d 的绝对值愈大, 等幅振荡的振荡频率愈高。

(3) 当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 有:

$$\begin{aligned} p_1'' &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ p_2'' &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

此时 $H(s)$ 的极点位于负实轴上, 因此 $u_c''(t)$ 是由 2 个衰减速度不同的指数函数

组成。且极点离原点越远, $u_c''(t)$ 衰减愈快。

$u_c(t)$ 中的强制分量 $u_c'(t)$ 取决于激励的情况, 本例中 $u_c'(t) = U_s$ 。

§ 14-4 极点、零点与频率响应

如果用相量法求图 14-2(a) 所示电路在正弦稳态情况下的电压转移函数, 则该图(b)中的 sL_1 、 $\frac{1}{sC_2}$ 和 sL_3 将分别是 $j\omega L_1$ 、 $\frac{1}{j\omega C_2}$ 和 $j\omega L_3$, 输入电压 $U_1(s)$ 和输出电压 $U_2(s)$ 将是相量 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 , 而回路电流将是相量 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。不难求得

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{D(j\omega)} \dot{U}_1$$

其中 $D(j\omega) = L_1 L_3 C_2 (j\omega)^3 + R L_1 C_2 (j\omega)^2 + (L_1 + L_2) j\omega + R$

代入数据后, 有

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1}$$

可见, 若把例 14-2 的解 $H_1(s)$ 中的 s 用 $j\omega$ 代替, 则 $H_1(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$, 就是说, 在 $s = j\omega$ 处计算所得网络函数 $H_1(s)$ 即 $H_1(j\omega)$, 而 $H_1(j\omega)$ 是角频率为 ω 时正弦稳态情况下的输出相量与输入相量之比。

同理, 有

$$H_2(j\omega) = H_2(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}$$

上述结论在一般情况下也成立。所以如果令网络函数 $H(s)$ 中复频率 s 等于 $j\omega$, 分析 $H(j\omega)$ 随 ω 变化的情况就可以预见相应的转移函数或驱动点函数在正弦稳态情况下随 ω 变化的特性。

对于某一固定角频率 ω , $H(j\omega)$ 通常是一个复数, 即可以表示为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= |H(j\omega)| e^{j\varphi} \\ &= |H(j\omega)| / \varphi(j\omega) \end{aligned} \quad (14-5)$$

式中 $|H(j\omega)|$ 为网络函数在频率 ω 处的模值, 而 $\varphi = \arg[H(j\omega)]$ 随 ω 变化的关系称为相位频率响应, 简称相频特性。根据式(14-3)有

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^n (j\omega - p_j)}$$

于是有:

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m |(j\omega - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(j\omega - p_j)|} \quad (14-6)$$

$$\arg[H(j\omega)] = \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(j\omega - p_j)$$

所以若已知网络函数的极点和零点，则按式(14-6)便可以计算对应的频率响应，同时还可以通过在 s 平面上作图的方法定性描绘出频率响应。

例 14-5 图14-6为 RC 串联电路，试定性分析以电压 u_2 为输出时该电路的频率响应。

解 以 u_2 为电路变量的网络函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

其极点 $p_1 = -\frac{1}{RC}$ ，见图 14-7(a)。

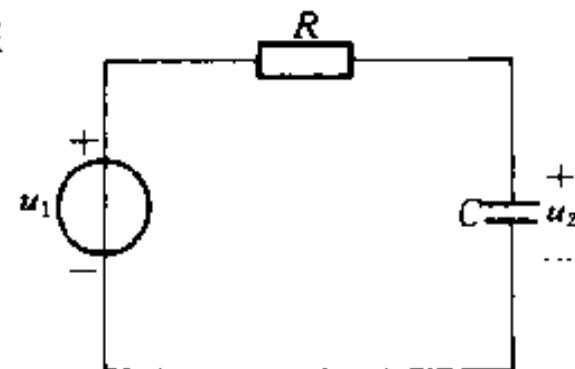
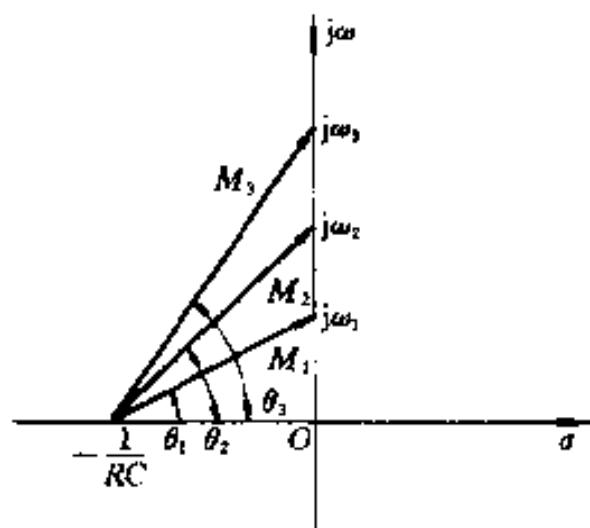
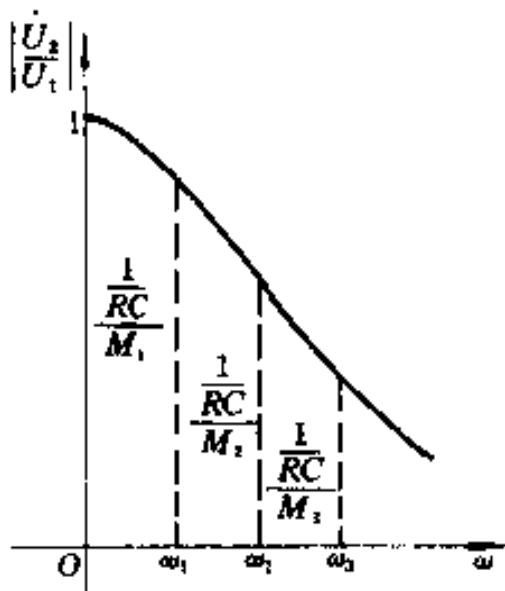


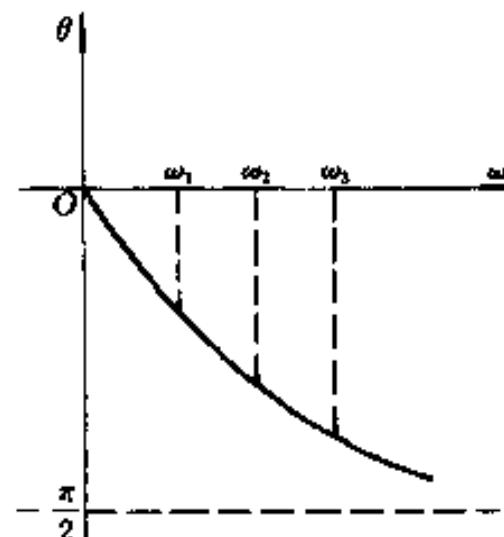
图 14-6 例 14-5 图



(a)



(b)



(c)

图 14-7 RC 串联电路的频率响应

将 $H(s)$ 中 s 用 $j\omega$ 代替, 得

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

$H(j\omega)$ 在 $\omega = \omega_1, \omega_2$ 和 ω_3 时的模值分别为 $\frac{1}{RC}$ 除以图 14-7(a) 中的线段长度 M_1, M_2 和 M_3 , 对应的相位分别为同图中的 θ_1, θ_2 和 θ_3 的负值。随 ω 从零沿虚轴向 ∞ 增长时, $|H(j\omega)|$ 趋于零, 而相位从零趋近 -90° 。由此定性画出的幅频特性和相频特性分别如图 14-7(b) 和 (c)。

可以看出, 该电路具有低通特性。当 $\omega = 0$ 时, $\frac{U_2}{U_1} = 1/0^\circ$; $\omega = \frac{1}{RC}$ 时, $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} / -\frac{\pi}{4}$, 即 $\frac{U_2}{U_1} = 0.707$, 相当于 $\omega = 0$ 时模值的 0.707, 此频率有时称为低通滤波电路的截止频率, 用 ω_c 表示, 而 0 到 ω_c 的频率范围称为通频带。

例 14-2 所示电路在正弦稳态情况下的电压转移函数为:

$$H_1(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1}$$

$$|H_1(j\omega)| = \frac{1}{[(-2\omega^2 + 1)^2 + (-\omega^3 + 2\omega)^2]^{1/2}}$$

即

$$|H_1(j\omega)|^{\textcircled{1}} = \frac{1}{(1 + \omega^6)^{1/2}}$$

当 $\omega = 0$ 时, $|H_1(j\omega)| = 0$, 当 $\omega = 1$ 时, $|H_1(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 。 $|H_1(j\omega)|$

随 ω 的增长单调下降, 所以说这个电路是一个低通滤波器, 它的截止频率 $\omega_c \approx 1$ (例 14-2 中的元件值以及这里采用的频率都是“归一化”值)^②。

如果把例 14-5 中的电阻和电容对调, 并令输出电压为电阻上的电压, 用以上方法, 不难得出该 RC 电路具有高通特性。

例 14-6 图 14-8(a) 所示为 RLC 串联电路, 设电容电压为输出电压 u_2 .

① $|H_1(j\omega)|^{\textcircled{1}}$ 为电压比值之模, 若用分贝数表示, 有 $\text{dB} = 20 \log |H_1(j\omega)|$

② 经“阻抗归一化”可以使选用的电阻、电感和电容值分别等于或接近于 $1 \Omega, 1 H$ 和 $1 F$ 。经“频率归一化”使实际要求的截止角频率 ω_c 取值为 1, 而变量 ω 取值为 $(\frac{\omega}{\omega_c})$ 。

电压转移函数 $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$; 试根据该网络函数的极点和零点, 定性地绘出 $H(j\omega)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } H(s) &= \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \\ &= \frac{1}{LC} \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= H_0 \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \end{aligned}$$

令 $s = j\omega$, 有

$$\frac{U_2}{U_1} = H(j\omega) = H_0 \frac{1}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)}$$

设极点为一对共轭复数, 即

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\delta \pm j\omega_d$$

式中 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, 而 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2}$ 。当 $\omega = \omega_1$ 时, 有 [见图 14-8 (b)]:

$$\begin{aligned} |H(j\omega_1)| &= \frac{H_0}{|j\omega_1 - p_1||j\omega_1 - p_2|} = \frac{H_0}{M_1 M_2} \\ \arg[H(j\omega)] &= -(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

定性绘出的幅频特性和相频特性如图 14-8(c)、(d)所示。

从上述分析中可以看出, 当 p_1, p_2 在如图 14-8(b)所示位置时, 随 ω 变化 M_1 和 M_2 的变化几乎相等, 可以看到没有一个极点对频率响应起主要作用。如果极点位置如图 14-8(e)所示, 即极点 p_1 接近 $j\omega$ 轴, 则在 $j\omega$ 与 p_1 之间的矢量 M_1 的长度和角度对 $|H(j\omega)|$ 和 $\arg[H(j\omega)]$ 都产生较大的影响, 而 M_2 却改变较少。当 $\omega \approx \omega_0$ 时, $|H(j\omega)|$ 达到峰值, 而 $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 为 RLC 串联电路的谐振角频率。因此, 当极点为共轭复数时, 极点到坐标原点的距离与极点的实部之比对网络的频率响应影响很大, 有时把此值的一半, 即 $\frac{\omega_0}{2\delta}$ 定义为极点的品质因数, 以 Q_p 表示。对于二阶电路

$$Q_p = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q$$

可以看出 $Q_p = Q$, 而 Q 即回路的品质因数。

根据第九章讨论可知, 对例 14-6 中的电路, 当 $Q_p < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $|H(j\omega)|$ 随 ω 的增长而单调减小, 如图 14-8(c), 而当 Q_p 增大时, $H(j\omega)$ 出现峰值, 如图 14-8(f), 且峰值随 Q_p 的增大而增大, 峰值对应的频率值 ω 随 Q_p 的增大而趋于 ω_0 。

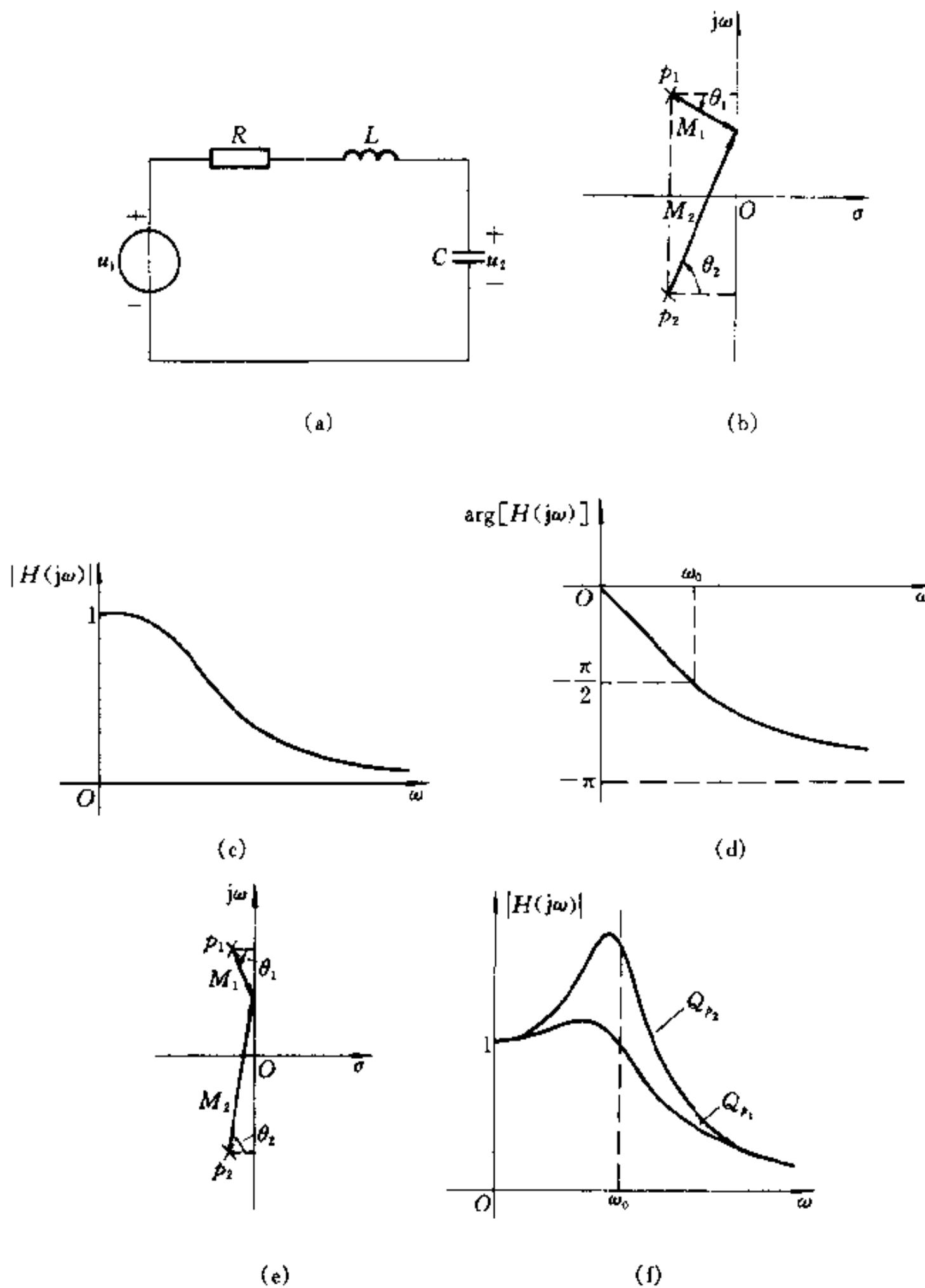


图 14-8 例 14-6 图

§ 14-5 卷 积

卷积是电路分析的一个重要概念。本节将简要介绍卷积定理及其应用。

设有两个时间函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 它们在 $t < 0$ 时为零, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积[以符号 $f_1(t) * f_2(t)$ 表示], 用下列积分式定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi \quad \text{①}$$

此式称为卷积积分。

拉氏变换的卷积定理

设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉氏变换象函数分别为 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi\right] \\ &= F_1(s) F_2(s) \end{aligned}$$

证明

根据拉氏变换定义, 有

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi \right] dt$$

根据延迟的单位阶跃函数的定义

$$\epsilon(t - \xi) = \begin{cases} 1 & \xi < t \\ 0 & \xi > t \end{cases}$$

故 $\int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi = \int_0^\infty f_1(t - \xi) \epsilon(t - \xi) f_2(\xi) d\xi$

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty f_1(t - \xi) \epsilon(t - \xi) f_2(\xi) d\xi dt$$

令 $x = t - \xi$, 则 $e^{-sx} = e^{-s(x+\xi)}$, 上式变为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(x) \epsilon(x) f_2(\xi) e^{-s\xi} e^{-sx} d\xi dx \\ &= \int_0^\infty f_1(x) \epsilon(x) e^{-sx} dx \int_0^\infty f_2(\xi) e^{-s\xi} d\xi \\ &= F_1(s) F_2(s) \end{aligned}$$

同理, 可以证明

$$\mathcal{L}[f_2(t) * f_1(t)] = F_2(s) F_1(s)$$

所以

① 后面将把积分下限记为“0”。

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

可以应用卷积定理求电路响应。设 $E(s)$ 表示外施激励, $H(s)$ 表示网络函数, 网络响应 $R(s)$ 为

$$R(s) = E(s)H(s)$$

求 $R(s)$ 的拉氏反变换, 得到时域中的响应

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1}[E(s)H(s)] = \int_0^t e(\xi)h(t - \xi)d\xi \quad (14-7)$$

这里 $e(t)$ 为外施激励的时间函数形式, $h(t)$ 为网络的冲激响应, 给定任何激励函数后, 就可以求该网络的零状态响应。

上式的 $r(t)$ 还可以写为

$$r(t) = \int_0^t e(t - \xi)h(\xi)d\xi \quad (14-8)$$

例 14-7 图 14-9 所示为 RC 并联电路, 其中 $R = 500 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, 电流源的电流 $i_s(t) = 2e^{-t} \mu\text{A}$ 。设电容上原来没有电压, 求 $u_C(t)$ 。

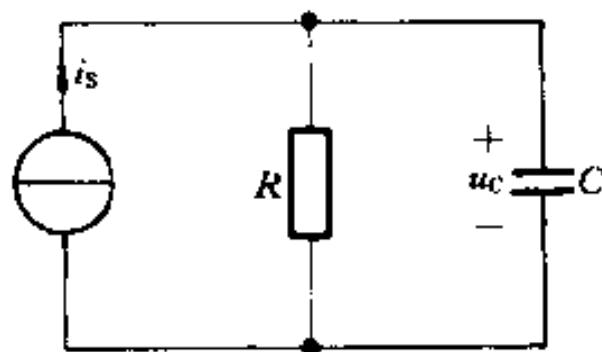


图 14-9 例 14-7 图

解 电路的冲激响应为(见例 13-10)

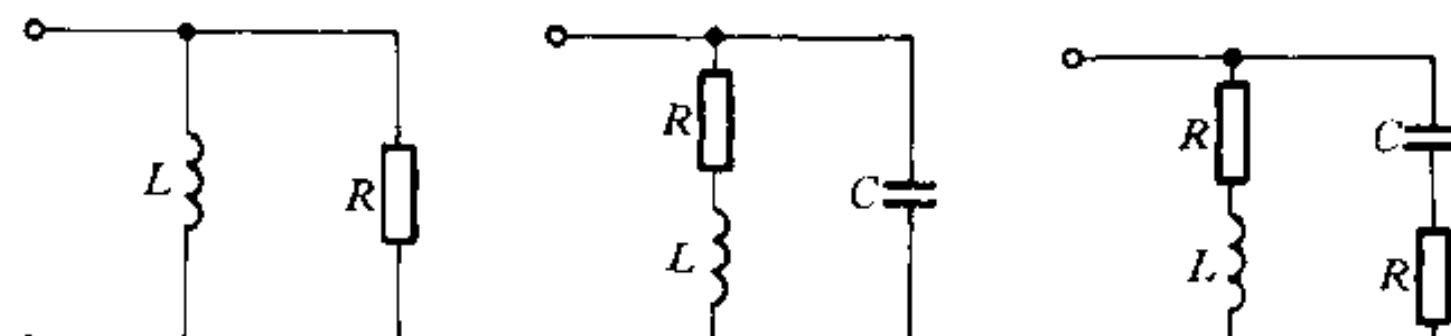
$$h(t) = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}} = 10^6 e^{-2t}$$

应用式(14-8), 有

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \int_0^t i_s(t - \xi)h(\xi)d\xi \\ &= \int_0^t 2 \times 10^{-6} e^{-(t-\xi)} \times 10^6 e^{-2\xi} d\xi \\ &= 2 \int_0^t e^{-(t+\xi)} d\xi = 2e^{-t} \int_0^t e^{-\xi} d\xi \\ &= 2(e^{-t} - e^{-2t}) \epsilon(t) \text{ V} \end{aligned}$$

习题

14-1 试求图示线性一端口的驱动点阻抗 $Z(s)$ 的表达式, 并在 s 平面上绘出极点和零点。已知 $R = 1 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 0.5 \text{ F}$ 。



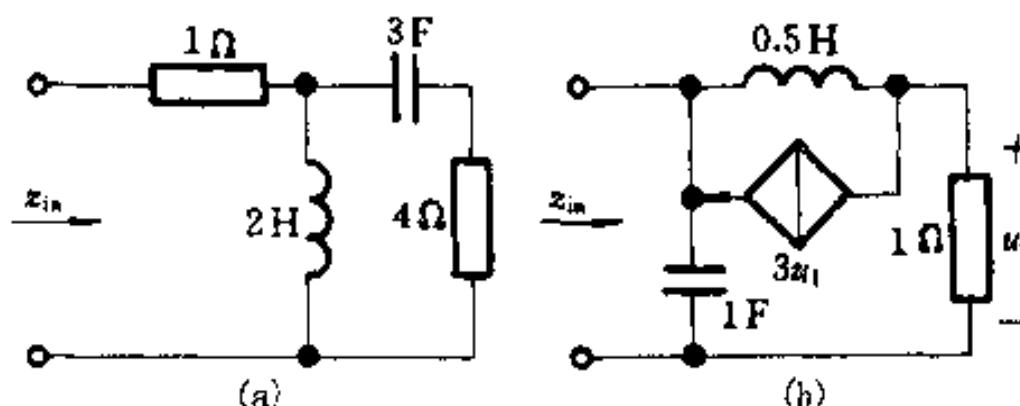
(a)

(b)

(c)

題 14-1 圖

14-2 求图示各电路的驱动点阻抗 $Z(s)$ 的表达式，并在 s 平面上绘出极点和零点。



题 14-2 图

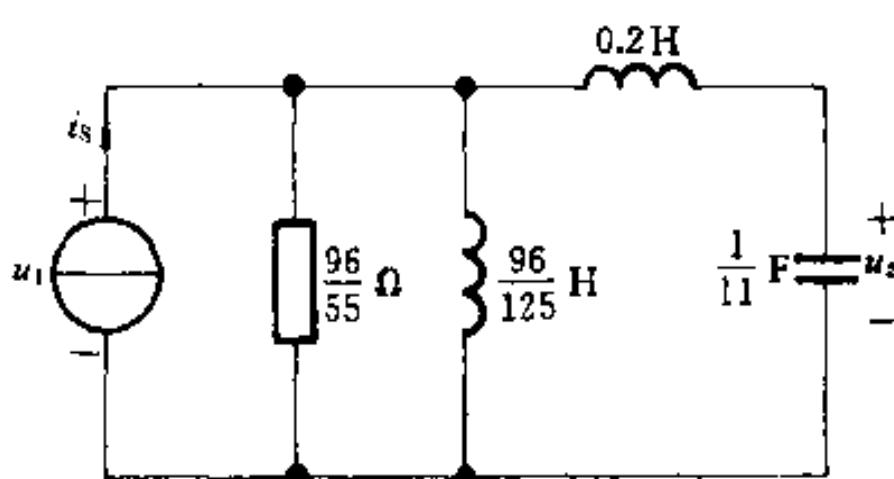
14-3 图示为一线性电路, 输入电流源的电流为 i_s 。

(1) 试计算驱动点阻抗 $Z_d(s) = \frac{U_1(s)}{I_s(s)}$;

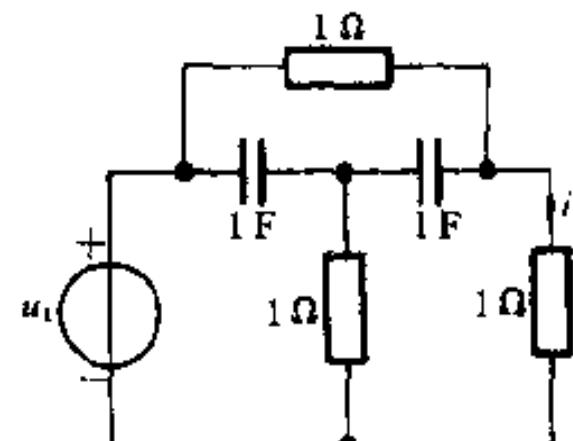
(2) 试计算转移阻抗 $Z_t(s) = \frac{U_2(s)}{I_s(s)}$;

(3) 在 s 平面上绘出 $Z_d(s)$ 和 $Z_t(s)$ 的极点和零点。

14-4 试求图示电路的转移导纳 $Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}$, 并在 s 平面上绘出零点和极点。



题 14-3 图

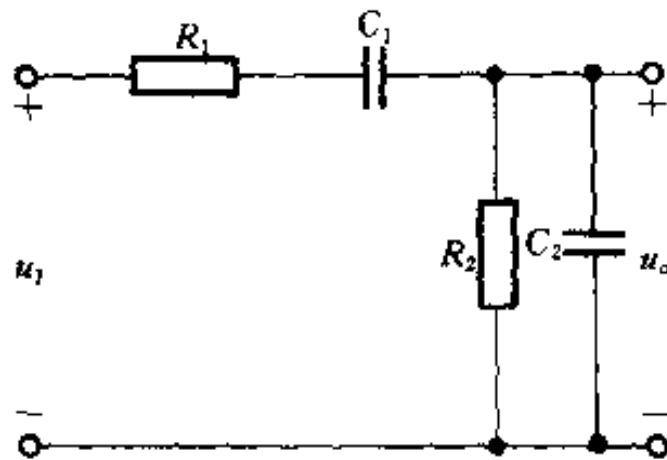


題 14-4 圖

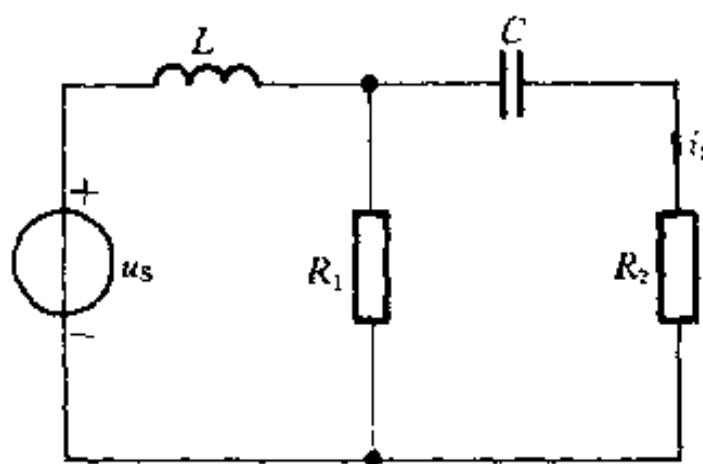
14-5 图示为RC电路,求它的转移函数 $H(s) = \frac{U_o(s)}{U_1(s)}$ 。

14-6 图示电路中 $L = 0.2 \text{ H}$, $C = 0.1 \text{ F}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $u_s(t) = 7e^{-2t} \text{ V}$, 求 R_2 中

的电流 $i_2(t)$, 并求网络函数 $H(s) = \frac{I_2(s)}{U_s(s)}$ 及单位冲激响应。



题 14-5 图



题 14-6 图

14-7 已知网络函数为

$$(1) H(s) = \frac{2}{s + 0.3}$$

$$(2) H(s) = \frac{s - 5}{s^2 - 10s + 125}$$

$$(3) H(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 20s + 500}$$

试定性作出单位冲激响应的波形。

14-8 设某线性电路的冲激响应 $h(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$, 试求相应的网络函数, 并绘出极、零点图。

14-9 设网络的冲激响应为:

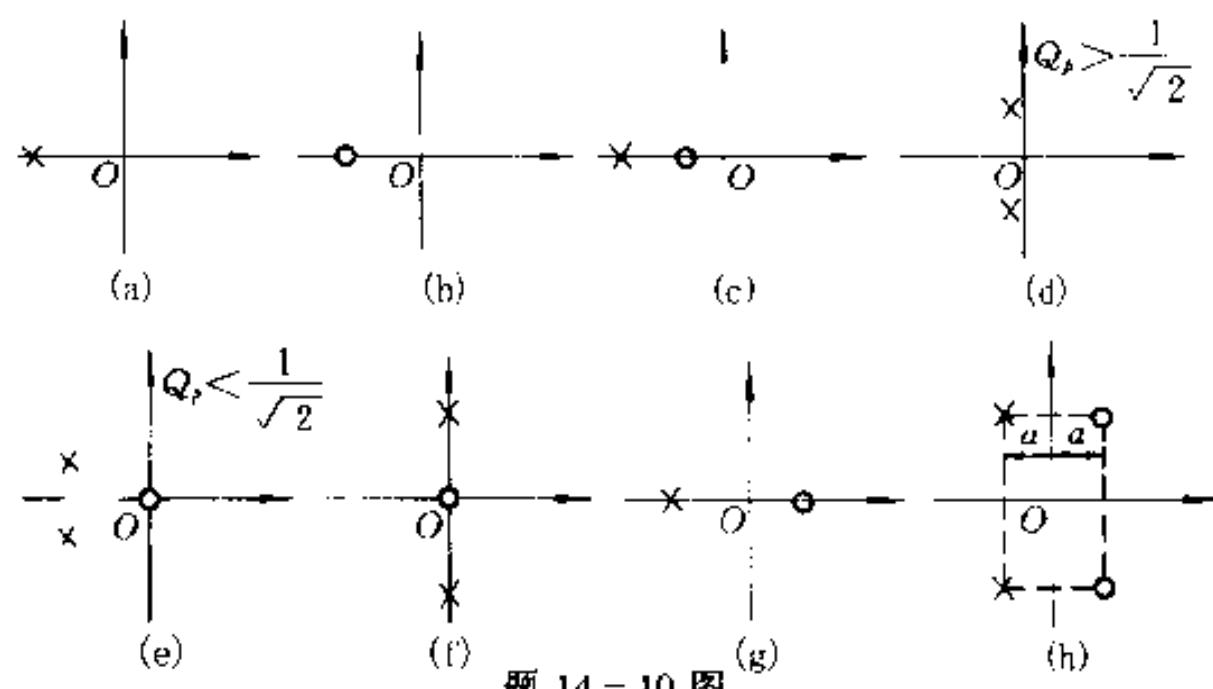
$$(1) h(t) = \delta(t) + \frac{3}{5}e^{-t}$$

$$(2) h(t) = e^{-\alpha} \sin(\omega t + \theta)$$

$$(3) h(t) = \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{7}{9}te^{-3t} + 3t$$

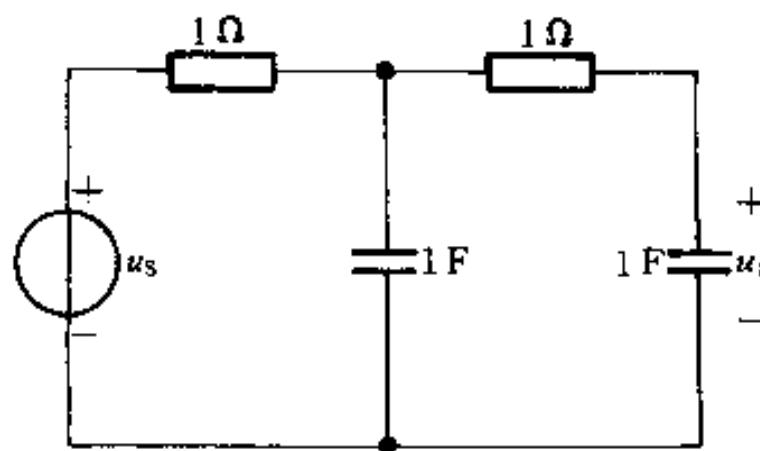
试求相应的网络函数的极点。

14-10 画出与下列零、极点分布相应的幅频响应 $|H(j\omega)| - \omega_0$



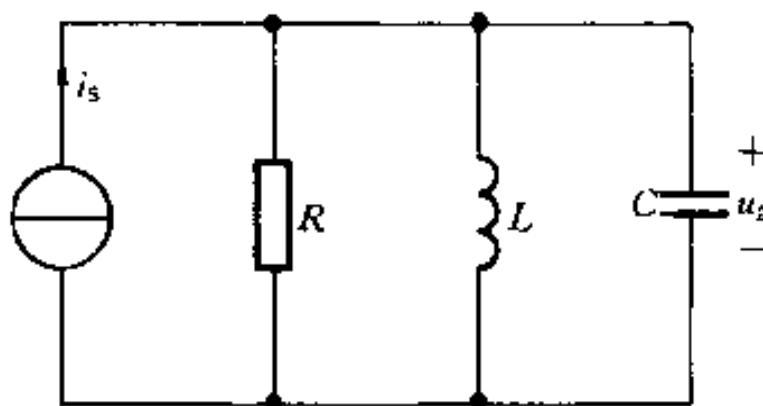
题 14-10 图

14-11 已知电路如图示,求网络函数 $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_s(s)}$, 定性画出幅频特性和相频特性示意图。



题 14-11 图

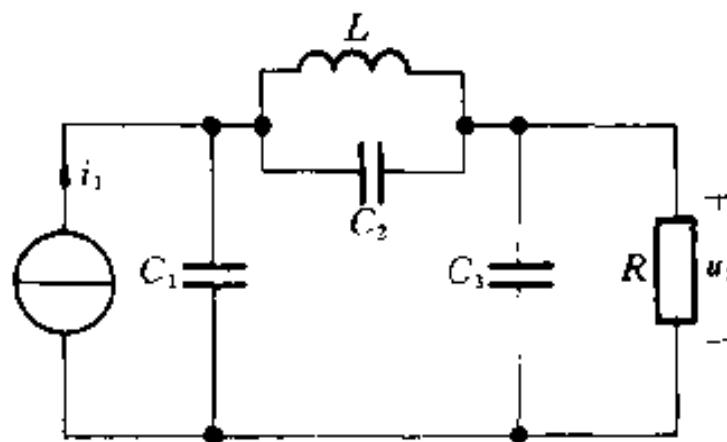
14-12 图示电路为 RLC 并联电路,试用网络函数的图解法分析 $H(s) = \frac{U_2(s)}{I_s(s)}$ 的频率响应特性。



题 14-12 图

14-13 图示为 LC 滤波器,其中 $C_1 = 1.73 \text{ F}$, $C_2 = C_3 = 0.27 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 1 \Omega$,

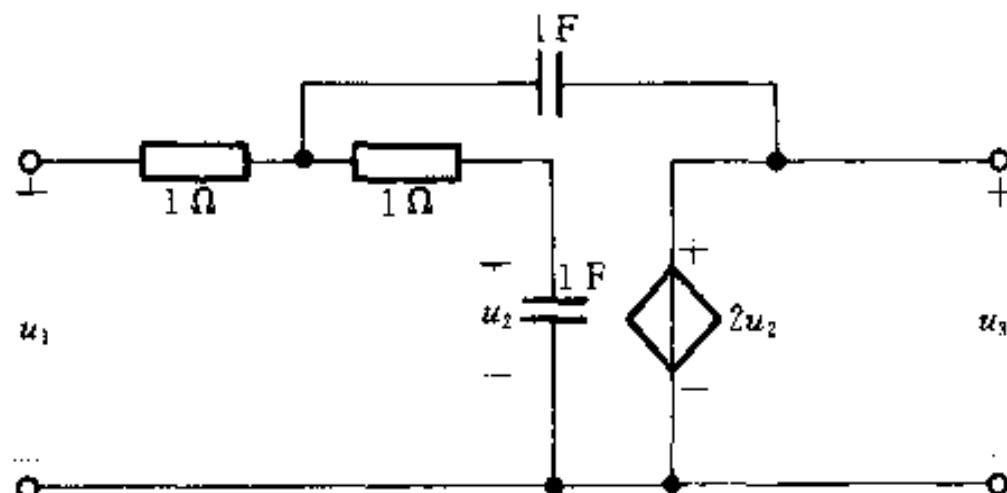
试求：



题 14-13 图

- (1) 网络函数 $H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}$;
- (2) 绘出此网络函数的极点和零点;
- (3) 绘出 $|H(j\omega)| - \omega$ 和 $\arg H(j\omega) - \omega$ 的图形;
- (4) 滤波器的冲激响应;
- (5) 滤波器的阶跃响应。

14-14 图示电路, 试求:(1)网络函数 $H(s) = \frac{U_3(s)}{U_1(s)}$, 并绘出幅频特性示意图;(2)求冲激响应 $h(t)$ 。



题 14-14 图

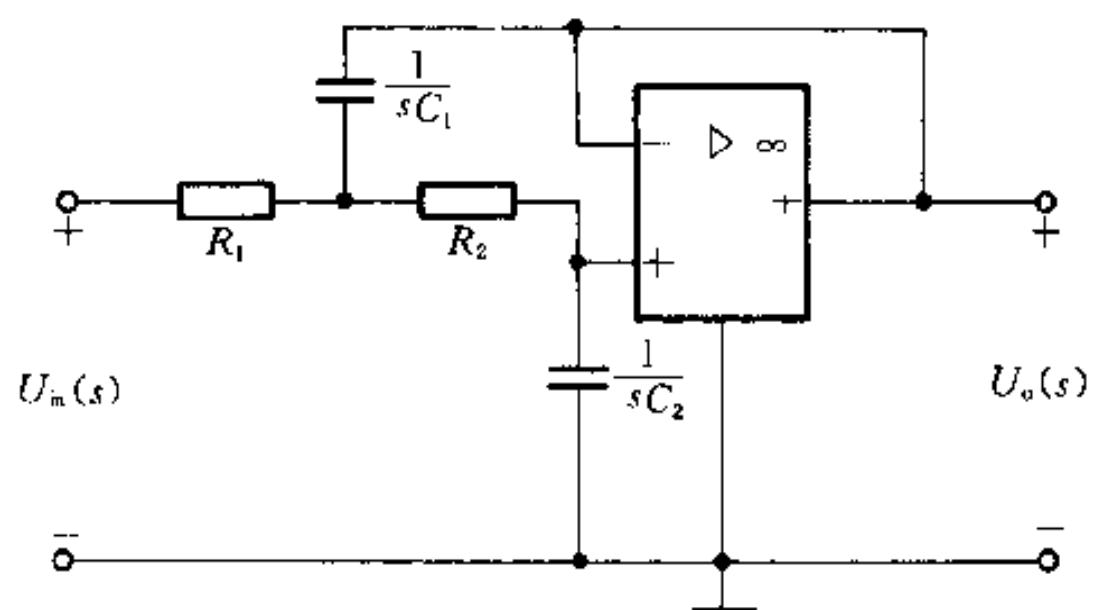
14-15 求图示电路的电压转移函数 $H(s) = \frac{U_o(s)}{U_{in}(s)}$, 设运放是理想的。

14-16 图示电路为一低通滤波器, 若已知冲激响应为

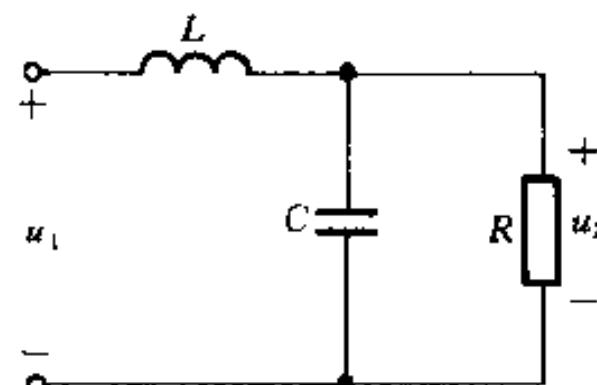
$$h(t) = \left[\sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \right] \epsilon(t)$$

求:(1) L 、 C 值;

(2) 幅频响应 $|H(j\omega)| - \omega$ 。



题 14~15 图



题 14~16 图

第十五章

电路方程的矩阵形式

·———— 内容提要 ———·

本章主要介绍电路方程的矩阵形式。首先，在图的基本概念的基础上介绍几个重要的矩阵：关联矩阵、回路矩阵和割集矩阵，并导出用这些矩阵表示的KCL、KVL方程。然后导出回路电流（网孔电流）方程、结点电压方程、割集电压方程和列表方程的矩阵形式。最后，简要地介绍电路的状态方程。

§ 15-1 割 集

在第三章中曾介绍过几种有效的电路分析方法，如回路电流法和结点电压法等。当电路规模较小，结构较简单时，上述电路方程不难由人工用观察法列出。但在实际工程应用中，电路的规模日益增大，结构日趋复杂。为了便于利用计算机作为辅助手段进行电路分析，有必要研究系统化建立电路方程的方法，而且为了便于用计算机求解方程，还要求这些方程用矩阵形式表示。本章主要介绍电路方程的矩阵形式及其系统建立法，它是电路的计算机辅助设计和分析所需基本知识。

在第三章中已经介绍了图的定义及有关回路、树等的基本概念。这里补充介绍割集的概念，并介绍与树有关的基本割集组。

连通图 G 的一个割集是 G 的一个支路集合，把这些支路移去将使 G 分离为两个部分，但是如果少移去其中一条支路，图仍将是连通的。如在图 15-1(a) 所示的连通图 G 中，支路集合 Q_1 至 Q_7 （图中用虚线所示的支路）都是 G 的割集，即 $(a, d, f), (a, b, e), (b, c, f), (c, d, e), (b, d, e, f), (a, e, c, f)$ 和 (a, b, c, d) ；而支路集合 (a, d, e, f) 和 (a, b, c, d, e) 则不是 G 的割集，这是因为前者若少移去一条支路， G 仍被分离为两部分；而后者若移去这些支路， G 将被分离成三部分。一般可以用在连通图 G 上作闭合面的方法判断确定一个割

集。如果在 G 上作一个闭合面,使其包围 G 的某些结点,于是,若把与此闭合面相切割的所有支路全部移去, G 将被分离为两个部分,则这样一组支路便构成一个割集。在图 15-1 中,示出了有关闭合面(图中用虚线示出)与割集支路相切割的情况。

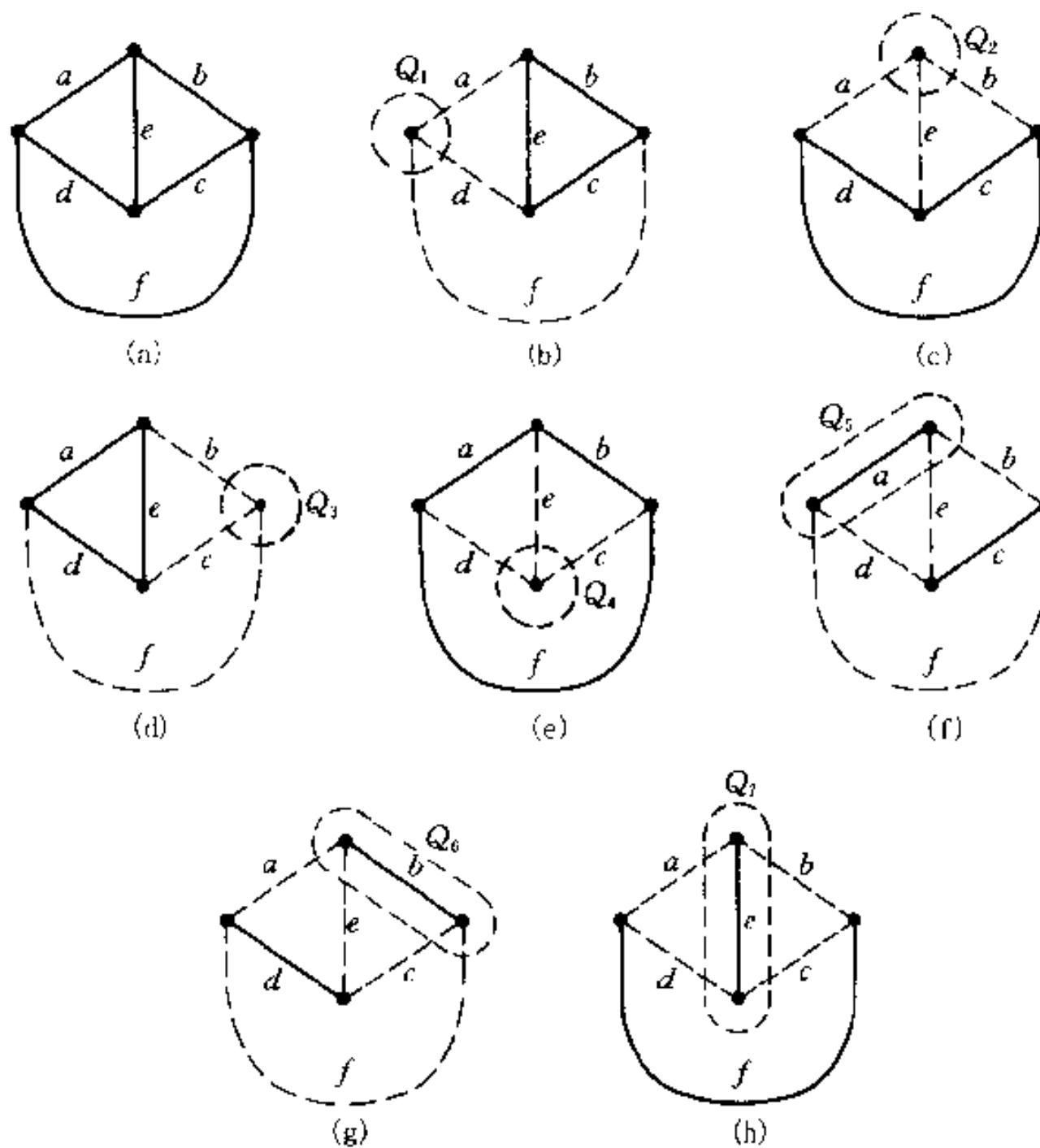


图 15-1 割集的定义

由于 KCL 适用于任何一个闭合面,因此属于同一割集的所有支路的电流应满足 KCL。当一个割集的所有支路都连接在同一个结点上,如图 15-1 中的 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 和 Q_4 ,则割集的 KCL 方程变为结点上的 KCL 方程。于是,对于连通图,总共可列出与割集数相等数目的 KCL 方程,但这些方程并非都是线性独立的。对应于一组线性独立的 KCL 方程的割集称为独立割集。

在第三章中曾介绍了回路电流法,在应用回路电流法时,首先必须选择一组独立回路。应用割集电压法(§ 15.6)时,首先必须选择一组独立割集。与某一个树有关的单连支回路组是一组独立回路,即基本回路,这就是说,借助于“树”能方便地确定一组独立回路。现在介绍借助于“树”确定一组独立割集的方法。

对于一个连通图,如任选一个树,则与树对应的连支集合不能构成一个割集,而它的每一个树支与一些相应的连支可以构成一个割集。例如,对图 15-2 所示连通图 G ,选一个树 T ,它的树支和连支分别用实线和虚线表示,如把全部连支移去,剩下的图(即为树)仍是连通的,所以任何连支集合不能构成一个割集。另外,由于树是连接全部结点所需最少支路的集合,所以移去任何一条树支,如 b_1 ,将把树分离成 T_1 和 T_2 两部分。于是连接 T_1 和 T_2 的那些连支 l_1 、 l_2 、和 l_3 与 b_1 一起必构成一个割集,因为把它们移去后, G 将被分离为两部分。同理,每一条树支都可以与相应的一些连支构成割集。这种由树的一条树支与相应的一些连支构成的割集称为单树支割集或基本割集。对于一个具有 n 个结点和 b 条支路的连通图,其树支数为 $(n - 1)$,因此将有 $(n - 1)$ 个单树支割集,称为基本割集组。基本割集组是独立割集组。对于 n 个结点的连通图,独立割集数为 $(n - 1)$ 。顺便指出,独立割集不一定是单树支割集,如同独立回路不一定是单连支回路一样。

由于一个连通图 G 可以有许多不同的树,所以可选出许多基本割集组。如对图 15-3(a)所示的连通图,若选支路(2,3,4,6)为树支,则基本割集组为: Q_1

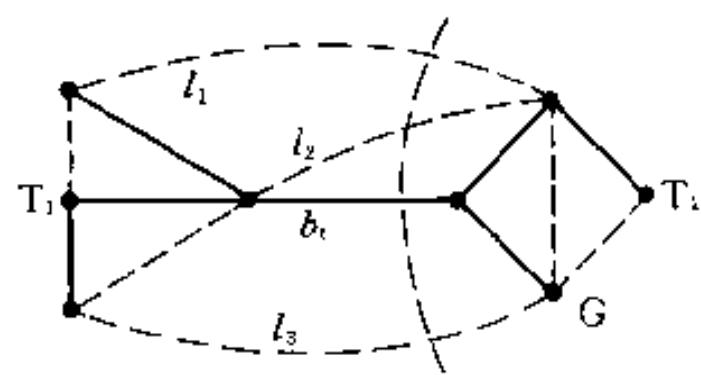


图 15-2 单树支割集

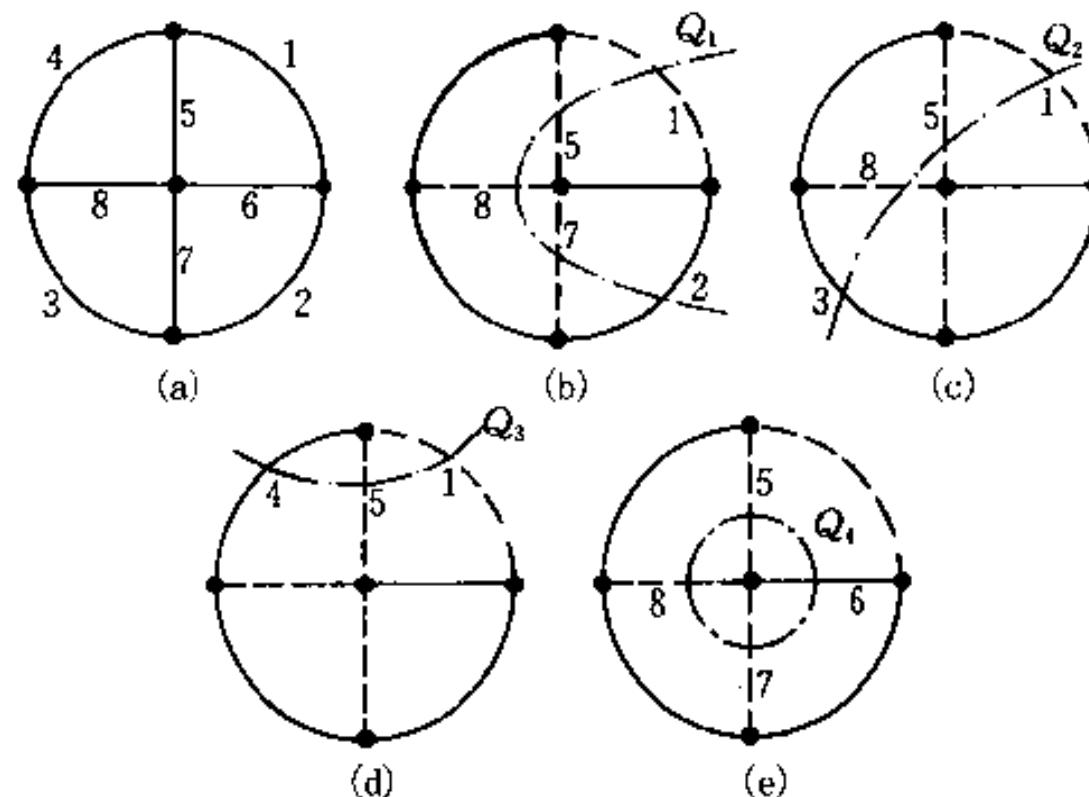


图 15-3 基本割集组

$(2,1,5,7,8)$, $Q_2(3,1,5,8)$, $Q_3(4,1,5)$, $Q_4(6,5,7,8)$ 分别如图(b)、(c)、(d)、(e)所示,其中实线和虚线分别表示树支和连支,点划线表示割集支路与相应闭合面相切割的情况。

§ 15-2 关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵

电路的图是电路拓扑结构的抽象描述,若图中每一支路都赋予一个参考方向,它成为有向图。有向图的拓扑性质可以用关联矩阵、回路矩阵和割集矩阵描述。本章介绍这3个矩阵以及用它们表示的基尔霍夫定律的矩阵形式。

设一条支路连接于某两个结点,则称该支路与这两个结点相关联。支路与结点的关联性质可以用所谓关联矩阵描述。设有向图的结点数为 n ,支路数为 b ,且所有结点与支路均加以编号。于是,该有向图的关联矩阵为一个 $(n \times b)$ 阶的矩阵,用 A_a 表示。它的行对应结点,列对应支路,它的任一元素 a_{jk} 定义如下:

$a_{jk} = +1$,表示支路 k 与结点 j 关联并且它的方向背离结点;

$a_{jk} = -1$,表示支路 k 与结点 j 关联并且它指向结点;

$a_{jk} = 0$,表示支路 k 与结点 j 无关联。

例如对于图 15-4 所示的有向图,它的关联矩阵是

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 \\ 3 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 4 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (15-1)$$

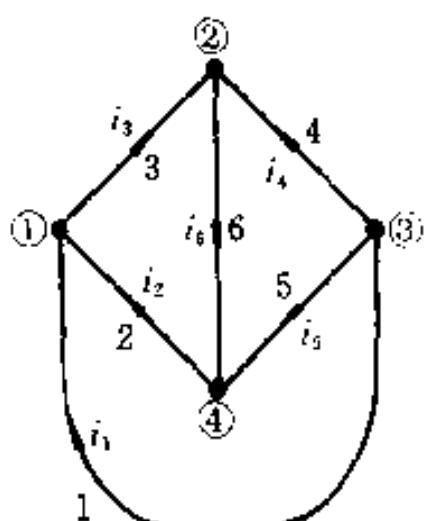


图 15-4 图的结点与
支路的关联性质

A_a 的每一列对应于一条支路。由于一条支路连接于两个结点,若离开一个结点,则必指向另一个结点,因此每一列中只有两个非零元素,即 $+1$ 和 -1 。当把所有行的元素按列相加就得一行全为零的元素,所以 A_a 的行不是彼此独立的。或者说按 A_a 的每一列只有 $+1$ 和 -1 两个非零元素这一特点, A_a 中的任一行必能从其他 $(n-1)$ 行导出。

如果把 A_a 的任一行划去,剩下的 $(n-1) \times b$ 矩阵用 A 表示,并称为降阶关联矩阵(今后主要用这种降阶关联矩阵,所以往往略去“降阶”二字)。例如,若把式(15-1)中的第 4 行划去,得

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的某些列将只具有一个 $+1$ 或一个 -1 ,每一个这样的列必对应于

与划去结点相关联的一条支路。被划去的行对应的结点可以当作参考结点。

电路中的 b 个支路电流可以用一个 b 阶列向量表示, 即

$$\mathbf{i} = [i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_b]^T$$

若用矩阵 \mathbf{A} 左乘电流列向量, 则乘积是一个 $(n - 1)$ 阶列向量, 由矩阵相乘规则可知, 它的每一元素即为关联到对应结点上各支路电流的代数和, 即

$$\mathbf{Ai} = \begin{bmatrix} \text{结点 1 上的 } \sum i \\ \text{结点 2 上的 } \sum i \\ \vdots \\ \text{结点 } (n-1) \text{ 上的 } \sum i \end{bmatrix}$$

因此, 有

$$\mathbf{Ai} = \mathbf{0} \quad (15-2)$$

式(15-2)是用矩阵 \mathbf{A} 表示的 KCL 的矩阵形式。例如对图 15-4 有

$$\mathbf{Ai} = \begin{bmatrix} -i_1 & -i_2 & +i_3 \\ -i_3 & -i_4 & +i_6 \\ i_1 & +i_4 & +i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

电路中 b 个支路电压可以用一个 b 阶列向量表示, 即

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_b]^T$$

$(n - 1)$ 个结点电压可以用一个 $(n - 1)$ 阶列向量表示, 即

$$\mathbf{u}_n = [u_{n1} \quad u_{n2} \quad \cdots \quad u_{n(n-1)}]^T$$

由于矩阵 \mathbf{A} 的每一列, 也就是矩阵 \mathbf{A}^T 的每一行, 表示每一对应支路与结点的关联情况, 所以有

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n \quad (15-3)$$

例如, 对图 15-4 有

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{n1} + u_{n3} \\ -u_{n1} \\ u_{n1} - u_{n2} \\ -u_{n2} + u_{n3} \\ u_{n3} \\ u_{n2} \end{bmatrix}$$

可见式(15-3)表明电路中的各支路电压可以用与该支路关联的两个结点的结点电压(参考结点的结点电压为零)表示, 这正是结点电压法的基本思想。同时, 可以认为该式是用矩阵 \mathbf{A} 表示的 KVL 的矩阵形式。

设一个回路由某些支路组成,则称这些支路与该回路关联。支路与回路的关联性质可以用所谓回路矩阵描述。下面仅介绍独立回路矩阵,简称为回路矩阵。设有向图的独立回路数为 l , 支路数为 b , 且所有独立回路和支路均加以编号,于是,该有向图的回路矩阵是一个 $l \times b$ 的矩阵,用 B 表示。 B 的行对应一个回路,列对应于支路,它的任一元素,如 b_{jk} ,定义如下:

$b_{jk} = +1$, 表示支路 k 与回路 j 关联,且它们的方向一致;

$b_{jk} = -1$, 表示支路 k 与回路 j 关联,且它们的方向相反;

$b_{jk} = 0$, 表示支路 k 与回路 j 无关联。

例如,对于图 15-4 所示的有向图[重画于图 15-5(a)]独立回路数等于 3。若选一组独立回路如图 15-5(b)所示,则对应的回路矩阵为

$$B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

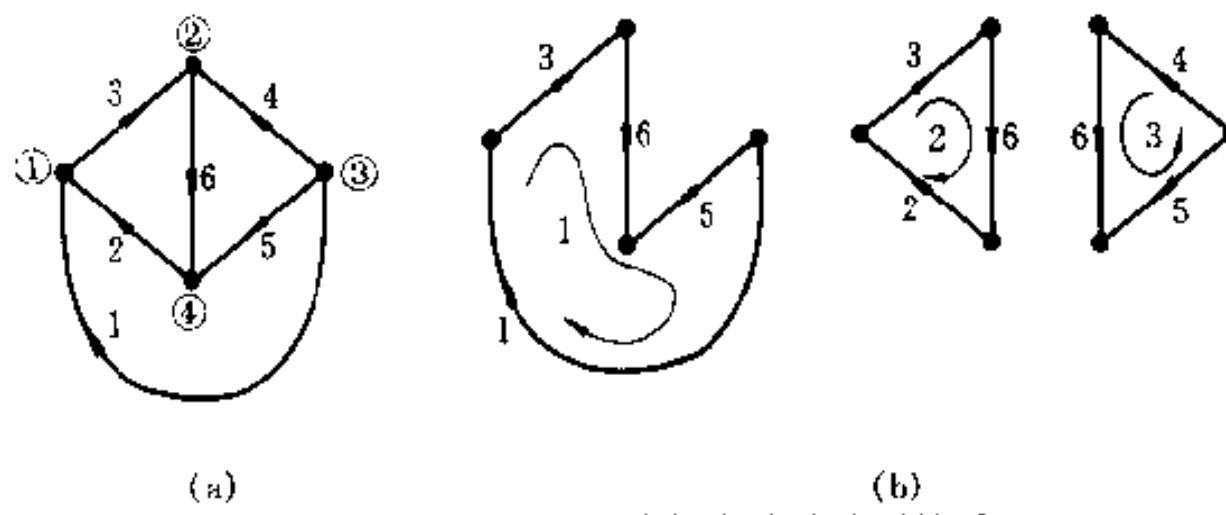


图 15-5 回路与支路的关联性质

如果所选独立回路组是对应于一个树的单连支回路组,这种回路矩阵就称为基本回路矩阵,用 B_t 表示。写 B_t 时,注意安排其行列次序如下:把 l 条连支依次排列在对应于 B_t 的第 1 至第 l 列,然后再排列树支;取每一单连支回路的序号为对应连支所在列的序号,且以该连支的方向为对应的回路的绕行方向, B_t 中将出现一个 l 阶的单位子矩阵,即有

$$B_t = [1_t \mid B_t] \quad (15-4)$$

式中下标 t 和 t 分别表示与连支和树支对应的部分。例如对图 15-5(a)所示有向图,若选支路 3、5、6 为树支,则支路 1、2、4 即为连支,所以图 15-5(b)所示一组独立回路即为一组单连支回路,可以写成基本回路矩阵形式

$$B_t = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

今后,基本回路矩阵一般都写成如式(15-4)的形式。

回路矩阵左乘支路电压列向量,所得乘积是一个 l 阶的列向量。由于矩阵 B 的每一行表示每一对应回路与支路的关联情况,由矩阵的乘法规则可知乘积列向量中每一元素将等于每一对应回路中各支路电压的代数和,即

$$Bu = \begin{bmatrix} \text{回路 1 中的 } \sum u \\ \text{回路 2 中的 } \sum u \\ \vdots \\ \text{回路 } l \text{ 中的 } \sum u \end{bmatrix}$$

故有

$$Bu = 0 \quad (15-5)$$

式(15-5)是用矩阵 B 表示的KVL的矩阵形式。例如,对图15-5(a),若选如图15-5(b)所示一组独立回路,有

$$Bu = \begin{bmatrix} u_1 + u_3 - u_5 + u_6 \\ u_2 + u_3 + u_6 \\ u_4 - u_5 + u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

l 个独立回路电流可用一个 l 阶列向量表示,即

$$i_1 = [i_{11} \ i_{12} \ \cdots \ i_{1l}]^T$$

由于矩阵 B 的每一列,也就是矩阵 B^T 的每一行,表示每一对应支路与回路的关联情况,所以按矩阵的乘法规则可知

$$i = B^T i_1 \quad (15-6)$$

例如,对图15-5(a)有

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \\ i_{14} \\ i_{15} \\ i_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{11} + i_{12} \\ i_{13} \\ -i_{11} - i_{13} \\ i_{11} + i_{12} + i_{13} \end{bmatrix}$$

所以式(15-6)表明电路中各支路电流可以用与该支路关联的所有回路中的回路电流表示,这正是回路电流法的基本思想。可以认为该式是用矩阵 B 表示的KCL的矩阵形式。

设一个割集由某些支路构成,则称这些支路与该割集关联。支路与割集的关联性质可用所谓割集矩阵描述。下面仅介绍独立割集矩阵,简称割集矩阵。设有向图的结点数为 n ,支路数为 b ,则该图的独立割集数为 $(n-1)$ 。对每个割

集编号，并指定一个割集方向（移去割集的所有支路， G 被分离为两部分后，从其中一部分指向另一部分的方向，即为割集的方向，每一个割集只有两个可能的方向）。于是割集矩阵为一个 $(n-1) \times b$ 的矩阵，用 Q 表示。 Q 的行对应割集，列对应支路，它的任一元素 q_{jk} 定义如下：

$q_{jk} = +1$, 表示支路 k 与割集 j 关联并且具有同一方向；

$q_{jk} = -1$, 表示支路 k 与割集 j 关联但是它们的方向相反；

$q_{jk} = 0$, 表示支路 k 与割集 j 无关联。

例如，对图 15-4 所示有向图[重画于图 15-6(a)]，独立割集数等于 3。若选一组独立割集如图 15-6(b)所示，对应的割集矩阵为

$$Q = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

如果选一组单树支割集为一组独立割集，这种割集矩阵称为基本割集矩阵，用 Q_t 表示。在写 Q_t 时，注意安排其行列如下：把 $(n-1)$ 条树支依次排列在对应于 Q_t 的第 1 至第 $(n-1)$ 列，然后排列连支，再取每一单树支割集的序号与相应树支所在列的序号相同，且选割集方向与相应树支方向一致，则 Q_t 有如下形式

$$Q_t = [1_t \mid Q_t] \quad (15-7)$$

式中下标 t 和 1 分别表示对应于树支和连支部分。例如，对于图 15-6(a)所示的有向图，若选支路 3、5、6 为树支，一组单树支割集即如图 15-6(b)所示

$$Q_t = \begin{matrix} & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{matrix} \quad (15-8)$$

今后，基本割集矩阵一般都写成如式(15-7)的形式。

前面介绍割集概念时曾指出，属于一个割集所有支路电流的代数和等于零。根据割集矩阵的定义和矩阵的乘法规则不难得出

$$Qi = 0 \quad (15-9)$$

式(15-9)是用矩阵 Q 表示的 KCL 的矩阵形式。例如，对图 15-6(a)所示有向图，若选同图(b)所示一组独立割集，则有

$$Qi = \begin{bmatrix} -i_1 - i_2 + i_3 \\ i_1 + i_4 + i_5 \\ -i_1 - i_2 - i_4 + i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

电路中 $(n - 1)$ 个树支电压可用 $(n - 1)$ 阶列向量表示, 即

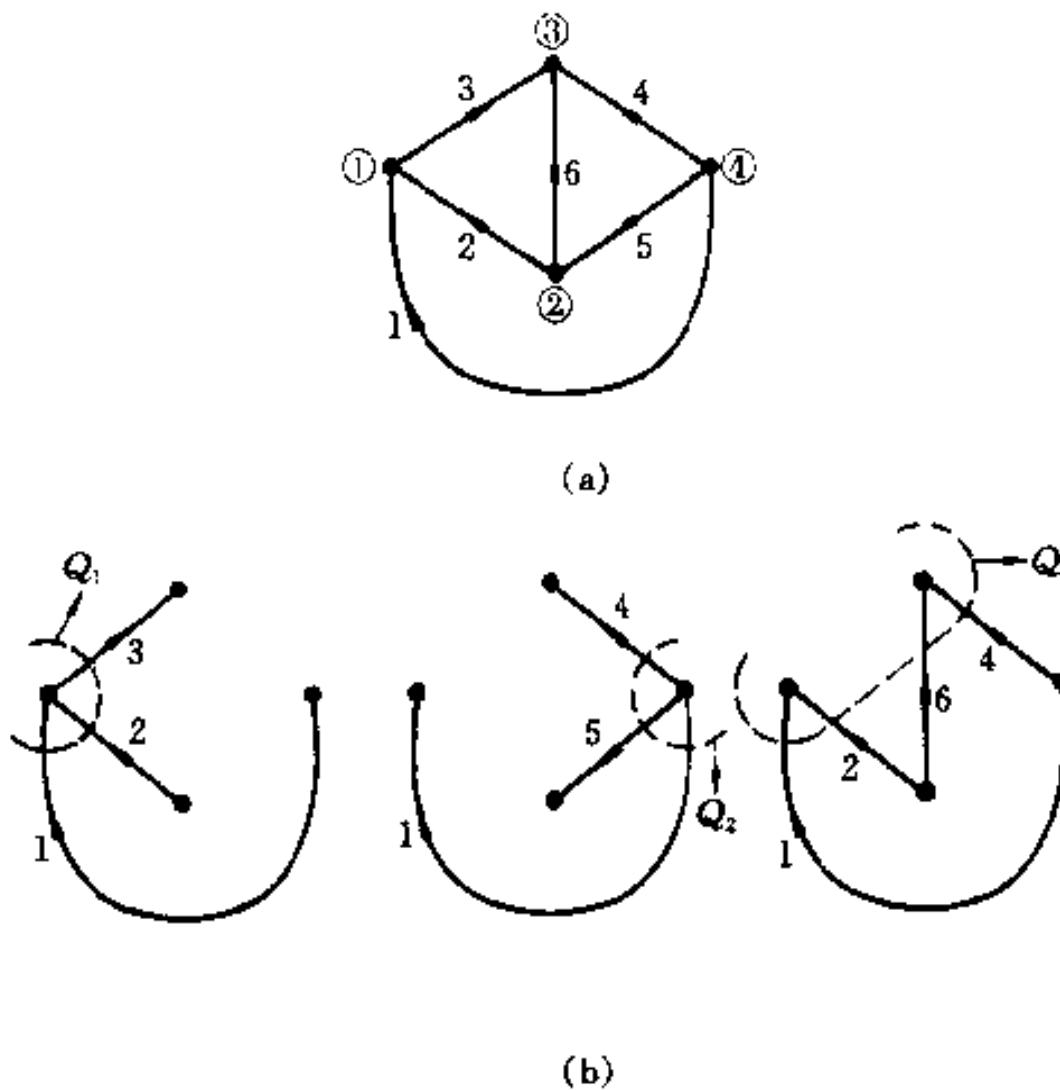


图 15-6 割集与支路的关联性质

$$\mathbf{u}_t = [u_{t1} \ u_{t2} \ \cdots \ u_{t(n-1)}]^T$$

由于通常选单树支割集为独立割集, 此时树支电压又可视为对应的割集电压, 所以 \mathbf{u}_t 又是基本割集组的割集电压列向量。由于 \mathbf{Q}_t 的每一列, 也就是 \mathbf{Q}_t^T 的每一行, 表示一条支路与割集的关联情况, 按矩阵相乘的规则可得

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}_t^T \mathbf{u}_t \quad (15-10)$$

式(15-10)是用矩阵 \mathbf{Q}_t 表示的KVL的矩阵形式。例如对图 15-6(a)所示有向图, 若选支路 3、5、6 为树支, \mathbf{Q}_t 如式(15-8), 则有

$$\mathbf{u} = [u_3 \ u_5 \ u_6 \ u_1 \ u_2 \ u_4]^T$$

而

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}_t^T \mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t1} \\ u_{t2} \\ u_{t3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ -u_1 + u_2 - u_3 \\ -u_1 - u_3 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix}$$

式(15-10)表明电路的支路电压可以用树支电压(割集电压)表示, 这就是后面将介绍的割集电压法的基本思想。

式(15-2)和式(15-3)分别与式(15-9)和式(15-10)在形式上相似。有时,对某些图有

$$Q_f = A$$

* § 15-3 矩阵 A 、 B_f 、 Q_f 之间的关系

对于任一个连通图 G ,在支路排列顺序相同时写出的矩阵 A 和 B 有如下关系

$$AB^T = \mathbf{0}$$

或

$$BA^T = \mathbf{0}$$

这是因为 $u = A^T u_n$ 和 $Bu = \mathbf{0}$,当支路排列顺序相同时,两式中的 u 完全相同,所以有

$$Bu = BA^T u_n = \mathbf{0}$$

由于 $u_n \neq \mathbf{0}$,故

$$BA^T = \mathbf{0}$$

或

$$AB^T = \mathbf{0}$$

用类似的方法可以证明:当支路排列顺序相同时写出的连通图的矩阵 Q 和 B 有如下关系

$$QB^T = \mathbf{0}$$

或

$$BQ^T = \mathbf{0}$$

如果选择连通图 G 的一个树,按先树支、后连支的相同支路顺序排列下写出 G 的 A 、 B_f 、 Q_f ,使得 $A = [A_1 \mid A_1]$, $B_f = [B_1 \mid \mathbf{1}_1]$, $Q_f = [\mathbf{1}_1 \mid Q_1]$,由于

$$AB_f^T = [A_1 \mid A_1] \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{1}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

所以

$$A_1 B_1^T + A_1 = \mathbf{0}$$

或

$$B_1^T = -A_1^{-1} A_1 \text{ ①}$$

同理,由于

$$Q_f B_f^T = [\mathbf{1}_1 \mid Q_1] \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{1}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

所以

① 可以证明子矩阵 A_1 是非奇异的,它的逆阵一定存在。

$$\mathbf{B}_t^T + \mathbf{Q}_t = \mathbf{0}$$

或

$$\mathbf{Q}_t = -\mathbf{B}_t^T = \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_t$$

§ 15-4 回路电流方程的矩阵形式

在第三章中曾介绍了网孔电流法和回路电流法。它们的特点是分别以网孔电流和回路电流作为电路的独立变量，并用 KVL 列出足够的电路方程。

由于描述支路与回路关联性质的是回路矩阵 \mathbf{B} ，所以宜用以 \mathbf{B} 表示的 KCL 和 KVL 推导出回路电流方程的矩阵形式。首先设回路电流列向量为 i_t ，有：

$$\text{KCL} \quad i = \mathbf{B}^T i_t$$

$$\text{KVL} \quad \mathbf{B}i = \mathbf{0}$$

在列矩阵形式电路方程时，还必须有一组支路约束方程。因此需要规定一条支路的结构和内容。目前在电路理论中还没有统一的规定，但可以采用所谓“复合支路”。对于回路电流法采用图 15-7 所示复合支路，其中下标 k 表示第 k 条支路， \dot{U}_{sk} 和 I_{sk} 分别表示独立电压源和独立电流源， Z_k （或 Y_k ）表示阻抗（或导纳），且规定^① 它只可能是单一的电阻、电感或电容，而不能是它们的组合，即

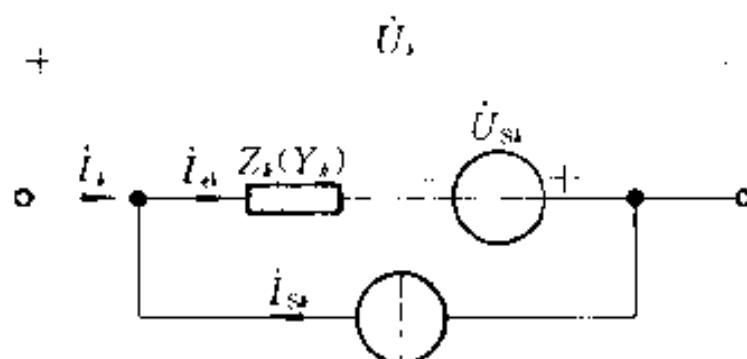


图 15-7 复合支路

$$Z_k = \begin{cases} R_k \\ j\omega L_k \\ \frac{1}{j\omega C_k} \end{cases}$$

总之，复合支路的定义规定了一条支路最多可以包含的不同元件数及其连接方式，但不是说每条支路都必须包含这几种元件。所以可以允许一条支路缺少其中某些元件^②。另外，还需指出，图 15-7 中的复合支路是在采用相量法条

^① 这种规定主要是为了便于编制程序。

^② 对于回路电流法，不允许存在无伴电流源支路。

件下画出的。应用运算法时,可以采用相应的运算形式。为了写出复合支路的支路方程,还应规定电压和电流的参考方向。本章中采用的电压和电流的参考方向如图 15-7 所示。下面分两种不同情况推导整个电路的支路方程的矩阵形式。

1. 当电路中电感之间无耦合时,对于第 k 条支路有

$$\dot{U}_k = Z_k (\dot{I}_k + \dot{I}_{sk}) - \dot{U}_{sk} \quad (15-11)$$

若设:

$\dot{\mathbf{I}} = [\dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 \quad \cdots \quad \dot{I}_b]^T$ 为支路电流列向量;

$\dot{\mathbf{U}} = [\dot{U}_1 \quad \dot{U}_2 \quad \cdots \quad \dot{U}_b]^T$ 为支路电压列向量;

$\dot{\mathbf{I}}_s = [\dot{I}_{s1} \quad \dot{I}_{s2} \quad \cdots \quad \dot{I}_{sb}]^T$ 为支路电流源的电流列向量;

$\dot{\mathbf{U}}_s = [\dot{U}_{s1} \quad \dot{U}_{s2} \quad \cdots \quad \dot{U}_{sb}]^T$ 为支路电压源的电压列向量。

对整个电路有

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & & & \mathbf{0} \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{I}_{s1} \\ \dot{I}_2 + \dot{I}_{s2} \\ \vdots \\ \dot{I}_b + \dot{I}_{sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_{s1} \\ \dot{U}_{s2} \\ \vdots \\ \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}$$

即

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}(\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s) - \dot{\mathbf{U}}_s \quad (15-12)$$

式中 \mathbf{Z} 称为支路阻抗矩阵,它是一个对角阵。

2. 当电路中电感之间有耦合时,式(15-11)还应计及互感电压的作用。若设第 1 支路至第 g 支路之间相互均有耦合,则有:

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_{e1} \pm j\omega M_{12} \dot{I}_{e2} \pm j\omega M_{13} \dot{I}_{e3} \pm \cdots \pm j\omega M_{1g} \dot{I}_{eg} - \dot{U}_{s1}$$

$$\dot{U}_2 = \pm j\omega M_{21} \dot{I}_{e1} + Z_2 \dot{I}_{e2} \pm j\omega M_{23} \dot{I}_{e3} \pm \cdots \pm j\omega M_{2g} \dot{I}_{eg} - \dot{U}_{s2}$$

.....

$$\dot{U}_g = \pm j\omega M_{g1} \dot{I}_{e1} \pm j\omega M_{g2} \dot{I}_{e2} \pm j\omega M_{g3} \dot{I}_{e3} \pm \cdots \pm Z_g \dot{I}_{eg} - \dot{U}_{sg}$$

式中所有互感电压前取“+”号或“-”号决定于各电感的同名端和电流、电压的参考方向。其次要注意 $\dot{I}_{e1} = \dot{I}_1 + \dot{I}_{s1}$, $\dot{I}_{e2} = \dot{I}_2 + \dot{I}_{s2}$, ..., $M_{12} = M_{21}$ 等等;其余支路之间由于无耦合,故得

$$\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_{ek} - \dot{U}_{sk}$$

.....

$$\dot{U}_b = Z_b \dot{I}_{eb} - \dot{U}_{sb}$$

这样,支路电压与支路电流之间的关系可用下列矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_g \\ \dot{U}_h \\ \vdots \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & \pm j\omega M_{12} & \cdots & \pm j\omega M_{1g} & 0 & \cdots & 0 \\ \pm j\omega M_{21} & Z_2 & \cdots & \pm j\omega M_{2g} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm j\omega M_{g1} & \pm j\omega M_{g2} & \cdots & -Z_g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Z_h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & Z_b \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{I}_{s1} \\ \dot{I}_2 + \dot{I}_{s2} \\ \vdots \\ \dot{I}_g + \dot{I}_{sg} \\ \dot{I}_h + \dot{I}_{sh} \\ \vdots \\ \dot{I}_b + \dot{I}_{sb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{s1} \\ \dot{U}_{s2} \\ \vdots \\ \dot{U}_{sg} \\ \dot{U}_{sh} \\ \vdots \\ \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}$$

或写成

$$\dot{U} = \mathbf{Z}(\dot{I} + \dot{I}_s) - \dot{U}_s$$

式中 \mathbf{Z} 为支路阻抗矩阵, 其主对角线元素为各支路阻抗, 而非对角线元素将是相应的支路之间的互感阻抗, 因此 \mathbf{Z} 不再是对角阵。显然, 这个方程形式上完全与式(15-12)一样。为了导出回路电流方程的矩阵形式, 重写所需 3 组方程:

$$\text{KCL} \quad \dot{I} = \mathbf{B}^T \dot{I}_l$$

$$\text{KVL} \quad \mathbf{B}\dot{U} = \mathbf{0}$$

$$\text{支路方程} \quad \dot{U} = \mathbf{Z}(\dot{I} + \dot{I}_s) - \dot{U}_s$$

把支路方程代入 KVL 可得:

$$\mathbf{B}[\mathbf{Z}(\dot{I} + \dot{I}_s) - \dot{U}_s] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{BZ}\dot{I} + \mathbf{BZ}\dot{I}_s - \mathbf{B}\dot{U}_s = \mathbf{0}$$

再把 KCL 代入便得到

$$\mathbf{BZB}^T \dot{I}_l = \mathbf{B}\dot{U}_s - \mathbf{BZ}\dot{I}_s \quad (15-13)$$

式(15-13)即为回路电流方程的矩阵形式。由于乘积 \mathbf{BZ} 的行、列数分别为 l 和 b , 乘积 $(\mathbf{BZ})\mathbf{B}^T$ 的行、列数均为 l , 所以 \mathbf{BZB}^T 是一个 l 阶方阵。同理乘积

$B\dot{U}_S$ 和 $BZ\dot{I}_S$ 都是 l 阶列向量。

如设 $Z_1 \stackrel{\text{def}}{=} BZB^T$, 它是一个 l 阶的方阵, 称为回路阻抗矩阵, 它的主对角元素即为自阻抗, 非主对角元素即为互阻抗。

当电路中含有与无源元件串联的受控电压源(控制量可以是另一支路上无源元件的电压或电流)时, 复合支路将如图 15-8 所示。这样, 支路方程的矩阵形式仍为式(15-12), 只是其中支路阻抗矩阵的内容不同而已。此时 Z 的非主对角元素将可能是与受控电压源的控制系数有关的元素。

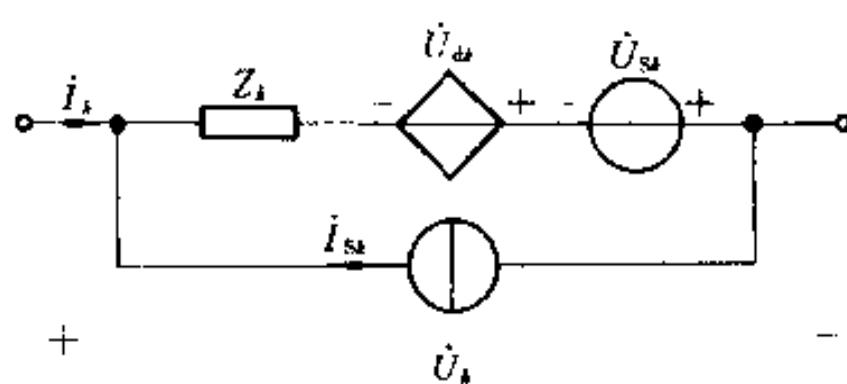


图 15-8 含受控电压源的复合支路

例 15-1 电路如图 15-9(a) 所示。用矩阵形式列出电路的回路电流方程。

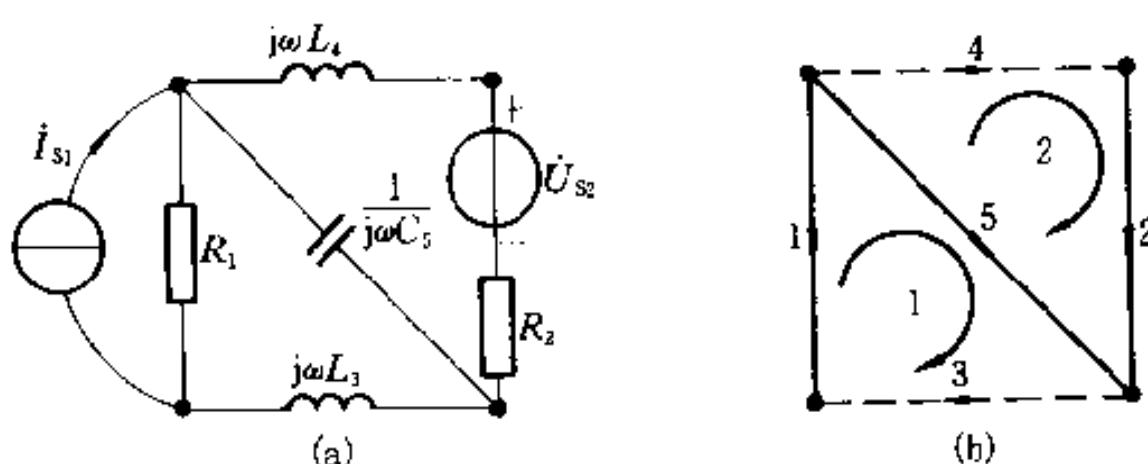


图 15-9 例 15-1 图

解 作出有向图, 并选支路 1、2、5 为树支[同图(b)实线所示]。两个单连支回路 1、2 如同图(b)所示, 有:

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \left[R_1, R_2, j\omega L_3, j\omega L_4, \frac{1}{j\omega C_5} \right]$$

$$\dot{\mathbf{U}}_s = [0 \ -U_{s2} \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\dot{\mathbf{I}}_s = [I_{s1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

把上式各矩阵代入式(15-13)便得回路电流方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_5} & -\frac{1}{j\omega C_5} \\ -\frac{1}{j\omega C_5} & R_2 + j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 I_{s1} \\ -U_{s2} \end{bmatrix}$$

若选网孔为一组独立回路,则回路电流方程即为网孔电流方程。例 15-1 就属这种情况。

编写回路电流方程必须选择一组独立回路,一般用基本回路组,从而可以通过选择一个合适的树处理。树的选择固然可以在计算机上按编好的程序自动进行,但比之结点电压法,这就显得麻烦些。另外,由于实际的复杂电路中,独立结点数往往少于独立回路数,再加上其他一些原因,目前在计算机辅助分析的程序中(如电力系统的潮流计算,电子电路的分析等),广泛采用结点法,而不采用回路法。

§ 15-5 结点电压方程的矩阵形式

结点电压法以结点电压为电路的独立变量,并用 KCL 列出足够的独立方程。由于描述支路与结点关联性质的是矩阵 A ,因此宜用以 A 表示的 KCL 和 KVL 推导结点电压方程的矩阵形式。设结点电压列向量为 \mathbf{u}_n ,按式(15-3)有

$$\mathbf{u} = A^T \mathbf{u}_n$$

上述 KVL 方程表示了 \mathbf{u}_n 与支路电压列向量 \mathbf{u} 的关系,它提供了选用 \mathbf{u}_n 作为独立电路变量的可能性。还需要用矩阵 A 表示的 KCL,即

$$Ai = \mathbf{0}$$

(式中 i 表示支路电流列向量)作为导出结点电压方程的依据。

对于结点电压法,可采用如图 15-10 所示复合支路^①,与图 15-7 定义的复合支路相比,图 15-10 中的复合支路仅增加了受控电流源^②。所有电压、电流的参考方向如图 15-10 所示。下面首先分 3 种情况推导出整个电路的支路

^① 注意,按这种复合支路的规定,电路中不允许存在受控电压源。另外,对结点电压法,不允许存在无伴电压源支路。

^② 它的控制量是另一支路中无源元件的电压或电流。

方程的矩阵形式。

1. 当电路中无受控电流源(即 $\dot{I}_{dk} = 0$), 电感间无耦合时, 对于第 k 条支路有

$$\dot{I}_k = Y_k \dot{U}_{ek} - \dot{I}_{sk} = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) - \dot{I}_{sk} \quad (15-14)$$

对整个电路有

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s \quad (15-15)$$

式中 \mathbf{Y} 称为支路导纳矩阵, 它是一个对角阵。

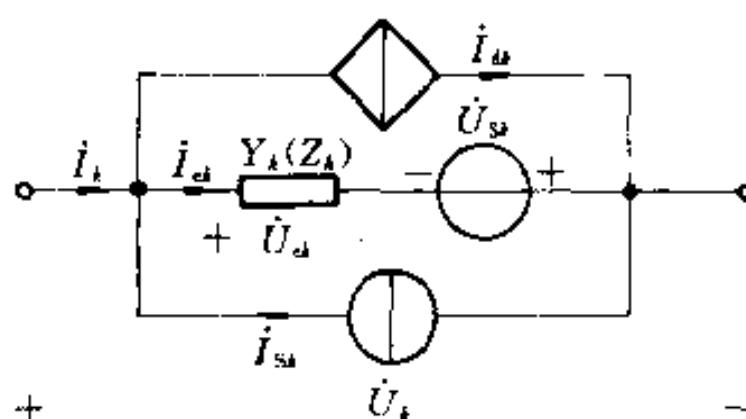


图 15-10 复合支路

2. 当电路中无受控源, 但电感之间有耦合时, 式(15-14)还应计及互感电压的影响。根据前节的讨论, 当电感之间有耦合时, 电路的支路阻抗矩阵 Z 不再是对角阵, 其主对角线元素为各支路阻抗, 而非对角线元素将是相应的支路之间的互感阻抗。如令 $\mathbf{Y} = Z^{-1}$ (\mathbf{Y} 仍称为支路导纳矩阵), 则由 $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}(\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s) - \dot{\mathbf{U}}_s$ 可得

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_s$$

或

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s$$

这个方程形式上完全与式(15-15)相同, 唯一的差别是此时 \mathbf{Y} 不再是对角阵。

3. 当电路中含有受控电流源时, 设第 k 支路中有受控电流源并受第 j 支路中无源元件上的电压 \dot{U}_{ej} 或电流 \dot{I}_{ej} 控制, 如图 15-11 所示, 其中 $\dot{I}_{dk} = g_{kj} \dot{U}_{ej}$ 或 $\dot{I}_{dk} = \beta_{kj} \dot{I}_{ej}$ 。

此时, 对第 k 支路有

$$\dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + \dot{I}_{dk} - \dot{I}_{sk}$$

在 VCCS 情况下, 上式中的 $\dot{I}_{dk} = g_{kj} (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj})$ 。而在 CCCS 的情况下, $\dot{I}_{dk} = \beta_{kj} Y_j (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj})$ 。于是有

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_j \\ \vdots \\ \dot{I}_k \\ \vdots \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & & & & & & \\ 0 & Y_2 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & Y_j & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & Y_k & \cdots & Y_b & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 + \dot{U}_{S1} \\ \dot{U}_2 + \dot{U}_{S2} \\ \vdots \\ \dot{U}_j + \dot{U}_{Sj} \\ \vdots \\ \dot{U}_k + \dot{U}_{Sk} \\ \vdots \\ \dot{U}_b + \dot{U}_{Sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{S1} \\ \dot{I}_{S2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{Sj} \\ \vdots \\ \dot{I}_{Sk} \\ \vdots \\ \dot{I}_{Sb} \end{bmatrix}$$

式中

$$Y_b = \begin{cases} g_b & (\text{当 } I_{dk} \text{ 为 VCCS 时}) \\ \beta_b Y_j & (\text{当 } I_{dk} \text{ 为 CCCS 时}) \end{cases}$$

即

$$\dot{I} = Y(\dot{U} + \dot{U}_S) - \dot{I}_S$$

可见此时支路方程在形式上仍与情况 1 时相同, 只是矩阵 Y 的内容不同而已。注意此时 Y 也不再是对角阵。

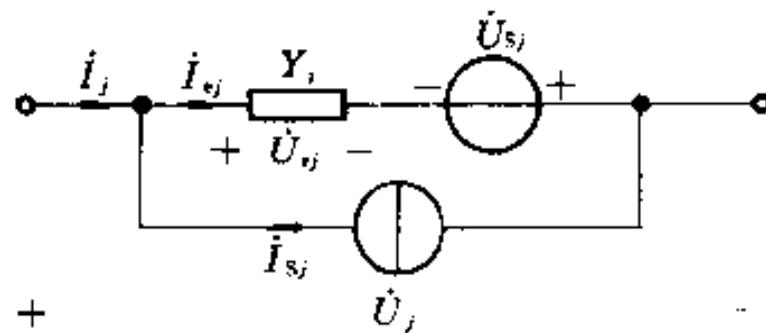
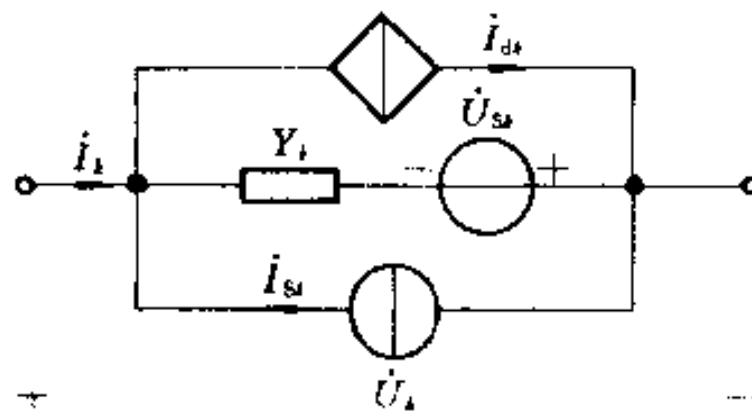


图 15-11 受控电流源的控制关系

为了导出结点电压方程的矩阵形式, 重写所需 3 组方程:

$$\text{KCL} \quad A\dot{I} = 0$$

$$\text{KVL} \quad \dot{U} = A^T \dot{U}_n$$

支路方程 $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s$

把支路方程代入 KCL 可得：

$$\mathbf{A}[\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{AY}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{AY}\dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{AI}_s = \mathbf{0}$$

再把 KVL 代入便得

$$\mathbf{AYA}^T\dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{AI}_s - \mathbf{AY}\dot{\mathbf{U}}_s \quad (15-16)$$

式(15-16)即结点电压方程的矩阵形式。由于乘积 \mathbf{AY} 的行和列数分别为 $(n-1)$ 和 b , 乘积 $(\mathbf{AY})\mathbf{A}^T$ 的行和列数都是 $(n-1)$, 所以乘积 \mathbf{AYA}^T 是一个 $(n-1)$ 阶方阵。同理, 乘积 \mathbf{AI}_s 和 $\mathbf{AY}\dot{\mathbf{U}}_s$ 都是 $(n-1)$ 阶的列向量。

如设 $\mathbf{Y}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{AYA}^T$, $\dot{\mathbf{J}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{AI}_s - \mathbf{AY}\dot{\mathbf{U}}_s$, 则式(15-16)可写为

$$\mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{J}}_n$$

\mathbf{Y}_n 称为结点导纳矩阵, 它的元素相当于第三章中结点电压方程等号左边的系数; $\dot{\mathbf{J}}_n$ 为由独立电源引起的注入结点的电流列向量, 它的元素相当于第三章中结点电压方程等号右边的常数项。

例 15-2 电路如图 15-12(a)所示, 图中元件的数字下标代表支路编号。列出电路的结点电压方程(矩阵形式)。

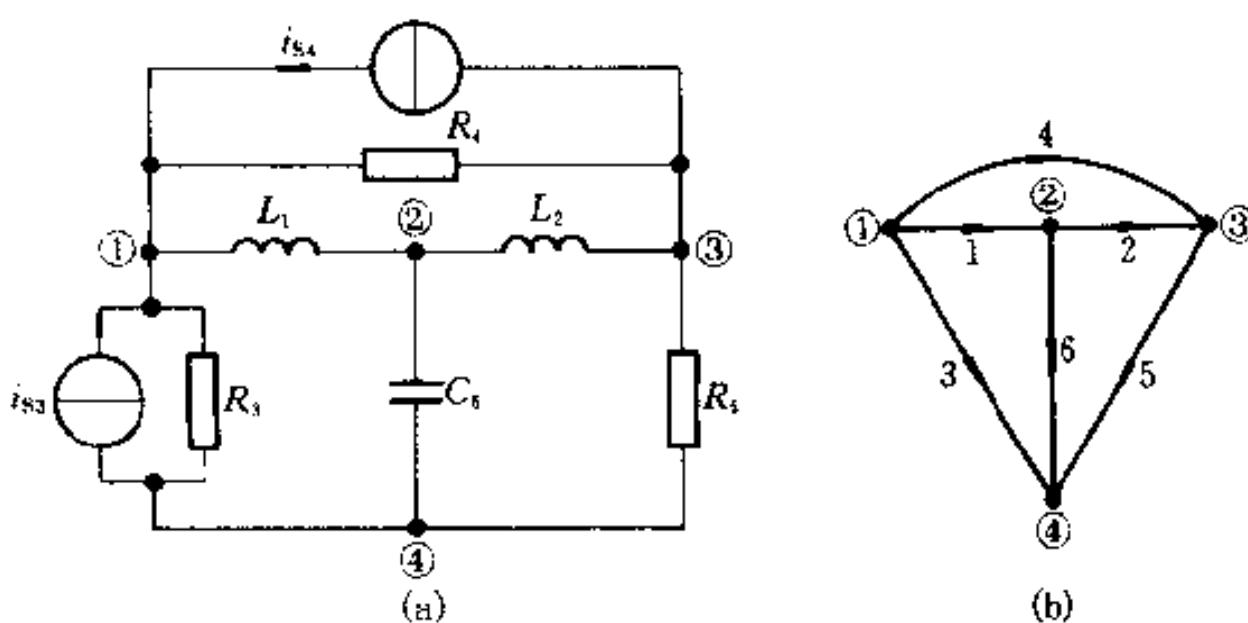


图 15-12 例 15-2 图

解 作出图示电路的有向图如同图(b)所示。若选结点④为参考结点, 则关联矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

电压源列向量 $\dot{\mathbf{U}}_s = \mathbf{0}$, 电流源列向量为

$$\dot{\mathbf{I}}_s = [0 \ 0 \ I_{s3} \ I_{s4} \ 0 \ 0]^T$$

支路导纳矩阵为

$$\mathbf{Y} = \text{diag}\left[\frac{1}{j\omega L_1}, \frac{1}{j\omega L_2}, \frac{1}{R_3}, \frac{1}{R_4}, \frac{1}{R_5}, j\omega C_6\right]$$

结点电压方程为

$$\mathbf{AYA}^T \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{AI}_s$$

即

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_6 & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{j\omega L_2} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s3} + I_{s4} \\ 0 \\ -I_{s4} \end{bmatrix}$$

例 15-3 电路如图15-13(a)所示, 图中元件的下标代表支路编号, 同图(b)是它的有向图。设 $\dot{I}_{a2} = g_{21} \dot{U}_1$, $\dot{I}_{a4} = \beta_{46} \dot{I}_6$ 。写出支路方程的矩阵形式。

解 支路导纳矩阵可写为(注意 g_{21} 和 β_{46} 出现的位置)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{21} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega C_4 & 0 & \frac{\beta_{46}}{j\omega L_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_6} \end{bmatrix}$$

电流源向量与电压源向量为:

$$\dot{\mathbf{I}}_s = [I_{s1} \ 0 \ 0 \ -I_{s4} \ 0 \ 0]^T$$

$$\dot{\mathbf{U}}_s = [0 \ -\dot{U}_{s2} \ 0 \ \dot{U}_{s4} \ 0 \ 0]^T$$

支路方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{21} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega C_4 & 0 & \frac{\beta_{46}}{j\omega L_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 + 0 \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_{s2} \\ \dot{U}_3 + 0 \\ \dot{U}_4 + \dot{U}_{s4} \\ \dot{U}_5 + 0 \\ \dot{U}_6 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ -I_{s4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

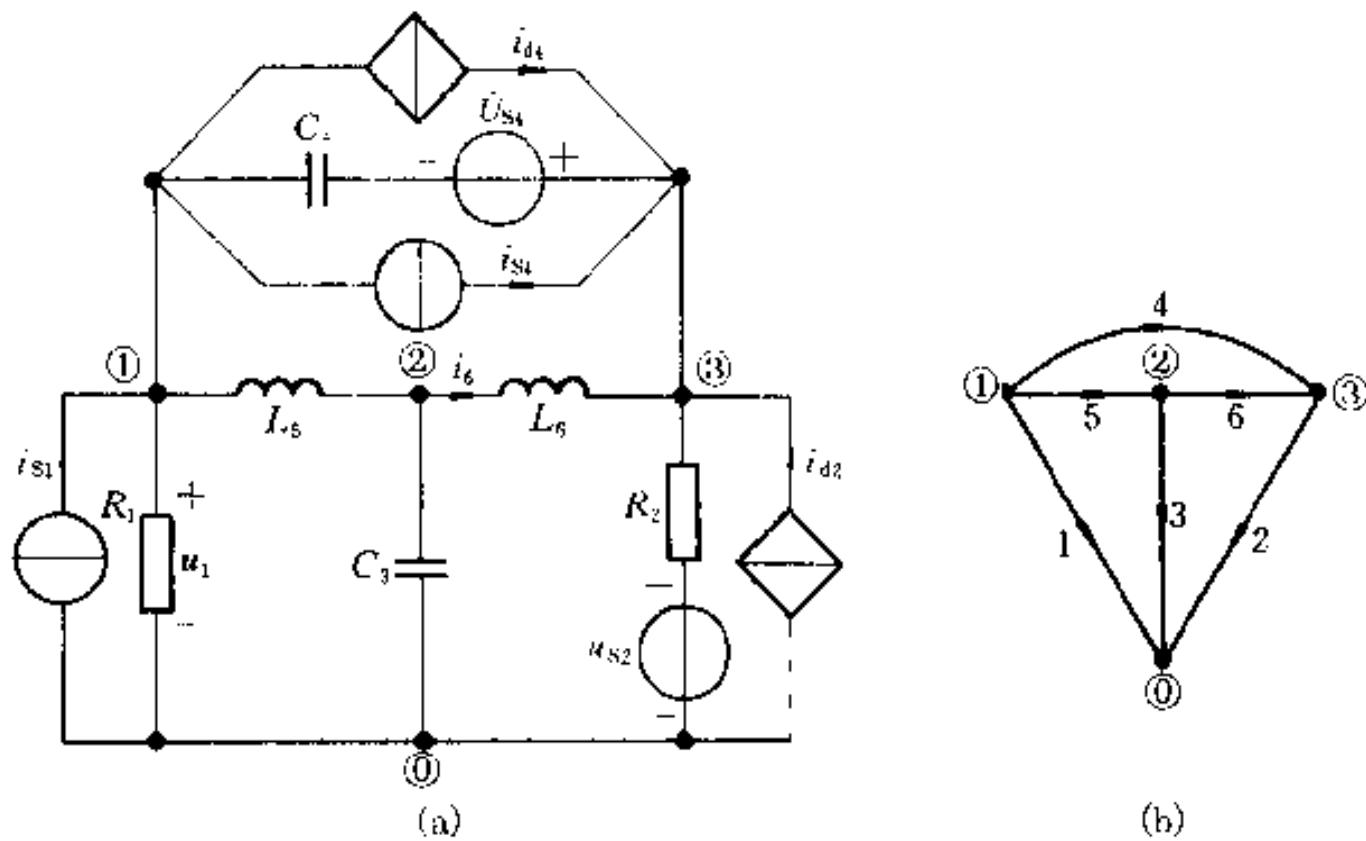


图 15-13 例 15-3 图

§ 15-6 割集电压方程的矩阵形式

式(15-10)表明,电路中所有支路电压可以用树支电压表示,所以树支电压与独立结点电压一样可被选作电路的独立变量。当所选独立割集组不是基本割集组时,式(15-10)中的 u_i 可理解为一组独立的割集电压。这时割集电压是指由割集划分的两组结点(或两分离部分)之间的一种假想电压,正如回路电流是沿着回路流动的一种假想电流一样。以割集电压为电路独立变量的分析法称为割集电压法。设复合支路的定义如图 15-10,支路方程的形式将与式(15-15)相似,按以 Q_i 表示的 KCL 和 KVL 就可以导出割集电压(树支电压)方程的矩阵形式。把这 3 组方程(相量形式)重新列出如下:

$$\text{KCL} \quad Q_f \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

$$\text{KVL} \quad \dot{\mathbf{U}} = Q_f^T \dot{\mathbf{U}}_s$$

$$\text{支路方程} \quad \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_s - \dot{\mathbf{I}}_s$$

先把支路方程代入 KCL, 可得

$$Q_f \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} + Q_f \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_s - Q_f \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{0}$$

再把 KVL 代入上式, 便可得割集电压方程如下

$$Q_f \mathbf{Y} Q_f^T \dot{\mathbf{U}}_s = Q_f \dot{\mathbf{I}}_s - Q_f \dot{\mathbf{U}}_s \quad (15-17)$$

不难看出, 乘积 $Q_f \mathbf{Y} Q_f^T$ 是一个 $(n-1)$ 阶方阵, 乘积 $Q_f \dot{\mathbf{I}}_s$ 和 $Q_f \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_s$ 都是 $(n-1)$ 阶列向量。若 $\mathbf{Y}_t \stackrel{\text{def}}{=} Q_f \mathbf{Y} Q_f^T$, \mathbf{Y}_t 称为割集导纳矩阵。

值得指出, 割集电压法是结点电压法的推广, 或者说结点电压法是割集电压法的一个特例。若选择一组独立割集, 使每一割集都由汇集在一个结点上的支路构成时, 割集电压法便成为结点电压法。

例 15-4 以运算形式写出图 15-14(a) 所示电路的割集电压方程的矩阵形式。设 L_3 、 L_4 、 C_5 的初始条件为零。

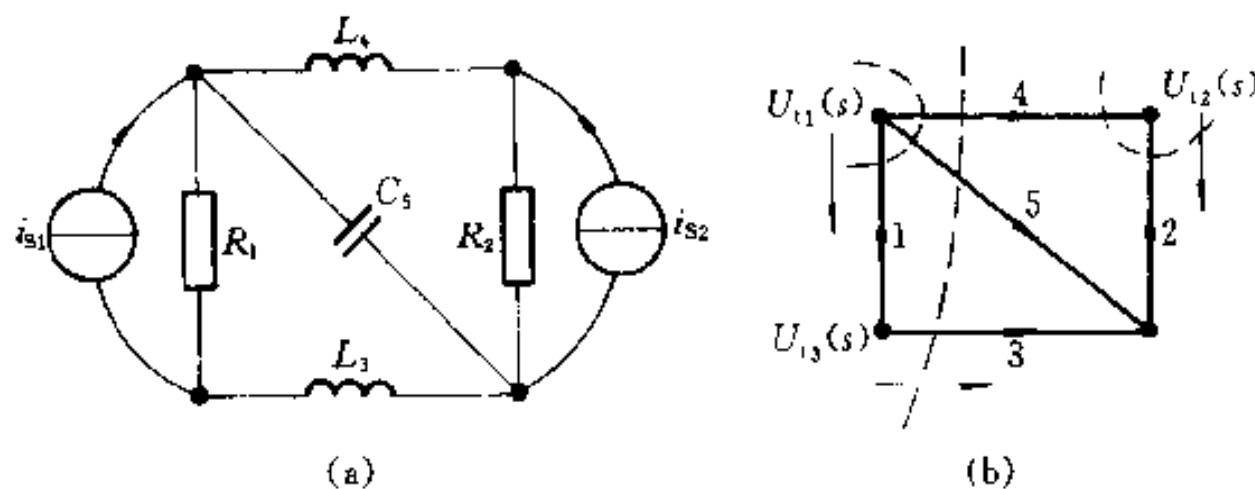


图 15-14 例 15-4 图

解 作出有向图如图(b)所示, 选支路 1、2、3 为树支, 3 个单树支割集如虚线所示, 树支电压 $U_{t1}(s)$ 、 $U_{t2}(s)$ 和 $U_{t3}(s)$ 也就是割集电压, 它们的方向也是割集的方向。

基本割集矩阵 Q_f 为

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

用拉氏变换表示时, 有:

$$\dot{\mathbf{U}}_s(s) = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_s(s) = [I_{s1}(s) \quad I_{s2}(s) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$\mathbf{U}_s(s)$ 和 $\mathbf{I}_s(s)$ 分别为电压源和电流源列向量, 支路导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}(s) = \text{diag} \left[\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{sL_3}, \frac{1}{sL_4}, sC_s \right]$$

把上述矩阵代入式(15-17), 便可得所求割集电压方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL_4} + sC_s & -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_4} + sC_s \\ -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL_4} & -\frac{1}{sL_4} \\ \frac{1}{sL_4} + sC_s & -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{sL_4} + sC_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n1}(s) \\ U_{n2}(s) \\ U_{n3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1}(s) \\ I_{s2}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

* § 15-7 列 表 法

从前面介绍的回路电流法、结点电压法、割集电压法的矩阵形式可知, 回路电流法不允许存在无伴电流源支路, 且规定的复合支路不允许存在受控电流源; 结点电压法和割集电压法不允许存在无伴电压源支路, 且规定的复合支路不允许存在受控电压源。这就使上述几种电路分析法有一定的局限性。本节介绍的列表法对支路类型无过多限制, 适应性强, 但方程数较多。下面推导列表方程的矩阵形式。

如前所述, 式(15-12)和式(15-15)形式的支路方程都有各自的局限性, 列表法采用一种新形式的支路方程。首先规定一个元件为一条支路○ (注意, 列表法不采用复合支路定义), 且用阻抗描述电阻或电感支路, 用导纳描述电导或电容支路, 即:

对于电阻或电感支路有: $U_k = Z_k I_k$, $Z_k = R_k$ 或 $Z_k = j\omega L_k$

对于电导或电容支路有: $I_k = Y_k U_k$, $Y_k = G_k$ 或 $Y_k = j/\omega C_k$

对于 VCVS 支路有: $U_k = \mu_k U_j$

对于 VCCS 支路有: $I_k = g_k U_i$

对于 CCVS 支路有: $U_k = r_k I_i$

对于 CCCS 支路有: $I_k = \beta_k I_j$

另外, 对于独立电压源支路, 有 $U_k = U_{sk}$ 。对于独立电流源支路, 有 $I_k = I_{sk}$ 。对整个电路可以写出如下形式的支路方程

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{U}}_s + \bar{\mathbf{I}}_s \quad (15-18)$$

式中的 $\bar{\mathbf{U}} = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_b]^T$ 、 $\bar{\mathbf{I}} = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_b]^T$ 分别为待求的支路电压和支路电流列向量, \mathbf{F} 和 \mathbf{H} 均为 b 阶方阵, $\bar{\mathbf{U}}_s$ 和 $\bar{\mathbf{I}}_s$ 分别为 b 阶电压源列向量和电流源列向量。下面分几种情况讨论。

1. 当电路中无受控源, 电感间无耦合时, \mathbf{F} 、 \mathbf{H} 都是对角阵, 它们的元素为:

① 支路电流和支路电压取关联参考方向; 电压源支路电压方向规定为电源电压的正极指向负极; 电流源支路电流方向规定与电流源的电流方向一致。

若支路 k 为电导或电容支路,有

$$F_{kk} = G_k \text{ 或 } j\omega C_k, H_{kk} = +1$$

若支路 k 为电阻或电感支路,有

$$F_{kk} = -1, H_{kk} = R_k \text{ 或 } j\omega L_k$$

2. 当电路中有 VCVS 和 VCCS; 电感间无耦合时, F 将是非对角阵, H 仍为对角阵, 它们的元素为:

若支路 k 为 U_i 控制的 VCVS 支路

$$F_{kk} = +1, F_{kj} = -\mu_{kj}, H_{kk} = 0$$

若支路 k 为 I_i 控制的 VCCS 支路

$$F_{kk} = 0, F_{kj} = -g_{kj}, H_{kk} = +1$$

3. 当电路中有 CCVS 和 CCCS, 电感间无耦合时, F 为对角阵, H 将是非对角阵, 它们的元素为:

若支路 k 为 I_i 控制的 CCVS 支路

$$F_{kk} = +1, H_{kj} = -r_{kj}, H_{kk} = 0$$

若支路 k 为 I_j 控制的 CCCS 支路

$$F_{kk} = 0, H_{kj} = -\beta_{kj}, H_{kk} = +1$$

4. 当电路中电感间有耦合时, 设支路 k 和支路 j 之间有耦合, 因 $\dot{U}_k = j\omega L_k I_k \pm j\omega M_{kj} I_j$, $\dot{U}_j = j\omega L_j I_j \pm j\omega M_{jk} I_k$, 所以有:

$$F_{kk} = +1, H_{kk} = -j\omega L_k, H_{kj} = \mp j\omega M_{kj}$$

$$F_{jj} = +1, H_{jj} = -j\omega L_j, H_{jk} = \mp j\omega M_{jk}$$

5. 当电路中含有理想变压器时, 设理想变压器及其图如图 15-15 所示, 由于 $\dot{U}_2 = n\dot{U}_1$, $I_2 = -nI_1$, 故有:

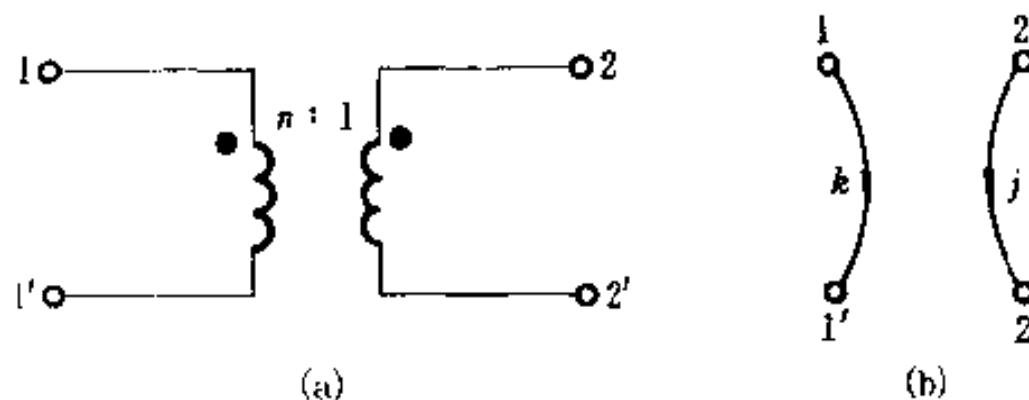


图 15-15 理想变压器

$$F_{kk} = +1, F_{kj} = -n, H_{kk} = 0$$

$$F_{jj} = 0, H_{jj} = +1, H_{jk} = n$$

另外, 若支路 k 为独立电压源支路:

$$F_{kk} = +1, H_{kk} = 0$$

若支路 k 为独立电流源支路:

$$F_{kk} = 0, H_{kk} = +1$$

从上面的分析可见, 式(15-18)表达的支路方程适应性非常强, 可以方便地处理支路为

上述单一元件的各种情况。

下面只给出列表方程之一——结点列表方程的矩阵形式的推导。设结点电压 \bar{U}_n 也为待求量, 把用关联矩阵 A 表示的 KCL、KVL 以及式(15-18)重新列出如下:

$$\text{KCL} \quad A\bar{I} = 0$$

$$\text{KVL} \quad \bar{U} - A^T \bar{U}_n = 0$$

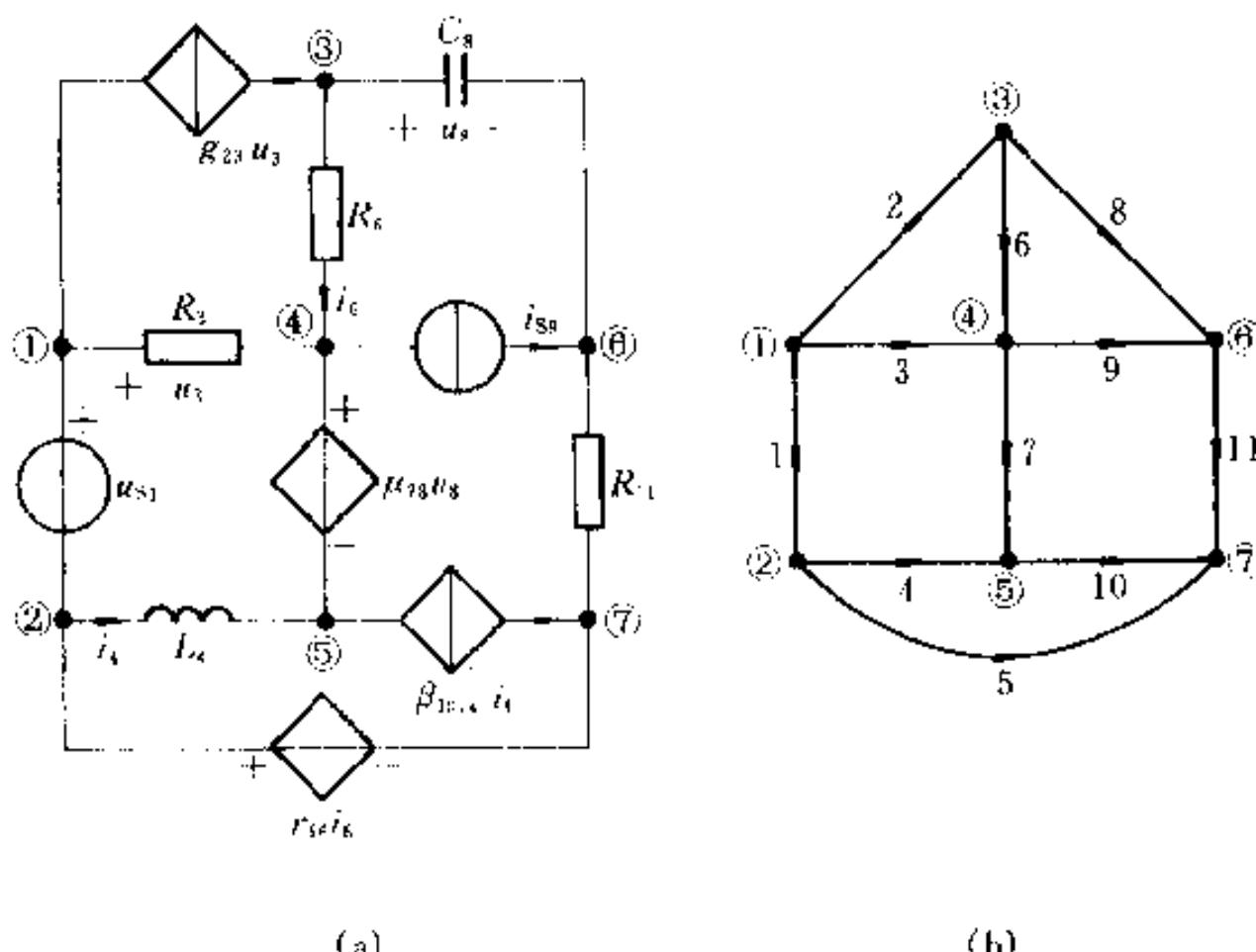
$$\text{支路方程} \quad F\bar{U} + H\bar{I} = \bar{U}_S + \bar{I}_S$$

将这 3 个方程合在一起, 便得到结点列表方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I_b & 0 \\ 0 & F & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_n \\ \bar{U} \\ \bar{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{U}_S + \bar{I}_S \end{bmatrix} \quad (15-19)$$

上式中 I_b 为 b 阶的单位矩阵。由于 A 为 $(n-1) \times b$ 矩阵, F 和 H 为 b 阶方阵, 故方程总数为 $(2b+n-1)$ 。

例 15-5 写出图 15-16(a) 所示电路的结点列表方程的矩阵形式(相量形式)。



(a)

(b)

图 15-16 例 15-5 图

解 该电路的图如图(b)所示, 选结点(7)为参考结点, 则关联矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F 矩阵和 H 矩阵分别为:

$$\begin{aligned}
 F = & \left[\begin{array}{ccccccc|c}
 & 3 & & 8 & & & & \\
 1 & & \vdots & & \vdots & & & \\
 \cdots & 0 & g_{23} & & \vdots & & & \\
 & 1 & & & \vdots & & & \\
 & -1 & & & & 0 & & \\
 & 1 & & & \vdots & & & \\
 G_6 & & \vdots & & & & & \\
 & 1 & -\mu_{ik} & \cdots & \cdots & \cdots & 7 & \\
 & j\omega C_8 & & & & & & \\
 \hline
 \mathbf{0} & & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & & & \\
 & & & & -1 & & & \\
 \end{array} \right] \\
 H = & \left[\begin{array}{cccccc|c}
 0 & & & 6 & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 1 & & & & & & \\
 R_3 & & & & & 0 & \\
 & \vdots & & & & & \\
 j\omega L_4 & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & \\
 0 & -r_{56} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 5 \\
 & -1 & & & & & \\
 \hline
 \mathbf{0} & & & 0 & & & \\
 & & & & -1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 10 & \cdots & \cdots & -\beta_{0,4} & & 1 & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & & 4 & & & \\
 & & & & & R_{11} & \\
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

另有：

$$\dot{U}_s = [U_{s1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\dot{I}_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I_{sy} \ 0 \ 0]^T$$

把这些矩阵按式(15-19)所示位置填入，即可获得结点列表方程的矩阵形式。

由例 15-5 可以看出，列表法的适应性很强，而且方程易于建立，如同填写表格一般，故有列表之称。列表方程的缺点是规模大，然而其系数矩阵中零元素所占比例也很大。稀疏矩阵技术的发展已使这一缺点变得微不足道了。

需要说明的是，列表法还有回路列表法和割集列表法。列写回路列表方程时，只需设 I_i 为待求量，并把 KCL 和 KVL 用 B_i 表示，支路方程仍为式(15-18)；列割集列表方程，只需设 \dot{U}_i 为待求量，且用 Q_i 表示 KCL 和 KVL，支路方程仍为式(15-18)形式。

另一种适应性强的方法是改进结点电压法，这里不再介绍。

§ 15-8 状态方程

在电路理论中还引用“状态变量”作为分析电路动态过程的独立变量。状态变量是根据“状态”的概念而来的。“状态”是系统理论中的一个专门术语，它表达一个比较抽象但又基本的概念。在电路理论中，当把“状态”作为上述专门术语引用时，是指在某给定时刻电路必须具备的最少量的信息，它们和从该时刻开始的任意输入一起就足以完全确定今后该电路在任何时刻的性状。状态变量就是电路的一组独立的动态变量，它们在任何时刻的值组成了该时刻的状态。从第六、七两章中对一阶、二阶电路的分析可知，电容上电压 u_c （或电荷 q_c ）和电感中的电流 i_L （或磁通链 Ψ_L ）就是电路的状态变量。对状态变量列出的一阶微分方程称为状态方程。因此如果已知状态变量在 t_0 时的值，而且已知自 t_0 开始的外施激励，就能唯一地确定 $t > t_0$ 后电路的全部性状。

下面通过一个简单的例子说明上面介绍的概念。在第七章 RLC 电路的时域分析中，列出了以电容电压为求解对象的微分方程（见图 15-17）

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s$$

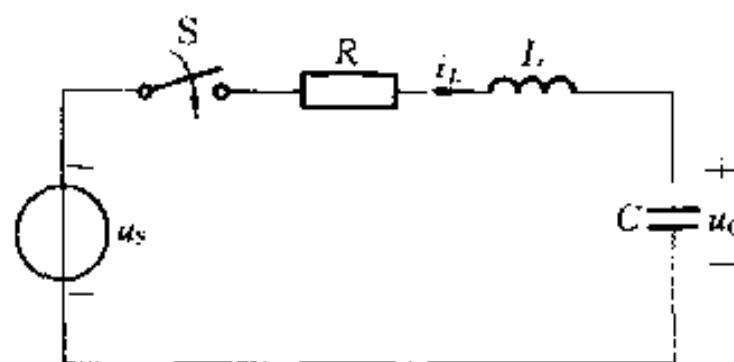


图 15-17 RLC 串联电路

这是一个二阶线性微分方程。用来确定积分常数的初始条件应是电容上的电压和电感中的电流在 $t = t_0$ 时的初始值（这里以 $t = t_0$ 作为过程的起始）。

如果以电容电压 u_c 和电感电流 i_L 作为变量列上述电路的方程，则有：

$$C \frac{du_c}{dt} = i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = u_s - Ri_L - u_c$$

再把这两个方程的形式做些改变，可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= 0 + \frac{1}{C}i_L + 0 \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L}u_c - \frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_s \end{aligned} \right\} \quad (15-20)$$

这是一组以 u_c 和 i_L 为变量的一阶微分方程, 而 $u_c(t_{0+})$ 和 $i_L(t_{0+})$ 提供了用来确定积分常数的初始值, 因此方程(15-20)就是描写电路动态过程的状态方程。

如果用矩阵形式列写方程(15-20), 则有

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u_s]$$

若令 $x_1 = u_c$, $x_2 = i_L$, $\dot{x}_1 = \frac{du_c}{dt}$, $\dot{x}_2 = \frac{di_L}{dt}$, 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B [u_s]$$

式中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \text{①}$$

如果令 $\dot{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, $\mathbf{v} = [u_s]$, 则有

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bv \quad (15-21)$$

式(15-21)称为状态方程的标准形式。 \mathbf{x} 称为状态向量, v 称为输入向量。在一般情况下, 设电路具有 n 个状态变量, m 个独立电源, 式(15-21)中的 $\dot{\mathbf{x}}$ 和 \mathbf{x} 为 n 阶列向量, A 为 $n \times n$ 方阵, v 为 m 阶列向量, B 为 $n \times m$ 矩阵。上列方程有时称为向量微分方程。

从对上述二阶电路列写状态方程的过程不难看出, 要列出包括 $\frac{du_c}{dt}$ 项的方程, 必须对只接有一个电容的结点或割集写出 KCL 方程, 而要列出包含 $\frac{di_L}{dt}$ 项的方程, 必须对只包含一个电感的回路列写 KVL 方程。对于不太复杂的电路, 可以用直观法列写状态方程。例如, 对图 15-18 所示电路, 若以 u_c , i_1 和 i_2 为状态变量, 可按如下步骤列出状态方程。

① 注意这里的矩阵 A 和 B 不是前面用过的关联矩阵和回路矩阵。

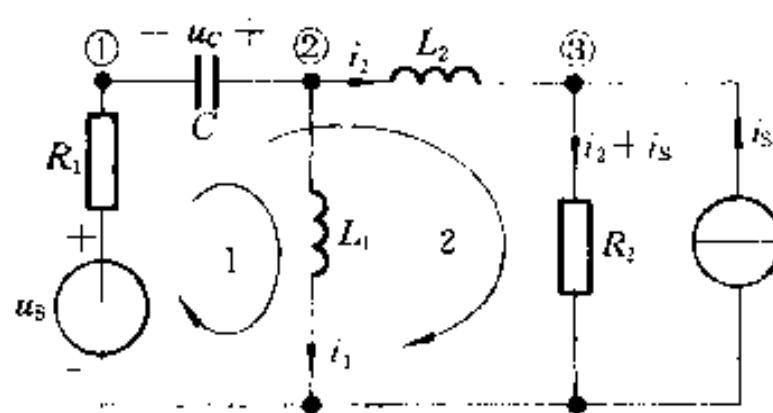


图 15·18 用直观法列写状态方程

对结点②列出 KCL 方程

$$C \frac{du_C}{dt} = -i_1 - i_2$$

再分别对回路 1 和回路 2 列出 KVL 方程：

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -u_{R_1} + u_C + u_s = -R_1(i_1 + i_2) + u_C + u_s$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -u_{R_2} + u_C - u_{R_2} + u_s = -R_2(i_2 + i_s) + u_C - R_2(i_2 + i_s) + u_s$$

整理以上方程并写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

或

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

式中 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $v = [u_s \ i_s]^T$, 而 $x_1 = u_C$, $x_2 = i_1$, $x_3 = i_2$ 。

值得注意，在列写包含 $\frac{du_C}{dt}$ 或 $\frac{di_1}{dt}$ 的方程时，有时可能出现非状态变量，如上例中的 u_{R_1} 和 u_{R_2} ，只有把它们表示为状态变量后，才能得到状态方程的标准形式。在建立状态方程过程中，通常包含这种消去非状态变量的过程。

对于复杂电路，利用树的概念建立状态方程较为方便。下面介绍一种借助特有树^① 建立状态方程的方法。特有树是这样一种树，它的树支包含了电路中所有电压源支路和电容支路，它的连支包含了电路中所有电流源支路和电感支

① proper tree。

路。当电路中不存在仅由电容和电压源支路构成的回路和仅由电流源和电感支路构成的割集时,特有树总是存在的。于是可以选一个特有树,对单电容树支割集列写 KCL 方程,对单电感连支回路列写 KVL 方程。然后消去非状态变量(如果有必要),最后整理并写成矩阵形式。下面举例说明这种借特有树概念建立状态方程的方法。

例 15-6 列出图 15-19(a) 所示电路的状态方程。

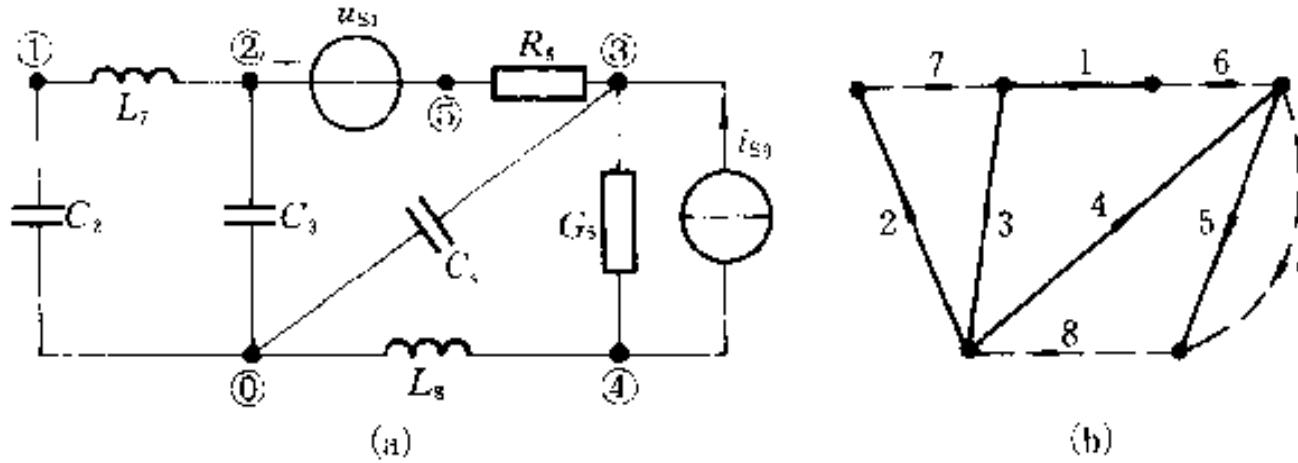


图 15-19 例 15-6 图

解 选择图 15-19(b) 实线所示树, 支路的编号与参考方向均在图中标出(注意一条支路只含一个元件)。对由树支 2、3、4 确定的基本割集列出 KCL 方程:

$$C_2 \frac{du_2}{dt} = i_7$$

$$C_3 \frac{du_3}{dt} = i_6 + i_7$$

$$C_4 \frac{du_4}{dt} = i_6 + i_8$$

对由连支 7、8 确定的基本回路列出 KVL 方程:

$$L_7 \frac{di_7}{dt} = -u_2 - u_3$$

$$L_8 \frac{di_8}{dt} = -u_4 - u_5$$

消去非状态变量 \$u_5, i_6\$:

$$u_5 = \frac{1}{G_5} i_5 = \frac{1}{G_5} (i_8 + i_{S9})$$

$$i_6 = \frac{1}{R_6} u_6 = \frac{1}{R_6} (u_{S1} - u_3 - u_4)$$

经整理后得:

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} i_7$$

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{1}{C_3 R_6} u_3 - \frac{1}{C_3 R_6} u_4 + \frac{1}{C_3} i_7 + \frac{1}{C_3 R_6} u_{S1}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{C_4 R_6} u_3 - \frac{1}{C_4 R_6} u_4 + \frac{1}{C_4} i_8 + \frac{1}{C_4 R_6} u_{s1}$$

$$\frac{di_7}{dt} = -\frac{1}{L_7} u_2 - \frac{1}{L_7} u_3$$

$$\frac{di_8}{dt} = -\frac{1}{L_8} u_4 - \frac{1}{G_5 L_8} i_8 - \frac{1}{G_5 L_8} i_{s2}$$

如 $x_1 = u_2$, $x_2 = u_3$, $x_3 = u_4$, $x_4 = i_7$, $x_5 = i_8$, 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_6} & -\frac{1}{C_3 R_6} & \frac{1}{C_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_4 R_6} & -\frac{1}{C_4 R_6} & 0 & \frac{1}{C_4} \\ -\frac{1}{L_7} & -\frac{1}{L_7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_8} & 0 & -\frac{1}{G_5 L_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{C_4 R_6} & 0 \\ \frac{1}{C_4 R_6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{G_5 L_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{B} \mathbf{v}

这就是所求状态方程。

在实际应用中, 如果需要以结点电压为输出, 这就要求导出结点电压与状态变量之间的关系。在线性电路中, 结点电压可表示为状态变量与输入激励的线性组合。如上例中, 若要求结点①、②、③、④的电压作为输出, 则有 $u_{n1} = -u_2$, $u_{n2} = u_3$, $u_{n3} = -u_4$, $u_{n4} = -u_5 - u_4 - \frac{1}{G_5}(i_8 + i_{s2}) - u_4$, 整理并写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \\ u_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{G_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{G_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

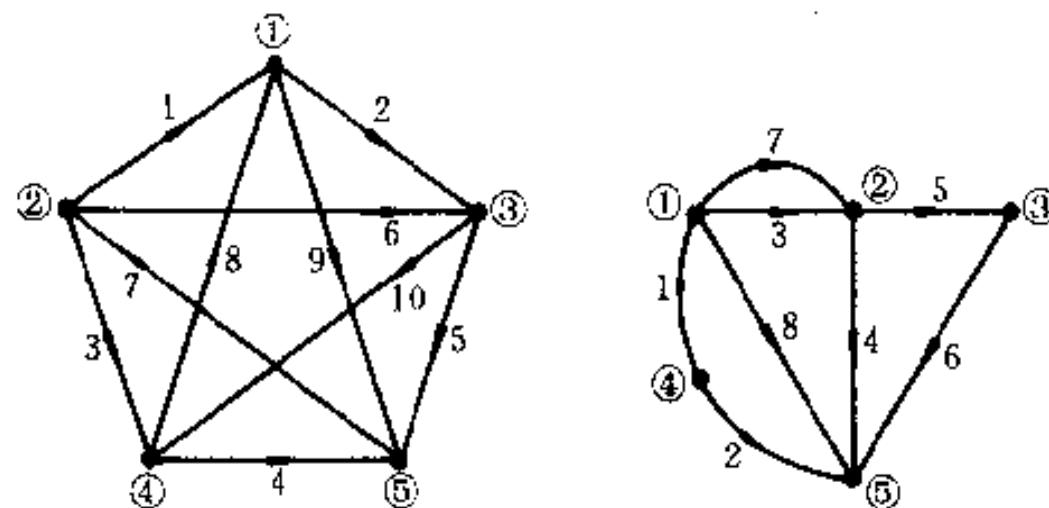
这种联系电路中某些感兴趣的量(此处为 4 个结点电压)与状态变量和输入量之间的关系式称为电路的输出方程。输出方程的一般形式为

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dv}$$

式中 \mathbf{y} 为输出向量, \mathbf{x} 为状态向量, \mathbf{v} 为输入向量, \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 为仅与电路结构和元件值有关的系数矩阵。

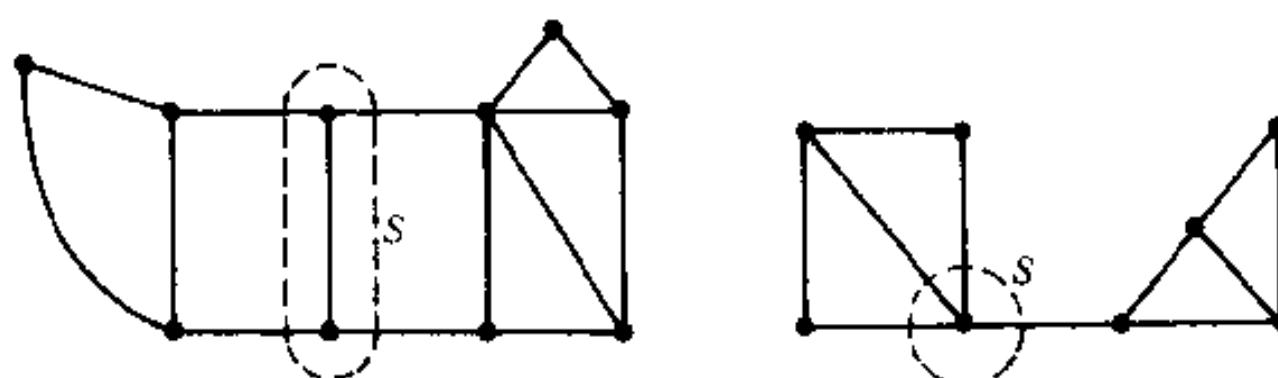
习 题

15-1 以结点⑤为参考,写出图示有向图的关联矩阵 A 。



题 15-1 图

15-2 对于图(a)和(b),与用虚线画出的闭合面 S 相切割的支路集合是否构成割集?为什么?

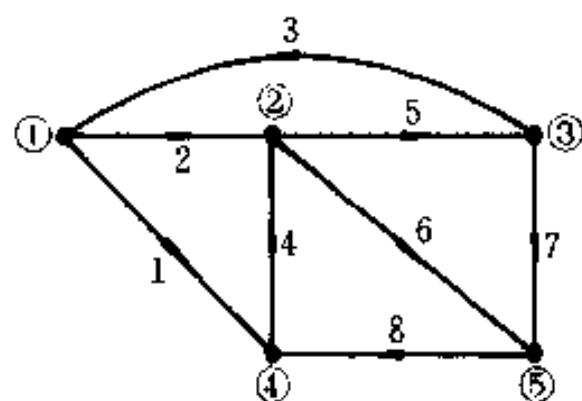


(a)

(b)

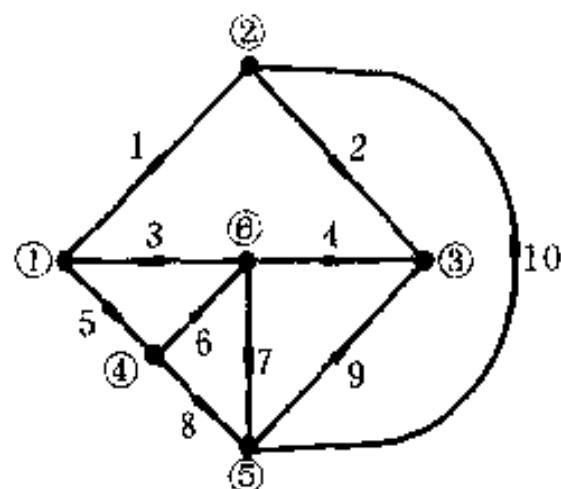
题 15-2 图

15-3 对于图示有向图,若选支路 1、2、3、7 为树,试写出基本割集矩阵和基本回路矩阵;另外,以网孔作为回路写出回路矩阵。



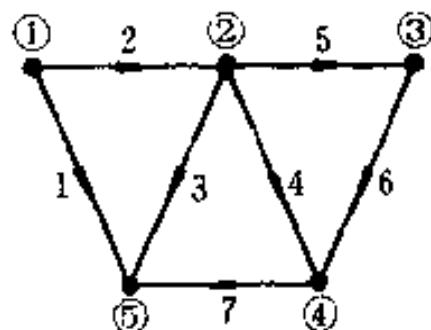
题 15-3 图

15-4 对于图示有向图,若选支路 1、2、3、5、8 为树,试写出基本割集矩阵和基本回路矩阵。



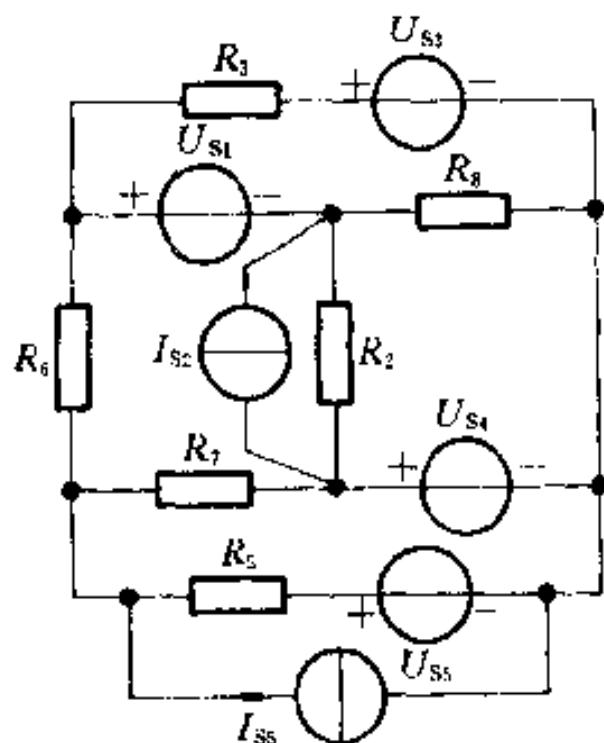
题 15-4 图

15-5 对图示有向图,若选结点⑤为参考,并选支路 1,2,4,5 为树。试写出关联矩阵、基本回路矩阵和基本割集矩阵;并验证 $B_1^T = -A_c^{-1}A_1$ 和 $Q_1 = -B_1^T$ 。

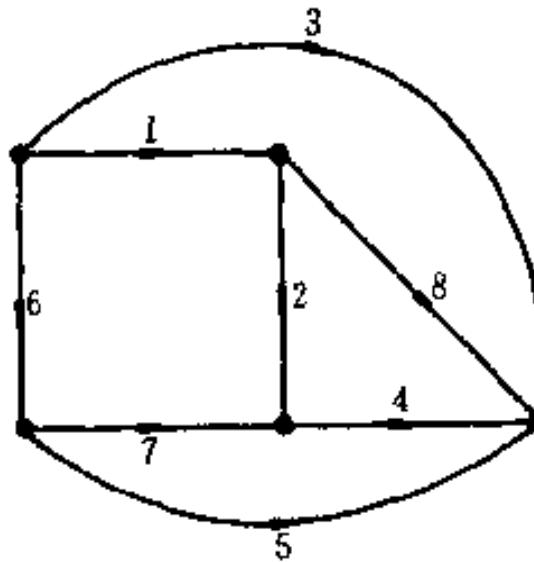


题 15-5 图

15-6 对图示电路,选支路 1,2,4,7 为树,用矩阵形式列出其回路电流方程。各支路电阻均为 5Ω ,各电压源电压均为 $3 V$,各电流源电流均为 $2 A$ 。



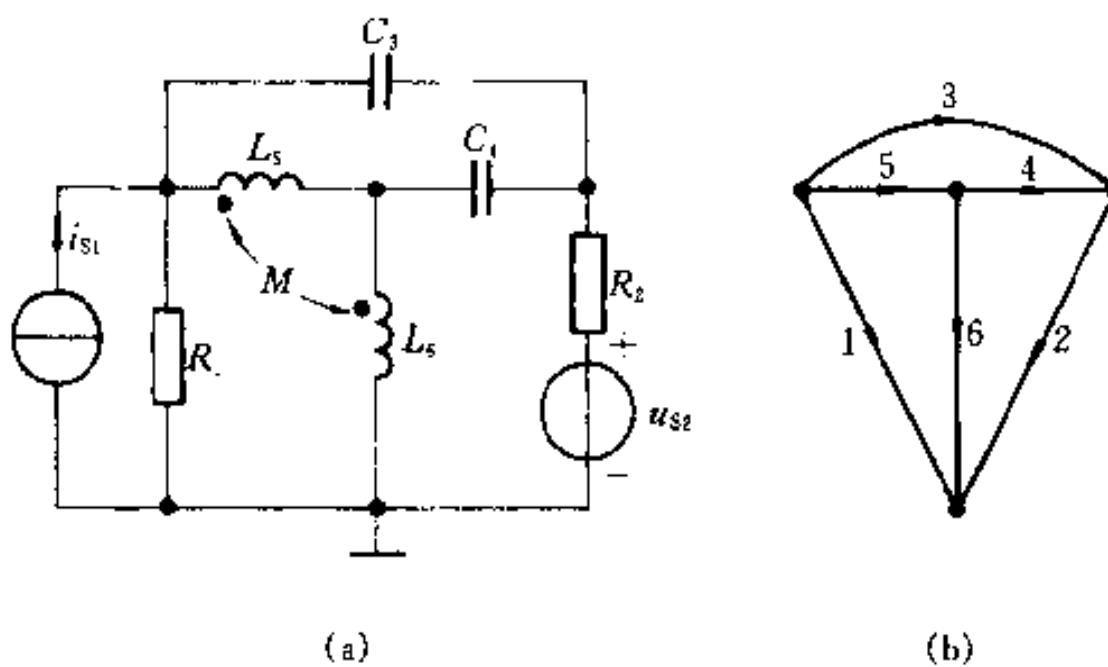
(a)



(b)

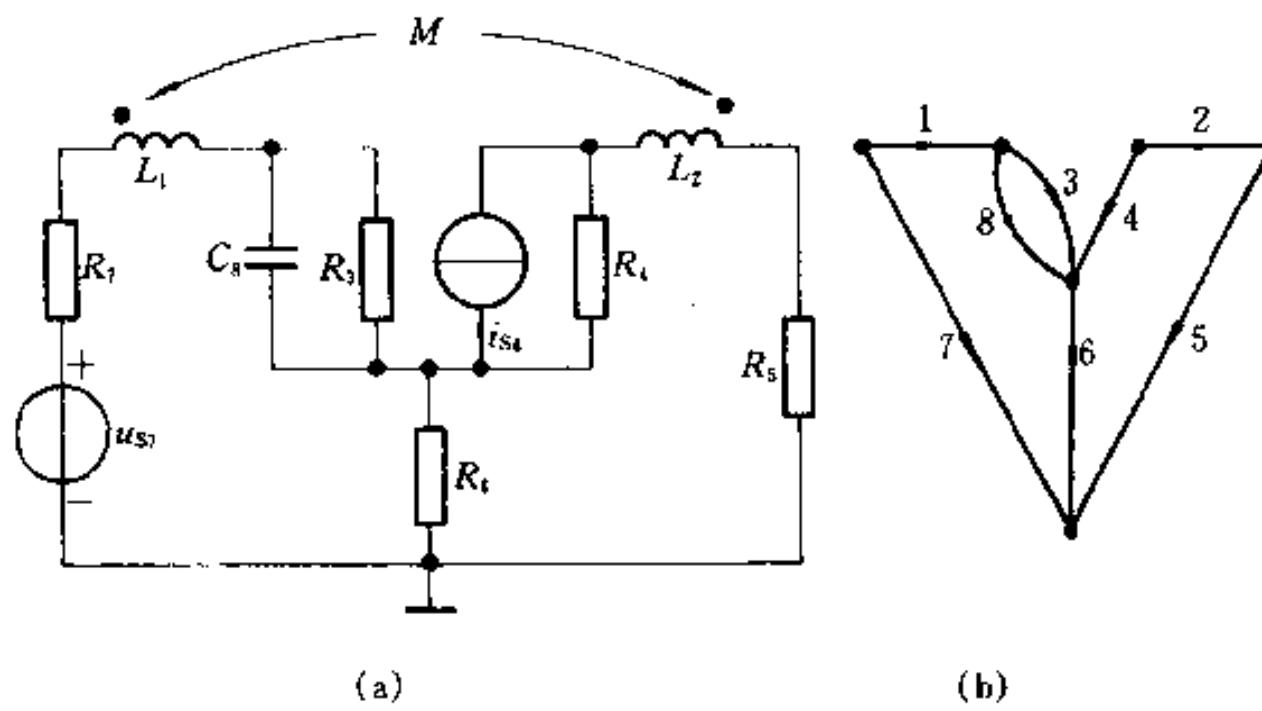
题 15-6 图

15-7 对图示电路,用运算形式(设零值初始条件)在下列 2 种不同情况下列出网孔电流方程:(1)电感 L_3 和 L_6 之间无互感;(2) L_3 和 L_6 之间有互感 M 。



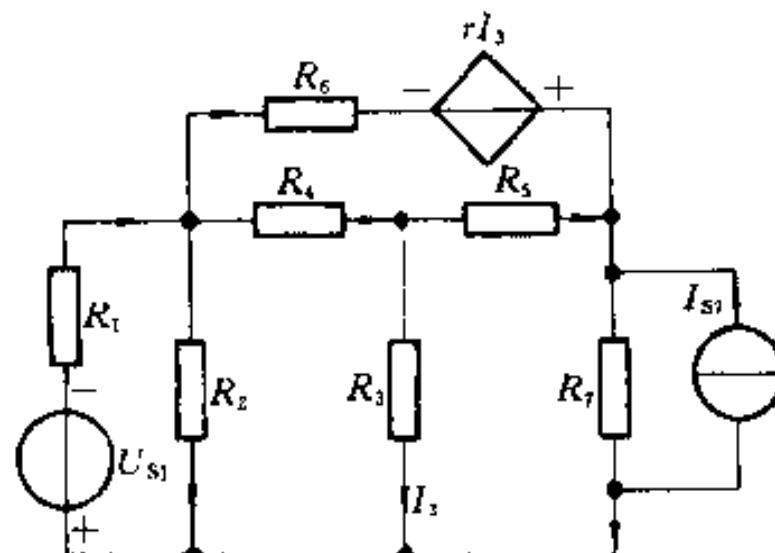
题 15-7 图

15-8 对图示电路,选支路 1、2、3、4、5 为树,试写出此电路回路电流方程的矩阵形式。



题 15-8 图

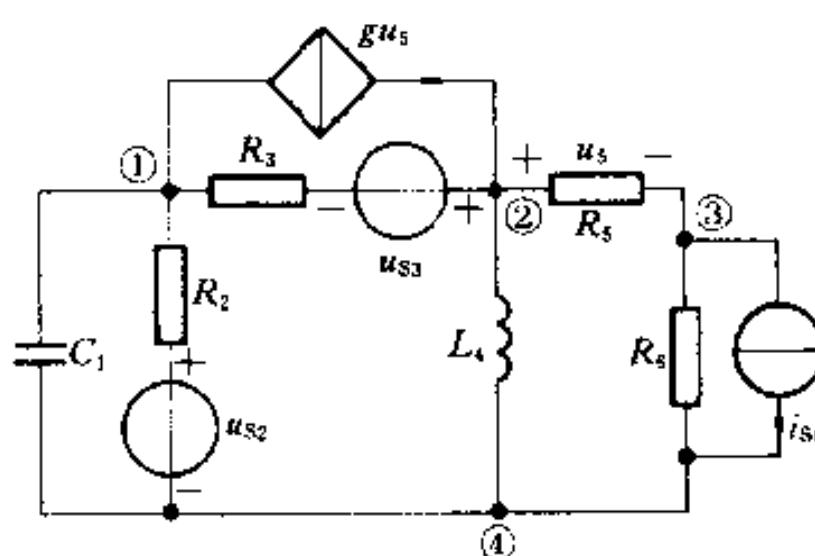
15-9 写出图示电路网孔电流方程的矩阵形式。



题 15·9 图

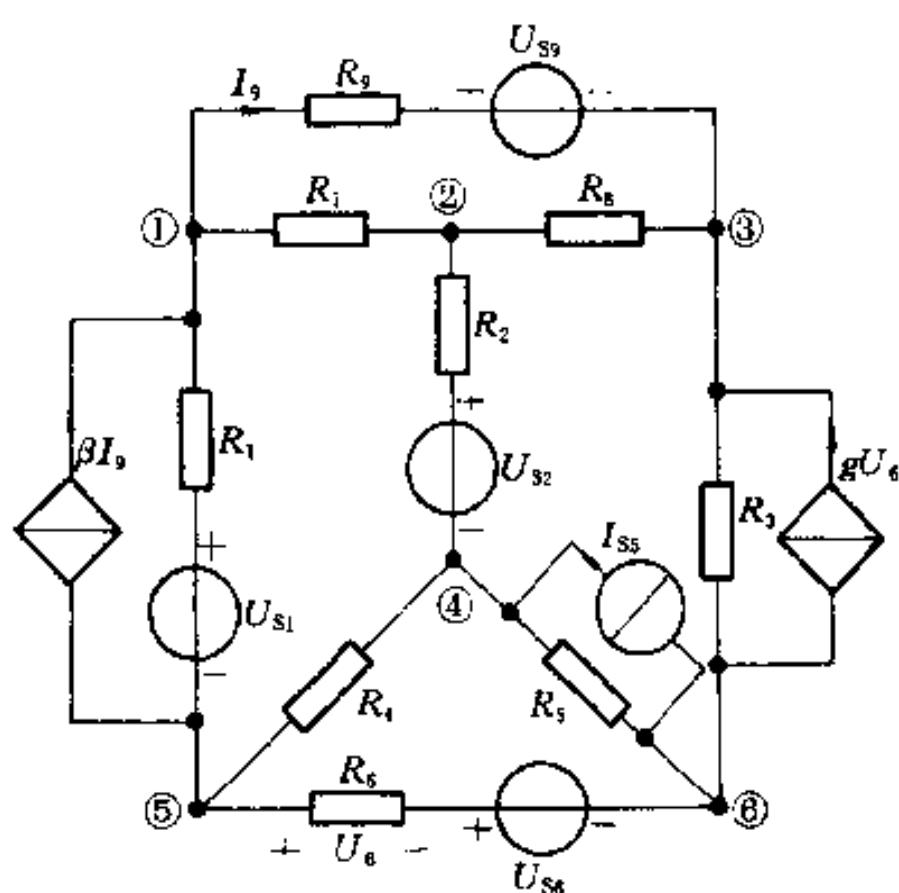
15-10 图示电路中电源角频率为 ω , 试以结点④为参考结点, 列写出该电路结点电压

方程的矩阵形式。



题 15-10 图

*15-11 试以结点⑥为参考结点,列出图示电路的矩阵形式的结点电压方程。



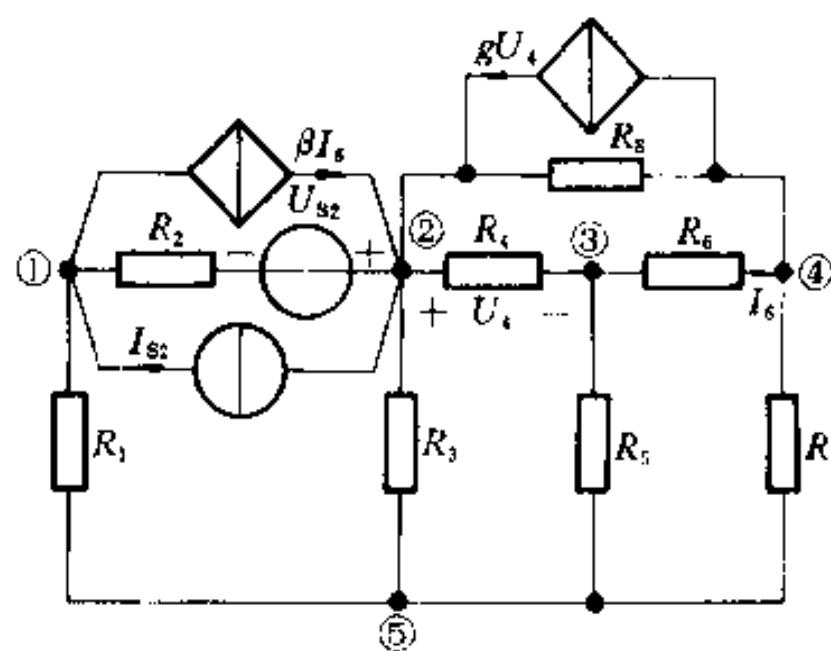
题 15-11 图

*15-12 对图示电路,选结点⑤为参考结点,列出该电路矩阵形式的结点电压方程。

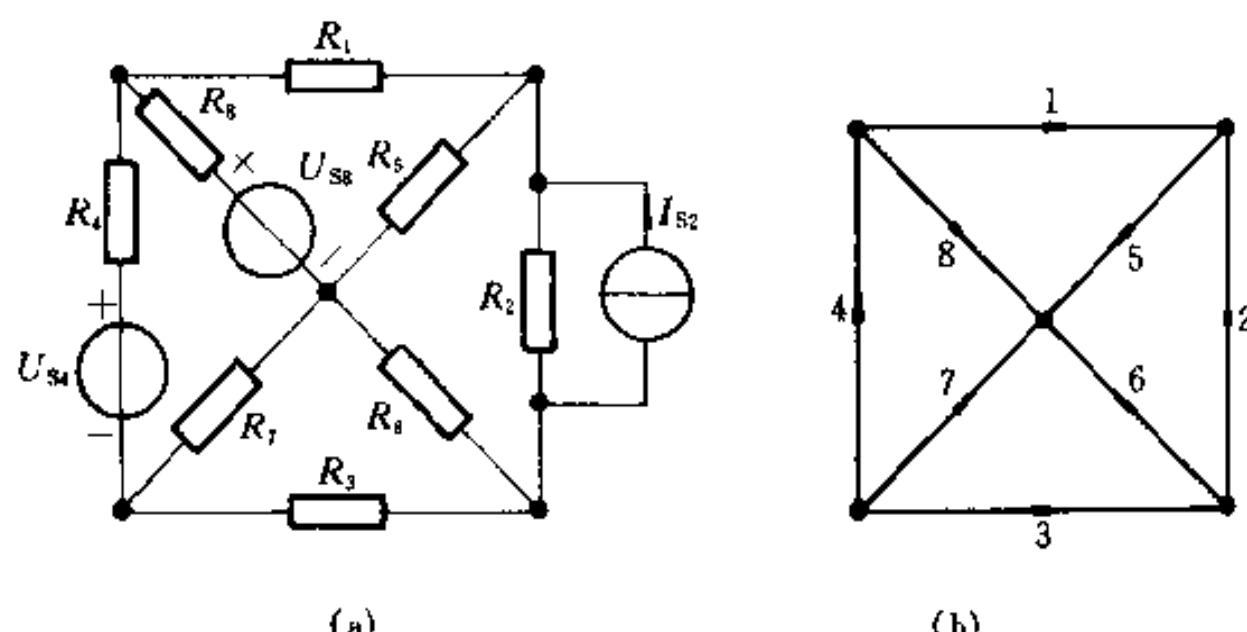
15-13 电路如图(a)所示,图(b)为其有向图。选支路 1、2、6、7 为树,列出矩阵形式的割集电压方程。

15-14 电路如图(a)所示,图(b)为其有向图。试写出结点列表法中支路方程的矩阵形式。

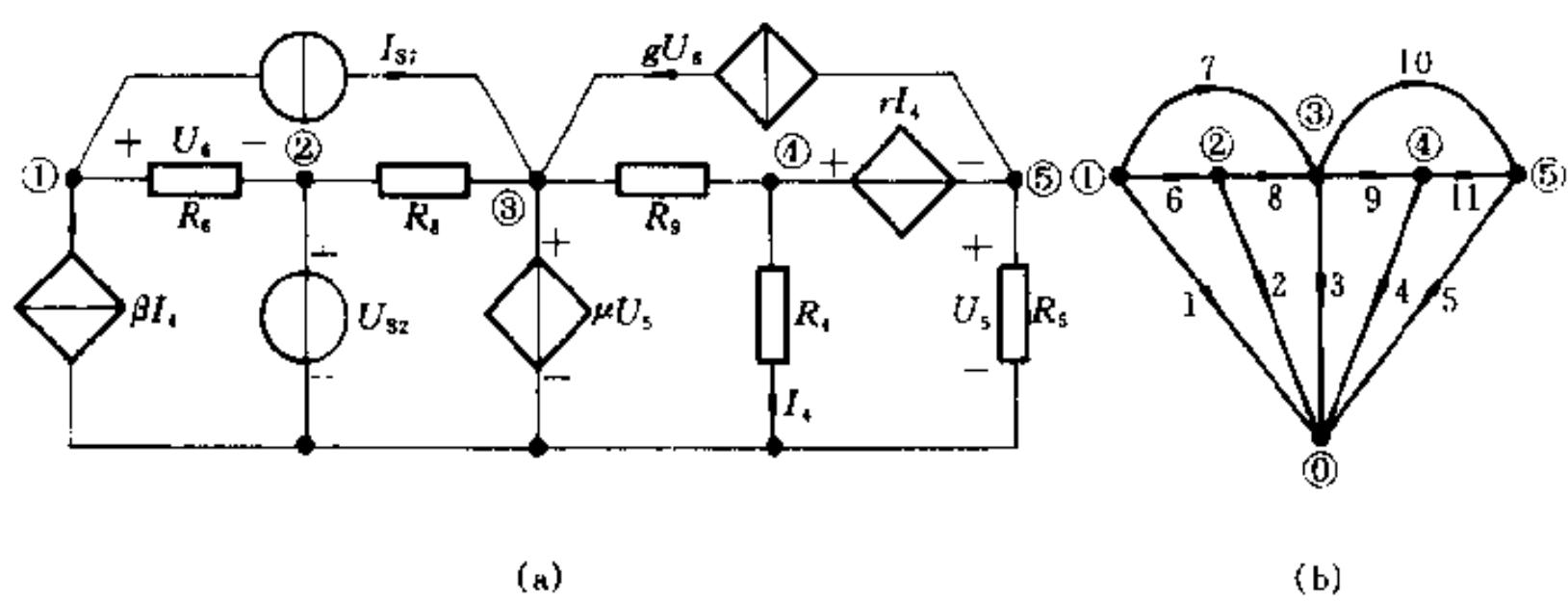
*15-15 电路如图(a)所示,图(b)为其有向图。写出结点列表方程的矩阵形式。



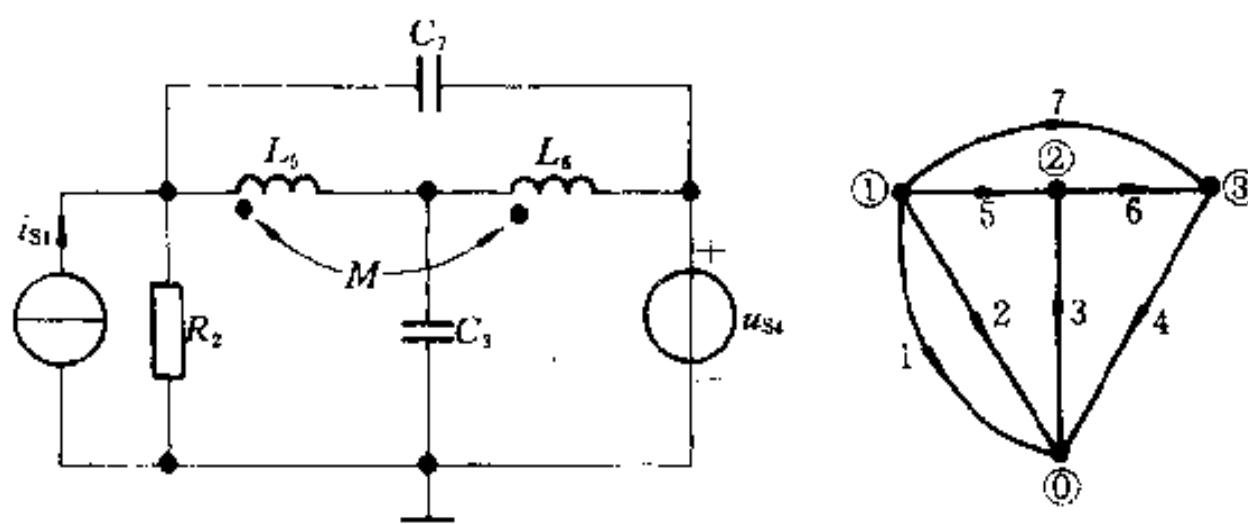
题 15-12 图



题 15-13 图



题 15-14 图

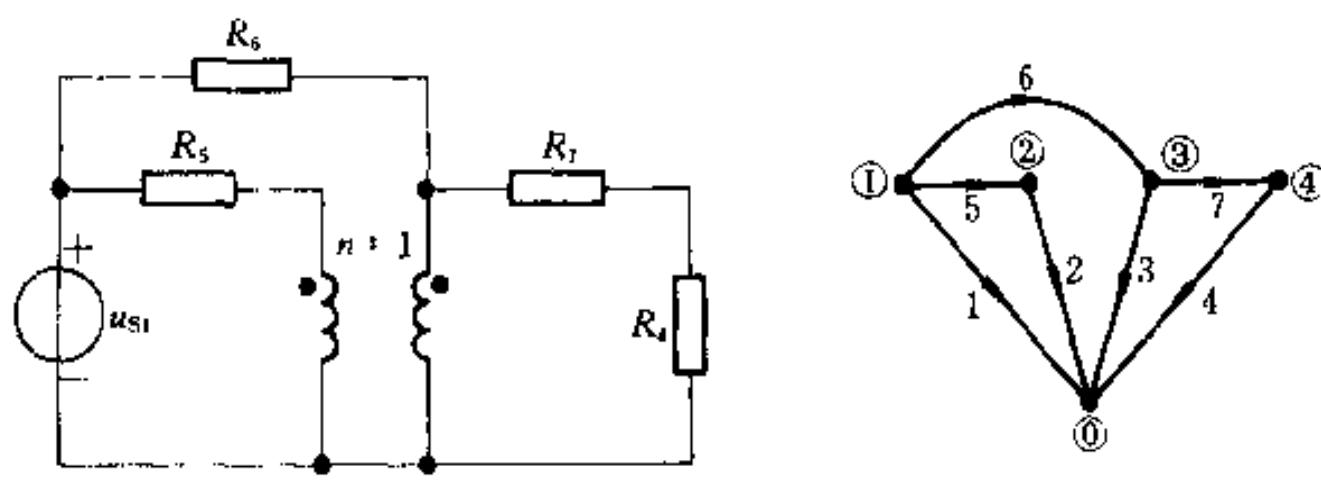


(a)

(b)

题 15-15 图

• 15-16 电路如图(a)所示,图(b)为其有向图。列出结点列表方程的矩阵形式。

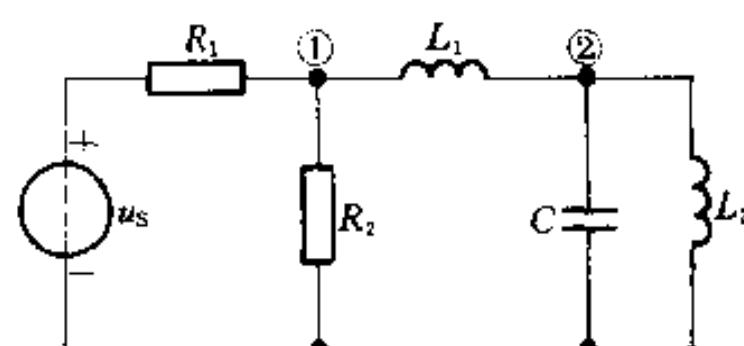


(a)

(b)

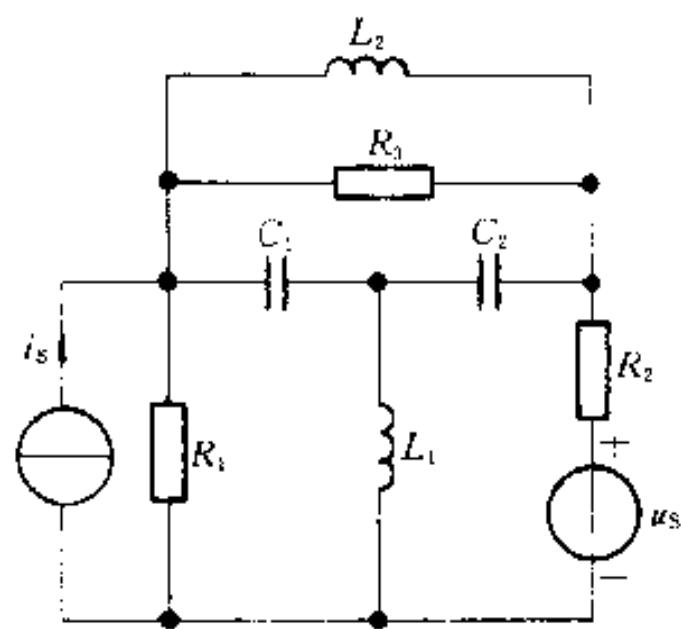
题 15-16 图

15-17 列出图示电路的状态方程。若选结点①和②的结点电压为输出量,写出输出方程。



题 15-17 图

15-18 列出图示电路的状态方程。设 $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$, $L_1 = 1 \text{ H}$, $L_2 = 2 \text{ H}$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $u_s(t) = 2\sin t \text{ V}$, $i_s(t) = 2e^{-t} \text{ A}$ 。



题 15-18 图

第十六章

二端口网络

内容提要

本章介绍二端口(网络)及其方程,二端口的 Y 、 Z 、 $T(A)$ 、 H 等参数矩阵以及它们之间的相互关系,还介绍转移函数, T 型和 Π 型等效电路及二端口的连接。最后介绍两种可用二端口描述的电路元件——回转器和负阻抗变换器。

§ 16-1 二端口网络

前面讨论的电路分析主要属于这样一类问题:在一个电路及其输入已经给定的情况下,如何去计算一条或多条支路的电压和电流。如果一个复杂的电路只有两个端子向外连接,且仅对外接电路中的情况感兴趣,则该电路可视为一个一端口,并用戴维宁或诺顿等效电路替代,然后再计算感兴趣的电压和电流。在工程实际中遇到的问题还常常涉及两对端子之间的关系,如变压器、滤波器、放大器、反馈网络等,如图 16-1(a)、(b)、(c) 所示。对于这些电路,都可以把两对端子之间的电路概括在一个方框中,如图 16-1(d) 所示。一对端子 $1-1'$ 通常是输入端子,另一对端子 $2-2'$ 为输出端子。

如果这两对端子满足端口条件,即对于所有时间 t ,从端子 1 流入方框的电流等于从端子 $1'$ 流出的电流;同时,从端子 2 流入方框的电流等于从端子 $2'$ 流出的电流,这种电路称为二端口网络,简称二端口。当向外伸出的 4 个端子上的电流无上述限制,称为四端网络。本章仅讨论二端口。

用二端口概念分析电路时,仅对二端口处的电流、电压之间的关系感兴趣,这种相互关系可以通过一些参数表示,而这些参数只决定于构成二端口本身的元件及它们的连接方式。一旦确定表征这个二端口的参数后,当一个端口的电压、电流发生变化,要找出另外一个端口上的电压、电流就比较容易了。同时,还可以利用这些参数比较不同的二端口在传递电能和信号方面的性能,从而评价

它们的质量。一个任意复杂的二端口，还可以看作由若干个简单的二端口组成，如果已知这些简单的二端口的参数，那么，根据它们与复杂二端口的关系就可以直接求出后者的参数，从而找出后者在两个端口处的电压与电流关系，而不再涉及原来复杂电路内部的任何计算。总之，这种分析方法有它的特点，与前面介绍的一端口有类似的地方。

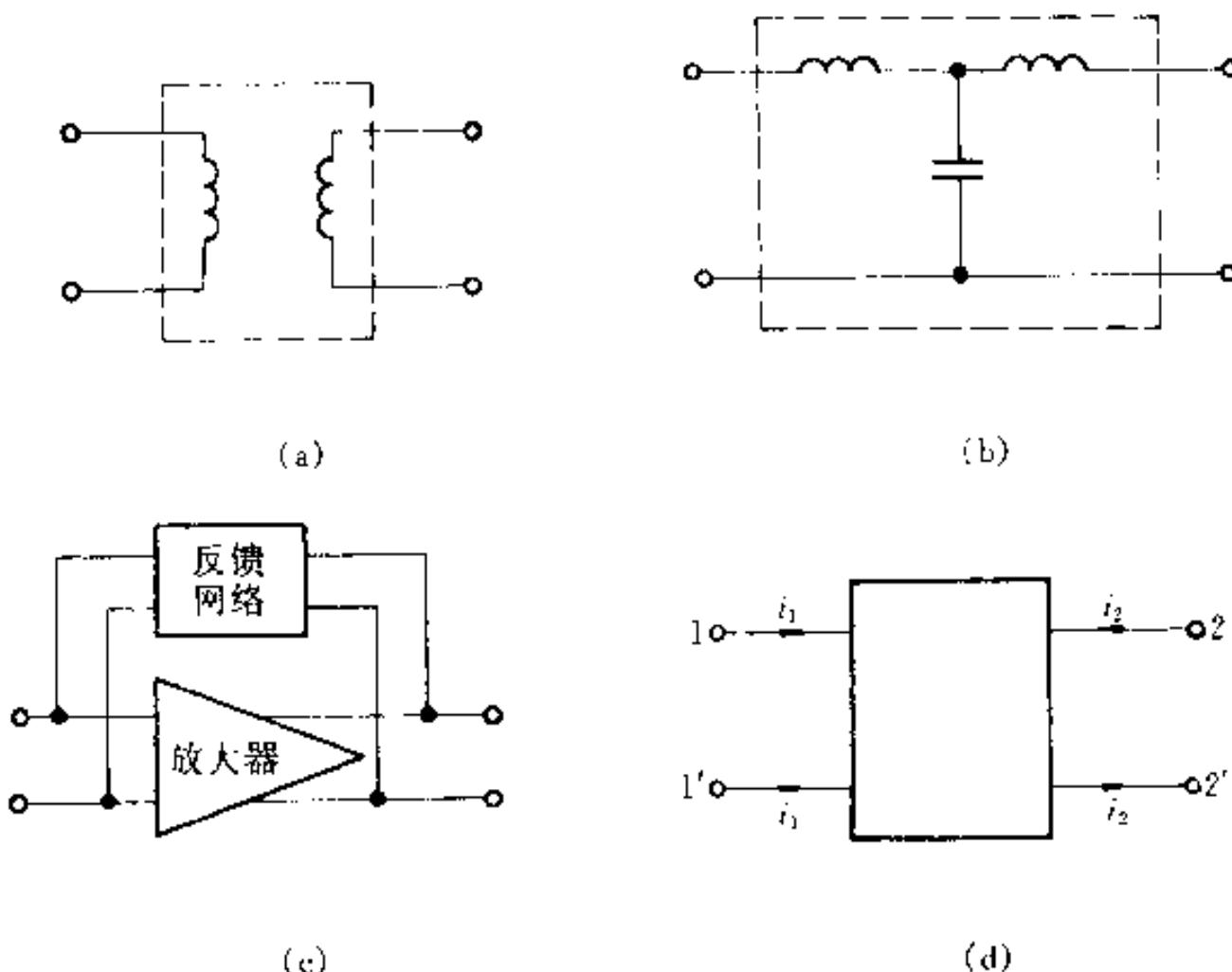


图 16-1 二端口

本章介绍的二端口是由线性的电阻、电感(包括耦合电感)、电容和线性受控源组成，并规定不包含任何独立电源(如用运算法分析时，还规定独立的初始条件均为零，即不存在附加电源)。

§ 16-2 二端口的方程和参数

图 16-2 所示为一线性二端口。在分析中将按正弦稳态情况考虑，并应用相量法。当然，也可以用运算法讨论。在端口 $1 - 1'$ 和 $2 - 2'$ 处的电流相量和电压相量的参考方向如图所示。假设两个端口电压 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 已知，可以利用替代定理把两个端口电压 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 都看作是外施的独立电压源。这样，根据叠加定理， \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 应分别等于各个独立电压源单独作用时产生的电流之和，即

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (16-1)$$

式(16-1)还可以写成如下的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

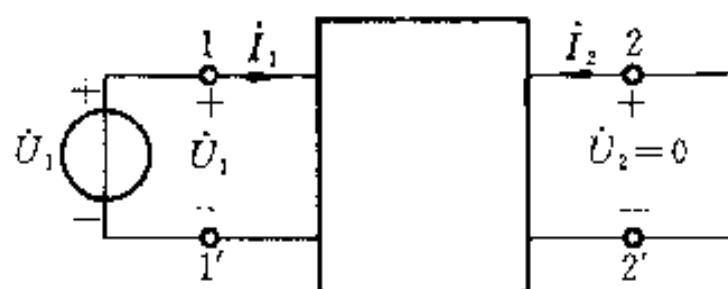
称为二端口的 Y 参数矩阵, 而 $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ 称为二端口的 Y 参数。不难看

出 Y 参数属于导纳性质, 可以按上述方法计算或试验测量求得: 如果在端口 $1 - 1'$ 上外施电压 \dot{U}_1 , 而把端口 $2 - 2'$ 短路, 即 $\dot{U}_2 = 0$, 工作情况如图 16-3(a) 所示。由式(16-1)可得:

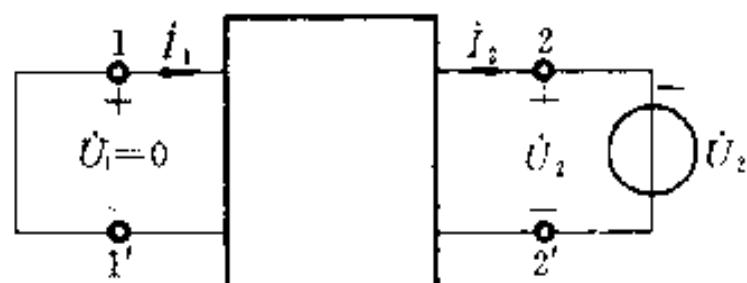
$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

Y_{11} 表示端口 $2 - 2'$ 短路时, 端口 $1 - 1'$ 处的输入导纳或驱动点导纳; Y_{21} 表示端口 $2 - 2'$ 短路时, 端口 $2 - 2'$ 与端口 $1 - 1'$ 之间的转移导纳, 这是因为 Y_{21} 是 \dot{I}_2 与 \dot{U}_1 的比值, 它表示一个端口的电流与另一个端口的电压之间的关系。



(a)



(b)

图 16-3 短路导纳参数的测定

同理, 在端口 $2 - 2'$ 外施电压 \dot{U}_2 , 而把端口 $1 - 1'$ 短路, 即 $\dot{U}_1 = 0$, 工作情况如图 16-3(b), 由式(16-1)得到:

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0}$$

Y_{12} 是端口 $1 - 1'$ 与端口 $2 - 2'$ 之间的转移导纳, Y_{22} 是端口 $2 - 2'$ 的输入导纳。由于Y参数都是在一个端口短路情况下通过计算或测试求得的,所以又称为短路导纳参数,例如 Y_{11} 就称为端口 $1 - 1'$ 的短路输入导纳。以上说明了Y参数表示的具体含义。

例 16-1 求图16-4(a)所示二端口的Y参数。

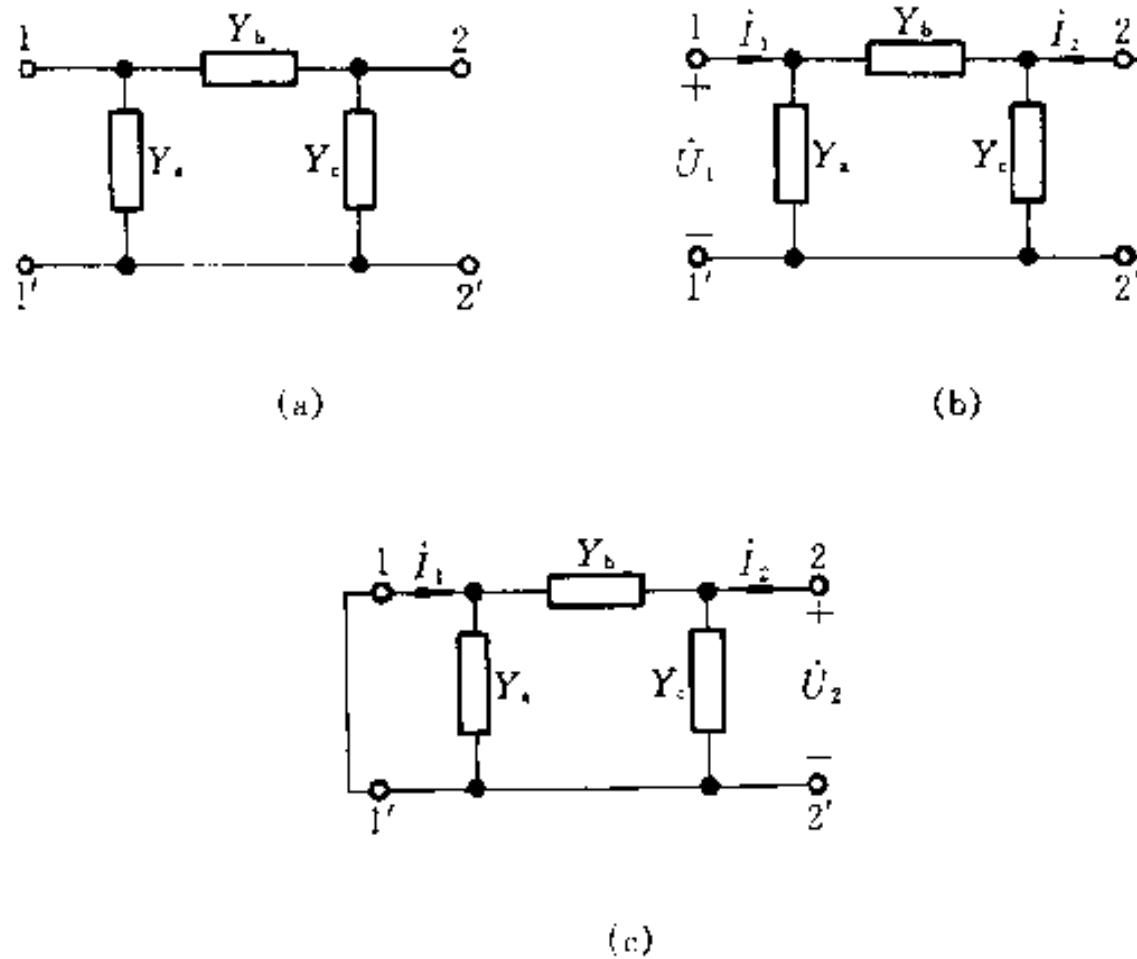


图 16-4 例 16-1 图

解 这个端口的结构比较简单,它是一个Π型电路。求它的 Y_{11} 和 Y_{12} 时,把端口 $2 - 2'$ 短路,在端口 $1 - 1'$ 上外施电压 \dot{U}_1 [见图16-4(b)],这时可求得:

$$\begin{aligned} I_1 &= \dot{U}_1 (Y_a + Y_b) \\ -I_2 &= \dot{U}_1 Y_b \end{aligned}$$

式中 I_2 前有负号是由指定的电流和电压参考方向造成的。根据定义可求得:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{\dot{U}_1} \right|_{U_2=0} = Y_a + Y_b$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_2}{\dot{U}_1} \right|_{U_2=0} = -Y_b$$

同样,如果把端口 1-1' 短路,并在端口 2-2' 上外施电压 \dot{U}_2 ,则可求得:

$$Y_{12} = -Y_b$$

$$Y_{22} = Y_b + Y_c$$

由此可见, $Y_{12} = Y_{21}$ 。此结果虽然是根据这个特例得到的,但是根据互易定理不难证明,对于由线性 R 、 $L(M)$ 、 C 元件构成的任何无源二端口, $Y_{12} = Y_{21}$ 总是成立的。所以对任何一个无源线性二端口,只要 3 个独立的参数就足以表征它的性能。

如果一个二端口的 Y 参数,除了 $Y_{12} = Y_{21}$ 外,还有 $Y_{11} = Y_{22}$,则此二端口的两个端口 1-1' 和 2-2' 互换位置后与外电路连接,其外部特性将不会有任何变化。也就是说,这种二端口从任一端口看进去,它的电气特性是一样的,因而称为电气上对称的,或简称为对称的二端口。结构上对称^① 的二端口显然一定是对称的。例如在例 16-1 中的 Π 型电路,如果 $Y_b = Y_c$,它在结构上就是对称的,这时就有 $Y_{11} = Y_{22}$ 。但是电气上对称并不一定意味着结构上对称。显然,对于对称二端口的 Y 参数,只有 2 个是独立的。

假设图 16-2 所示二端口的 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 是已知的,可以利用替代定理把 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 看作是外施电流源的电流。根据叠加定理, \dot{U}_1 、 \dot{U}_2 应等于各个电流源单独作用时产生的电压之和,即

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2\end{aligned}\quad (16-2)$$

式中 Z_{11} 、 Z_{12} 、 Z_{21} 、 Z_{22} 称为 Z 参数,它们具有阻抗性质。 Z 参数可按下列方法计算或试验测量求得:设端口 2-2' 开路,即 $\dot{I}_2 = 0$,只在端口 1-1' 施加一个电流源 \dot{I}_1 ,如图 16-5(a) 所示。由式(16-2)可得:

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}$$

所以 Z_{11} 称为端口 2-2' 开路时端口 1-1' 的开路输入阻抗, Z_{21} 称为端口 2-2' 开路时端口 2-2' 与端口 1-1' 之间的开路转移阻抗。同理,将端口 1-1' 开路,即 $\dot{I}_1 = 0$,并在端口 2-2' 施加电流源 \dot{I}_2 ,如图 16-5(b) 所示,由式(16-2)得:

^① “结构上对称”是指连接方式和元件性质及其参数的大小均具对称性。

$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{I_1=0}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{I_2=0}$$

即 Z_{12} 是端口 $1-1'$ 开路时端口 $1-1'$ 与端口 $2-2'$ 之间的开路转移阻抗, Z_{21} 是端口 $1-1'$ 开路时端口 $2-2'$ 的开路输入阻抗。

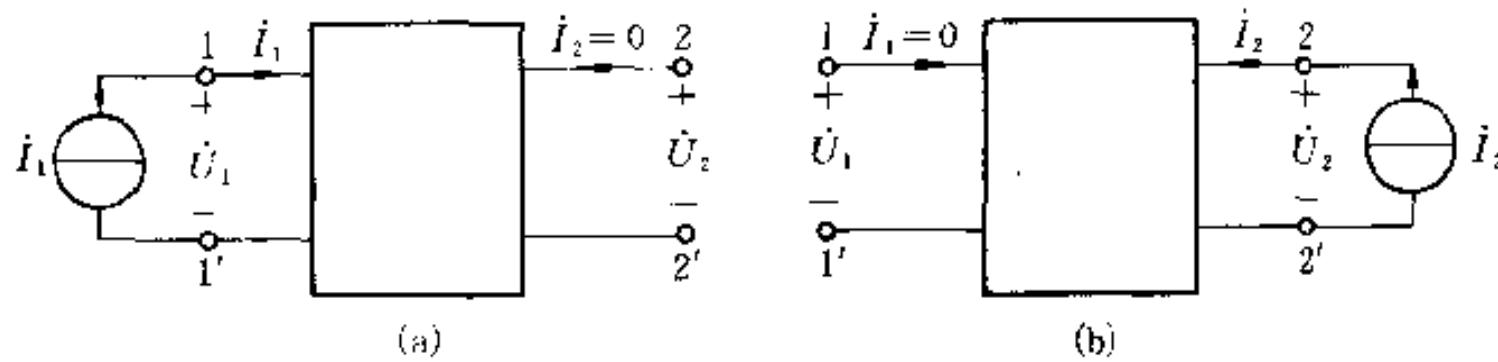


图 16-5 开路阻抗参数的测定

把式(16-2)改写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

称为二端口的 Z 参数矩阵,也称开路阻抗矩阵。

同理,根据互易定理不难证明,对于线性 R 、 $L(M)$ 、 C 元件构成的任何无源二端口, $Z_{12} = Z_{21}$ 总是成立的。所以在这种情况下, Z 参数只有 3 个是独立的。对于对称的二端口,则还有 $Z_{11} = Z_{22}$ 的关系,故只有 2 个参数是独立的。

比较式(16-1)与式(16-2)可以看出开路阻抗矩阵 Z 与短路导纳矩阵 Y 之间存在着互为逆阵的关系,即

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \text{ 或 } \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$$

即

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} \quad (16-3)$$

式中 $\Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ 。

对于含有受控源的线性 R 、 $L(M)$ 、 C 二端口,利用特勒根定理可以证明互易定理一般不再成立,因此 $Y_{12} \neq Y_{21}$, $Z_{12} \neq Z_{21}$ 。下面的例子将说明这一点。

例 16-2 求图 16-6 所示二端口的 Y 参数。

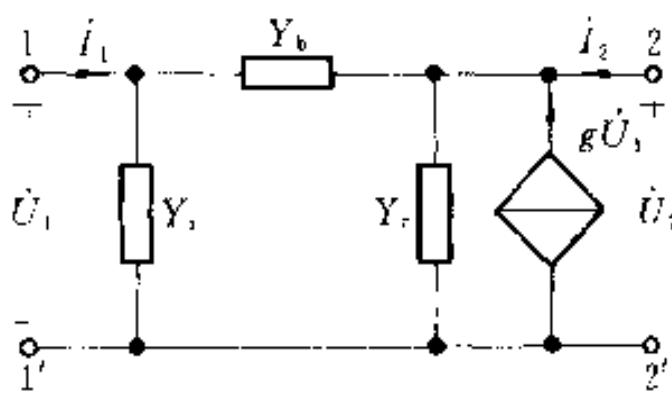


图 16-6 例 16-2 图

解 把端口 2-2' 短路, 在端口 1-1' 外施电压 \dot{U}_1 , 得:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 (Y_a + Y_b)$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{U}_1 Y_b - g\dot{U}_1$$

于是, 可求得:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = Y_a + Y_b$$

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = -Y_b - g$$

同理, 为了求 Y_{12} 、 Y_{22} , 把端口 1-1' 短路, 即令 $\dot{U}_1 = 0$, 这时受控源的电流也等于零, 故得:

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = -Y_b$$

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = Y_b + Y_s$$

可见, 在这种情况下, $Y_{12} \neq Y_{21}$ 。

Y 参数和 Z 参数都可用来描述一个二端口的端口外特性。如果一个二端口的 Y 参数已经确定, 一般就可以用式(16-3)求出它的 Z 参数。反之亦然(参阅后面的表 16-1)。但是许多工程实际问题中, 往往希望找到一个端口的电流、电压与另一端口的电流、电压之间的直接关系。例如, 放大器、滤波器的输入和输出之间的关系; 传输线的始端和终端之间的关系。另外, 有些二端口并不同时存在阻抗矩阵和导纳矩阵表达式; 或者既无阻抗矩阵表达式, 又无导纳矩阵表达式。例如理想变压器就属这类二端口。这意味着某些二端口宜用除 Z 和 Y 参数以外的其他形式的参数描述其端口外特性。为此, 可把式(16-1)的第二式化为

$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{12}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}} \dot{I}_2$$

然后把它代入该式中的第一式,经整理后有

$$\dot{I}_1 = \left(Y_{12} - \frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} \right) \dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \dot{I}_2$$

把以上两式写成如下形式

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A \dot{U}_2 - B \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= C \dot{U}_2 - D \dot{I}_2 \end{aligned} \quad (16-4)$$

式中(注意,右方第二项前面用的是负号)

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & B &= \left. \frac{1}{Y_{21}} \right\} \\ C &= Y_{12} - \frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} & D &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (16-5)$$

这样,就把端口 1-1' 的电流 \dot{I}_1 、电压 \dot{U}_1 用端口 2-2' 的电流 \dot{I}_2 、电压 \dot{U}_2 通过 A 、 B 、 C 、 D 4 个参数表示出来了。 A 、 B 、 C 、 D 称为二端口的一般参数、传输参数、T 参数或 A 参数。它们表示的具体含义可分别用以下各式说明:

$$A = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}$$

$$B = \left. -\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

$$C = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}$$

$$D = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

可见, A 是两个电压的比值,是一个量纲为一的量; B 是短路转移阻抗; C 是开路转移导纳; D 是两个电流的比值,也是量纲为一的量。 A 、 B 、 C 、 D 都具有转移参数性质。

对于无源线性二端口, A 、 B 、 C 、 D 4 个参数中将只有 3 个是独立的,这是因为按式(16-5)并注意到 $Y_{12} = Y_{21}$,得

$$\begin{aligned} AD - BC &= \frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}^2} + \frac{1}{Y_{21}} \frac{Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} \\ &= \frac{Y_{12}}{Y_{21}} = 1 \end{aligned}$$

① 有时用 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 分别表示 A 、 B 、 C 、 D 。

对于对称的二端口,由于 $Y_{11} = Y_{22}$,故由式(16-5),还将有 $A = D$ 。

式(16-4)写成矩阵形式时,有

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

\mathbf{T} 称为 T 参数矩阵,引用上式时,要注意式中电流 \dot{I}_2 前面的负号。

还有一套常用的参数,称为混合参数或 H 参数,是用下面一组方程表示的

$$\left. \begin{array}{l} \dot{U}_1 = H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2 \end{array} \right\} \quad (16-6)$$

在晶体管电路中, H 参数获得了广泛的应用。 H 参数的具体意义可以分别用下列各式说明:

$$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

$$H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}$$

$$H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

$$H_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}$$

可见 H_{11} 和 H_{21} 有短路参数的性质, H_{12} 和 H_{22} 有开路参数的性质。不难看出,

$H_{11} = \frac{1}{Y_{11}}$, $H_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$, H_{21} 为两个电流之间的比值, H_{12} 为两个电压之间的比值。

用矩阵形式表示时,有

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

其中 \mathbf{H} 称为 H 参数矩阵

$$\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

对于无源线性二端口, H 参数中只有 3 个是独立的。例如,将前面求得的 Z 、 Y 参数代入,就可得出图 16-4(a)所示二端口的 H 参数:

$$H_{11} = \frac{1}{Y_a + Y_b}, \quad H_{12} = \frac{Y_b}{Y_a + Y_b}$$

$$H_{21} = -\frac{Y_b}{Y_a + Y_b}, \quad H_{22} = Y_c + \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b}$$

可见 $H_{21} = -H_{12}$ 。对于对称的二端口,由于 $Y_{11} = Y_{22}$ 或 $Z_{11} = Z_{22}$,则有

$$H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} = 1$$

图 16-7 所示为一只晶体管的小信号工作条件下的简化等效电路,不难根据 H 参数的定义,求得:

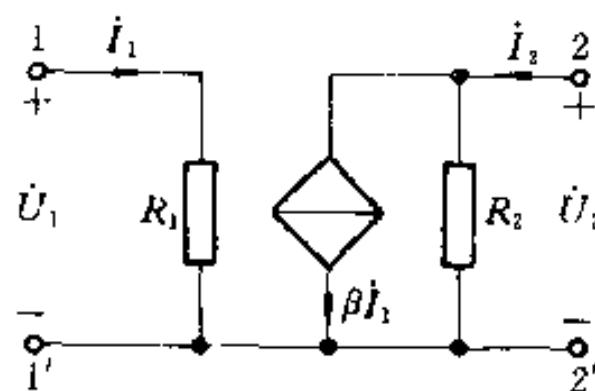


图 16-7 晶体管的等效电路

$$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{U_2=0} = R_1, \quad H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = 0$$

$$H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{U_2=0} = \beta, \quad H_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{1}{R_2}$$

Y 参数、 Z 参数、 T 参数、 H 参数之间的相互转换关系不难根据以上的基本方程推导出来,表 16-1 总结了这些关系。

表 16-1

	Z 参数	Y 参数	H 参数	$T(A)$ 参数
Z 参数	$Z_{11} \quad Z_{12}$	$\frac{Y_{22}}{\Delta_Y} - \frac{Y_{12}}{\Delta_Y}$	$\frac{\Delta_H}{H_{12}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$	$\frac{A}{C} \quad \frac{\Delta_T}{C}$
	$Z_{21} \quad Z_{22}$	$-\frac{Y_{21}}{\Delta_Y} \quad \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$	$-\frac{H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$	$\frac{1}{C} \quad \frac{D}{C}$
Y 参数	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z} - \frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$	$\frac{1}{H_{11}} - \frac{H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{D}{B} \quad \frac{\Delta_T}{B}$
	$-\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} \quad \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$-\frac{1}{B} \quad \frac{A}{B}$
H 参数	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} - \frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$H_{11} \quad H_{12}$	$\frac{B}{D} \quad \frac{\Delta_T}{D}$
	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$	$H_{21} \quad H_{22}$	$-\frac{1}{D} \quad \frac{C}{D}$

续表

	Z参数	Y参数	H参数	T(A)参数
T(A)参数	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$ $\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{21}}$ $-\frac{1}{Y_{21}}$	$-\frac{\Delta_H}{H_{21}}$ $\frac{H_{11}}{H_{21}}$	A B
	$\frac{1}{Z_{21}}$ $\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{\Delta_Y}{Y_{21}}$ $-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{H_{22}}{H_{21}}$ $-\frac{1}{H_{21}}$	C D

表中：

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_T = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

二端口一共有 6 组不同的参数,其余 2 组分别与 H 参数和 T 参数相似,只是把电路方程等号两边的端口变量互换而已,此处不再列举。

§ 16-3 二端口的等效电路

任何复杂的无源线性一端口可以用一个等效阻抗表征它的外部特性。同理,任何给定的无源线性二端口的外部性能既然可以用 3 个参数确定,那么只要找到一个由具有 3 个阻抗(或导纳)组成的简单二端口,如果这个二端口与给定的二端口的参数分别相等,则这两个二端口外部特性也就完全相同,即它们是等效的。由 3 个阻抗(或导纳)组成的二端口只有两种形式,即 T 形电路和 II 型电路[图 16-8(a)、(b)]。

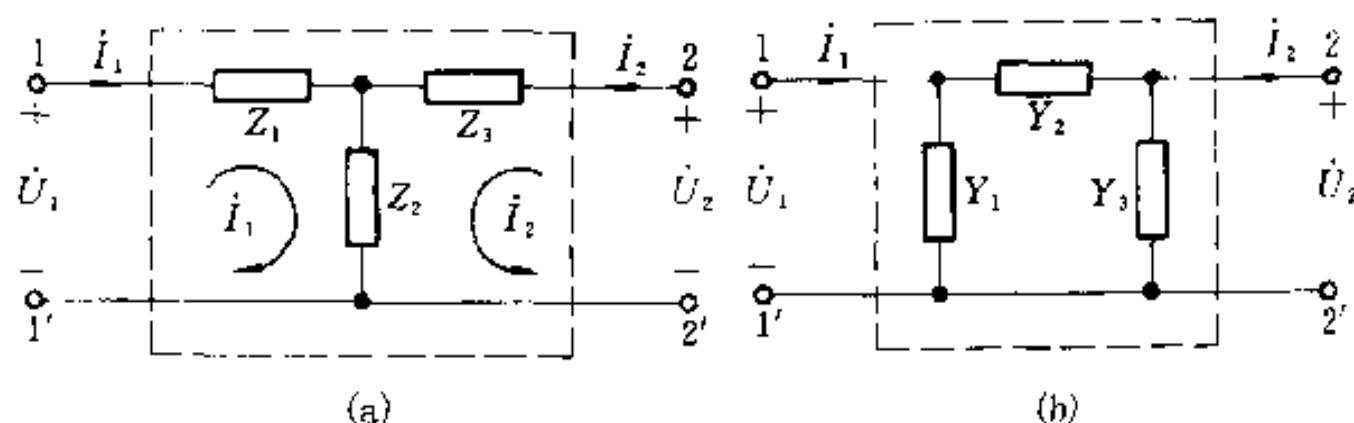


图 16-8 二端口的等效电路

如果给定二端口的 Z 参数,要确定此二端口的等效 T 形电路[图 16-8(a)]中的 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 的值,可先写出 T 形电路的回路电流方程

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Z_1 I_1 + Z_2 (I_1 + I_2) \\ U_2 &= Z_2 (I_1 + I_2) + Z_3 I_2 \end{aligned} \right\} \quad (16-7)$$

而由 Z 参数表示的网络方程式(16-2)中,由于 $Z_{12} = Z_{21}$, 可以将式(16-2)改写为

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= (Z_{11} - Z_{12})\dot{I}_1 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \\ \dot{U}_2 &= Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + (Z_{22} - Z_{12})\dot{I}_2\end{aligned}\quad (16-8)$$

比较式(16-7)与式(16-8)可知:

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12}, \quad Z_2 = Z_{12}, \quad Z_3 = Z_{22} - Z_{12} \quad (16-9)$$

如果二端口给定的是 Y 参数,宜先求出其等效 Π 形电路[图 16-8(b)]中的 Y_1, Y_2, Y_3 的值。为此针对图 16-8(b)所示电路,按求 T 形电路相似的方法可得:

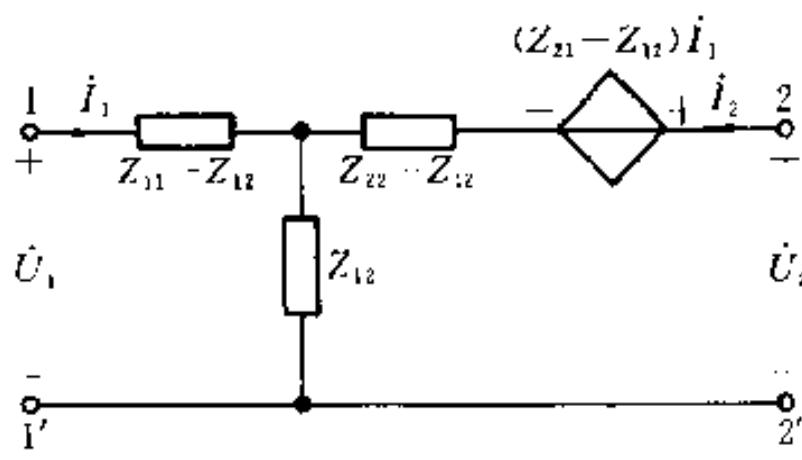
$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12}, \quad Y_2 = -Y_{12} = -Y_{21}, \quad Y_3 = Y_{22} + Y_{21} \quad (16-10)$$

如果给定二端口的其他参数,则可查表 16-1,把其他参数变换成 Z 参数或 Y 参数,然后再由式(16-9)或式(16-10)求得 T 形等效电路或 Π 形等效电路的参数值。例如 T 形等效电路的 Z_1, Z_2, Z_3 与 T 参数之间的关系为

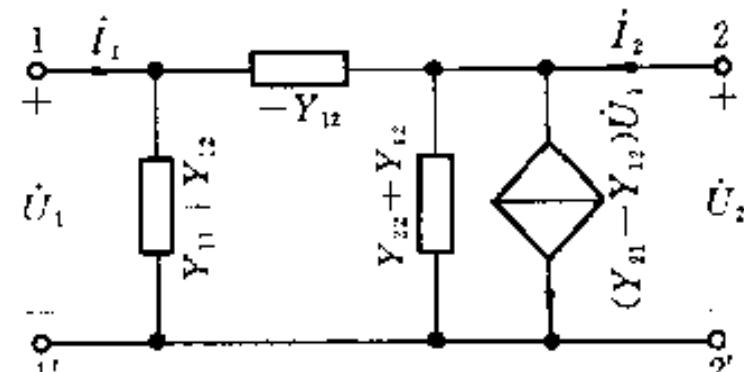
$$Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{1}{C}, \quad Z_3 = \frac{D-1}{C}$$

Π 形等效电路的 Y_1, Y_2, Y_3 与 T 参数之间的关系为

$$Y_1 = \frac{D-1}{B}, \quad Y_2 = \frac{1}{B}, \quad Y_3 = \frac{A-1}{B}$$



(a)



(b)

图 16-9 含受控电源的二端口的等效电路

对于对称二端口,由于 $Z_{11} = Z_{22}, Y_{11} = Y_{22}, A = D$, 故它的等效 T 形或 Π 形电路也一定是对称的,这时应有 $Y_1 = Y_3, Z_1 = Z_3$ 。

如果二端口内部含有受控源,那么,二端口的 4 个参数将是相互独立的。若给定二端口的 Z 参数,则式(16-2)可写成:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{12} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 + (Z_{21} - Z_{12}) \dot{I}_1\end{aligned}$$

这样第 2 个方程右端的最后一项是一个 CCVS,其等效电路如图 16-9(a)所示。同理,用 Y 参数表示的含受控电源的二端口可用图 16-9(b)所示等效电路代替。

§ 16-4 二端口的转移函数

以上对二端口的讨论都是按正弦稳态情况考虑的,故用相量法。如果用运算法分析二端口,则上述这些参数都是复变量 s 的函数。二端口的转移函数(传递函数),就是用拉氏变换形式表示的输出电压或电流与输入电压或电流之比(注意,二端口内部必须没有独立电源和附加电源)。当二端口没有外接负载及输入激励无内阻抗时,二端口称为无端接的。无端接的二端口的电压转移函数 $U_2(s)/U_1(s)$,电流转移函数 $I_2(s)/I_1(s)$,转移导纳(函数) $I_2(s)/U_1(s)$ 和转移阻抗(函数) $U_2(s)/I_1(s)$ 分别如下。

令式(16-2)中的电流 $I_2(s)=0$,有:

$$\begin{aligned}U_1(s) &= Z_{11}(s)I_1(s) \\ U_2(s) &= Z_{21}(s)I_1(s)\end{aligned}$$

因此电压转移函数为

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_{21}(s)}{Z_{11}(s)}$$

或者令式(16-1)中的 $I_2=0$,有

$$0 = Y_{21}(s)U_1(s) + Y_{22}(s)U_2(s)$$

所以电压转移函数为

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Y_{21}(s)}{Y_{22}(s)}$$

同理,可求得二端口的其余转移函数:

电流转移函数

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{Y_{21}(s)}{Y_{11}(s)} = -\frac{Z_{21}(s)}{Z_{22}(s)} \quad [U_2(s)=0]$$

转移导纳

$$\frac{I_2(s)}{U_1(s)} = Y_{21}(s) \quad [U_2(s)=0]$$

转移阻抗

$$\frac{U_2(s)}{I_1(s)} = Z_{21}(s) \quad [I_2(s) = 0]$$

这些转移函数可纯粹用 Y 参数或 Z 参数表示。当然,也可纯粹用 $T(A)$ 参数或 H 参数表示。

在实际应用中,二端口的输出端口往往接有负载阻抗 Z_L ,输入端口接有电压源和阻抗 Z_S 的串联组合或电流源和阻抗 Z_S 的并联组合。这种情况下该二端口称为具有“双端接”的二端口。如果只计及 Z_L 或只计及 Z_S ,则称为具有“单端接”的二端口。具有单端接或双端接的二端口的转移函数与端接阻抗有关。

图 16-10 所示为一个输出端接有电阻 R 的二端口。对此二端口,有:

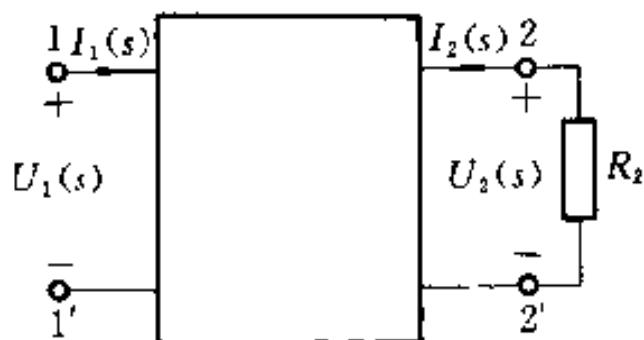


图 16-10 具有端接电阻的二端口

$$I_2(s) = Y_{21}(s)U_1(s) + Y_{22}(s)U_2(s)$$

$$U_2(s) = -RI_2(s)$$

消去 $U_2(s)$ 后,得转移导纳

$$\frac{I_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Y_{21}(s)/R}{Y_{22}(s) + 1/R}$$

对此二端口还有:

$$U_2(s) = Z_{21}(s)I_1(s) + Z_{22}(s)I_2(s)$$

$$U_2(s) = -RI_2(s)$$

消去 $I_2(s)$ 后,得转移阻抗

$$\frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{RZ_{21}(s)}{R + Z_{22}(s)}$$

如果对此二端口写出如下方程:

$$I_2(s) = Y_{21}(s)U_1(s) + Y_{22}(s)U_2(s)$$

$$U_1(s) = Z_{11}(s)I_1(s) + Z_{12}(s)I_2(s)$$

$$U_2(s) = -RI_2(s)$$

消去 $U_2(s)$ 和 $U_1(s)$ 后,得电流转移函数

$$\begin{aligned}\frac{I_2(s)}{I_1(s)} &= \frac{Y_{21}(s)Z_{11}(s)}{1 + Y_{22}(s)R - Z_{12}(s)Y_{21}(s)} \\ &= \frac{Y_{21}(s)/R}{Y_{11}(s)\left[\frac{1}{R} + Y_{22}(s)\right] - Y_{12}(s)Y_{21}(s)}\end{aligned}$$

如果对此二端口写出如下方程：

$$\begin{aligned}U_2(s) &= Z_{21}(s)I_1(s) + Z_{22}(s)I_2(s) \\ I_1(s) &= Y_{11}(s)U_1(s) + Y_{12}(s)U_2(s) \\ U_2(s) &= -RI_2(s)\end{aligned}$$

消去 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$ 后, 得电压转移函数

$$\begin{aligned}\frac{U_2(s)}{U_1(s)} &= \frac{Z_{21}(s)Y_{11}(s)}{1 + Z_{22}(s)\frac{1}{R} - Z_{12}(s)Y_{21}(s)} \\ &= \frac{Z_{21}(s)R}{Z_{11}(s)[R + Z_{22}(s)] - Z_{12}(s)Z_{21}(s)}\end{aligned}$$

对于双端接二端口, 转移函数将与两个端接阻抗有关。图 16-11 所示为这

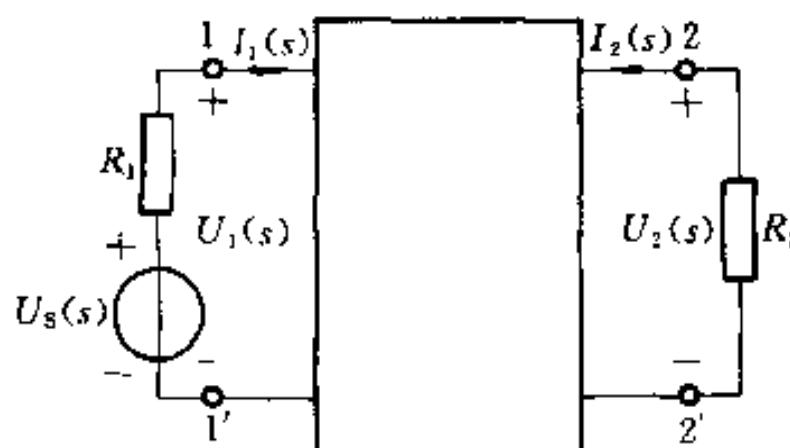


图 16-11 两个端口都有端接电阻影响的情况

种情况, 其中 R_1 为输入端的电阻, R_2 为输出端的电阻。假定要求的是 $U_2(s)/U_s(s)$ [这里应当把 $U_s(s)$ 作为输入], 这时有:

$$\begin{aligned}U_1(s) &= U_s(s) - R_1I_1(s) \\ U_2(s) &= -R_2I_2(s)\end{aligned}$$

把它们代入式(16-2), 得:

$$\begin{aligned}U_s(s) - R_1I_1(s) &= Z_{11}(s)I_1(s) + Z_{12}(s)I_2(s) \\ -R_2I_2(s) &= Z_{21}(s)I_1(s) + Z_{22}(s)I_2(s)\end{aligned}$$

解得

$$I_2(s) = -\frac{U_s(s)Z_{21}(s)}{[R_1 + Z_{11}(s)][R_2 + Z_{22}(s)] - Z_{12}(s)Z_{21}(s)}$$

这样有

$$\frac{U_2(s)}{U_s(s)} = \frac{-R_2 I_2(s)}{U_s(s)} = \frac{Z_{21}(s) R_2}{[R_1 + Z_{11}(s)][R_2 + Z_{22}(s)] - Z_{12}(s) Z_{21}(s)}$$

以上介绍了一些转移函数的计算方法。如前所述,二端口常为完成某种功能起着耦合两部分电路的作用。例如,滤波器能让具有某些频率的信号通过,而对另一些频率的信号则加以抑制。这种功能往往是通过转移函数描述或指定的。另一方面,转移函数的极点和零点的分布与二端口内部的元件及连接方式等密切相关,而极、零点的分布又决定了电路的特性。所以可以根据转移函数确定二端口内部元件的连接方式及元件值,即所谓电路设计或网络综合。可见二端口的转移函数是一个很重要的概念。

§ 16-5 二端口的连接

如果把一个复杂的二端口看成是由若干个简单的二端口按某种方式连接而成,这将使电路分析得到简化。另一方面,在设计和实现一个复杂的二端口时,也可以用简单的二端口作为“积木块”,把它们按一定方式连接成具有所需特性的二端口。一般说来,设计简单的部分电路并加以连接要比直接设计一个复杂的整体电路容易些。因此讨论二端口的连接问题具有重要意义。

二端口可按多种不同方式相互连接,这里主要介绍 3 种方式:级联(链联)、串联和并联,分别如图 16-12(a)、(b)、(c)所示。在二端口的连接问题上,感兴趣的是复合二端口的参数与部分二端口的参数之间的关系。

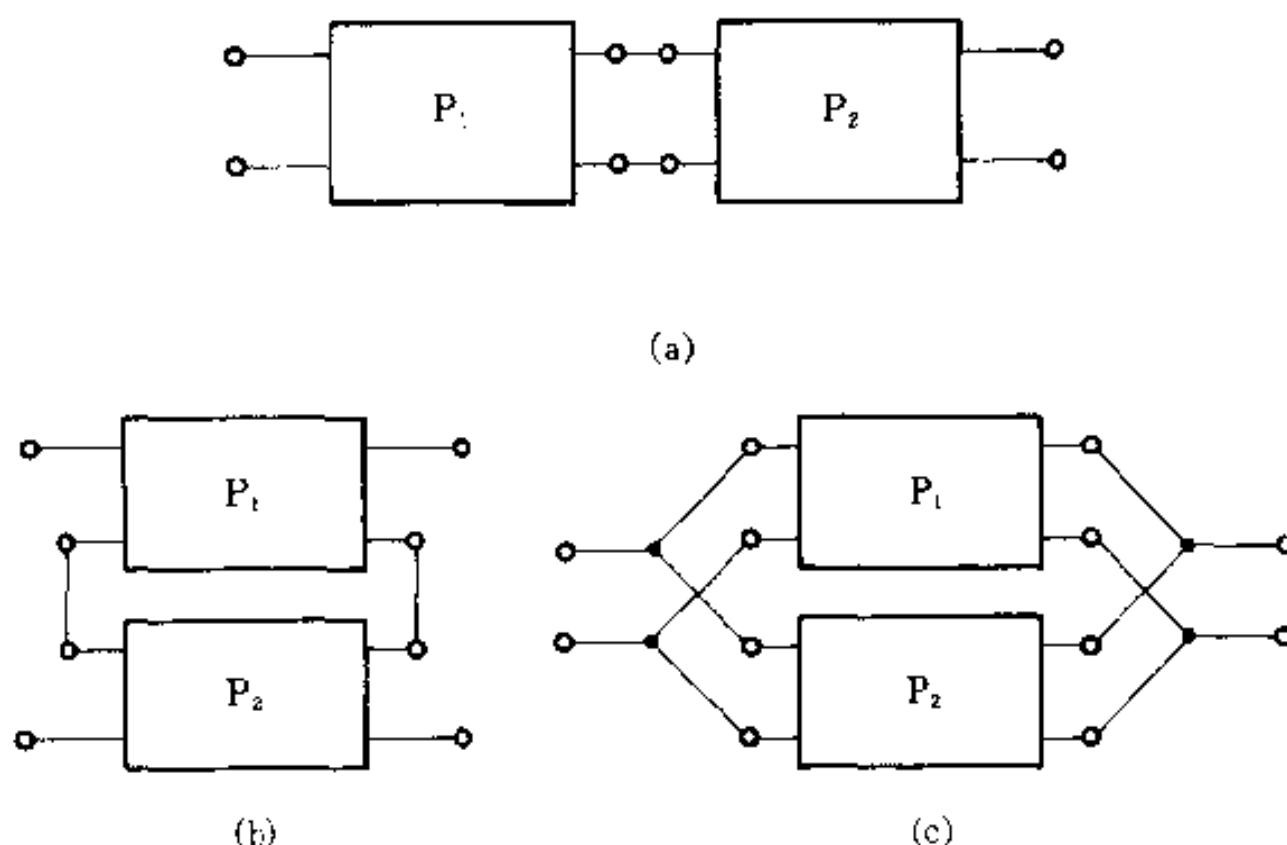


图 16-12 二端口的连接

当两个无源二端口 P_1 和 P_2 按级联方式连接后, 它们构成了一个复合二端口, 如图 16-13 所示。设二端口 P_1 和 P_2 的 T 参数分别为:

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}'' = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$

则应有

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ I''_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'' \begin{bmatrix} \dot{U}''_2 \\ -I''_2 \end{bmatrix}$$

但由于 $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1$, $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_1$, $\dot{U}''_2 = \dot{U}_2$, $I_1 = I'_1$, $I'_2 = -I''_1$ 及 $I''_2 = I_2$, 所以有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ I''_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \mathbf{T}'' \begin{bmatrix} \dot{U}''_2 \\ -I''_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}' \mathbf{T}'' \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 \mathbf{T} 为复合二端口的 T 参数矩阵, 它与二端口 P_1 和 P_2 的 T 参数矩阵的关系为

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' \mathbf{T}''$$

即

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$$

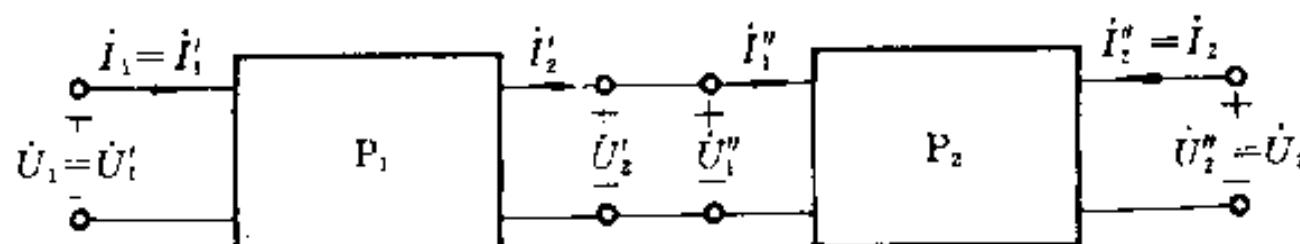


图 16-13 二端口的级联

当两个二端口 P_1 和 P_2 按并联方式连接时, 如图 16-14 所示, 两个二端口的输入电压和输出电压被分别强制为相同, 即 $\dot{U}'_1 = \dot{U}''_1 = \dot{U}_1$, $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_2 = \dot{U}_2$ 。如果每个二端口的端口条件(即端口上流入一个端子的电流等于流出另一端子的电流)不因并联连接而被破坏, 则复合二端口的总端口的电流应为:

$$I_1 = I'_1 + I''_1, \quad I_2 = I'_2 + I''_2$$

若设 P_1 和 P_2 的 Y 参数分别为:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}'' = \begin{bmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{bmatrix}$$

则应有

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}' \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Y}'' \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'') \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

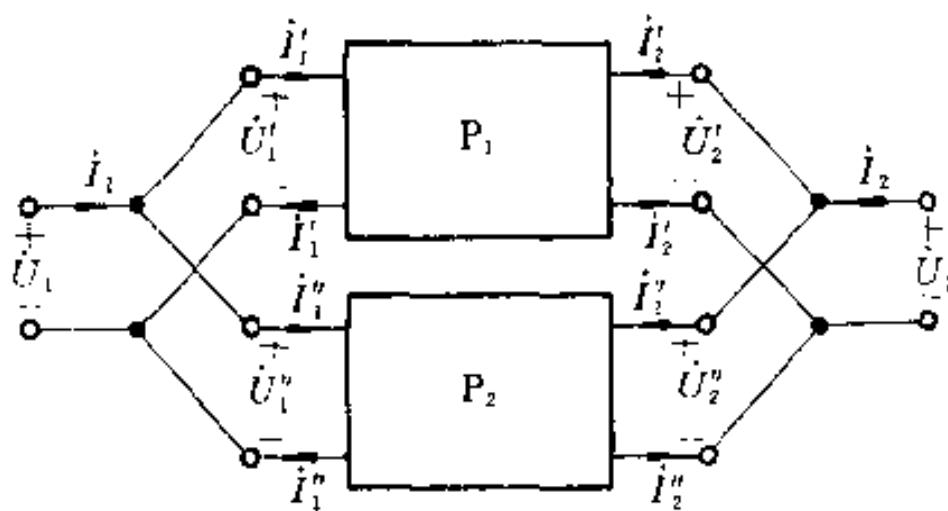


图 16-14 二端口的并联

其中 \mathbf{Y} 为复合二端口的 Y 参数矩阵, 它与二端口 P_1 和 P_2 的 Y 参数矩阵的关系为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}''$$

当两个二端口按串联方式连接时, 只要端口条件仍然成立, 用类似方法, 不难导得复合二端口的 Z 参数矩阵与串联连接的两个二端口的 Z 参数矩阵有如下关系

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}''$$

§ 16-6 回转器和负阻抗变换器

回转器是一种线性非互易的多端元件, 图 16-15 为它的电路符号图。理想回转器可视为一个二端口, 它的端口电压、电流可用下列方程表示

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = -ri_2 \\ u_2 = ri_1 \end{array} \right\} \quad (16-11)$$

或写为

$$\left. \begin{array}{l} i_1 = gu_2 \\ i_2 = -gu_1 \end{array} \right\}^{\textcircled{1}} \quad (16-12)$$

式中的 r 和 g 分别具有电阻和电导的量纲。它们分别称为回转电阻和回转电

① 式(16-11)和(16-12)的另一种形式为:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = ri_2 \\ u_2 = -ri_1 \end{array} \right\} \quad (16-11')$$

$$\left. \begin{array}{l} i_1 = -gu_2 \\ i_2 = gu_1 \end{array} \right\} \quad (16-12')$$

为了区别这两种情况, 习惯上在图 16-15 所示电路符号图上方加一个箭头。当箭头自左指向右时, 它对应式(16-11)或式(16-12), 而自右指向左时则对应式(16-11')或式(16-12')。本书的有关图中略去了这个箭头。

导,简称回转常数。把将上式与理想变压器的关系式对比,就可以明确两者的差别所在。

用矩阵形式表示时,式(16-11)、(16-12)可分别写为:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

可见,回转器的Z参数矩阵和Y参数矩阵分别为:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

根据理想回转器的端口方程,即式(16-11),有

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = -ri_1 i_2 + ri_1 i_2 = 0$$

可见,理想回转器既不消耗功率又不发出功率,它是一个无源线性元件。另外,按式(16-11)或(16-12),不难证明互易定理不适用于回转器。

从式(16-11)或式(16-12)可以看出,回转器有把一个端口上的电流“回转”为另一端口上的电压或相反过程的性质。正是这一性质,使回转器具有把一个电容回转为一个电感的本领,这在微电子器件中为用易于集成的电容实现难于集成的电感提供了可能性。下面说明回转器的这一功能。

对图16-16所示电路,有 $I_2(s) = -sCU_2(s)$ (这里采用运算形式),故按式(16-11)或(16-12)可得

$$U_1(s) = -rI_2(s) = rsCU_2(s) = r^2 sCI_1(s)$$

或

$$I_1(s) = gU_2(s) = -g \frac{1}{sC} I_2(s) = g^2 \frac{1}{sC} U_1(s)$$

于是,输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = sr^2 C = s \frac{C}{g^2}$$

可见,对于图16-16所示电路,从输入端看,相当于一个电感元件,它的电感值 $L = r^2 C = C/g^2$ 。如果设 $C = 1 \mu\text{F}$, $r = 50 \text{ k}\Omega$, 则 $L = 2500 \text{ H}$ 。换言之,回转器可把 $1 \mu\text{F}$ 的电容回转成 2500 H 的电感。

负阻抗变换器(简称 NIC^①)也是一个二端口,它的符号如图16-17(a)所示。它的端口特性可以用下列T参数描述[采用运算形式,但为简化起见,略去

① Negative Impedance Converter 的缩写。

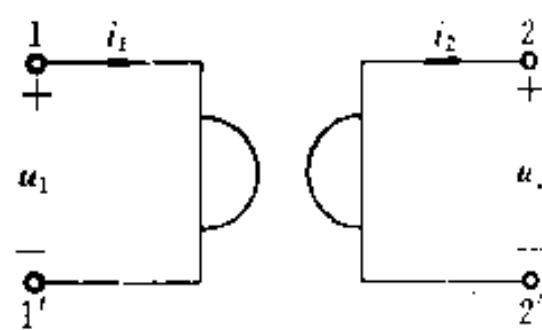


图 16-15 回转器

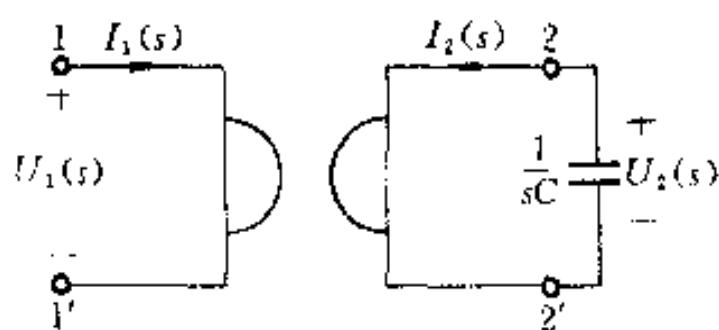


图 16-16 电感的实现

U, I 后的“ (s) ”]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (16-13a)$$

或

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (16-13b)$$

式中 k 为正实常数。

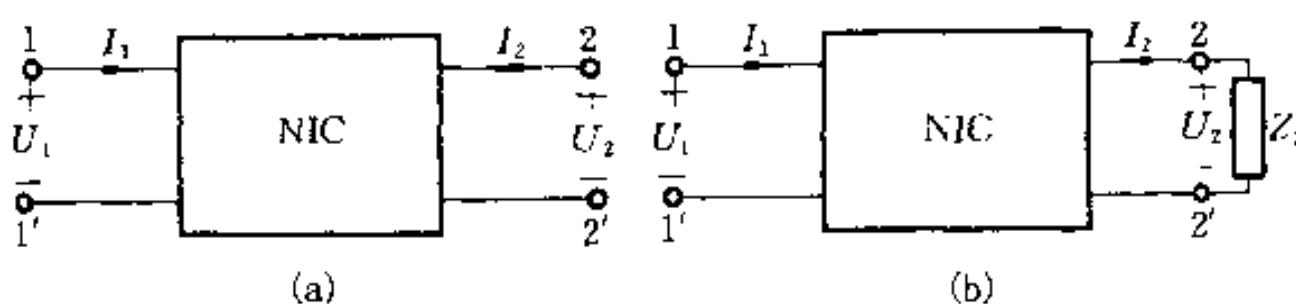


图 16-17 负阻抗变换器

从式(16-13a)可以看出, 输入电压 U_1 经过传输后成为 U_2 , 但 U_1 等于 U_2 , 因此电压的大小和方向均没有改变; 但是电流 I_1 经传输后变为 kI_2 , 换句话说, 电流经传输后改变了方向, 所以该式定义的 NIC 称为电流反向型的 NIC。

从式(16-13b)可以看出, 经传输后电压变为 $-kU_1$, 改变了方向, 电流却不改变方向。这种 NIC 称为电压反向型的 NIC。下面说明 NIC 把正阻抗变为负阻抗的性质。

在端口 $2-2'$ 接上阻抗 Z_2 , 如图 16-17(b)所示。从端口 $1-1'$ 看进去的输入阻抗 Z_1 可计算如下:

设 NIC 为电流反向型, 利用式(16-13a), 得

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{kI_2} \textcircled{①}$$

但是 $U_2 = -Z_2 I_2$ (根据指定的参考方向), 因此

$$Z_1 = -\frac{Z_2}{k}$$

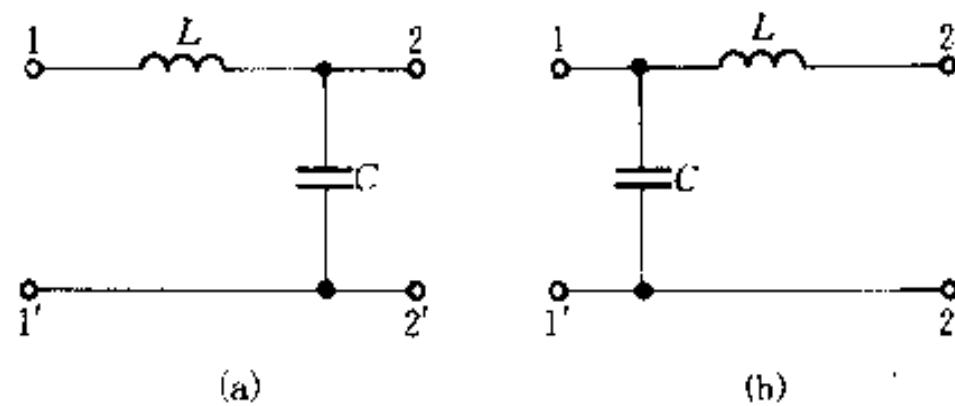
① 如 NIC 为电压反向型, 利用式(16-13b)可得 $Z_1 = kU_2/I_2$ 。

换句话说,输入阻抗 Z_1 是负载阻抗 Z_2 (乘以 $\frac{1}{k}$) 的负值。所以这个二端口有把一个正阻抗变为负阻抗的本领,也即当端口 $2-2'$ 接上电阻 R 、电感 L 或电容 C 时,则在端口 $1-1'$ 将变为 $-\frac{1}{k}R$ 、 $-\frac{1}{k}L$ 或 $-kC$ 。

负阻抗变换器为电路设计中实现负 R 、 L 、 C 提供了可能性。

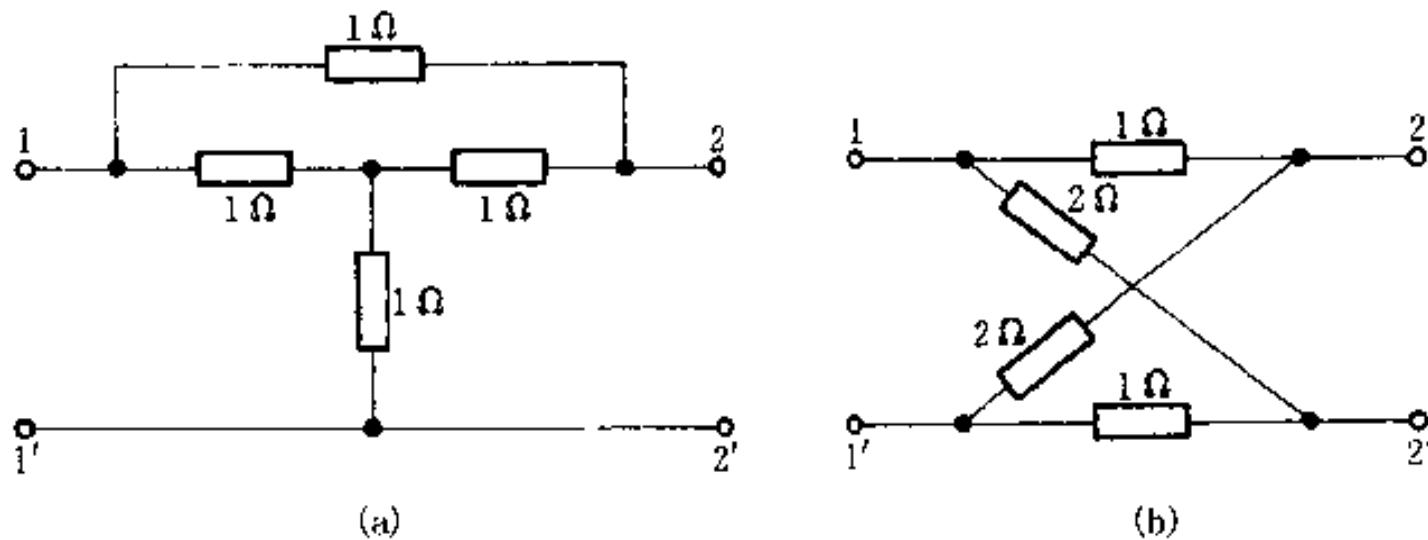
习 题

16-1 求图示二端口的 Y 、 Z 和 T 参数矩阵。



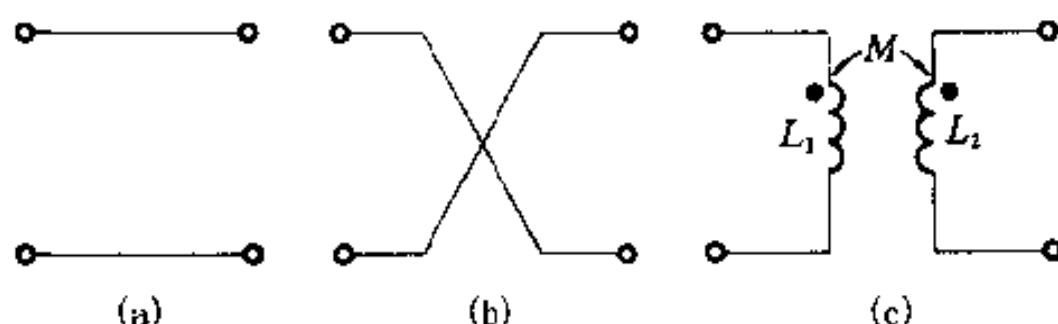
题 16-1 图

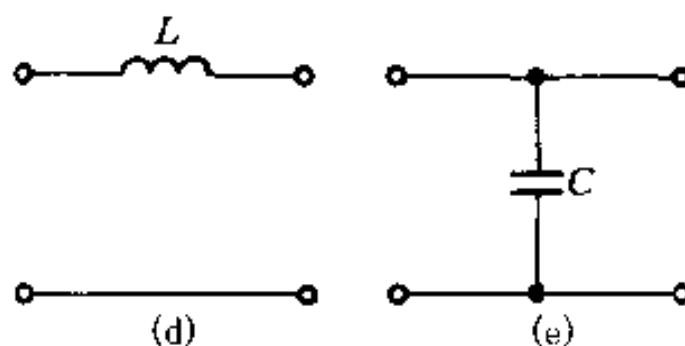
16-2 求图示二端口的 Y 和 Z 参数矩阵。



题 16-2 图

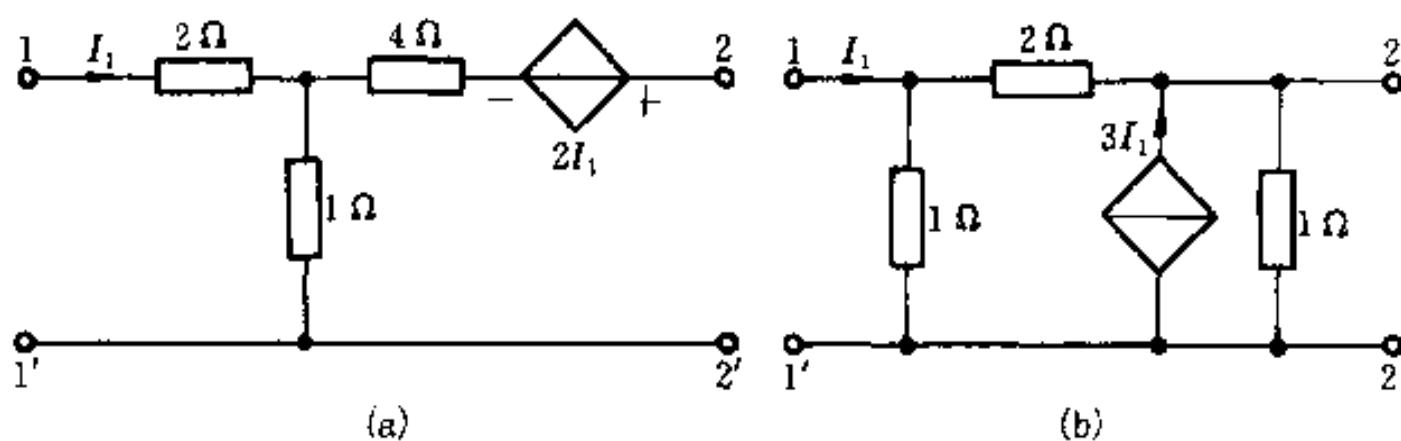
16-3 求图示二端口的 T 参数矩阵。





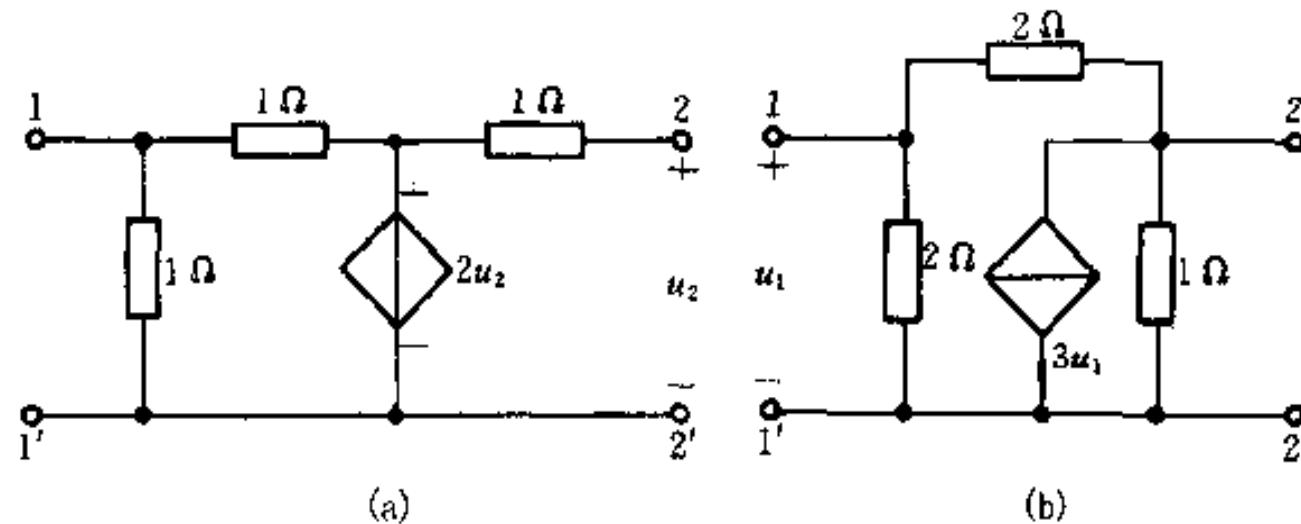
题 16-3 图

16-4 求图示二端口的 Y 参数矩阵。



题 16-4 图

16-5 求图示二端口的混合参数(H)矩阵。



题 16-5 图

16-6 已知图示二端口的 Z 参数矩阵为

$$Z = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \Omega$$

求 R_1 、 R_2 、 R_3 和 r 的值。

16-7 已知二端口的 Y 参数矩阵为

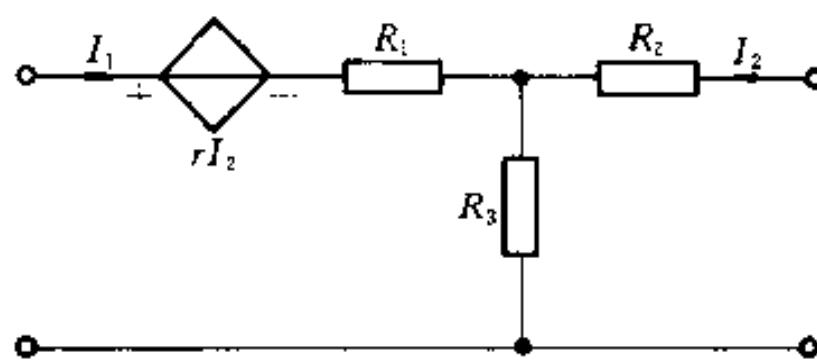
$$Y = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.2 \\ -1.2 & 1.8 \end{bmatrix} S$$

求 H 参数矩阵，并说明该二端口中是否有受控源。

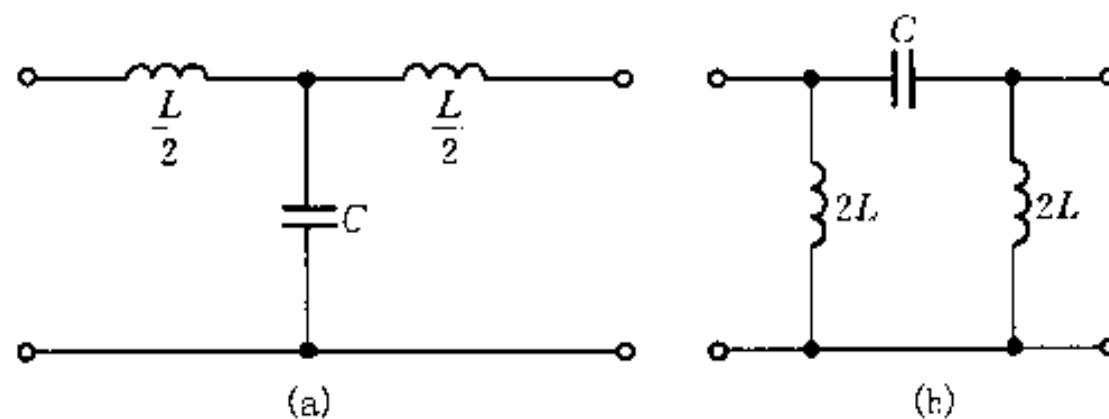
16-8 求图示二端口的 Z 参数、T 参数。

16-9 电路如图所示，已知二端口的 H 参数矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} 40 & 0.4 \\ 10 & 0.1 \end{bmatrix}$$

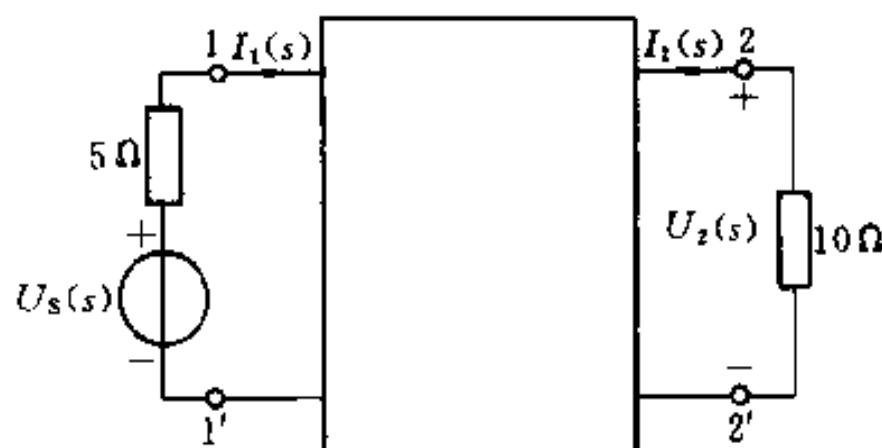


题 16-6 图



题 16-8 图

求电压转移函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 。



题 16-9 图

16-10 已知二端口参数矩阵为

$$(a) \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 60/9 & 40/9 \\ 40/9 & 100/9 \end{bmatrix} \Omega;$$

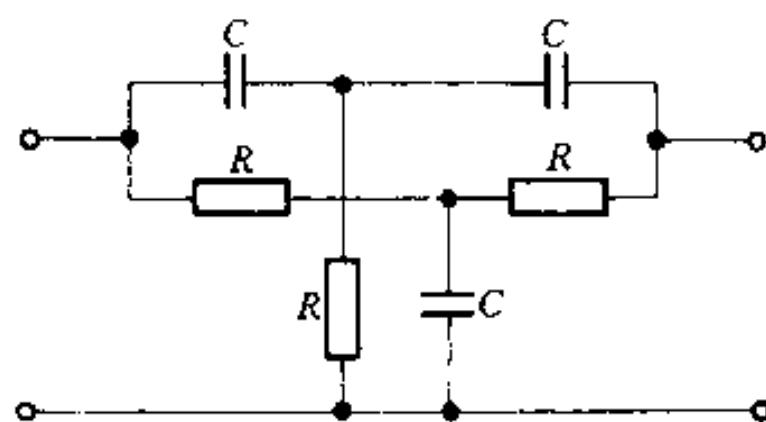
$$(b) \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S.$$

试问该二端口是否有受控源，并求它的等效Π形电路。

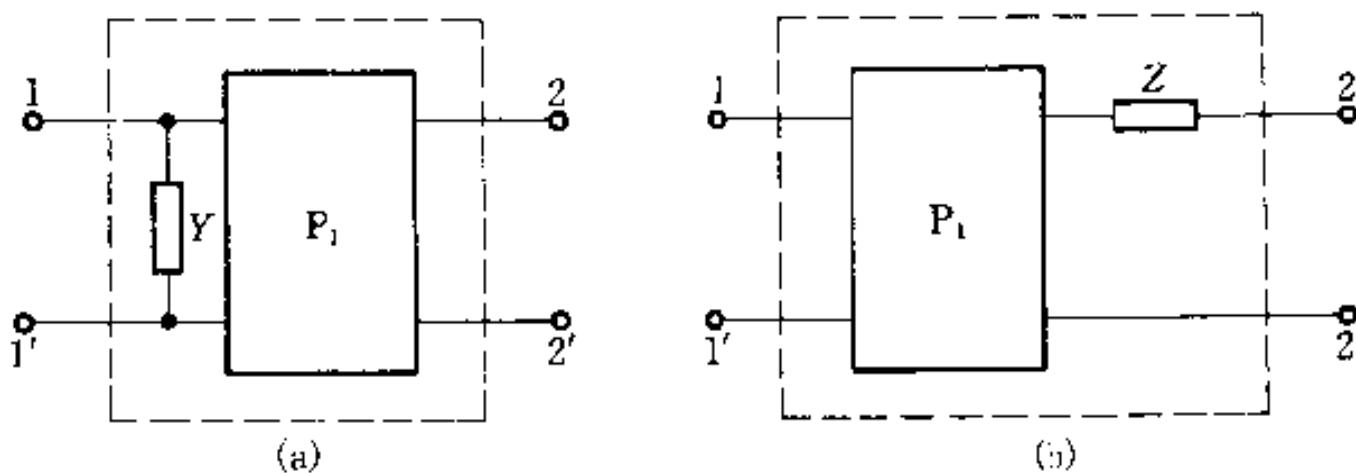
16-11 求图示双T电路的Y参数。

16-12 求图示二端口的T参数矩阵，设内部二端口P₁的T参数矩阵为

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

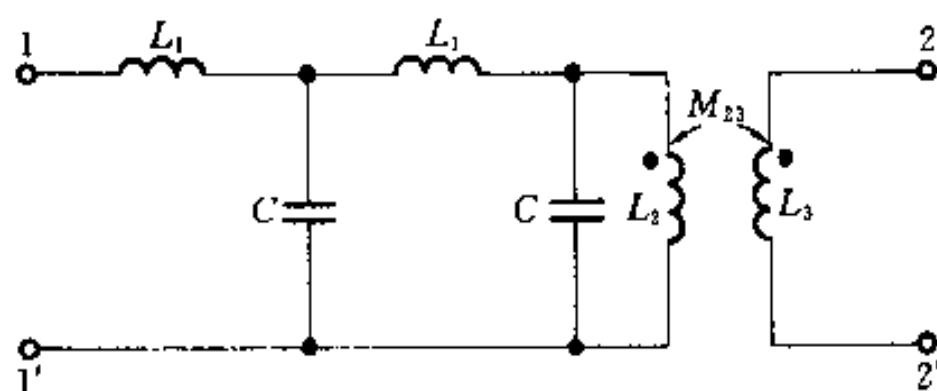


题 16-11 图



题 16-12 图

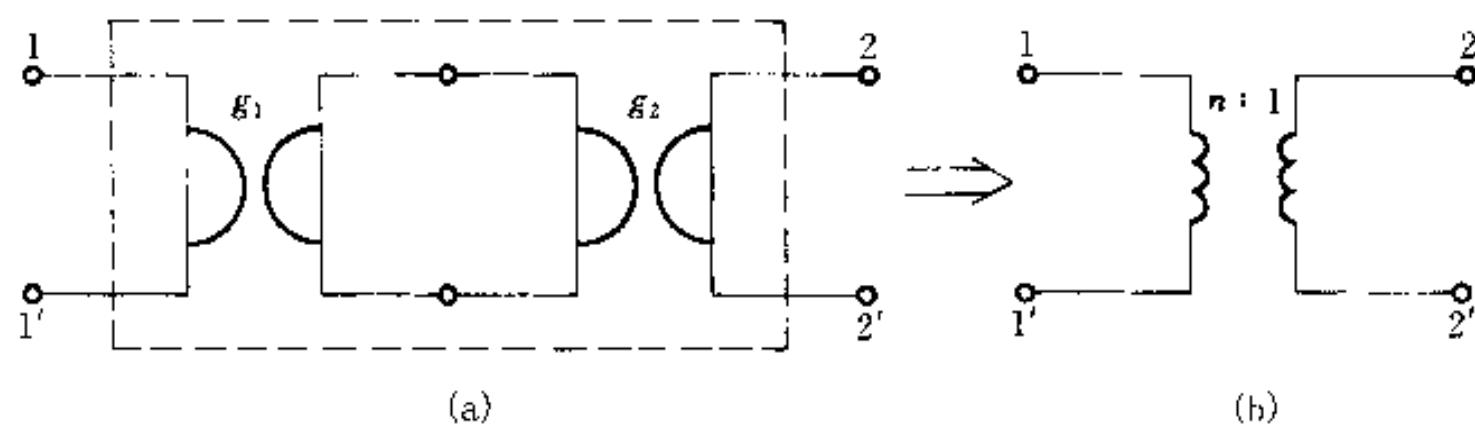
16-13 利用题 16-1、16-3 的结果,求出图示二端口的 T 参数矩阵。设已知 $\omega L_1 = 10 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 20 \Omega$, $\omega L_2 = \omega L_3 = 8 \Omega$, $\omega M_{23} = 4 \Omega$ 。



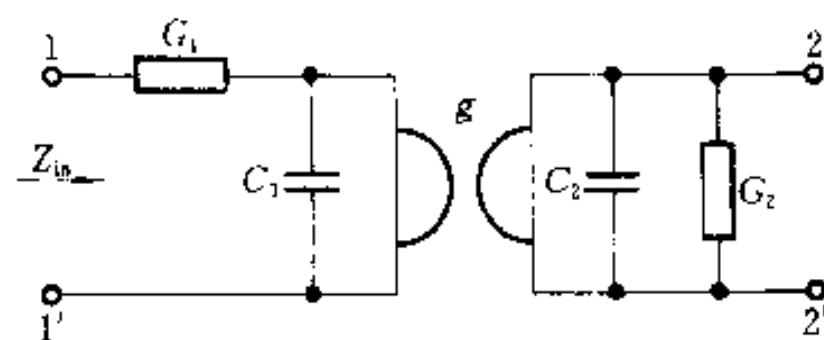
题 16-13 图

16-14 试证明两个回转器级联后[如图(a)所示],可等效为一个理想变压器[如同图(b)所示],并求出变比 n 与两个回转器的回转电导 g_1 和 g_2 的关系。

16-15 试求图示电路的输入阻抗 Z_{in} 。已知 $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$, $G_1 = G_2 = 1 \text{ S}$, $g = 2 \text{ S}$ 。



题 16-14 图



题 16-15 图

第十七章

非线性电路简介

— 内容提要 —

本章简要介绍非线性电路元件，并举例说明非线性电路方程的建立方法。同时，介绍分析非线性电路的一些常用方法，如小信号法、分段线性化方法；扼要介绍工作在非线性范围的运放；有关状态平面以及自激振荡的初步概念；还涉及“混沌”、人工神经元电路的初步介绍。

本章以掌握概念为主，不要求定量分析。

§ 17-1 非线性电阻

含有非线性元件的电路称为非线性电路。一切实际电路严格来说都是非线性的，对于那些非线性程度比较微弱的电路元件，作为线性元件处理不会带来本质上的差异。但是，许多非线性元件的非线性特征不容忽略，否则就将无法解释电路中发生的现象；作为线性元件处理，势必使计算结果与实际量值相差太大而无意义，甚至还会产生本质的差异。由于非线性电路具有本身的特殊性，所以分析研究非线性电路具有很重要的意义。

线性电阻元件的伏安特性可用欧姆定律 $u = Ri$ 表示，在 $u - i$ 平面上是通过坐标原点的一条直线。非线性电阻元件的伏安特性不满足欧姆定律而遵循某种特定的非线性函数关系。非线性电阻在电路中的符号如图 17-1(a) 所示。

若电阻元件两端的电压是其电流的单值函数，这种电阻称为电流控制型电阻。可用下列函数关系表示

$$u = f(i) \quad (17-1)$$

它的典型的伏安特性如图 17-1(b) 所示。从特性曲线上可以看到：对于每一个电流值 i ，有且只有一个电压值 u 与之相对应；反之，对于同一电压值，电流可能是多值的。如 $u = u_0$ 时，就有 i_1 、 i_2 和 i_3 3 个不同的值。某些充气二极管就具

有这种伏安特性。

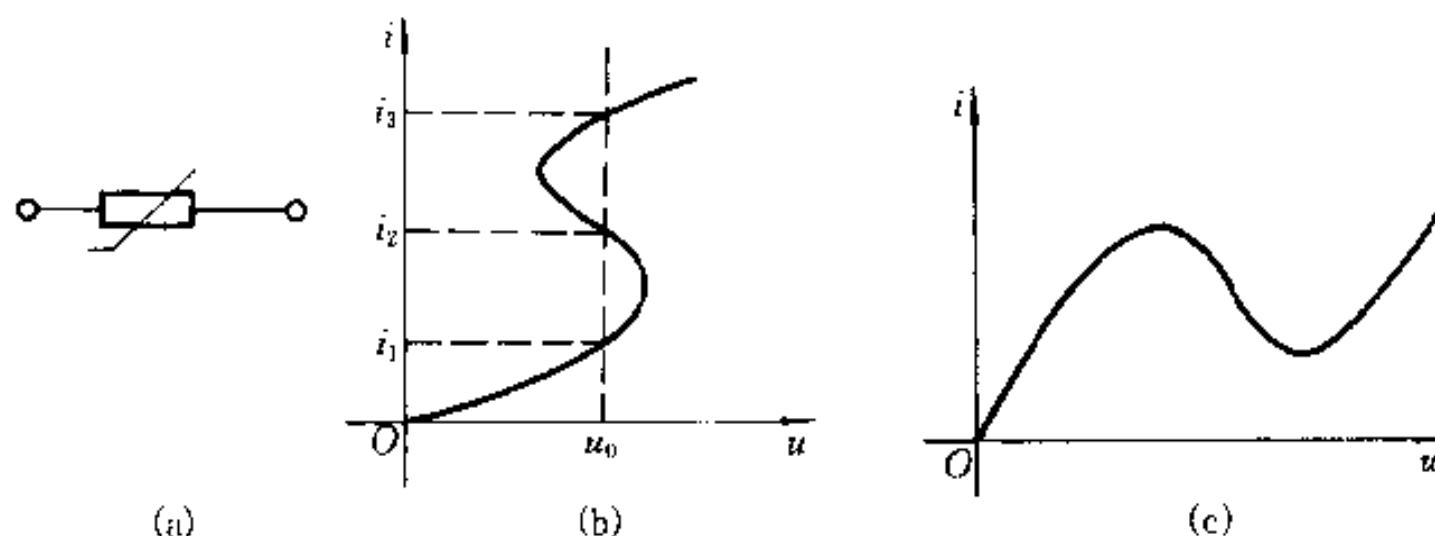


图 17-1

如果通过电阻的电流是其两端电压的单值函数,这种电阻称为电压控制型电阻,可用下列函数关系表示

$$i = g(u) \quad (17-2)$$

它的典型的伏安特性如图 17-1(c)所示。从伏安特性上可以看到:对于每一个电压值,有且只有一个电流值与之对应;反之,对于同一电流值,电压可能是多值的。隧道二极管就具有这样的伏安特性。

从图 17-1(b)、(c)中还可以看出,两种伏安特性曲线都具有一段下倾段,就是说在该段范围内电流随着电压的增长反而下降。

还有一种非线性电阻,它的伏安特性曲线是单调增长或单调下降的,它同时是电流控制又是电压控制的,称为单调型非线性电阻。 $p-n$ 结二极管就属这类电阻,它的伏安特性可用下式表示

$$i = I_s (e^{\frac{qU}{kT}} - 1) \quad (17-3)$$

式中 I_s 为一常数,称为反向饱和电流, q 是电子的电荷 (1.6×10^{-19} C), k 是玻尔兹曼常数 (1.38×10^{-23} J/K), T 为热力学温度。在 $T = 300$ K(室温下)时

$$\frac{q}{kT} = 40 \text{ (J/C)}^{-1} = 40 \text{ V}^{-1}$$

因此

$$i = I_s (e^{40u} - 1)$$

从式(17-3)可求得

$$u = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{1}{I_s} i + 1 \right)$$

也就是说,电压可用电流的单值函数表示。图 17-2 为它的伏安特性曲线。

还要指出的是线性电阻是双向性的,许多非线性电阻却不是双向性的,而是单向性的。就是说,当加在非线性电阻两端的电压方向不同时,流过它的电流完全不同,因而特性曲线不对称于原点。当然也有一些非线性电阻具有双向性。

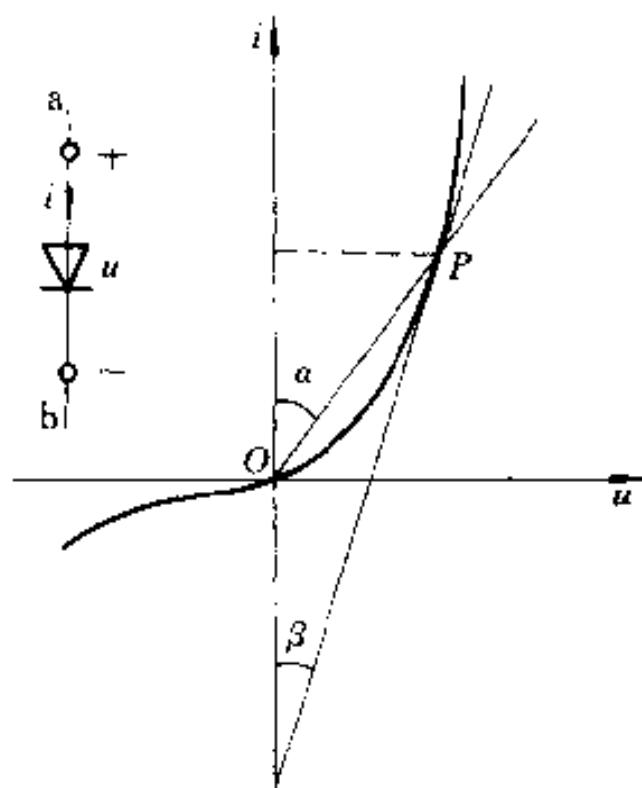


图 17-2 p-n 结二极管的伏安特性

对于非线性电阻元件有时引用静态电阻和动态电阻的概念。

非线性电阻元件在某一工作状况下(如图 17-2 中 P 点)的静态电阻 R 等于该点的电压值 u 与电流值 i 之比, 即

$$R = \frac{u}{i}$$

P 点的静态电阻正比于 $\tan \alpha$ 。

非线性电阻元件在某一工作状况下(如图 17-2 中 P 点)的动态电阻为电压对电流的导数, 即

$$R_d = \frac{du}{di}$$

图 17-2 中 P 点的动态电阻正比于 $\tan \beta$ 。对于图 17-1(b)、(c)所示伏安特性曲线的下倾段, 其动态电阻为负值, 因此具有“负电阻”性质。

例 17-1 设有一非线性电阻, 其伏安特性为 $u = f(i) = 100i + i^3$ 。

(1) 试分别求出 $i_1 = 2$ A、 $i_2 = 10$ A、 $i_3 = 10$ mA 时对应的电压 u_1 、 u_2 、 u_3 的值;

(2) 求 $i = 2 \sin(314 t)$ A 时对应的电压 u 的值;

(3) 设 $u_{12} = f(i_1 + i_2)$, 试问 u_{12} 是否等于 $(u_1 + u_2)$?

解 (1) $i_1 = 2$ A 时

$$u_1 = (100 \times 2 + 2^3) \text{ V} = 208 \text{ V}$$

$i_2 = 10$ A 时

$$u_2 = (100 \times 10 + 10^3) \text{ V} = 2000 \text{ V}$$

$i_3 = 10$ mA 时

$$u_3 = [100 \times 10 \times 10^{-3} + (10 \times 10^{-3})^3] \text{ V} = (1 + 10^{-6}) \text{ V}$$

从上述结果可以看出,如果把这个电阻作为 100Ω 的线性电阻,则电流 i 不同时,引起的误差不同,当电流比较小时,引起的误差不大。

(2) 当 $i = 2\sin(314t)$ A 时

$$\begin{aligned} u &= [100 \times 2\sin(314t) + 8\sin^3(314t)] \text{ V} \\ &= [206 \sin(314t) - 2\sin(942t)] \text{ V} \end{aligned}$$

电压 u 中含有 3 倍于电流频率的分量,由此可见,利用非线性电阻可以产生频率不同于输入频率的输出,这种作用称为倍频作用。

(3) 现假设 $u_{12} = f(i_1 + i_2)$, 则

$$\begin{aligned} u_{12} &= 100(i_1 + i_2) + (i_1 + i_2)^3 \\ &= 100(i_1 + i_2) + (i_1^3 + i_2^3) + (i_1 + i_2) \times 3i_1 i_2 \\ &= 100i_1 + i_1^3 + 100i_2 + i_2^3 + (i_1 + i_2) \times 3i_1 i_2 \\ &= u_1 + u_2 + 3i_1 i_2(i_1 + i_2) \end{aligned}$$

所以

$$u_{12} \neq u_1 + u_2$$

即叠加定理不适用非线性电阻。

当非线性电阻元件串联或并联时,只有所有电阻元件的控制类型相同,才有可能得出其等效电阻伏安特性的解析表达式。例如,图 17-3(a)所示为两个电流控制型的非线性电阻的串联,设它们的伏安特性分别为 $u_1 = f_1(i_1)$, $u_2 = f_2(i_2)$, 用 $u = f(i)$ 表示此串联组合的等效电阻的伏安特性。根据 KCL 和 KVL,有:

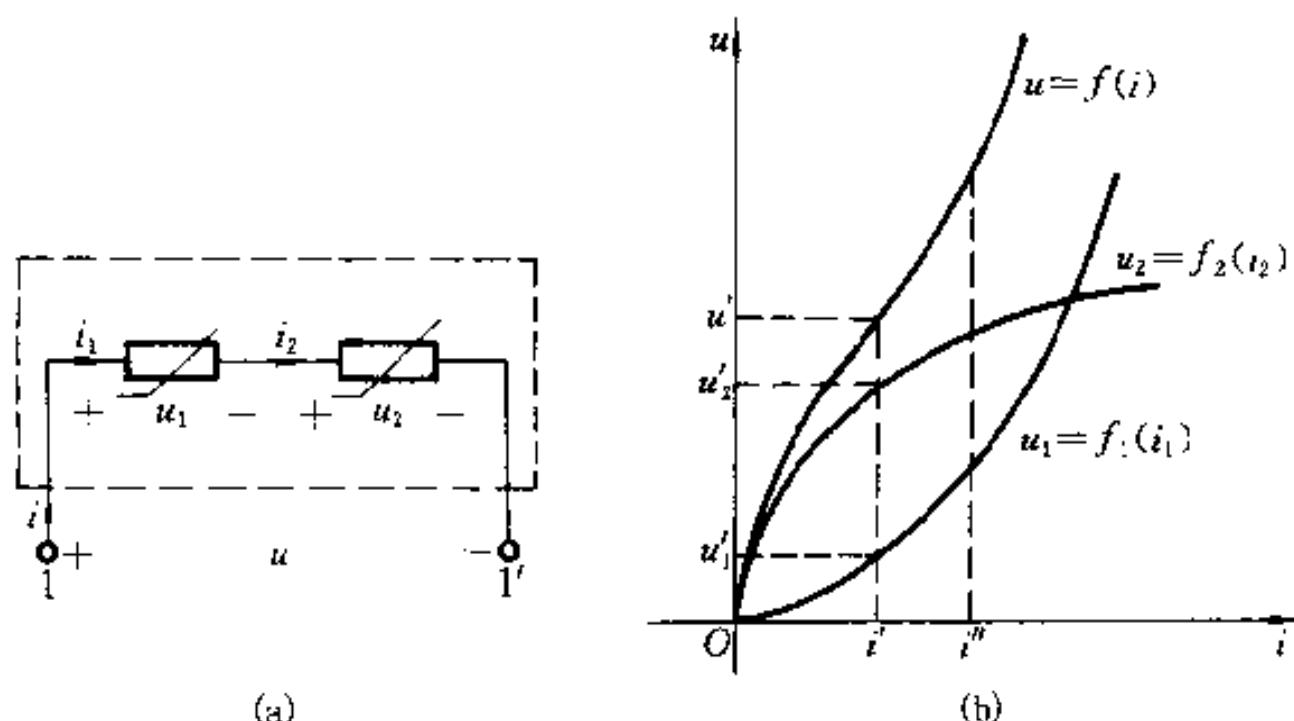


图 17-3 非线性电阻的串联

$$i = i_1 + i_2$$

$$u = u_1 + u_2$$

可以求得

$$\begin{aligned} u &= f_1(i_1) + f_2(i_2) \\ &= f(i) \end{aligned}$$

对所有 i , 有

$$f(i) = f_1(i_1) + f_2(i_2)$$

可以用图解的方法分析非线性电阻的串联电路。图 17-3(b)说明了这种方法。把在同一电流值下的 u_1 和 u_2 相加即可得出 u 。例如, 当 $i' = i'_1 = i'_2$ 时, 有 $u_1 = u'_1$, $u_2 = u'_2$, 而 $u' = u'_1 + u'_2$ 。取不同的 i 值, 可逐点求出等效伏安特性 $u = f(i)$, 如图 17-3(b)。

如果这两个非线性电阻中有一个是电压控制型, 在电流值的某范围内电压是多值的, 很难写出等效伏安特性 $u = f(i)$ 的解析表达式。但是用图解方法不难获得等效非线性电阻的伏安特性。

图 17-4(a)所示电路由线性电阻 R_0 和直流电压源 U_0 及一个非线性电阻 R 组成。线性电阻 R_0 和电压源 U_0 的串联组合可以是一个线性一端口的戴维宁等效电路。设非线性电阻的伏安特性如图 17-4(b)。

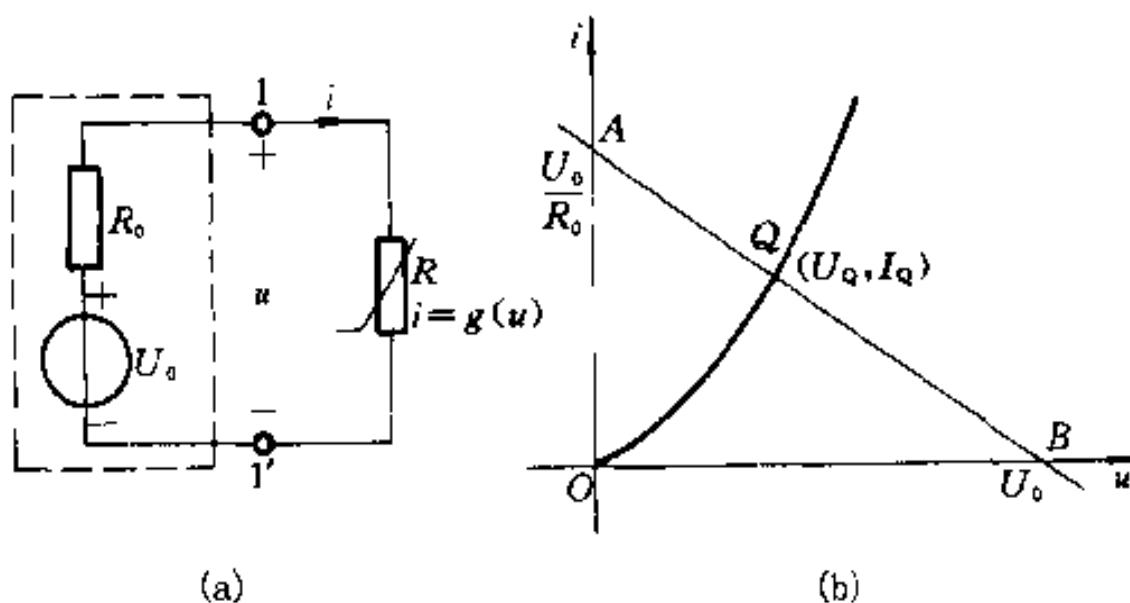


图 17-4 静态工作点

对此电路, 根据 KVL 和 KCL, 有:

$$\begin{aligned} U_0 &= R_0 i + u \\ u &= U_0 - R_0 i \end{aligned} \tag{17-4}$$

此方程可以看作是图 17-4(a)虚线方框所表示一端口的伏安特性。它在 $u-i$ 平面上是一条如图 17-4(b)中的直线 \overline{AB} 。设非线性电阻 R 的伏安特性可表示为

$$i = g(u) \tag{17-5}$$

直线 \overline{AB} 与此伏安特性的交点 (U_Q, I_Q) 同时满足式(17-4)和式(17-5),

所以有：

$$U_0 = R_0 I_Q + U_Q$$

$$I_Q = g(U_Q)$$

交点 $Q(U_Q, I_Q)$ 称为电路的静态工作点，它就是图 17-4(a) 所示电路的解。在电子电路中直流电压源往往表示偏置电压， R_0 表示负载，故直线 \overline{AB} 有时称为负载线。

图 17-4(b) 所示图解法有时称为“曲线相交法”。

§ 17-2 非线性电容和非线性电感

电容是一个二端储能元件，它两端电压与其电荷的关系是用函数或库伏特性表示的。如果一个电容元件的库伏特性是一条通过原点的直线，则此电容为线性电容，否则为非线性电容。

非线性电容的电荷、电压关系可用下式表示：

$$q = f(u)$$

$$u = h(q)$$

分别称为电压控制型电容和电荷控制型电容。非线性电容的电路符号和 $q - u$ 特性曲线如图 17-5 所示。

同非线性电阻类似，有时引用静态电容 C 和动态电容 C_d ，它们的定义分别如下：

$$C = \frac{q}{u}$$

$$C_d = \frac{dq}{du}$$

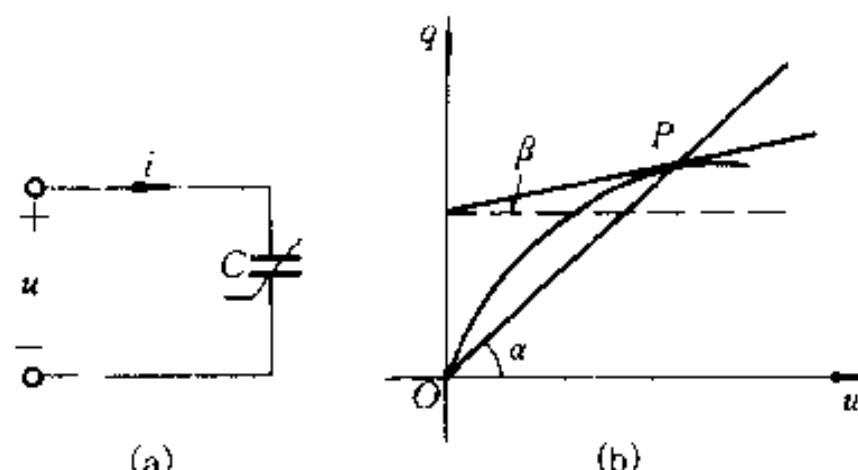


图 17-5 非线性电容及 $q - u$ 特性曲线

显然，在图 17-5(b) 中 P 点的静态电容正比于 $\tan \alpha$ ， P 点的动态电容正比于 $\tan \beta$ 。

例 17-2 图 17-6(a) 为一非线性电容 C 的调谐电路，其中直流电压 U_0

是作控制(偏置)用的,电容的 $q - u$ 关系为 $q = \frac{1}{2}ku^2$, 曲线如图 17-6(b)。试分析此电路的工作。

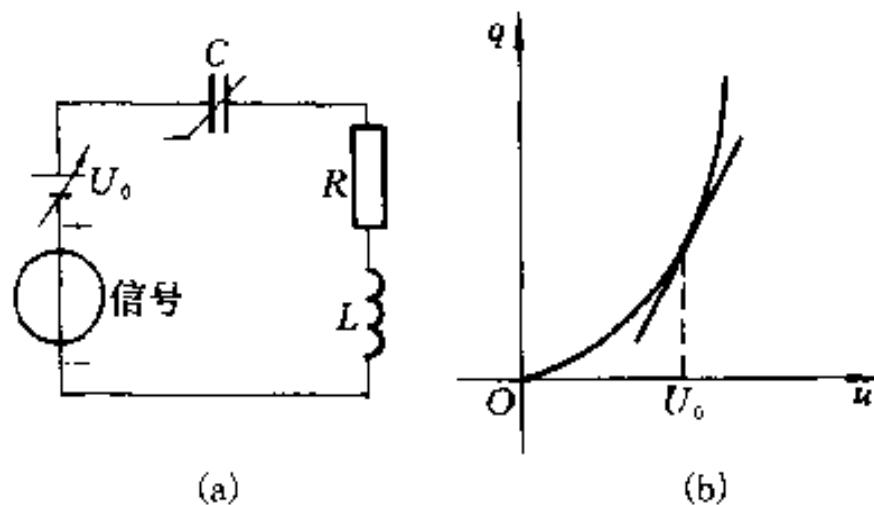


图 17-6 例 17-2 图

解 直流电压 U_0 是作为偏置用的, 改变 U_0 的大小, 就改变了工作点。如果信号电压比 U_0 小得很多, 则在一定的 U_0 下, 非线性电容可作为线性电容处理, 其电容值为 $C_d = \frac{dq}{du}$, 为该点的动态电容。按题意

$$C_d = \frac{dq}{du} = ku$$

对不同的偏置电压 U_0 , $C = ku$ 的值也就不同, 所以调节直流电压 U_0 就可以改变电容的大小而达到调谐的目的, 使电路对信号频率发生谐振。这样就代替了可变电容器的作用, 且减小了机械动作引起的噪声。

电感也是一个二端储能元件, 其特征是用磁通链与电流之间的函数关系或韦安特性表示的。如果电感元件的韦安特性不是一条通过原点的直线, 那么, 这种电感元件就是非线性电感元件。

非线性电感的电流与磁通链的一般关系式可写为:

$$i = h(\Psi)$$

$$\Psi = f(i)$$

前者称为磁通控制的电感, 后者称为电流控制的电感。其电路符号和 $\Psi - i$ 特性曲线如图 17-7 所示。

同样, 为了计算上的方便, 也引用静态电感 L 和动态电感 L_d , 它们分别定义如下:

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

$$L_d = \frac{d\Psi}{di}$$

显然, 图 17-7(b)中 P 点的静态电感正比于 $\tan \alpha$, 动态电感正比于 $\tan \beta$ 。

电感也可以是单调型的,即 $\Psi - i$ 曲线是单调增长或单调下降的。不过大多数实际非线性电感元件包含铁磁材料制成的心子,由于铁磁材料的磁滞现象,它的 $\Psi - i$ 特性具有回线形状,如图 17-8 所示。

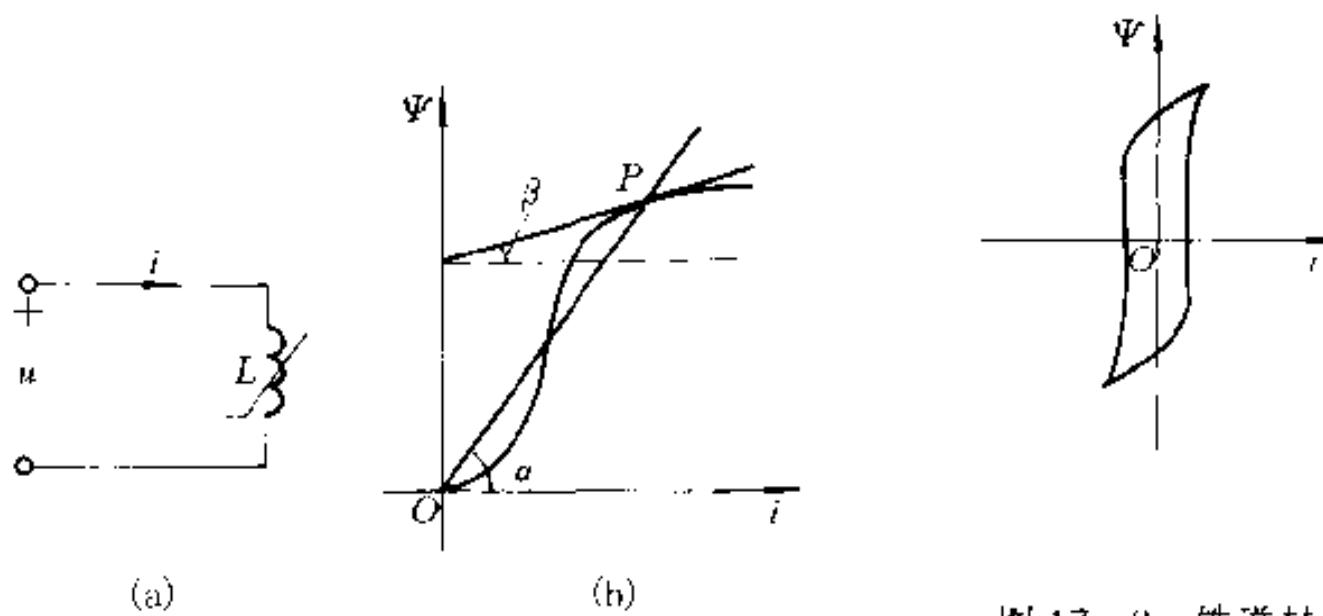
图 17-7 非线性电感及 $\Psi - i$ 曲线

图 17-8 铁磁材料的

 $\Psi - i$ 特性

§ 17-3 非线性电路的方程

由于基尔霍夫定律对于线性电路和非线性电路均适用,所以线性电路方程与非线性电路方程的差别仅由于元件特性的不同而引起。对于非线性电阻电路列出的方程是一组非线性代数方程,而对于含有非线性储能元件的电路列出的方程是一组非线性微分方程。下面通过两个实例说明上述概念。

例 17-2 电路如图 17-9 所示,其中非线性电阻的伏安特性关系为 $u_3 = 20i_3^{1/2}$ 。试列出电路方程。

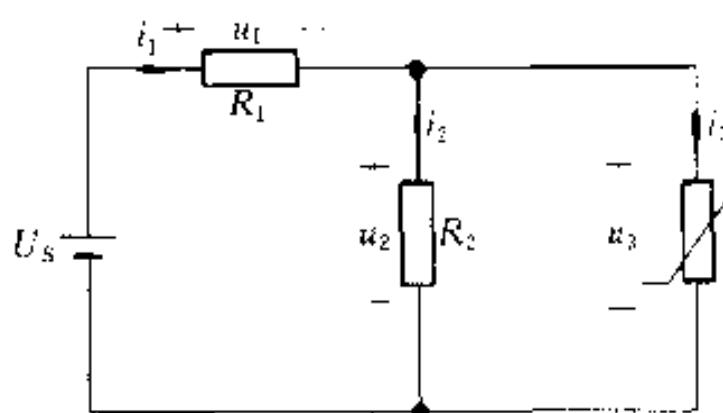


图 17-9 例 17-2 图

解 各电阻的 VCR 为:

$$u_1 = R_1 i_1$$

$$u_2 = R_2 i_2$$

$$u_3 = 20i_3^{1/2}$$

然后,根据 KCL 和 KVL,有:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$u_1 + u_2 = U_s$$

$$u_2 = u_3$$

从而可得到电路方程为:

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = U_s$$

$$R_2 i_2 = 20 i_3^{1/2}$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

或者合并为:

$$(R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_3 = U_s$$

$$R_2 i_1 - R_2 i_3 - 20 i_3^{1/2} = 0$$

如果电路中既有电压控制的电阻,又有电流控制的电阻,建立方程的过程就比较复杂。

例 17-3 图 17-10 所示电路为一个充电的线性电容向一个晶体二极管放电的电路。设二极管的伏安特性可以用幂级数形式近似的表示,且可写为 $i = au + bu^2$ 。 a 和 b 为正的常量。试列出电路方程。

解 设电容的初始电压为 $u_c(0_+)=U_0$, 电路方程为:

$$C \frac{du_c}{dt} = -i$$

$$u_c = u$$

所以有:

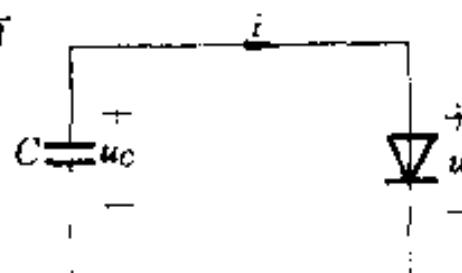


图 17-10 例 17-3 图

$$C \frac{du_c}{dt} = -au_c - bu_c^2$$

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{a}{C}u_c - \frac{b}{C}u_c^2$$

令 $\alpha = a/C$, $\beta = b/C$, 方程可写为

$$\frac{du_c}{dt} = -\alpha u_c - \beta u_c^2$$

其中 u_c 为状态变量,这是一个一阶非线性微分方程。

列写具有多个非线性储能元件电路的状态方程比线性电路更为复杂和困难。

对于非线性代数方程和非线性微分方程的解析解一般都是难以求出来的,但是可以利用计算机应用数值法来求解。

§ 17-4 小信号分析法

在电子电路中遇到的非线性电路,不仅有作为偏置电压的直流电源 U_0 作用,同时还有随时间变动的输入电压 $u_s(t)$ 作用。假设在任何时刻有 $U_0 \gg |u_s(t)|$,则把 $u_s(t)$ 称为小信号电压。分析这类电路,可以采用小信号分析法。

在图 17-11(a) 所示电路中,直流电压源 U_0 为偏置电压,电阻 R_0 为线性电阻,非线性电阻 R 是电压控制型的,其伏安特性 $i = g(u)$,图 17-11(b) 为其伏安特性曲线。小信号时变电压为 $u_s(t)$,且 $|u_s(t)| \ll U_0$ 总成立。

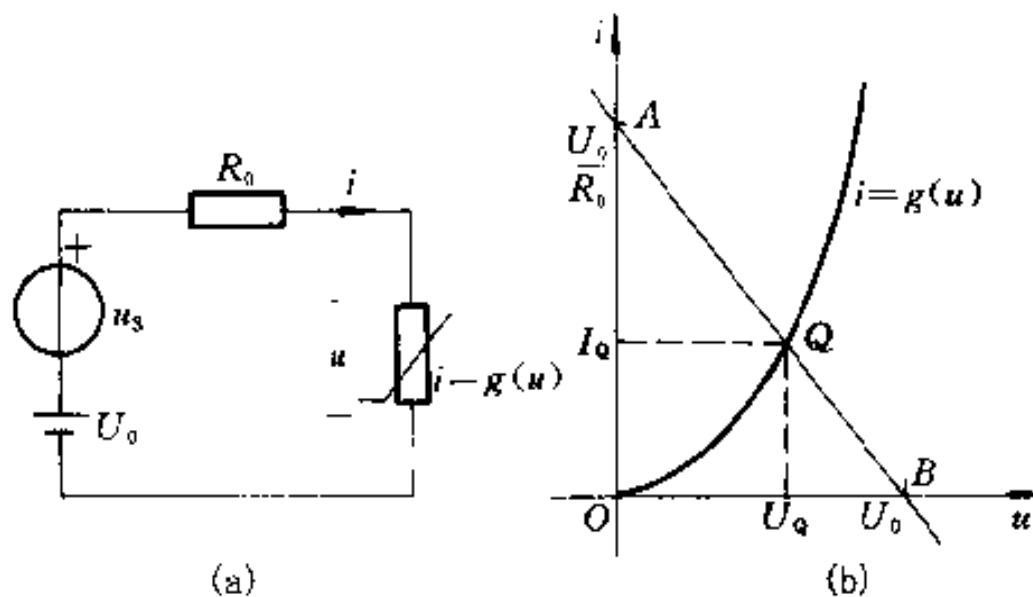


图 17-11 非线性电路的小信号分析

首先按照 KVL 列出电路方程

$$U_0 + u_s(t) = R_0 i(t) + u(t) \quad (17-6)$$

在上述方程中,当 $u_s(t) = 0$ 时,即只有直流电压源单独作用时,负载线 \overline{AB} 见图 17-11(b),它与特性曲线的交点 $Q(U_Q, I_Q)$ 即静态工作点。在 $|u_s(t)| \ll U_0$ 的条件下,电路的解 $u(t)、i(t)$ 必在工作点 (U_Q, I_Q) 附近,所以可以近似地把 $u(t)、i(t)$ 写为:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_Q + u_1(t) \\ i(t) &= I_Q + i_1(t) \end{aligned}$$

式中 $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$ 是由于信号 $u_s(t)$ 引起的偏差。在任何时刻 t , $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$ 相对 U_Q, I_Q 都是很小的量。

由于 $i = g(u)$,而 $u(t) = U_Q + u_1(t)$,所以:

$$\begin{aligned} i(t) &= g[U_Q + u_1(t)] \\ I_Q + i_1(t) &= g[U_Q + u_1(t)] \end{aligned}$$

由于 $u_1(t)$ 很小,可以将上式右方在 Q 点附近用泰勒级数展开,取级数前

面两项而略去一次项以上的高次项,上式可写为

$$I_Q + i_1(t) \approx g(U_Q) + \frac{dg}{du} \Big|_{U_Q} u_1(t)$$

由于 $I_Q = g(U_Q)$,故从上式得

$$i_1(t) \approx \frac{dg}{du} \Big|_{U_Q} u_1(t)$$

而

$$\frac{dg}{du} \Big|_{U_Q} = G_d = \frac{1}{R_d}$$

为非线性电阻在工作点(U_Q, I_Q)处的动态电导,所以:

$$i_1(t) = G_d u_1(t)$$

$$u_1(t) = R_d i_1(t)$$

由于 $G_d = \frac{1}{R_d}$ 在工作点(U_Q, I_Q)处是一个常量,所以从上式可以看出,由小信号

电压 $u_s(t)$ 产生的电压 $u_1(t)$ 和电流 $i_1(t)$ 之间的关系是线性的。这样,式(17-6)可改写为

$$U_0 + u_s(t) = R_0 [I_Q + i_1(t)] + U_Q + u_1(t)$$

但是 $U_0 = R_0 I_Q + U_Q$,故得

$$u_s(t) = R_0 i_1(t) + u_1(t)$$

又因为在工作点处有 $u_1(t) = R_d i_1(t)$,代入上式,最后得

$$u_s(t) = R_0 i_1(t) + R_d i_1(t)$$

上式是一个线性代数方程,由此可以作出给定非线

性电阻在工作点(U_Q, I_Q)处的小信号等效电路如

图 17-12 所示。于是,求得:

$$i_1(t) = \frac{u_s(t)}{R_0 + R_d}$$

$$u_1(t) = R_d i_1(t) = \frac{R_d u_s(t)}{R_0 + R_d}$$

例 17-4 图 17-13(a)所示电路中,直流电流源 $I_0 = 10 \text{ A}$, $R_0 = 1/3 \Omega$,非线性电阻为电压控制型,其伏安特性如图 17-13(b)所示,用函数表示为

$$i = g(u) = \begin{cases} u^2 & (u > 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

小信号电流源 $i_s(t) = 0.5 \cos t \text{ A}$ 。试求工作点和在工作点处由小信号产生的

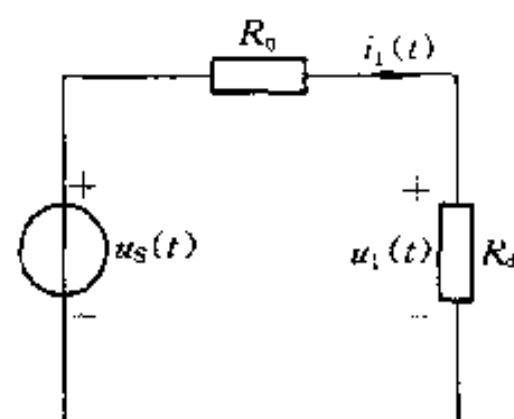


图 17-12 小信号等效电路

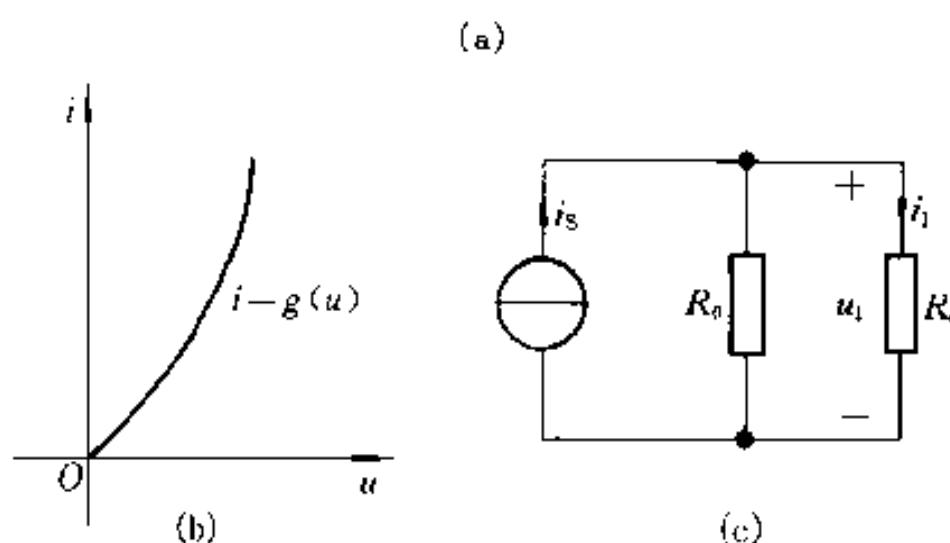
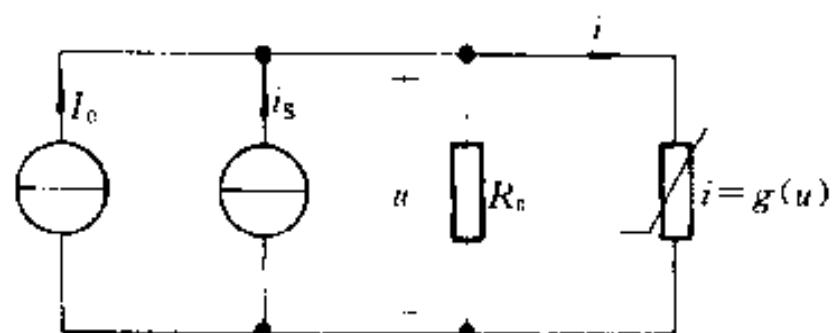


图 17-13 例 17-4 图

电压和电流。

解 应用 KCL, 有

$$\frac{1}{R_0}u + i = I_0 + i_s$$

或

$$3u + g(u) = 10 + 0.5\cos t$$

令 $i_s = 0$, 由上式得

$$3u + g(u) = 10$$

把 $g(u) = u^2$ ($u > 0$) 代入上式并求解所得方程, 可得对应工作点的电压 $U_Q = 2$ V, $I_Q = 4$ A。工作点处的动态电导为

$$G_d = \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_{U_Q} = \left. \frac{d}{du}(u^2) \right|_{U_Q} = 2u \Big|_{U_Q=2} = 4 \text{ S}$$

作出小信号等效电路如图 17-13(c), 从而求出非线性电阻的小信号电压和电流为:

$$u_1 = \frac{0.5}{7} \cos t = 0.0714 \cos t \text{ V}$$

$$i_1 = \frac{2}{7} \cos t = 0.286 \cos t \text{ A}$$

电路的全解, 亦即非线性电阻的电压、电流为:

$$u = U_Q + u_1 = (2 + 0.0714 \cos t) \text{ V}$$

$$i = I_Q + i_1 = (4 + 0.286 \cos t) \text{ A}$$

§ 17-5 分段线性化方法

分段线性化方法(又称折线法)是研究非线性电路的一种有效方法,它的特点在于能把非线性的求解过程分成几个线性区段,就每线性区段来说,又可以应用线性电路的计算方法。

在分段线性化法中,常引用理想二极管模型,它的特性是,在电压为正向时,二极管完全导通,它相当于短路;在电压反向时,二极管完全不导通,电流为零,它相当于开路,其伏安特性如图 17-14 所示。一个实际二极管的模型可由理想二极管和其他元件组成。例如用理想二极管与线性电阻组成实际二极管的模型,其伏安特性可以用图 17-15 的折线 \overline{BOA} 表示,当这个二极管加正向电压时,它相当于一个线性电阻,其伏安特性用直线 \overline{OA} 表示;当电压反向时,二极管完全不导通,其伏安特性用 \overline{BO} 表示。

例 17-5 (1) 图 17-16(a)所示电路由线性电阻 R ,理想二极管和直流电压源串联组成。电阻 R 的伏安特性如图(b)所示。画出此串联电路的伏安特性。(2) 把图 17-16(a)中的电阻 R 和二极管与直流电流源并联,如图 17-16(d),画出此并联电路的伏安特性。

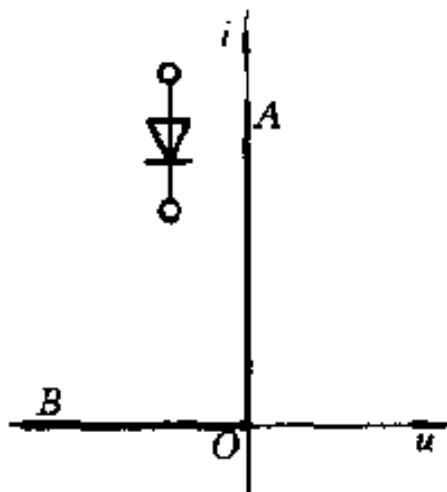


图 17-14 理想二极管

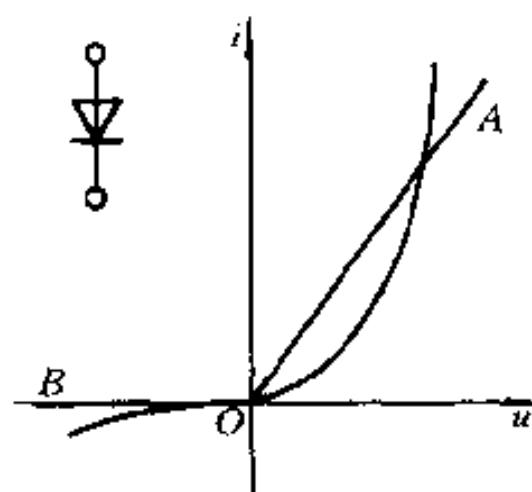


图 17-15 p-n 结二极管伏安特性

解 (1) 各元件的伏安特性示于图 17-16(b)中, 电路方程为

$$u = Ri + u_d + U_0 \quad i > 0$$

需求解的伏安特性可用图解法求得, 如图 17-16(c)的折线 \overline{ABC} (当 $u < U_0$ 时, $i = 0$)。

(2) 电路方程为

$$i = \frac{u}{R} + I_0 \quad u > 0$$

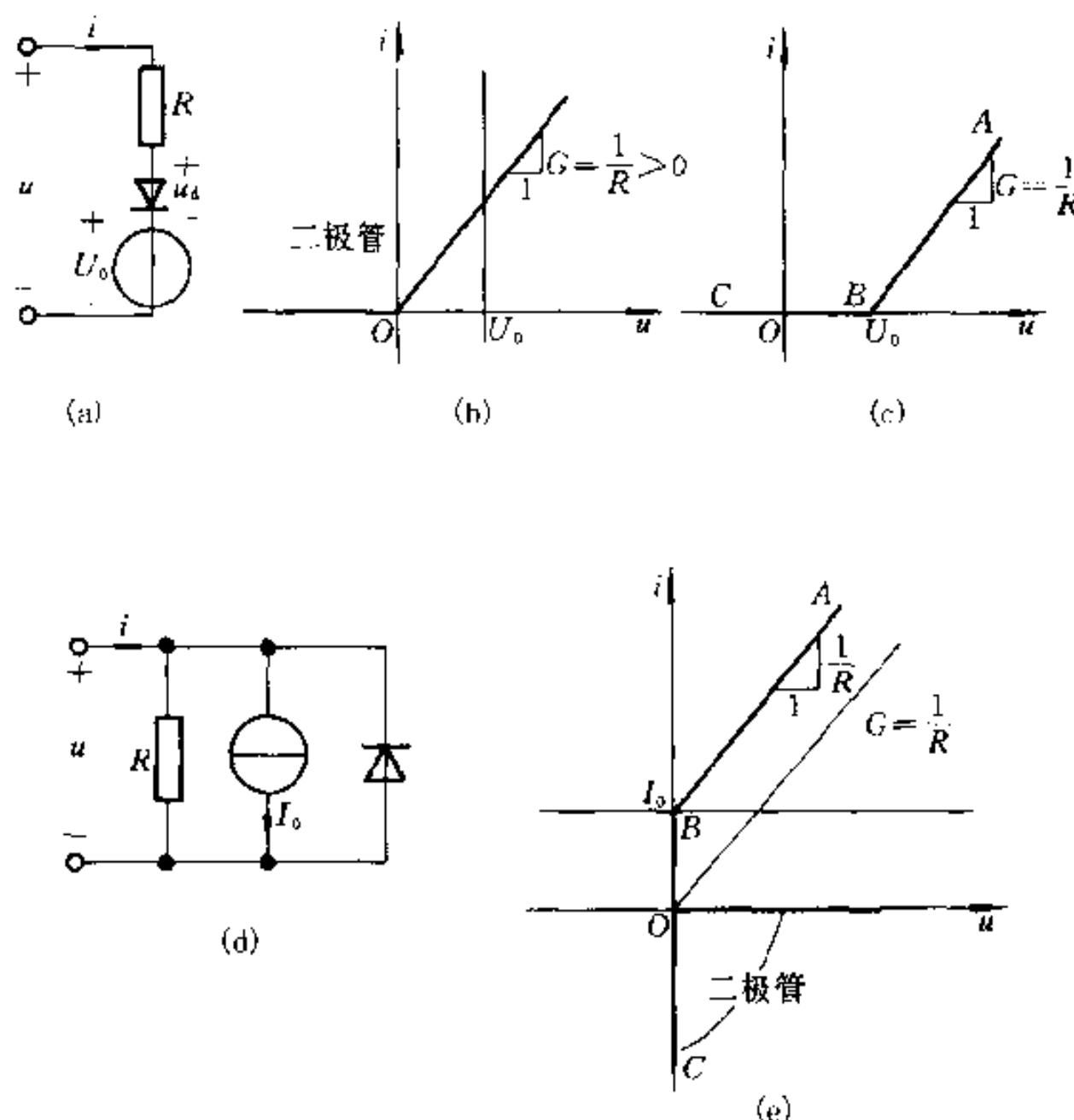


图 17-16 例 17-5 图

当 $u < 0$ 时,二极管完全导通,电路被短路。当 $u > 0$ 时,用图解法求得的伏安特性,如图 17-16(e)中的折线 \overline{ABO} 。

图 17-17(a)中虚线所示为隧道二极管的伏安特性,此特性可用图中 3 段直线粗略表示。而这 3 段直线可分解为如图 17-17(b)中 3 个伏安特性,即直线 \overline{AOB} ,折线 \overline{EUC} 和折线 $\overline{EU_2D}$,这 3 条曲线分别代表 3 个非线性电阻的伏安特性,因此图(a)所示近似折线是这 3 个并联电阻的等效伏安特性,其静态工作点可以用图解法确定。

不过应当注意,如果静态工作点位于图 17-18(a)所示位置,表示该点确实是工作点,如果负载线与分段线性的伏安特性交点位于图 17-18(b)所示位置,则只有 Q_3 为实际的工作点,而 Q_1 、 Q_2 并不代表实际的工作点。

图 17-19(a)所示一阶电路中电容 C 是线性元件,N是非线性电阻一端口,它的驱动点特性可以用分段线性表示如图(b)。这种电路称为分段线性 RC 电路。若该一端口与线性电感连接,则称为分段线性 RL 电路。这两种电路的分析可采取分段线性化的方法。

图 17-19(a)的电路方程为

$$C \frac{du_C}{dt} = i_C = -i$$

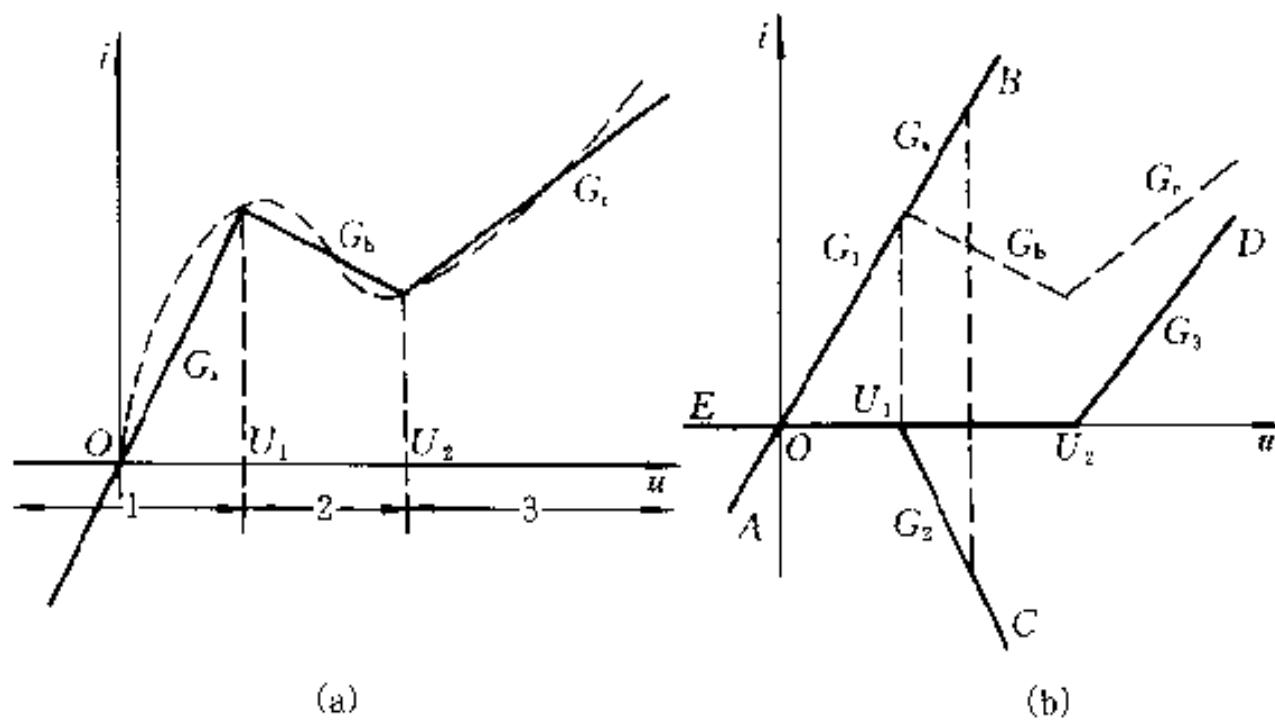


图 17-17 分段线性化特性的合成

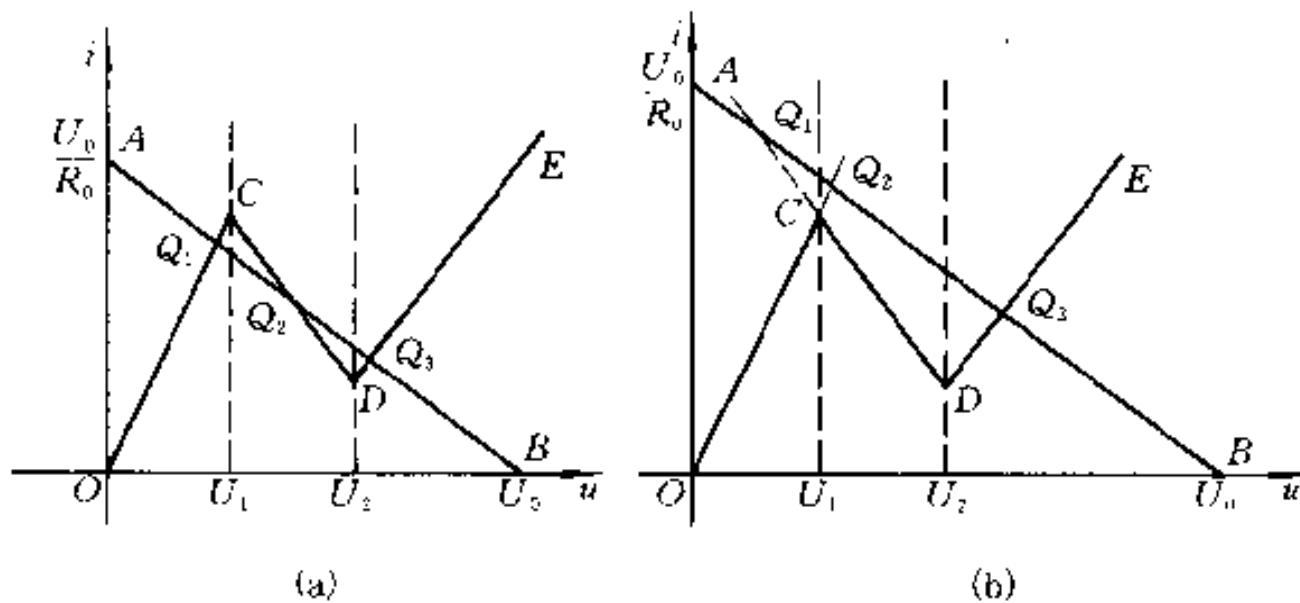


图 17-18 隧道二极管的静态工作点

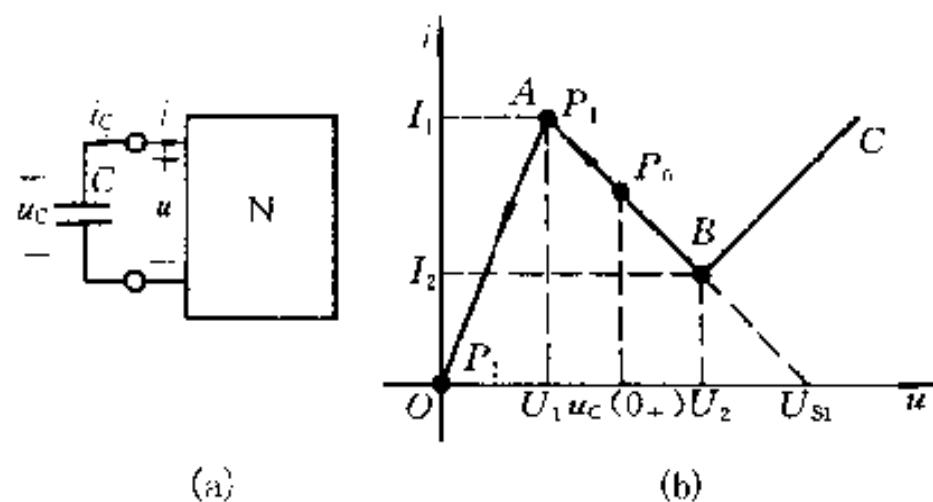


图 17-19 分段线性 RC 电路

而 $u = u_C$, 故有

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{du}{dt} = -\frac{i}{C} \quad (17-7)$$

设方程的解用 $u-i$ 平面上的点 (u, i) 表示, 并称之为动态点, 动态点 (u, i) 随时间将沿着 N 的驱动点特性(端口伏安特性)移动, 移动的方向由式(17-7)确定。动态点移动的路径

(包括其方向)称为动态路径。

设电路的初始状态为 $u_C(0_+)$, 动态路径的起始点是图中的 P_0 点, 根据式(17-7)可见, 当 $i > 0$ 时, 有

$$\frac{du}{dt} = -\frac{i}{C} < 0$$

所以电流为正值时, 电压总是减小的, 当 $i > 0$ 时, 从 P_0 点起始的动态路径将沿着 $u - i$ 曲线从 P_0 点到 P_1 , 然后到 P_2 。此动态路径的终点是 P_2 , 因为此时有 $i = 0$, 从而 $\frac{du}{dt} = 0$, 即电容电压将不再变化。整个过程电容始终处于放电过程, 但从 P_0 到 P_1 电流在增长, 而当电容电压达到 U_1 (对应 P_1) 后, 就逐渐减小直到零为止。

当动态点从 P_0 移到 P_1 时, 一端口 N 的伏安特性是用直线段 \overline{AB} 表示的, 所以 N 可用图 17-20(a) 的等效电路代替, 其中直流电压源的电压等于 U_{S1} [见图 17-19(b)], 而线性电阻 R_1 可按下式计算

$$R_1 = \frac{U_1 - U_2}{I_1 - I_2}$$

所以 $R_1 < 0$, 它是一个负电阻。根据图 17-20(a), 按 $u_C(0_+)$ 以及 $\tau_1 = R_1 C$, 可求得该区段的电容电压为

$$u_C = [u_C(0_+) - U_{S1}] e^{-\frac{t}{\tau_1}} + U_{S1}$$

由于 $R_1 < 0$, 故 τ_1 为负值。假想 $t < 0$, 则 u_C 将随时间的“负”增长而增长, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 将达到 U_{S1} , 见图 17-20(c) 中的虚线。但 $[u_C(0_+) - U_{S1}]$ 为负值, 所以 u_C 中有一个随时间增长而增长的负分量; 事实上, u_C 随时间的增长而下降, 当 u_C 达到 U_1 时 (对应的时间为 t_1) 即进入另一线性段。

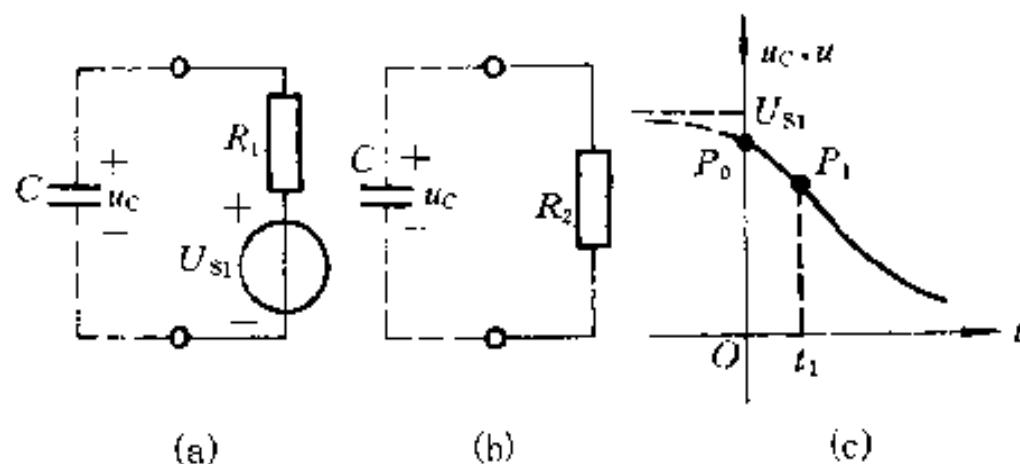


图 17-20 计算图 17-19 电路的等效电路

从 P_1 到 P_2 区段, 一端口 N 相当于一个线性电阻 R_2 , 而 $R_2 = U_1/I_1$, 对应的电容电压可根据图 17-20(b) 计算

$$U = U_1 e^{-(t-t_1)/\tau_2} \quad t > t_1$$

其中 $\tau_2 = R_2 C$ 。

电容电压随时间变化的曲线示于图 17-20(c)。

图 17-21(a) 所示电路中虚线为一端口 N, 它的驱动点特性示于图 17-21(b) 中。由于

$$\frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt} = -\frac{i}{C}$$

所以,在任何时刻 t ,当 $i < 0$ 时有 $\frac{du}{dt} > 0$,当 $i > 0$ 时有 $\frac{du}{dt} < 0$ 。因此,在 $u - i$ 平面上的上半平面,动态点应当从初始位置沿着动态路径向左移动,在下半平面,则应当向右移动,如图 17-21(b)中的箭头所示。假设动态点 (u, i) 的初始位置位于 Q_2 ,随时间的增长,动态点应当向 A 点移动,但到达 A 点后它不能再沿着 AB 段继续移动,因为方向不对。同样,如果初始点位于 Q_1 ,则到达 A 点后也不能再继续前进,对转折点 C 也有同样情况,因为表示动态路径方向的两个箭头都是指向 C 的。对应 A 点或 C 点的电流为非零值,因此它们均不对应最终的平衡点或稳态,这是因为 du/dt 在此时不等于零。

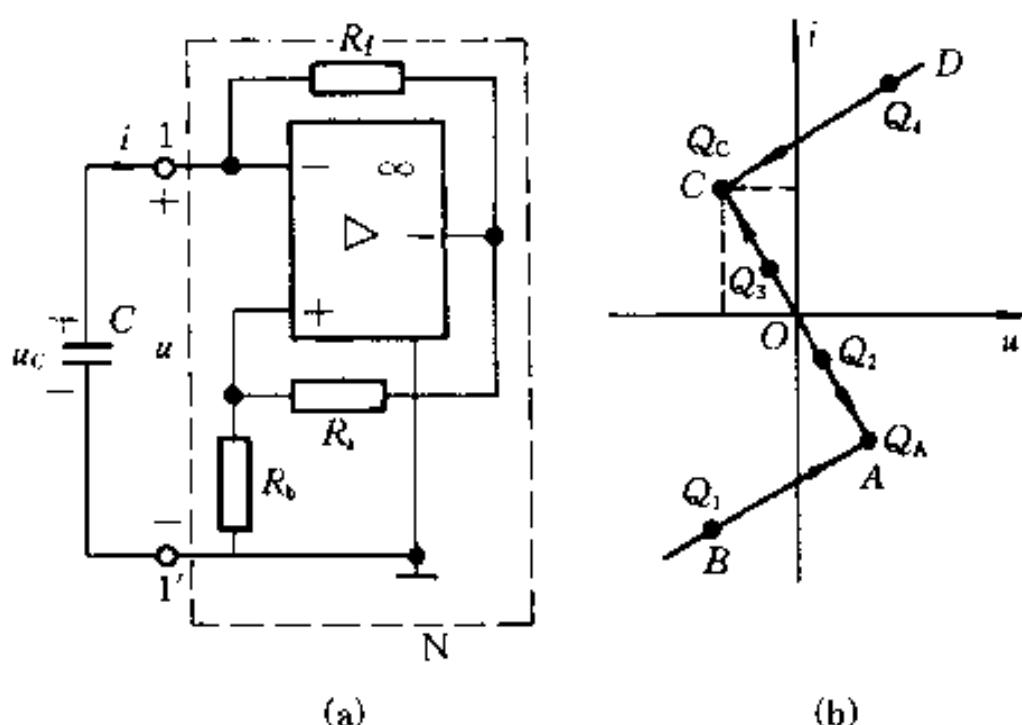


图 17-21 分段线性 RC 电路

为了解决这个问题,必须计及电路中存在的微小的串联电感,并按二阶电路分析。在这种情况下,动态路径将如图 17-22(a)所示,图中假设 P_0 表示初始点。当动态点到达 P_1 (对应转折点 A)后,它将从 P_1 移到 P_2 ,当到达 P_3 (对应转折点 C)后,它将从 P_3 移到 P_4 ,如图 17-22(a)的箭头所示。从 P_1 到 P_2 (或从 P_3 到 P_4)所需时间随电感 L 值的减小而减小。当 L 趋近于零,可以认为从 P_1 到 P_2 (或从 P_3 到 P_4)所需时间也趋近于零,或者说,动态点将瞬时从 P_1 (P_3)“跳跃”到 P_2 (P_4),发生跃变的是电流值。这个电路的动态路径可以用图 17-22(b)描述。这里除从初始点 P_0 到 P_1 这个过渡过程阶段,动态路径是闭合的。这意味着电路中的电压或电流从初始状态开始经短暂停留后,就将周期性变化。这个电路能产生周期变化的电压和电流,所以它具有振荡器的作用。这种振荡称为张弛振荡,因为产生的电压或电流波形与正弦波相差甚大。振荡周期等于从 P_2 到 P_3 的时间和从 P_4 到 P_1 的时间之和。

* § 17-6 工作在非线性范围的运算放大器

本书前面章节把运放的工作范围局限在线性区域,即认为输出电压 u_o 与 u_s 成正比,而且

$$-U_{sat} < u_o < U_{sat}$$

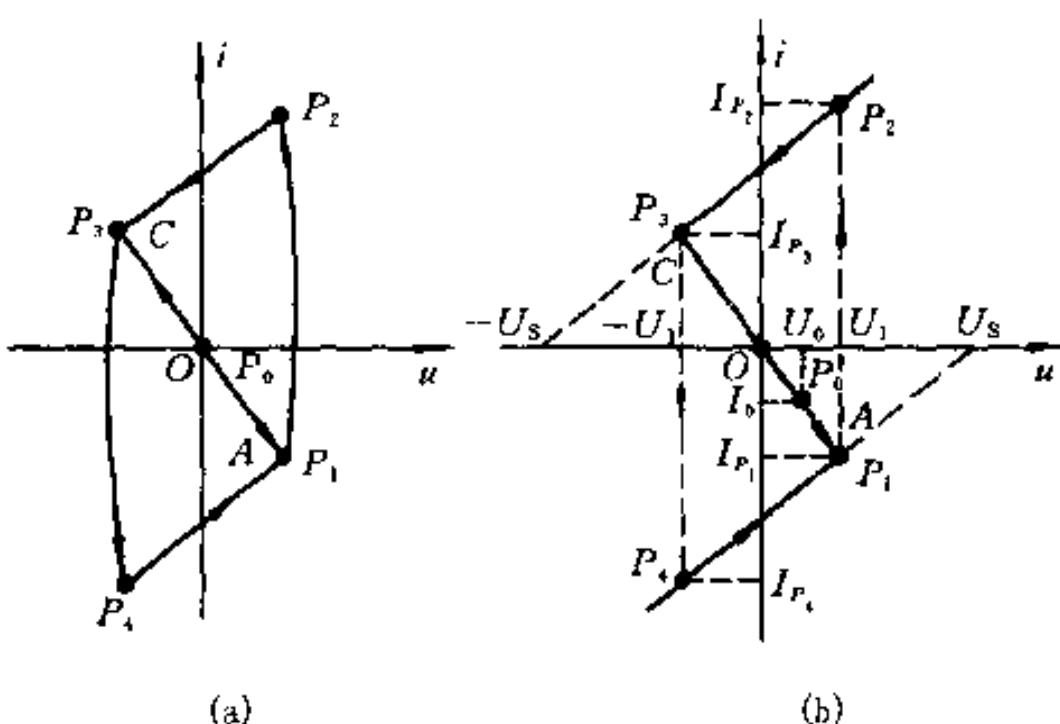


图 17-22 动态路径和跳跃现象

$\pm U_{\text{sat}}$ 为运放的饱和值。

如果设运放的放大倍数 A 为无限大，并考虑到输出电压达到饱和值，则运放的输出电压 u_o 与差动电压 u_d 之间的关系可用图 17-23 所示特性曲线表示。这时可以用以下表达式描述运放的工作：

$$u_o = U_{sat} \frac{|u_d|}{u_d}, \quad u_d \neq 0$$

$$\mu_d = 0, \quad -U_{\text{av}} \leq \mu_e \leq U_{\text{av}}$$

运放两个输入端的电流 i_+ 和 i_- 仍假设为零。

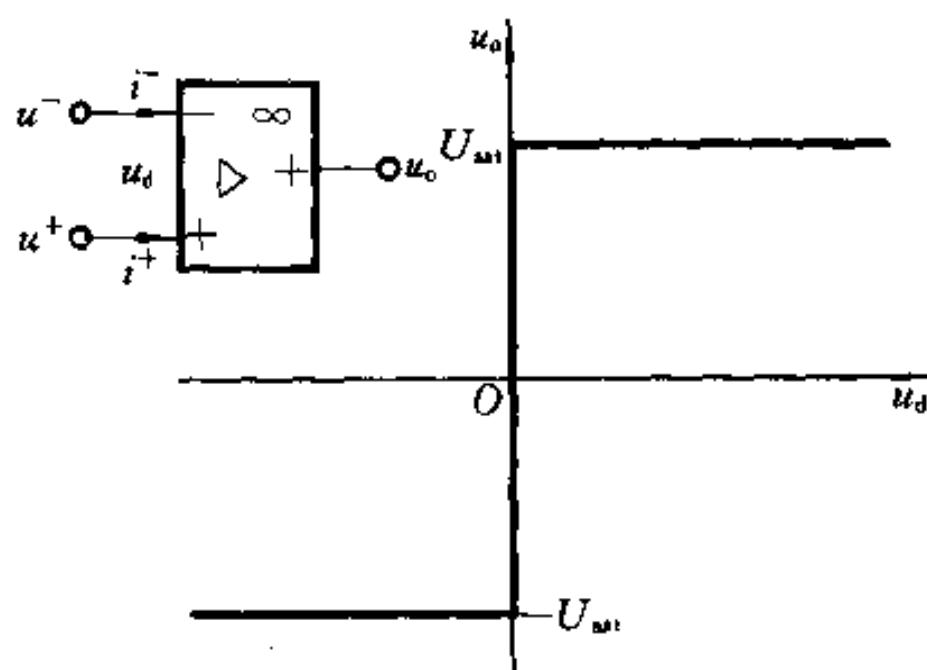


图 17-23 理想运放的饱和 $u_d - u_o$ 特性

这里把电压的关系分为 3 个区域考虑：

$$\text{线性区} \quad u_d = 0, \quad -U_{mt} \leq u_o \leq U_{mt}$$

正饱和区 $\mu_a = U_{st}$

$$u_+ \equiv (u^+ - u^-) \geq 0$$

负饱和区 $\mu = -U_0$

$$u_d - (u^+ - u^-) < 0$$

可见在线性区 u_d 被强制为零,但 u_v 不是定值,它的大小取决于外电路。在正、负饱和区, u_v 不再等于零,但 u_v 则是定值。当运放在正饱和区或负饱和区工作时,它是在非线性区工作。

图 17-24 所示电路正是图 17-21(a)所示一端口 N 的内部电路,其中运放通过 R_f 实现负反馈,通过 R_a 和 R_b 实现正反馈。如果运放工作在饱和区的情况,这个电路的输入电阻在一定范围内具有负电阻的性质。现分析如下:

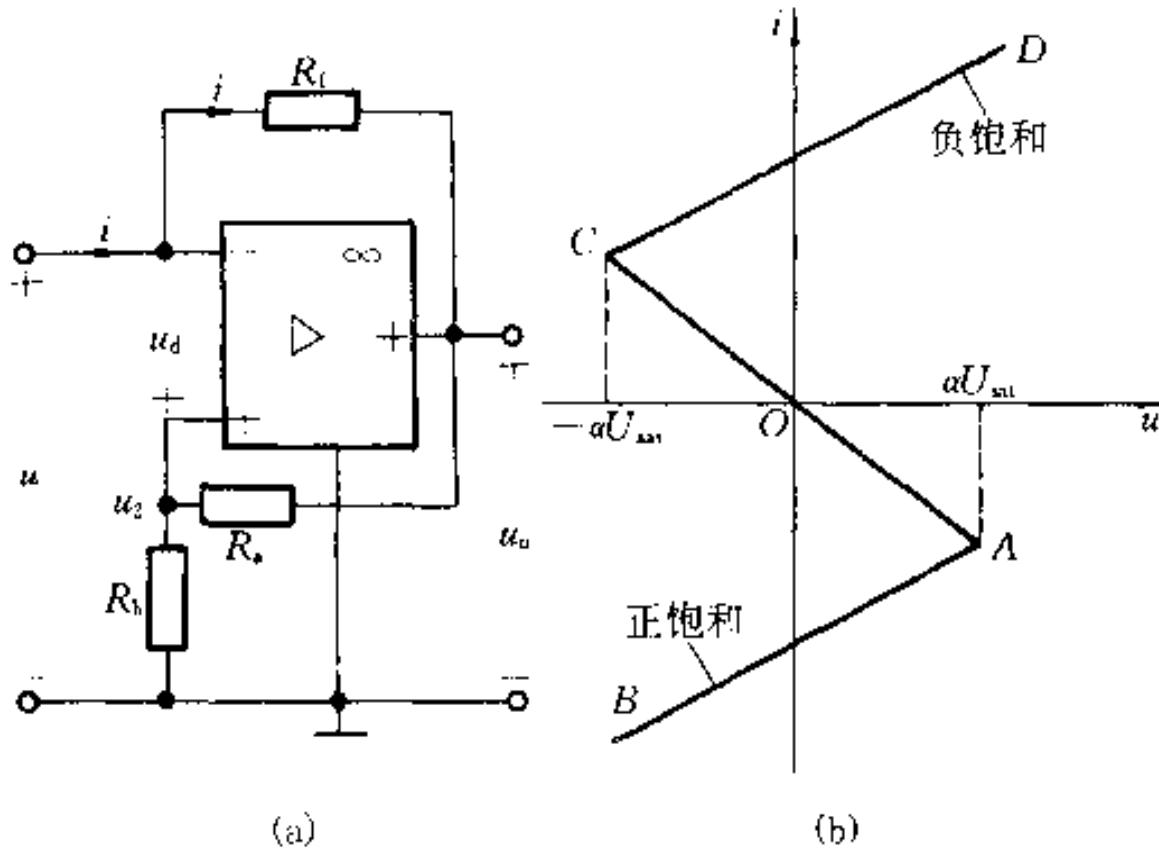


图 17-24 负电阻的实现

在线性区,有 $u = u_2$,而按图 17-24(a),可以得出

$$u_2 = \frac{R_b}{R_a + R_b} u_v = \alpha u_v$$

其中 $\alpha = \frac{R_b}{R_a + R_b}$,而 $u_v = \frac{1}{\alpha} u_c$

按 KVL,有

$$u = R_f i + u_v$$

把 $u_v = u/\alpha$ 代入,得

$$i = -\left(\frac{R_a}{R_b}\right)\left(\frac{1}{R_f}\right)u$$

上式可以用图 17-24(b)的直线段 \overline{AOC} 表示。对应此线段的 2 个端点 A 和 C 的电压值可以求得如下。在线性区,由于 $u_v = \frac{1}{\alpha} u$,故

$$-\alpha U_{sat} < u < \alpha U_{sat}$$

线段 \overline{AOC} 的斜率是负的,且正比于 $-\frac{R_a}{R_b} \cdot \frac{1}{R_f}$ 。

在正饱和区, $u_v = U_{sat}$,按 KVL,有:

$$\begin{aligned} u &= R_f i + U_{\text{sat}} \\ i &= \frac{1}{R_f}(u - U_{\text{sat}}) \end{aligned} \quad (17-8)$$

为了确定电压 u 的范围, 利用 KVL, 得:

$$\begin{aligned} u_d &= u_a \quad u = \frac{R_b}{R_a + R_b} U_{\text{sat}} - u \\ u_d &= \alpha U_{\text{sat}} - u \end{aligned}$$

由于 $u_d > 0$, 故 $u < \alpha U_{\text{sat}}$ 。这与式(17-8)确定了图 17-24(b)中的直线段 \overline{AB} , 它表示在正饱和区的伏安特性, 其斜率正比于 $1/R_f$ 。

在负饱和区, $u_d = -U_{\text{sat}}$, 有

$$u = R_f i - U_{\text{sat}}$$

由于 $u_d < 0$, 故 $u > -\alpha U_{\text{sat}}$ 。图 17-24(b)中的直线段 \overline{CD} 表示在负饱和区的伏安特性, 其斜率正比于 $1/R_f$ 。

所以这个电路可以实现一个折线或分段线性电阻, 此电阻在运放线性工作范围内具有负电阻性质, 其值等于 $-R_b R_f / R_a$ 。

* § 17-7 二阶非线性电路的状态平面

二阶非线性电路方程的一般形式可写为

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t) \end{array} \right\} \quad (17-9)$$

其中 $x_1(t), x_2(t)$ 为状态变量, 式(17-9)为状态方程。

如果式(17-9)右方的函数不随时间 t 而变, 即自变量 t 除了在 $\frac{dx}{dt}$ 中以隐含形式出现外, 不以任何显含形式出现, 即有

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{array} \right\} \quad (17-10)$$

方程(17-10)称为自治方程, 方程(17-9)则称为非自治方程。在零输入或在直流激励下的非线性二阶电路的方程是自治方程。

一般说来, 求解非线性微分方程(17-9)或(17-10)是比较困难的, 通常无闭式解。

把自治方程(17-10)中的状态变量 x_1, x_2 看作是平面上的坐标点, 这种平面就称为状态平面。状态平面上每一坐标点 (x_1, x_2) 随着时间变化将在平面上描绘出某些曲线。设给定的初始状态(条件)为 $x_1(0), x_2(0)$, 对所有 $t \geq 0$, 方程(17-10)的解 $[x_1(t), x_2(t)]$ 在平面上描绘出的以 $[x_1(0), x_2(0)]$ 为起点的轨迹称为该状态方程的一条轨道或相轨道(又称相迹)。对不同的初始条件, 可以在状态平面上描绘出一族相轨道, 这族相轨道称为该自治方程

的相图。坐标点 (x_1, x_2) 称为相点。从相图可以定性地了解该方程描述的电路中工作状态的整个变化情况，而不必直接求解非线性微分方程。可以利用数值法通过电子计算机把相轨道描绘出来。相轨道还可以通过实验的方法观察，例如只要把 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 作为信号电压，把它们加到示波器的水平输入和垂直输入，就可以显示出相轨道。

下面用状态平面讨论充电的电容对电阻和电感的串联组合放电的过程。为简化起见，设电阻 R 、电感 L 和电容 C 都是线性的（见图 17-25）。

电路的方程为

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

令 $x_1 = i$, $x_2 = \frac{di}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$, 上式可改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega_0^2 x_1 - 2\delta x_2 \end{aligned} \right\} \quad (17-11)$$

式中 $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ 。

当 $\delta^2 < \omega_0^2$ 或 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，电路中的放电过程为衰减振荡性质，相应的相轨道^①将如图 17-26(a)所示。对应不同的初始条件，相轨道将是一族螺旋线，并以原点为其渐近点。原点表示 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ，是方程(17-11)的所谓“平衡点”。

当 $\delta^2 > \omega_0^2$ 或 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，电路中产生的非周期衰减过程，相对应的相轨道将如图 17-26(b)所示一族变形的抛物线，原点是它们的渐近点，相点的运动方向是趋向原点的。

当 $\delta = 0$ ，或 $R = 0$ 时，式(17-11)变为

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega_0^2 \frac{x_1}{x_2}$$

经过积分后得

$$\frac{x_1^2}{K^2} + \frac{x_2^2}{K^2 \omega_0^2} = 1$$

式中 K 是与初始条件有关的积分常数。相轨道是具有水平轴为 K ，垂直半轴为 $\omega_0 K$ 的一族椭圆，如图 17-26(c)所示，它对应于不衰减的正弦振荡。振荡的振幅与初始条件有关。

这个例子说明相轨道形状的研究可以对定性了解全部解提供有用的信息。

在某些非线性自治电路中会建立起不衰减的周期性振荡过程，此时所对应的相轨道将是一条称为极限环的孤立闭合曲线（见下节）。

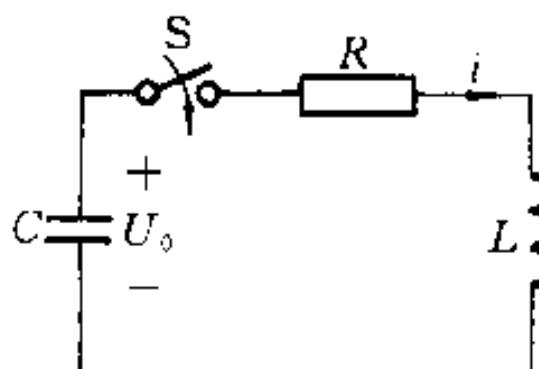


图 17-25 研究相图用的电路

^① 对式(17-11)直接积分，可以求得相轨道的方程，但需要一定的数学运算。

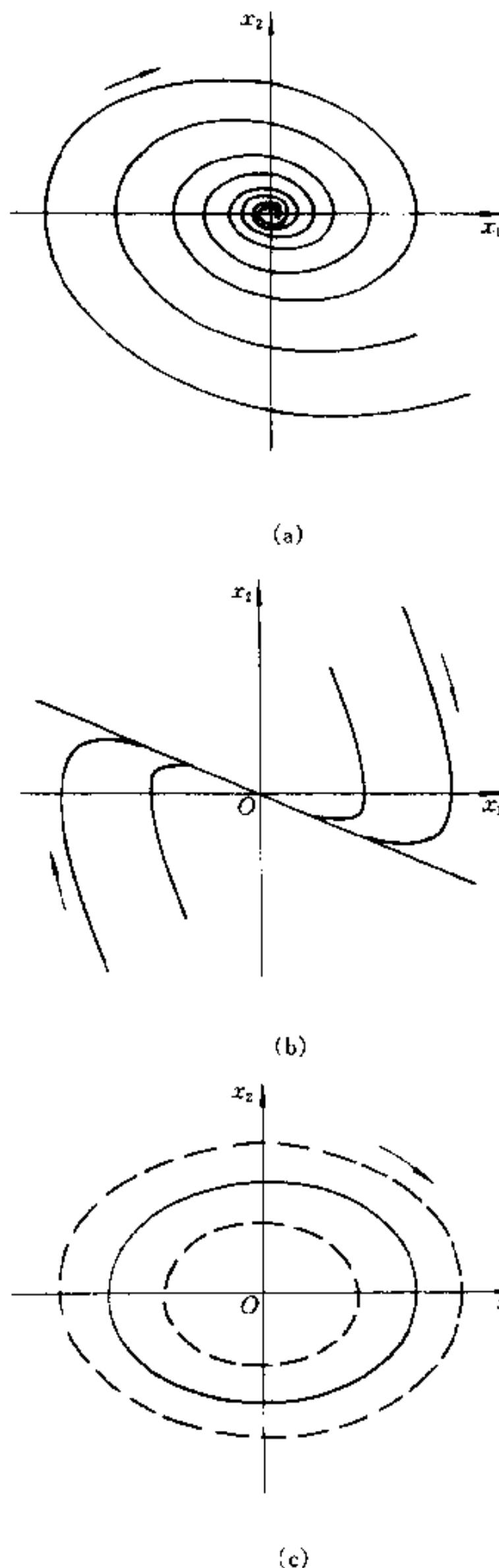


图 17-26 式(17-11)的相图

* § 17-8 非线性振荡电路

本节通过实例介绍一种典型非线性振荡电路,即范德坡^① 电路。从原理上它是由一个线性电感,一个线性电容和一个非线性电阻组成,见图 17-27(a),非线性电阻的伏安特性曲线有一段为负电阻性质,它的伏安特性可用下式表示(属电流控制型)

$$u_R = \frac{1}{3} i_L^3 + i_R$$

伏安特性的大致形状见图 17-27(b)。

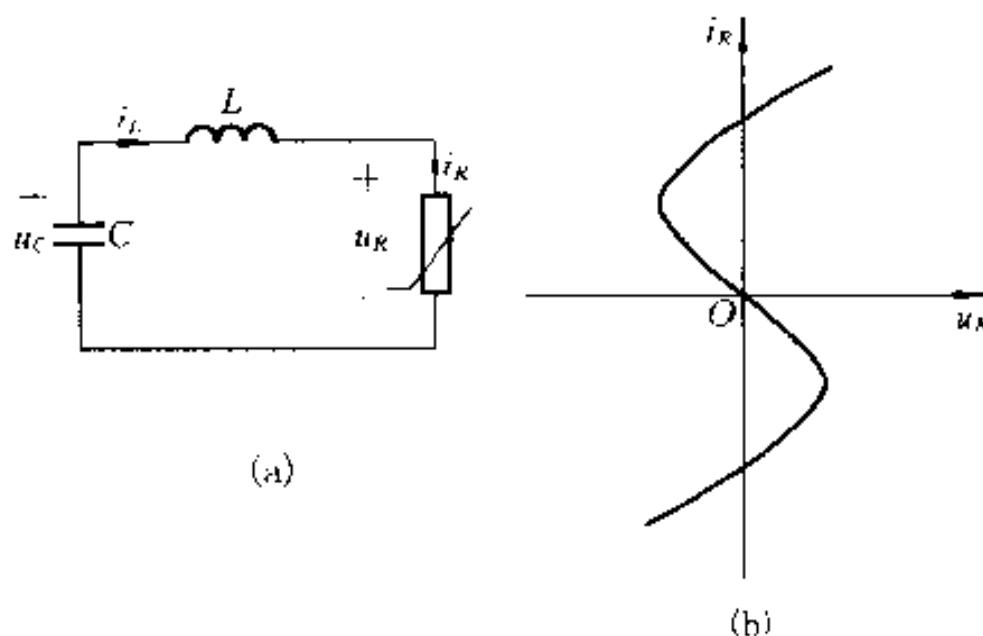


图 17-27 范德坡电路

电路的状态方程可写为(注意 $i_L = i_R$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -\frac{i_L}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{u_C - \left(\frac{1}{3} i_L^3 + i_L \right)}{L} \end{aligned} \right\} \quad (17-12)$$

其中 u_C 和 i_L 为状态变量。为了使用无量纲的量,令 $\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}}t$, τ 的量纲为 s 。这样:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{du_C}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{du_C}{d\tau}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_L}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{di_L}{d\tau}$$

式(17-12)可改写为:

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{d\tau} &= -\frac{1}{\epsilon} i_L \\ \frac{di_L}{d\tau} &= \epsilon \left[u_C - \left(\frac{1}{3} i_L^3 + i_L \right) \right] \end{aligned}$$

^① Van de Pol.

其中 $\epsilon = \sqrt{\frac{C}{L}}$ 。再令 $x_1 = i_L$, $x_2 = \frac{di_L}{d\tau}$, 上式可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \epsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} \quad (17-13)$$

方程(17-13)中仅有一个参数即 ϵ 。对不同的 ϵ 值, 可以画出该方程不同的相图。图 17-28 画出了 $\epsilon = 0.1$ 时的相图的示意图。从图中可以看出有单一的闭合曲线存在。这种单一或孤立的闭合曲线称为极限环, 与其相邻的相轨道都是卷向它的, 所以不管相点最初在极限环外

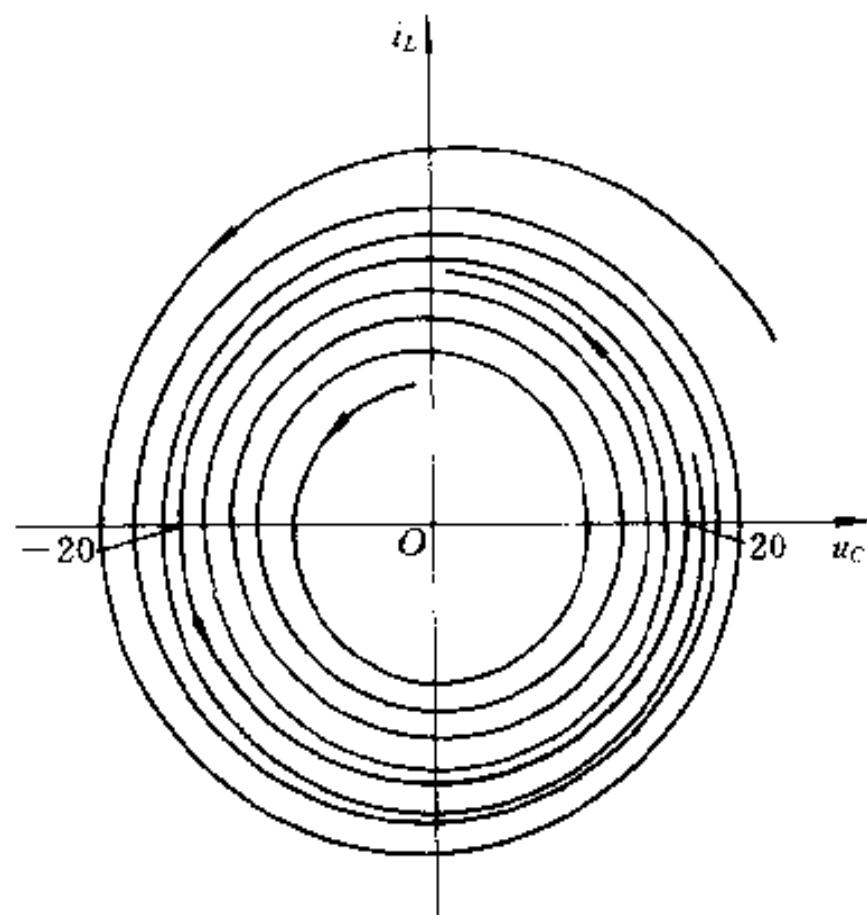


图 17-28 范德坡振荡电路的相图

或是在极限环内, 最终都将沿着极限环运动。这说明不管初始条件如何, 在所研究电路中最终将建立起周期性振荡。这种在非线性自治电路产生的持续振荡是一种自激振荡, 但它与图 17-26(c)在线性电路中产生的振荡过程有所不同, 后者的振荡振幅是与初始条件有关的。

如果令式(17-13)中的 $x_1 = x$, 该方程可写为含有一个变量的二阶非线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

上式就是范德坡方程。

* § 17-9 混沌电路简介

混沌^①理论的研究自 70 年代以来已成为许多不同学科领域的热点。粗略地说, 混沌是

① Chaos。

发生在确定性系统中的一种不确定行为。在有些二阶非线性非自治电路或三阶非线性自治电路中就存在着混沌现象。这类动态电路方程是二阶或三阶非线性常微分方程。根据经典理论，在初始条件确定后，它的解是确定的。但是发现在一定参数值的条件下，电路会出现复杂的解，这种解不是周期解，又不是拟周期解^①，在状态平面上它的相轨道始终不会重复，但是有界的，它对初始条件十分敏感。

图 17-29 所示是线性电阻 R 、线性电感 L 和半导体变容二极管 D 组成的串联电路，外施电压为正弦电压。变容二极管可以用一个非线性电阻和一个非线性电容的并联组合作为其电路模型。

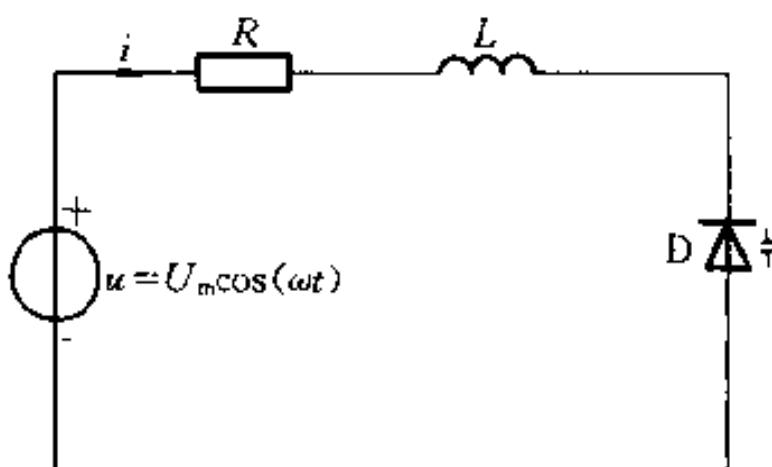


图 17-29 一个简单的混沌电路

此电路的方程是一个二阶非自治非线性微分方程。在一定的参数值条件下，自零逐步变动外施正弦电压的幅值 U_m ，用实验观察或用计算机求解电路中的电流 i ，将会发现当 U_m 自零增长到某 U_{m1} 值之前，电流 i 的稳态解是非正弦周期解，它的周期与外施正弦电压的周期相同。当达到 U_{m1} 时，电流仍为非正弦周期性的，但它的周期成为外施电压周期的 2 倍。所以电流的基波频率为 $\frac{1}{2}\omega$ ，即外施频率的 $\frac{1}{2}$ ^②。当 U_m 继续增长，例如到达 U_{m2} 时，会出现稳定的周期为外施电压周期 4 倍的解。之后，又会出现 8 倍周期解，16 倍周期解。这种现象称为分叉。自 16 周期分叉后就会出现一个混沌区，此时电流解既非周期解又非拟周期解。在混沌区后，随电压幅值的增加还发现有 3 周期、6 周期等分叉。图 17-30 是电流分叉的示意图。图中的数字 2、4 等表示 2 周期、4 周期等分叉。

图 17-31(a)所示含有 2 个线性电容，1 个线性电感，1 个线性电阻和 1 个非线性电阻组成的动态电路^③；非线性电阻的伏安特性 $i_R = g(u_R)$ ，是一个分段线性电阻，见图 17-31(b)，其中 m_0 、 m_1 和 m_2 分别表示相应折线的斜率。

设电容电压 u_{C_1} ， u_{C_2} 和电感电流 i_L 为状态变量，可以得出状态方程如下

① 拟周期解可以看作是一些具有不同频率的周期解之和，这些频率的相互比值是非有理数。总体看来，它似乎是具有“很长”的周期又接近周期解的一种解。

② 一个非正弦周期解，如果它的基波频率是外施频率的分数倍，这种“谐波”称为“子谐波”。线性电路的非正弦周期解，它的“谐波”是外施频率的整数倍，基波频率则与外施频率同。

③ 此电路由 L.O.Chua(蔡少棠)提出，故称为蔡氏电路，又称“双涡卷(double scroll)电路”。

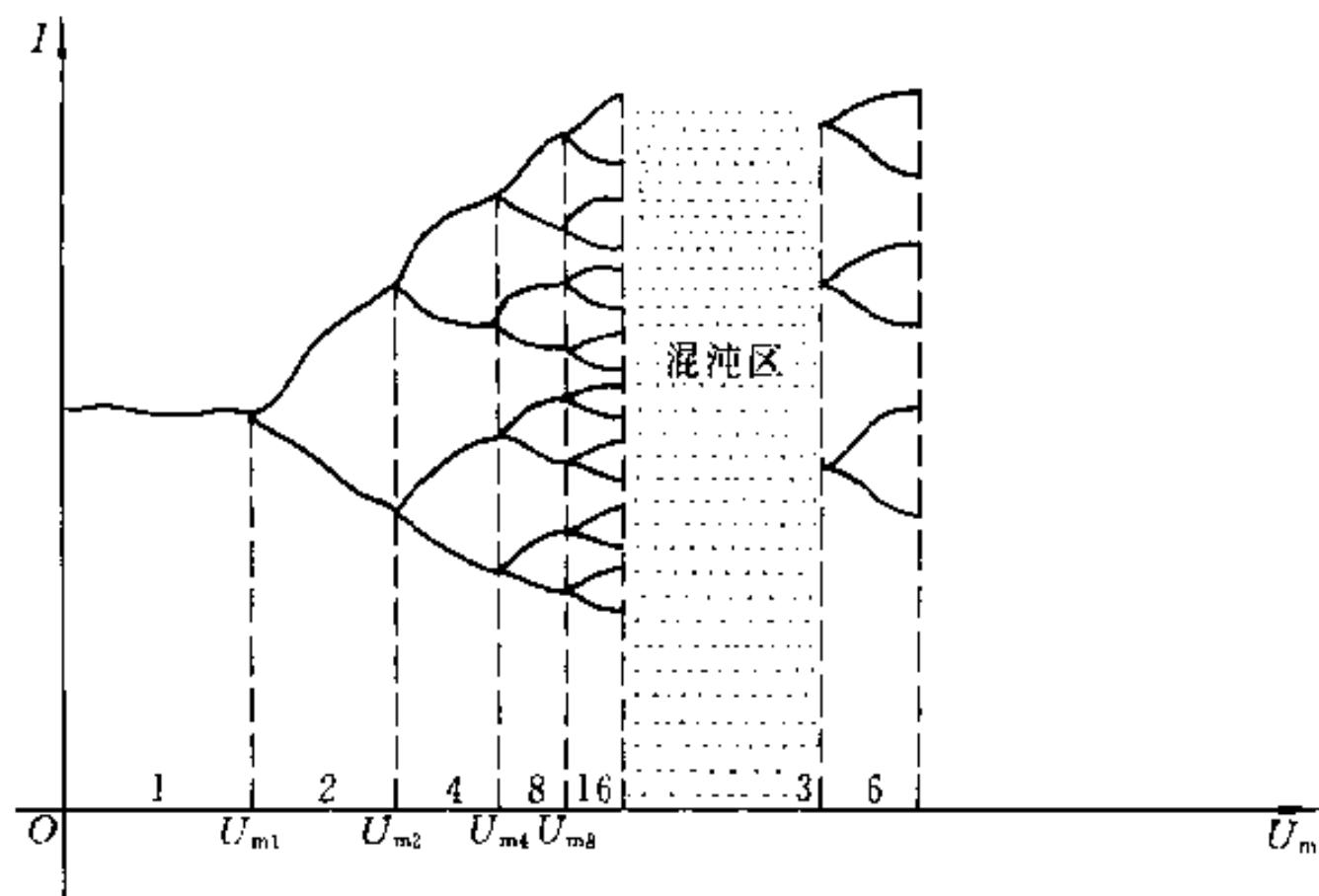
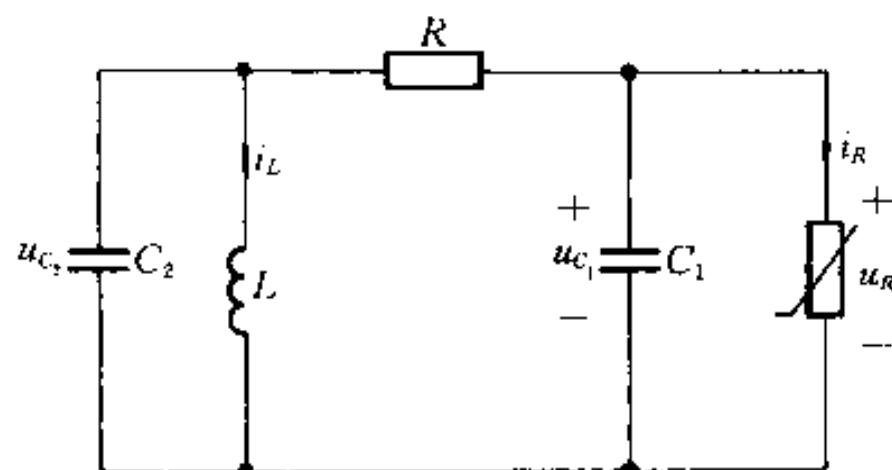
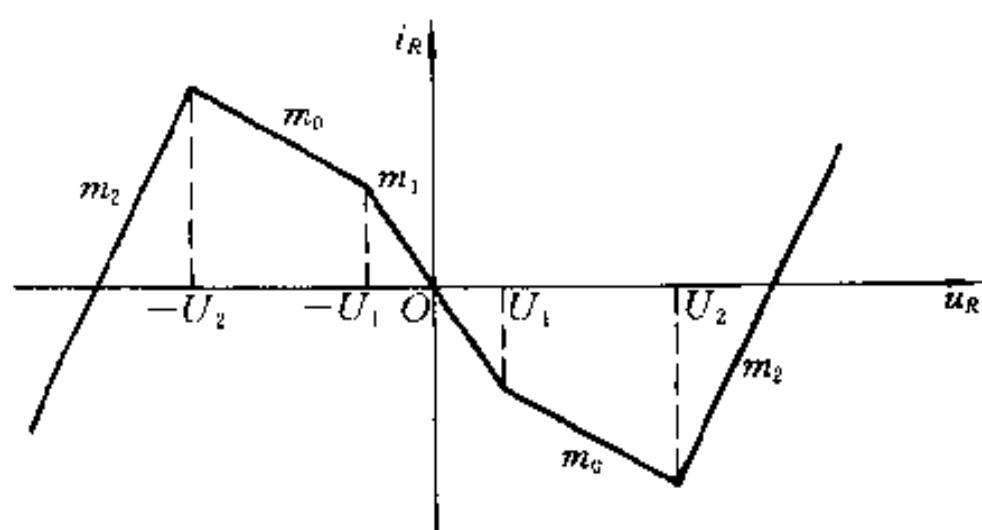


图 17-30 电流的分叉



(a)



(b)

图 17-31 蔡氏电路

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R} (u_{C_2} - u_{C_1}) - g(u_L) \\ C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R} (u_{C_1} - u_{C_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -u_{C_2} \end{aligned} \right\} \quad (17-14)$$

这是一个三阶非线性自治方程。这个电路在不同参数值条件下会发生丰富多样的动态过程，并有混沌出现，同时方程的解对初始条件十分敏感。根据不同的 C_1, C_2, L, R 及非线性电阻的 U_1, U_2, m_0, m_1, m_2 等，加上不同的 $u_{C_1}(0), u_{C_2}(0), i_L(0)$ 初始条件，按式(17-14)应用计算机可以计算出以 u_{C_1}, u_{C_2} 和 i_L 为坐标的状态空间的相轨道。

图 17-32 示出了在某一组参数值及初始条件下，投影在 $i_L - u_{C_1}$ 状态平面上的相轨道。它具有“双涡卷”形状，故称此电路为“双涡卷电路”。图中 2 条虚线所示相轨道是在另外 2 组不同的 $u_{C_1}(0), u_{C_2}(0), i_L(0)$ 值下得出的相轨道，其中外面的一条表示稳定的周期性过程，里面的一条则是不稳定的周期性过程。但是实线所示相轨道则始终不重复，说明电路中存在的混沌现象。

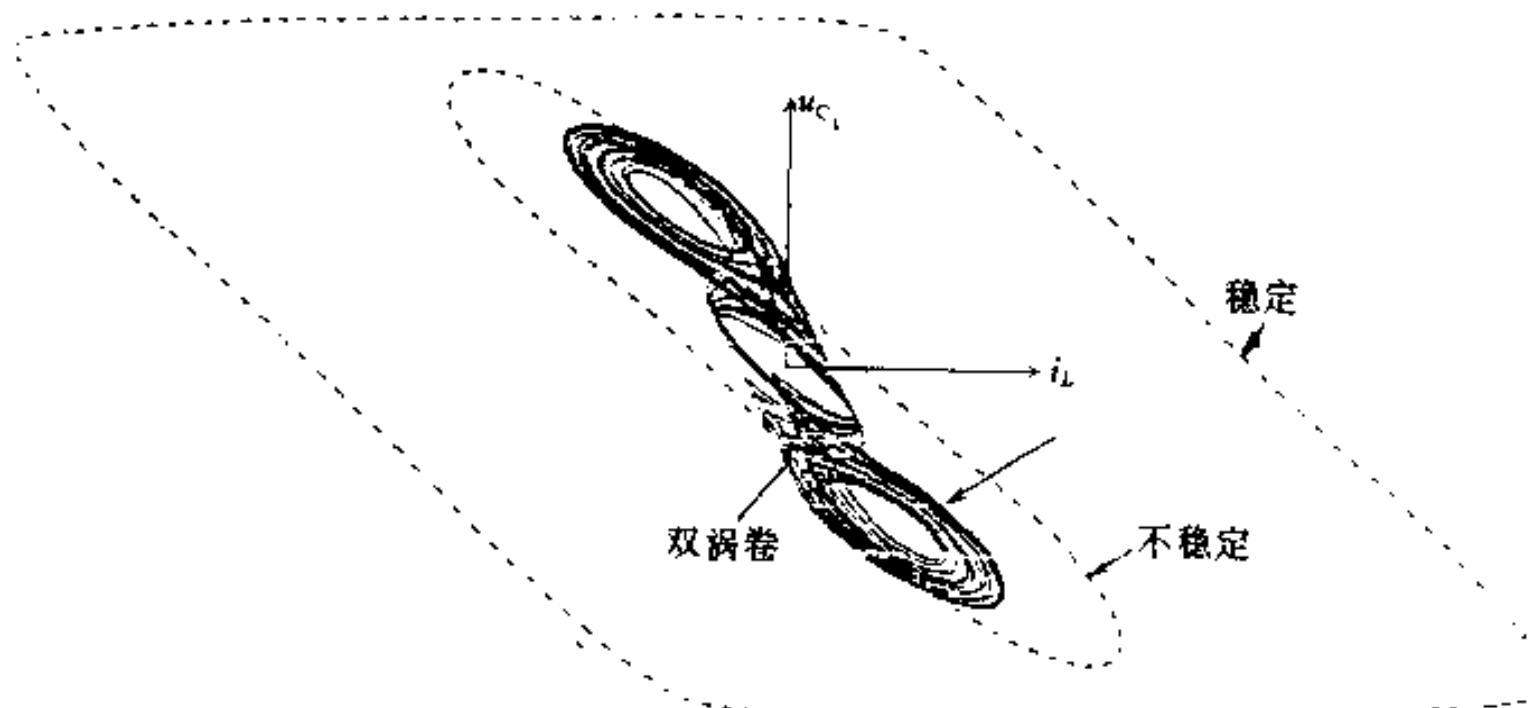


图 17-32 双涡卷相轨道

* § 17-10 人工神经元电路

人工神经网络(简称神经网络^①)试图部分模仿大脑和神经系统的结构和功能，它与当前的数字电子计算机迥然不同，它具有分布式存储和并行处理的特色。显然，它不是人脑的逼真描述，只是人脑功能的一种简化和抽象的模型。人的大脑含有数以亿万计的生物神经元，

^① neural network。

以特定方式相互连接,从而使人具有理解、记忆、联想、识别和计算等能力。生物神经元可以当作是具有输入和输出处理信息的单元,输入和输出两者之间的关系可以用具有饱和特性的一种 S 型非线性转移函数描述。人工神经元模型就是根据这一设想构成的。

神经网络有广泛的应用,可用来处理识别、分类、联想、优化等等问题。目前有许多种神经网络模型。80 年代提出了用电路实现的神经网络模型^①,有力地推动了这一领域的研究。

图 17-33 示出了这个电路模型的第 k 个人工神经元的构成,图中的运放具有有限放大倍数并计及其饱和特性,即认为输入电压 u_{int} 与输出电压 u_{out} 之间的转移函数关系 $u_{out} = f_k(u_{int})$ 可以用来描述神经元的相应转移函数关系。运放输入端的电容 C_k 和电阻 R_k 对于输出与输入信号之间产生迟延作用,以此模仿神经元的动态特性。另外在输入端连接的电阻 R_k 用来表示第 j 个神经元的输出电压 u_{oj} 在第 k 个神经元产生的输入电流之间的相互联系电流 I_k 表示注入第 k 个神经元的电流。

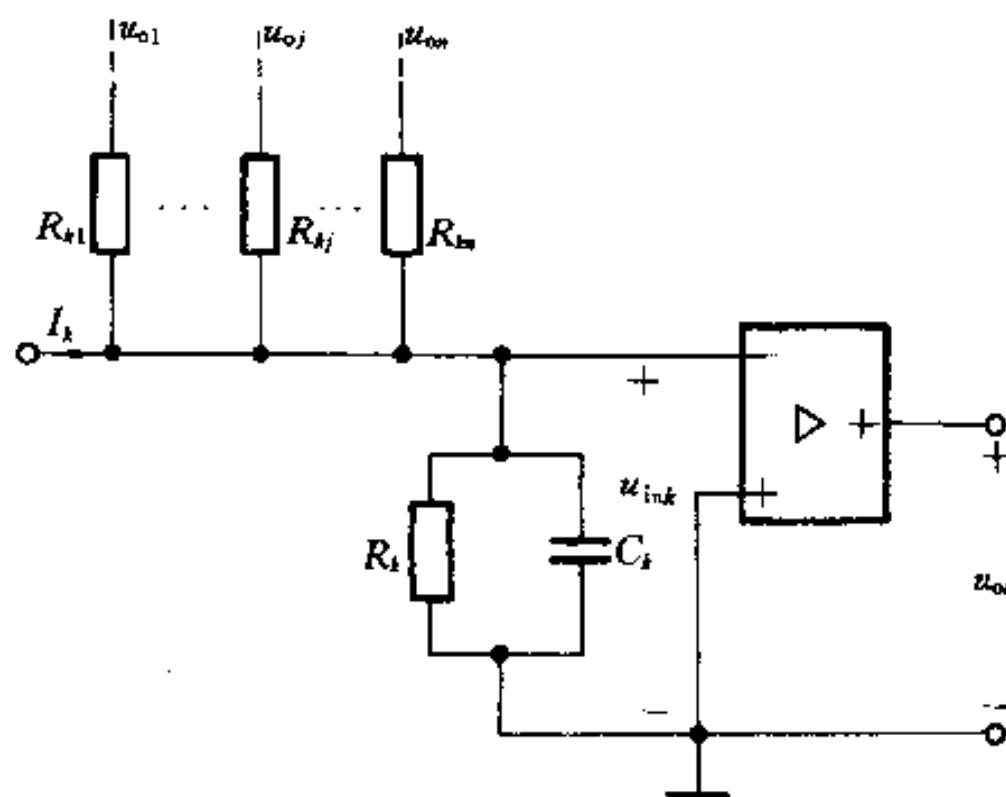


图 17-33 第 k 个神经元电路

根据 KCL,在第 k 个神经元的输入结点处有

$$C_k \frac{du_{intk}}{dt} + \frac{u_{intk}}{R_k} = \sum_{j \neq k}^n \frac{1}{R_{kj}} (u_{oj} - u_{intk}) + I_k$$

经整理后,有

$$C \frac{du_{intk}}{dt} = \sum_{j \neq k}^n \frac{1}{R_{kj}} u_{oj} - \frac{1}{R_k} u_{intk} + I_k$$

其中

$$\frac{1}{R'_k} = \frac{1}{R_k} + \sum_{j \neq k}^n \frac{1}{R_{kj}}$$

另外有

$$u_{out} = f_k(u_{intk})$$

^① Hopfield 神经网络。

上式中假设共有 n 个神经元相互有连接, 而 $k = 1, 2, \dots, n$ 。

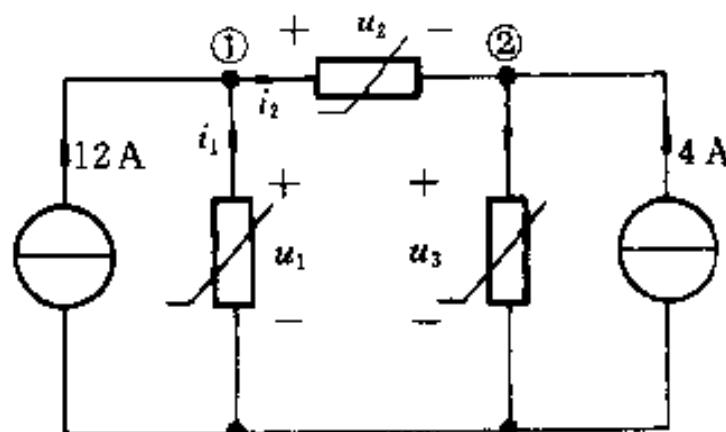
对每个神经元都可以列出类似方程, 这样构成了一个 n 阶的非线性微分方程组。当给定一组初始值后, 就可以求出此方程组的解。如果方程的解为一组确定值, 则表明电路最终将达到一个稳定状态。

以这种神经元模型为基础, 可以设计出用来处理和求解多种不同类型问题的神经网络电路。这些问题包括“旅行商最优路径问题”^①、模—数转换问题、线性规划问题、优化问题等等。

习题

17-1 如果通过非线性电阻的电流为 $\cos(\omega t)$ A, 要使该电阻两端的电压中含有 4ω 角频率的电压分量, 试求该电阻的伏安特性, 写出其解析表达式。

17-2 写出图示电路的结点电压方程, 假设电路中各非线性电阻的伏安特性为 $i_1 = u_1^3, i_2 = u_2^2, i_3 = u_3^{3/2}$ 。



题 17-2 图

17-3 一个非线性电容的库伏特性为 $u = 1 + 2q + 3q^2$, 如果电容从 $q(t_0) = 0$ 充电至 $q(t) = 1$ C, 试求此电容储存的能量。

17-4 非线性电感的韦安特性为 $\Psi = i^3$, 当有 2 A 电流通过该电感时, 试求此时的静态电感值。

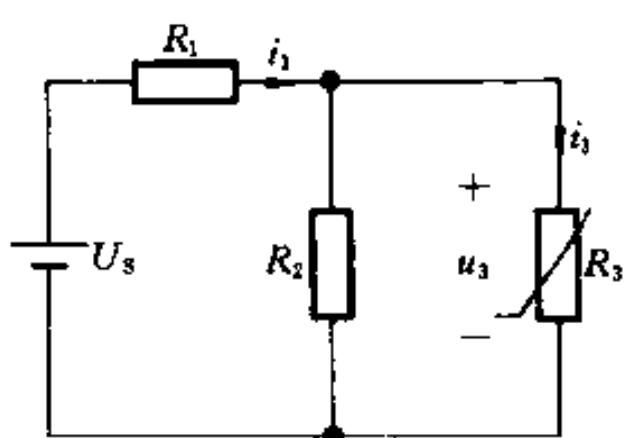
17-5 已知图示电路中 $U_s = 84$ V, $R_1 = 2$ k Ω , $R_2 = 10$ k Ω , 非线性电阻 R_3 的伏安特性可用下式表示: $i_3 = 0.3u_3 + 0.04u_3^2$ 。试求电流 i_1 和 i_3 。

17-6 图示电路由一个线性电阻 R , 一个理想二极管和一个直流电压源串联组成。已知 $R = 2$ Ω , $U_s = 1$ V, 在 $u - i$ 平面上画出对应的伏安特性。

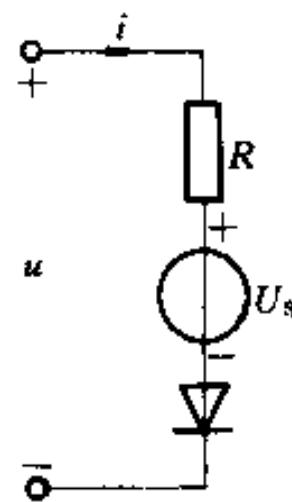
17-7 图示电路由一个线性电阻 R , 一个理想二极管和一个直流电流源并联组成。已知 $R = 1$ Ω , $I_s = 1$ A, 在 $u - i$ 平面上画出对应的伏安特性。

17-8 试设计一个由线性电阻, 独立电源和理想二极管组成的一端口, 要求它的伏安特性具有图示特性。

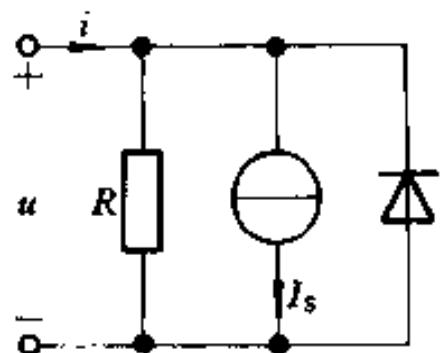
^① “Traveling Salesman Problem, (TSP)”, 图论中的一个著名问题。



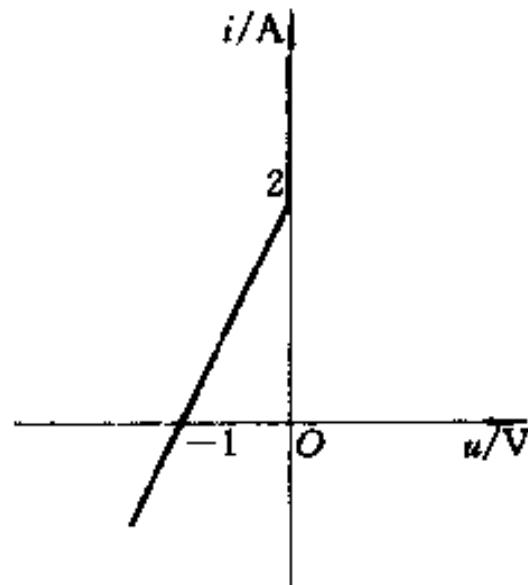
题 17-5 图



题 17-6 图



题 17-7 图

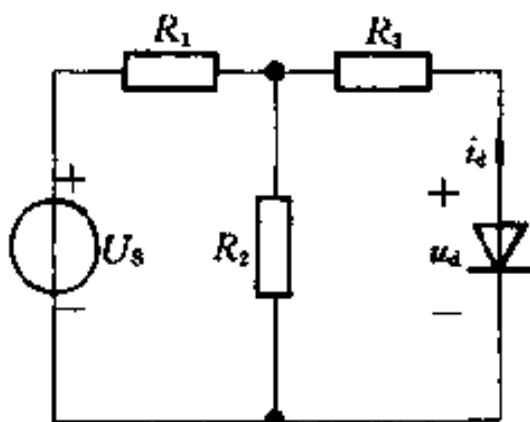


题 17-8 图

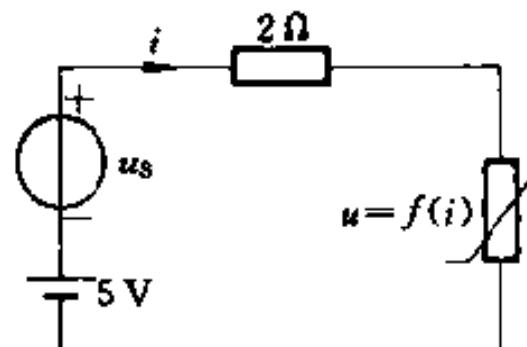
17-9 设图示电路中二极管的伏安特性可用下式表示:

$$i_d = 10^{-6} (e^{40u_d} - 1) \text{ A}$$

式中 u_d 为二极管的电压, 其单位为 V。已知 $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 0.5 \Omega$, $R_3 = 0.75 \Omega$, $U_s = 2 \text{ V}$ 。试用图解法求出静态工作点。



题 17-9 图



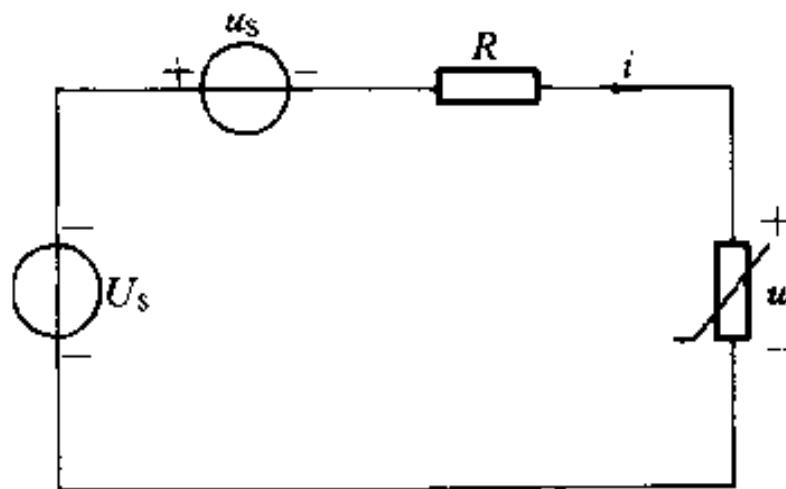
题 17-10 图

17-10 图示非线性电阻电路中, 非线性电阻的伏安特性为

$$u = 2i + i^3$$

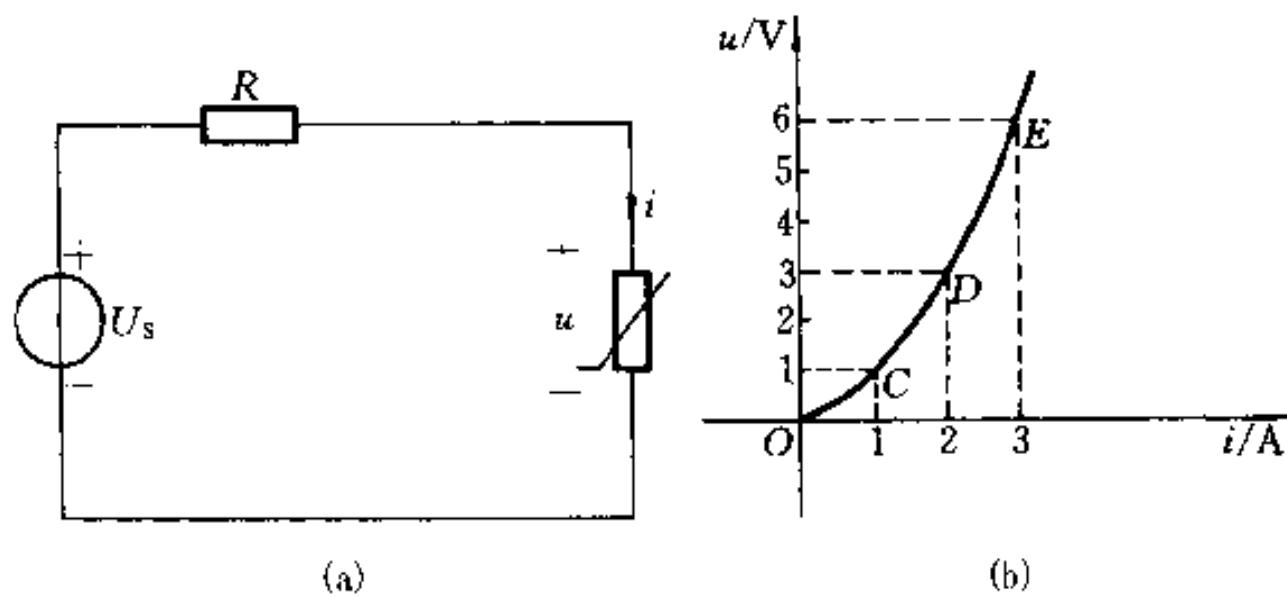
现已知当 $u_s(t) = 0$ 时, 回路中的电流为 1 A。如果 $u_s(t) = \cos(\omega t)$ V 时, 试用小信号分析法求回路中的电流 i 。

17-11 图示电路中 $R = 2 \Omega$, 直流电压源 $U_s = 9$ V, 非线性电阻的伏安特性 $u = -2i + \frac{1}{3}i^3$, 若 $u_s(t) = \cos t$ V, 试求电流 i 。



题 17-11 图

17-12 图示电路中, 直流电压源 $U_s = 3.5$ V, $R = 1 \Omega$, 非线性电阻的伏安特性曲线如图(b)所示。(1) 试用图解法求静态工作点; (2) 如将曲线分成 OC 、 CD 和 DE 三段折线, 试用分段线性化法求静态工作点, 并与(1)的结果相比较。

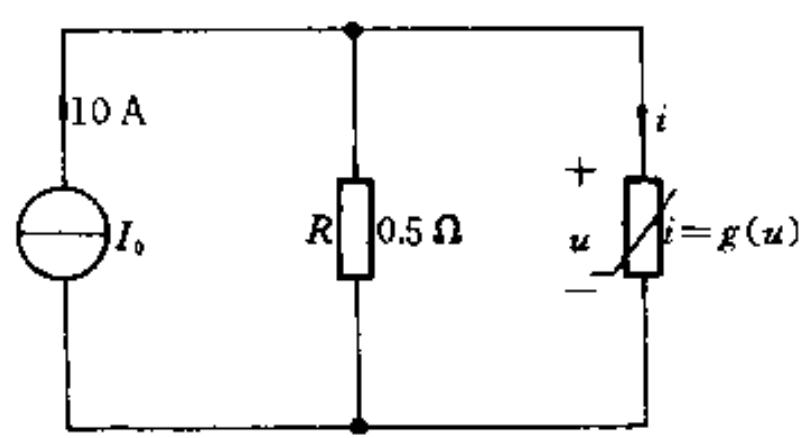


题 17-12 图

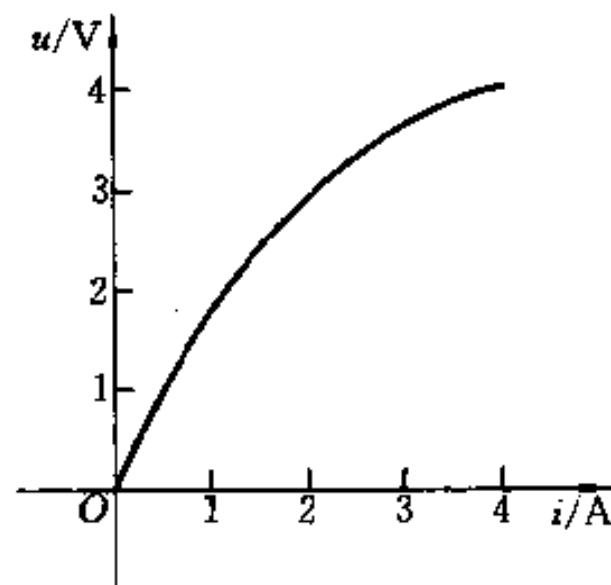
17-13 非线性电阻的伏安特性曲线如图(b)所示, 试用分段线性化法给出相应直线段的线性化模型, 并求静态工作点。

17-14 非线性电阻的伏安特性为 $u = i^3$, 如将此电阻突然与一个充电的电容接通, 试求电容两端的电压 u_C , 设 $u_C(0_+)=U_{0+}$

17-15 在图示电路中, 线性电容通过非线性电阻放电, 非线性电阻伏安特性如图(b)所示。已知 $C = 1$ F, $u_C(0_-) = 3$ V, 试求 u_C 。

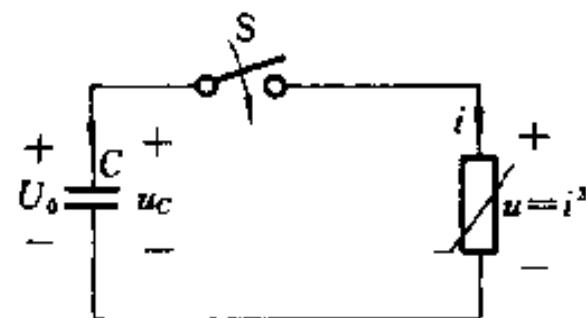


(a)

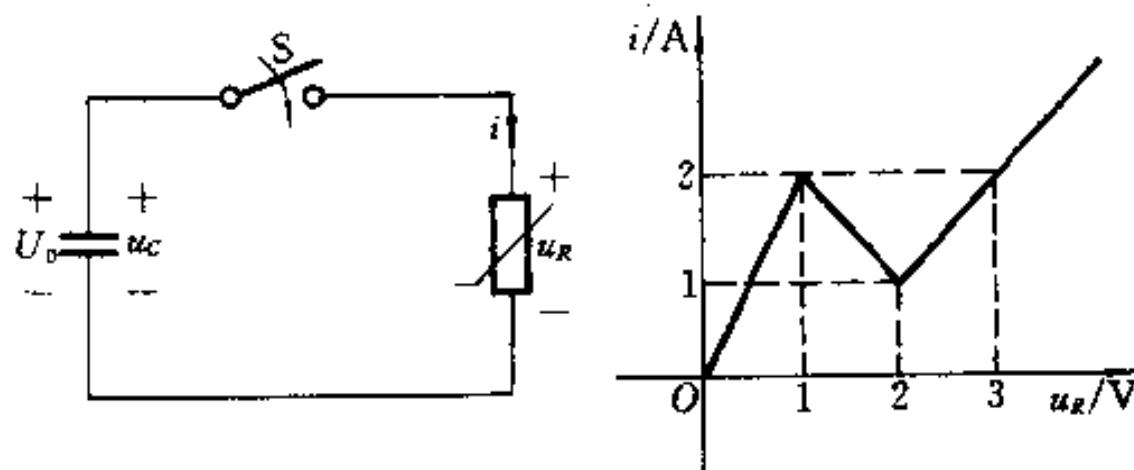


(b)

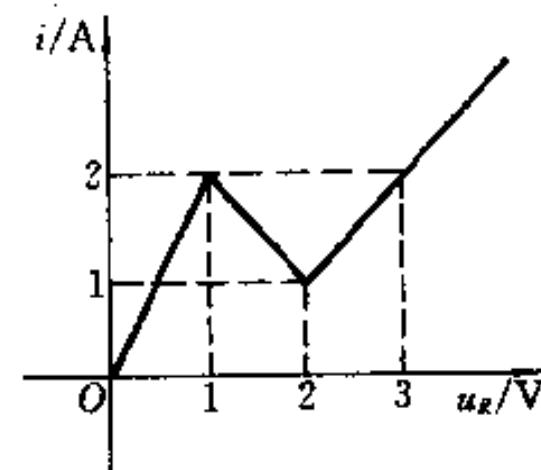
题 17-13 图



题 17-14 图



(a)



(b)

题 17-15 图

第十八章

均匀传输线

内 容 提 要

本章首先介绍分布参数电路的概念和均匀传输线。其次讨论均匀传输线的方程及其正弦稳态解，并介绍均匀传输线的副参数、特性阻抗和传播常数等概念。按正弦稳态下电压和电流沿线的分布情况，引入行波、入射波、反射波等概念。还介绍无损耗线在终端开路和短路情况下电压和电流的驻波及其输入阻抗的特点。最后简要介绍传输线的波过程。

§ 18-1 分布参数电路

在以前各章中，讨论的是由集总元件相互连接成的集总电路。根据电磁场理论，电磁波是以一定速度 v 传播的，这个速度就是光速，在真空中 $v \approx 3 \times 10^8$ m/s。电磁波的波长 $\lambda = v/f$ ，其中 f 为频率。频率越高，波长就越短。假定频率为 20 kHz， $\lambda = \frac{3 \times 10^8}{20 \times 10^3}$ m = 15 km；如果频率是 10 GHz， $\lambda = 0.03$ m = 3 cm。当一个实际电路的外形尺寸和波长相比“很小”，而可以忽略不计时，电磁波沿电路传播的时间几乎为零。在这种情况下实际电路就可按集总电路处理，而有关集总元件的端子电流和电压的假定（见 § 1-4）就成立。这个结论可以用电磁场理论证明，同时大量实践也充分地加以证实。这种假设与力学理论中把一个刚体近似地用一个质点处理相类似。

在有线通信或电力传输中使用架空线或电缆传递信号或能量。这类传输线的“尺寸”比之波长就不一定“很小”了。例如，在 50 Hz 工频情况下，架空线的波长 $\lambda = 6000$ km，当远距离输电线长为 1500 km 时，就达到了 1/4 波长。又例如，电视接收机与其接收天线是通过一对传输线连接起来的。设天线上出现了一个 200 MHz 的正弦电压信号 $u_1 = U_m \cos(4\pi \times 10^8 t)$ 。这个电压信号在传输线上

经过 0.75 m 后将延迟 $\frac{0.75}{3 \times 10^8}\text{ s} = 0.25 \times 10^{-8}\text{ s}$, 于是在电视机接收端处的电压(假定其幅度没有衰减)可写为 $u_2 = U_m \cos[4\pi \times 10^8 (t - 0.25 \times 10^{-8})] = U_m \cos(4\pi \times 10^{-8} t - \pi) = -u_1$ 。换句话说, 在任何时间 t , 两处的电压的相位都正好相反。从波长的角度看, $\lambda = \frac{3 \times 10^8}{200 \times 10^6}\text{ m} = 1.5\text{ m}$, 而传输线的长度恰好为波长的一半。但是, 如果频率不是 200 MHz 而是 200 kHz , 则 $u_2 = U_m \cos[4\pi \times 10^5 (t - 0.25 \times 10^{-8})] = U_m \cos(4\pi \times 10^5 t - 0.18^\circ) \approx u_1$, 即两处电压几乎相同, 此时传输距离仅为波长的万分之五($0.75/1500$)。上述情况同样适用于电流。所以对一个外形尺寸“很小”的元件, 可以把它当作一个集总元件。

由以上论述可知, 当实际电路的尺寸与工作波长接近时, 就不能再用集总电路的概念。传输线在三维空间中仅有一个方向的长度有可能与工作波长相比, 所以在这种情况下仍可用电压和电流为物理量描述其中的电磁过程, 但需要用分布(参数)电路的概念进行分析。

§ 18-2 均匀传输线及其方程

最典型的传输线是由在均匀媒质中放置的两根平行直导体构成的, 其通常的形式如图 18-1(a)、(b)、(c)、(d)所示。其中(a)为两线架空线,(b)为同轴电缆,(c)为二芯电缆,(d)是一线一地构成的传输线。

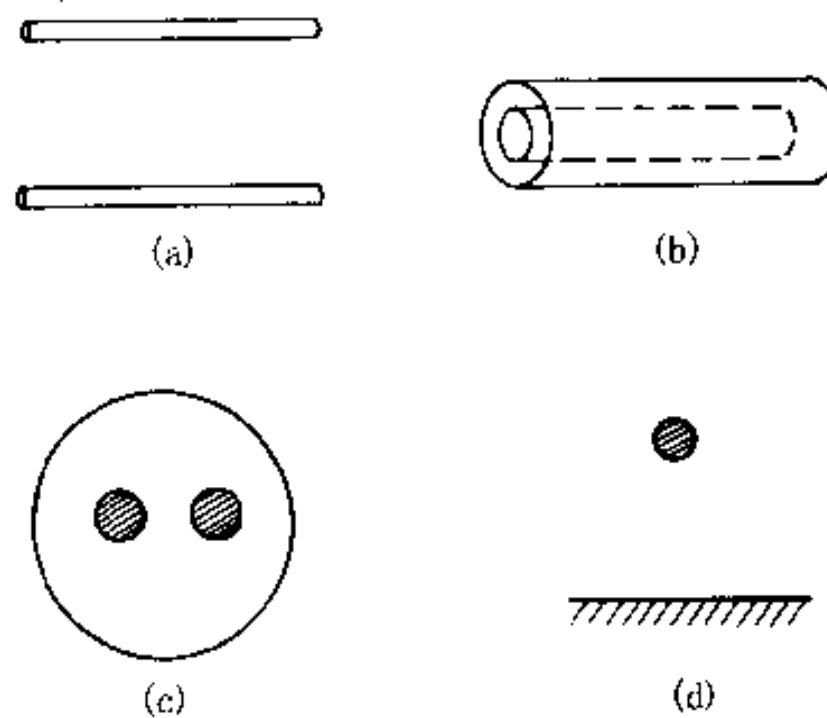


图 18-1 不同形式的传输线

在上述传输线中, 电流在导线的电阻中引起沿线的电压降, 并在导线的周围产生磁场, 即沿线有电感的存在, 变动的电流沿线产生电感电压降。所以, 导线间的电压是连续变化的。另一方面, 由于两导体构成电容, 因此在线间存在电容电流; 导体间还有漏电导, 故还有电导电流。这样, 沿线不同的地方, 导线中的电

流也是不同的。为了计及沿线电压与电流的变化，必须认为导线的每一元段（无限小长度的一段）上，在线上具有无限小的电阻和电感；在线间则有电容和电导。这就是传输线的分布参数模型，它是集总参数元件构成的极限情况。由于电阻、电感、电容和电导这些参数是分布在线上的，因此必须用单位长度上传输线具有的参数表示，即：

R_0 ——两根导线每单位长度具有的电阻。其单位为 Ω/m （在电力传输线中，常用 Ω/km ）。

L_0 ——两根导线每单位长度具有的电感，其单位为 H/m （或 H/km ）。

C_0 ——每单位长度导线之间的电容，其单位为 F/m （或 F/km ）。

G_0 ——每单位长度导线之间的电导，其单位为 S/m （或 S/km ）。

R_0, L_0, C_0, G_0 称为传输线的原参数，如果沿线原参数到处相等，则称为均匀传输线。本章主要讨论均匀传输线。当然实际的传输线不可能是均匀的。例如图 18-1(a)的两线架空线在有支架处和没有支架处是不一样的，因而漏电的情况不尽相同。在架空线的每一跨度之间，由于导线的自重引起的下垂情况也改变了传输线对大地的电容的分布均匀性。但是，为了便于分析起见，通常忽略所有造成不均匀性的因素而把实际的传输线当作均匀的传输线。以后的讨论都局限于均匀传输线。

图 18-2 表示一均匀传输线，传输线的左方与电源连接，称为始端；传输线的右方与负载相连接，称为终端。两根导线中，一根称为来线，一根称为回线，来线是指电流参考方向从始端指向终端的传输线，回线则指电流参考方向从终端

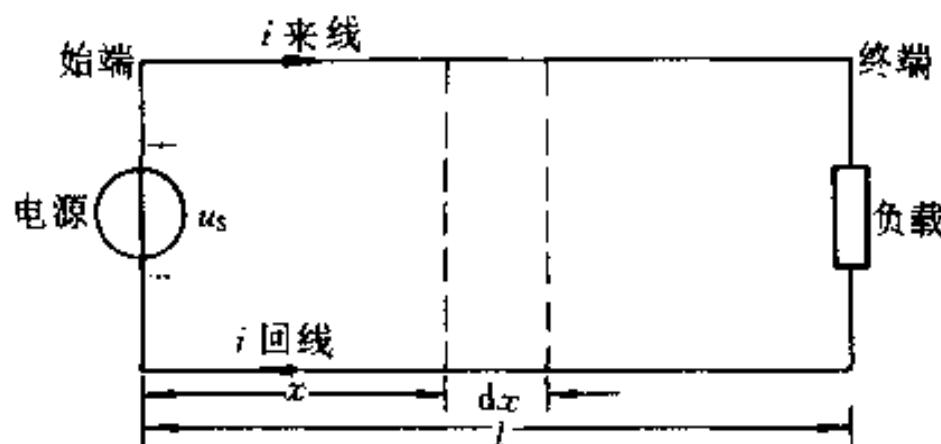


图 18-2 均匀传输线

指向始端的传输线。设来线和回线的长度都为 l ，从线的始端到所讨论长度元的距离为 x 。

上面已经提到，设想均匀传输线是由一系列集总元件构成的，也就是设想它是由许多无穷小的长度元 dx 组成的，每一长度元 dx 具有电阻 $R_0 dx$ 和电感 $L_0 dx$ ，而两导线间具有电容 $C_0 dx$ 和电导 $G_0 dx$ 。这样构成了图 18-3 所示电

路模型。设在 dx 左端的电压和电流为 u 和 i , 在 dx 右端的电压和电流为 $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 和 $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$, 根据 KCL, 对于结点 b, 有

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = G_0 \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dx + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dx$$

对回路 abcd 分别应用 KVL, 则有

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = R_0 i dx + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} dx$$

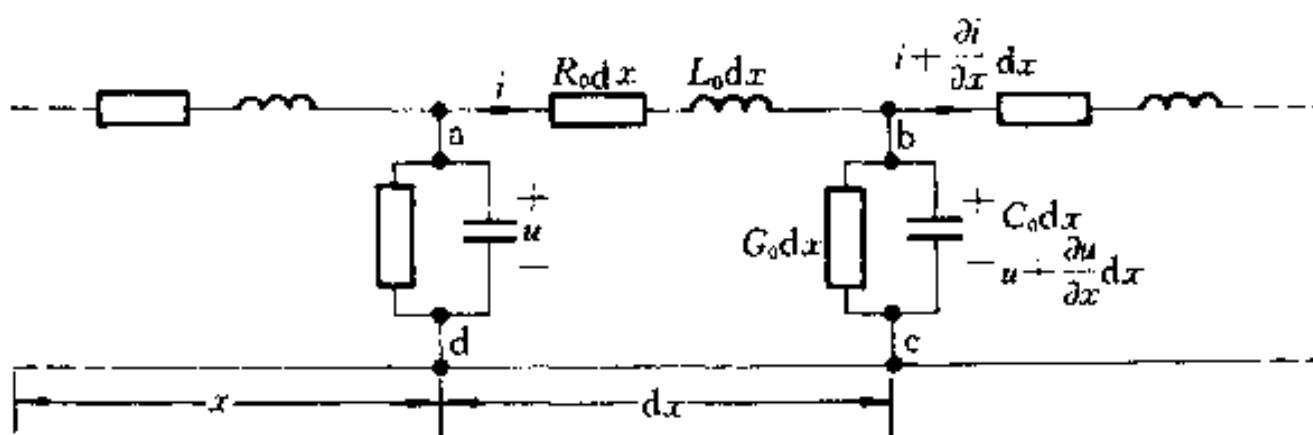


图 18-3 均匀传输线的电路模型

略去二阶无穷小量并约去 dx 后, 得下列方程

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (18-1)$$

这就是均匀传输线方程, 它是一组偏微分方程。根据边界条件(即始端和终端的情况)和初始条件(即时间起始时的条件), 求出方程(18-1)的解, 就可以得到电压 u 和电流 i , 它们将是 x 和 t 的函数。可见电压和电流不仅随时间变化, 同时也随距离变化。这是分布电路与集总电路的一个显著区别。

例 18-1 图 18-4 所示为一传输线, 线长 $l = 150$ km, 设始端激励为 $U_s = 200$ V 的直流电压源, 终端短路。已知传输线每单位长度的参数为 $R_0 = 1 \Omega/km$, $G_0 = 5 \times 10^{-5} S/km$ 。试计算达到稳态后终端的电流 I_2 。

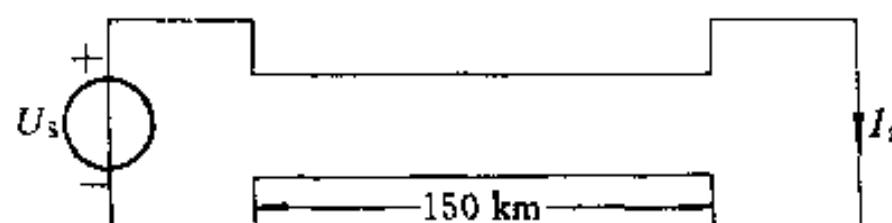


图 18-4 例 18-1 图

解 由于激励为直流电压源, 到达稳态后沿线的电压都不随时间而变化。

所以按式(18-1)有：

$$-\frac{dU}{dx} = R_0 I$$

$$-\frac{dI}{dx} = G_0 U$$

消去变量 I 可得

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = R_0 G_0 U$$

其解答为

$$U = A_1 e^{-\alpha x} + A_2 e^{\alpha x}$$

其中 $\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{50} \times 10^{-3} \text{ 1/km}$; A_1, A_2 可由边界条件确定。由于 $x=0$ 处, $U=U_s=200 \text{ V}$; $x=l=150 \text{ km}$ 处, $U=0$, 于是有:

$$A_1 + A_2 = 200$$

$$A_1 e^{-\alpha l} + A_2 e^{\alpha l} = 0$$

故可求得 $A_1 = 227.24$, $A_2 = -27.24$, 最后得:

$$U = (227.24e^{-\sqrt{50} \times 10^{-3} x} - 27.24e^{\sqrt{50} \times 10^{-3} x}) \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{1}{R_0} \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=l} = 1.11 \text{ A}$$

如果用集总电路模型分析此传输线, 则可用图 18-5 所示电路, 其中 $R = R_0 l$ 代表传输线的总电阻, G_1, G_2 分别代表前 75 km 和后 75 km 的线间电导, 即 $G_1 = G_2 = \frac{l}{2} G_0$ 。由此电路可得

$$I_2 = \frac{U_s}{R} = \frac{200}{150} \text{ A} = 1.33 \text{ A}$$

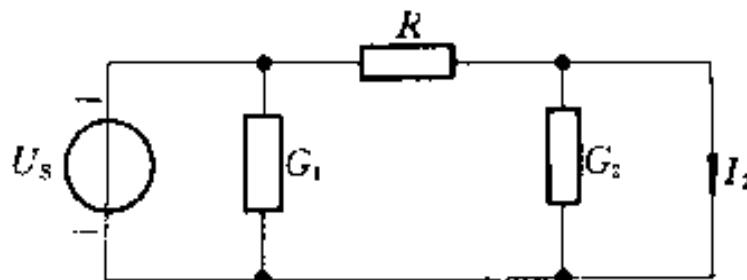


图 18-5 例 18-1 的一种集总参数模型

把此结果与前面所得结果 $I_2 = 1.11 \text{ A}$ 相比较, 可见由于集总电路模型造成的误差已达到 20%。这是由于把沿线分布的漏电流用集总漏电导表示而引起的。

§ 18-3 均匀传输线方程的正弦稳态解

本节研究均匀传输线在始端电源角频率为 ω 的正弦时间函数时电路的稳态分析。在这种情况下,沿线的电压、电流是同一频率的正弦时间函数,因此,可以用相量法分析沿线的电压和电流。于是有:

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{U}(x)e^{j\omega t}]$$

$$i(x, t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{I}(x)e^{j\omega t}]$$

其中 $\dot{U}(x)$ 和 $\dot{I}(x)$ 均为 x 的函数,简写为 \dot{U} 和 \dot{I} ,因而方程(18-1)可以写成以下形式

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= (R_0 + j\omega L_0)\dot{I} = Z_0 \dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= (G_0 + j\omega C_0)\dot{U} = Y_0 \dot{U} \end{aligned} \right\} \quad (18-2)$$

其中 $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ 为单位长度的阻抗, $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ 为单位长度的导纳。由于相量 \dot{U} 和 \dot{I} 仅为距离 x 的函数,所以在方程组(18-1)中对 u 和 i 的偏导数可以写成全导数,这样,式(18-1)的偏微分方程组就成为式(18-2)的常微分方程组。将方程(18-2)对 x 取一次导数,得:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} &= Z_0 \frac{d\dot{I}}{dx} \\ -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} &= Y_0 \frac{d\dot{U}}{dx} \end{aligned}$$

把方程(18-2)中的 $\frac{d\dot{I}}{dx}$ 和 $\frac{d\dot{U}}{dx}$ 代入上式,便得到:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{I}$$

令 $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$, 代入上式后得:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U}$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I}$$

γ 称为传播常数。上列方程是常系数二阶线性微分方程。它们的通解具有下列形式

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot{I} &= B_1 e^{-\gamma x} + B_2 e^{\gamma x} \end{aligned} \right\} \quad (18-3)$$

利用方程(18-2)可以求得积分常数 A_1 和 B_1 及 A_2 和 B_2 之间的关系。由式(18-2)中的第一个方程得

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = -\frac{1}{Z_0} (-A_1 \gamma e^{-\gamma x} + A_2 \gamma e^{\gamma x}) \\ &= \frac{A_1}{\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}} e^{\gamma x} = B_1 e^{-\gamma x} + B_2 e^{\gamma x} \end{aligned}$$

令 $Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$, 从上式中有 $B_1 = \frac{A_1}{Z_c}$, $B_2 = -\frac{A_2}{Z_c}$, 而电流

$$\dot{I} = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x}$$

Z_c 称为特性阻抗或波阻抗。它和称为传播常数的 γ 都是复数。后面将会看到 Z_c 和 γ 可以用来表征均匀传输线的主要特性。

根据边界条件可以确定积分常数 A_1 和 A_2 , 可以分两种不同情况讨论。

一种是设传输线的始端电压 \dot{U}_1 和电流 \dot{I}_1 为已知。当以始端作为计算距离 x 的起点时, 在始端处 $x=0$ 。根据给定的边界条件, 由式(18-3)可以得到:

$$\dot{U}_1 = A_1 + A_2$$

$$\dot{I}_1 = \frac{A_1}{Z_c} - \frac{A_2}{Z_c}$$

解得:

$$A_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)$$

由此得到传输线上与始端的距离为 x 处的电压和电流

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) e^{\gamma x} \\ \dot{I} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_1}{Z_c} + \dot{I}_1 \right) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_1}{Z_c} - \dot{I}_1 \right) e^{\gamma x} \end{aligned} \right\} \quad (18-4)$$

利用双曲线函数:

$$\cosh(\gamma x) = \frac{1}{2} (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})$$

$$\sinh(\gamma x) = \frac{1}{2} (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})$$

式(18-4)又可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \cosh(\gamma x) - Z_c \dot{I}_1 \sinh(\gamma x) \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \cosh(\gamma x) - \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sinh(\gamma x) \end{aligned} \right\} \quad (18-5)$$

另一种情况是设传输线终端(即 $x = l$ 处, l 为线长)的电压 \dot{U}_2 和电流 \dot{I}_2 为已知。根据这种边界条件,从式(18-3)得:

$$\dot{U}_2 = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma l} - \frac{A_2}{Z_c} e^{\gamma l}$$

从而有:

$$A_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma l}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma l}$$

这样,当终端的电压 \dot{U}_2 和电流 \dot{I}_2 为已知时,传输线上与始端距离为 x 处的任一点电压和电流为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma(l-x)} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma(l-x)} \\ \dot{I} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2}{Z_c} \right) e^{\gamma(l-x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2}{Z_c} \right) e^{-\gamma(l-x)} \end{aligned} \right\}$$

如果把计算距离的起点改为传输线的终端,则线上任一点到终端的距离为 $x' = l - x$,上式可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{x'} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-x'} \\ \dot{I} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2}{Z_c} \right) e^{x'} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2}{Z_c} \right) e^{-x'} \end{aligned} \right\} \quad (18-6)$$

通常把上式的 x' 仍记为 x ,这样做并不会引起混淆,因为式中右方的 \dot{U}_2 和 \dot{I}_2 就意味着是以传输线的终端作为计算距离的起点。

同样,将(18-6)用双曲线函数表示时,得

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cosh(\gamma x) + Z_c \dot{I}_2 \sinh(\gamma x) \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cosh(\gamma x) + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh(\gamma x) \end{aligned} \right\} \quad (18-7)$$

式中 x 为距终端的距离。

例 18-2 一高压线长 $l = 300$ km,终端接负载,功率为 30 MW,功率因数 $\lambda = 0.9$ (感性),已知输电线的 $Z_0 = 1/80^\circ$ Ω/km, $Y_b = 6.5 \times 10^{-6}/90^\circ$ S/km。设负载端电压 $\dot{U}_2 = 115.5/0^\circ$ kV,求距离始端 200 km 处的电压、电流相量。

解

$$I_2 = \frac{30 \times 10^6}{115.5 \times 10^3 \times 0.9} A = 288.6 A$$

$$I_2 = 288.6 / -25.84^\circ A$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = 2.55 \times 10^{-3} / 85^\circ 1/km$$

$$Z_c = \sqrt{Z_0 / Y_0} = 392.2 / -5^\circ \Omega$$

距离始端 200 km 即距离终端 100 km, 该处电压和电流分别为:

$$\begin{aligned} U &= U_2 \cosh(100\gamma) + Z_c I_2 \sinh(100\gamma) \\ &= 130.7 / 10.5^\circ kV \end{aligned}$$

$$I = I_2 \cosh(100\gamma) + \frac{U_2}{Z_c} \sinh(100\gamma) = 256.2 / -10.35^\circ A$$

其中

$$100\gamma = 0.255 / 85^\circ = 0.0222 + j0.254$$

而:

$$\sinh(100\gamma) = 0.252 / 85.11^\circ$$

$$\cosh(100\gamma) = 0.968 / 0.33^\circ$$

均匀传输线的行波

为便于讨论, 将式(18-4)中的 \dot{U}, \dot{I} 的表达式改写如下

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}^+ + \dot{U}^- \\ \dot{I} &= \dot{I}^+ - \dot{I}^- \end{aligned} \right\} \quad (18-8)$$

其中:

$$\dot{U}^+ = A_1 e^{-\gamma x} = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) e^{-\gamma x}$$

$$= |A_1| e^{j\psi_+} e^{-\gamma x} = U_0^+ e^{j\psi_+} e^{-\gamma x}$$

$$\dot{U}^- = A_2 e^{\gamma x} = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) e^{\gamma x}$$

$$= |A_2| e^{j\psi_-} e^{\gamma x} = U_0^- e^{j\psi_-} e^{\gamma x}$$

式中 $U_0^+ = |A_1| > U_0^- = |A_2|$; 对于电流有 $\dot{I}^+ = \frac{\dot{U}^+}{Z_c}$, $\dot{I}^- = \frac{\dot{U}^-}{Z_c}$ 。

由于 $\gamma = \alpha + j\beta$, 式(18-8)中电压 \dot{U} 可写为

$$\dot{U} = U_0^+ e^{-\alpha x} e^{j(\psi_+ - \beta x)} + U_0^- e^{\alpha x} e^{j(\psi_- + \beta x)}$$

现在把电压相量 \dot{U} 化为时间函数形式, 得

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} U_0^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_+) + \sqrt{2} U_0^- e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_-) \\ &= u^+ + u^- \end{aligned} \quad (18-9)$$

这样一来, u 可以看作是两个电压分量 u^+ 和 u^- 的叠加。现在分别研究 u^+ 和 u^- 这两个分量具有的含义。第一个分量 u^+ 为

$$u^+ = \sqrt{2} U_0^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_+)$$

它既是时间 t 的函数, 又是空间位置 x 的函数。假想在传输线的某一固定点, 即 $x = x_1$ 的地方观察 u^+ , 它将是时间 t 的正弦函数。假想在某一固定瞬间 $t = t_1$ 观察, 则 u^+ 沿线按照振幅为指数衰减的正弦规律随 x 变化。为了便于理解 u^+ 的性质, 在图 18-6 中画出 3 个不同瞬间 u^+ 沿线的分布情况。可见, 可以把 u^+ 看为一个随时间增加向 x 增加方向(即从线的始端向终端的方向)运动的衰减波。通常将这种波称为电压入射波、直波或正向行波。

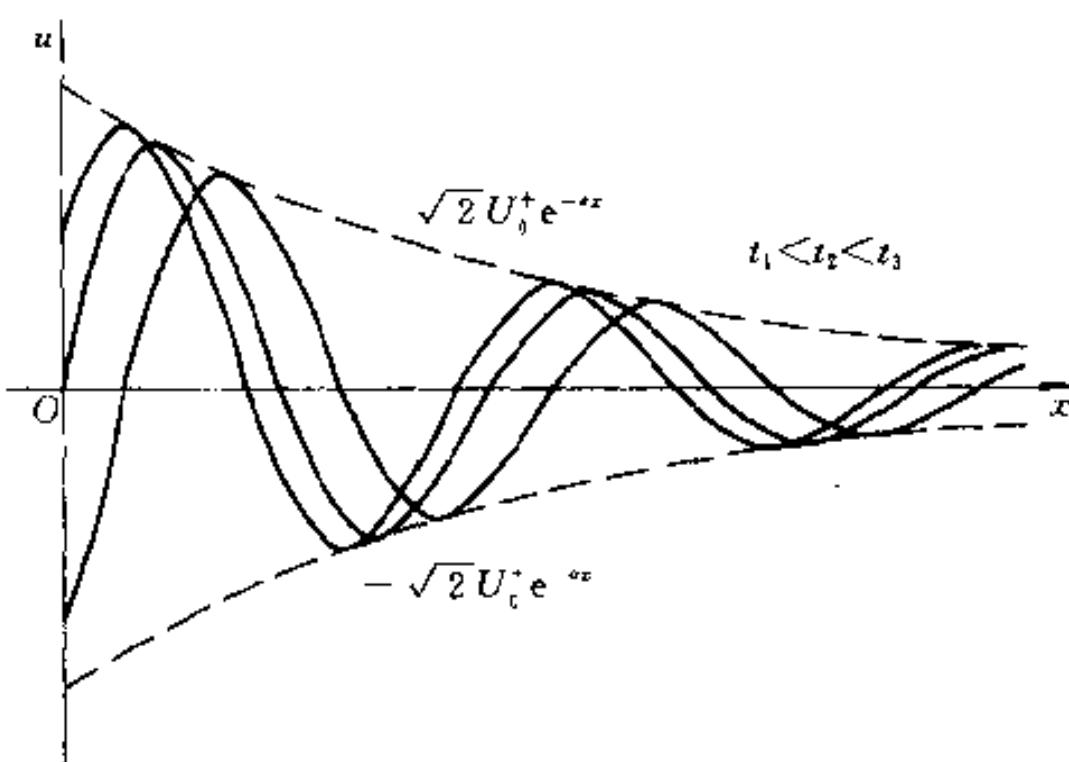


图 18-6 入射波沿线的传播

为了确定这个电压波 u^+ 运动或传播的速度, 假设 $\alpha = 0$, 这时 $u^+ = \sqrt{2} U_0^+ \cos(\omega t - \beta x + \phi_+)$, 也就是说把 u^+ 看作是一个不衰减的正弦波。现在分析 $x = x_1$ 与 $x = x_2$ 二点上电压波动的情况。在 $x = x_1$ 处, $u^+(x_1, t) = \sqrt{2} U_0^+ \cos(\omega t - \beta x_1 + \phi_+)$, 而在 $x = x_2$ 处, $u(x_2, t) = \sqrt{2} U_0^+ \cos(\omega t - \beta x_2 + \phi_+)$, 若 $x_2 > x_1$, 则该两点电压正弦变化的相位关系是 $u^+(x_2, t)$ 比 $u^+(x_1, t)$ 为落后, 落后的相位为 $(-\beta x_1 + \phi_+) - (-\beta x_2 + \phi_+) = \beta(x_2 - x_1) = \beta \Delta x$ 。因此, 在 x_1 处出现的正弦时间变化过程, 要在一定的时间差后才会在距 x_1 为 Δx 的 x_2 处重复出现。这一时间差为

$$\Delta t = \frac{\beta(x_2 - x_1)}{\omega} = \frac{\beta \Delta x}{\omega}$$

故相应的沿线从始端向终端传播速度为

$$v_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} \quad (18-10)$$

这就是整个电压波 u^+ 的传播速度。由于这是同相点的运动速度，称为相位速度，简称相速，以 v_p 表示。

用同样的方法研究式(18-9)右端的第二项

$$u^- = \sqrt{2} U_0 e^{ax} \cos(\omega t + \beta x + \phi_-)$$

它与 u^+ 不同之处在于式中 ax 与 βx 前面的符号恰好相反，所以可以说 u^- 也是一种行波，但其传播方向和 u^+ 相反，也即 u^- 是沿 x 减少的方向以相速 v_p 传播的衰减波，即由终端沿线向始端传播的衰减正弦波。通常把 u^- 称为电压反射波、回波或反向行波。注意在式(18-9)中 $u = u^+ + u^-$ ，所以 u^- 和 u 所取参考方向与 u 的参考方向一致，也就是把传输线的来线取为正极。

在波的传播方向上，相位差 2π 的两点间的距离称为波长，以 λ 表示。这样，从式(18-9)右端的第一项，得

$$\omega t - \beta(x + \lambda) + \phi_- = \omega t - \beta x + \phi_+ - 2\pi$$

从而得

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (18-11)$$

而

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \quad (18-12)$$

也就是在一个周期的时间内，波传播的距离等于一个波长。

在式(18-8)中的电流相量 \hat{I} 也可以写成相应的时间函数形式

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} \frac{U_0^+}{|Z_c|} e^{-ax} \cos(\omega t - \beta x + \phi_+ - \theta) - \sqrt{2} \frac{U_0^-}{|Z_c|} e^{ax} \cos(\omega t + \beta x + \phi_- - \theta) \\ &= i^+ - i^- \end{aligned} \quad (18-13)$$

其中 $|Z_c|$ 和 θ 为特性阻抗 Z_c 的模和辐角，即 $Z_c = |Z_c|e^{j\theta}$ 。可见电流 i 也可以看作是两个以相同的相位速度、但以相反方向传播的衰减正弦波，即入射波电流 i^+ 和反射波电流 i^- 叠加的结果。但须注意，对于反射波电流 i^- ，由于在导线中其方向与入射波电流的方向相反，故两者为相减。图 18-7 给出在某瞬间沿线电压和电流瞬时值和与之相应的入射波和反射波。其中电压 u 是入射波和反射波相加的结果；而电流 i 则是入射波和反射波相减的结果。

从这些波形可以看出，电压和电流在不同时间随 x 的变化是十分复杂的，但其各自的人射和反射分量则呈现为行进方向衰减的行波。因此，采用入射和反射波分量的概念有利于对传输线处于不同情况下电压和电流的分析。在分析时还常引用反射系数的概念。在线上距终端 x' 处的反射系数定义为该处反射波与入射波电压相量或电流相量之比。从式(18-6)可得到

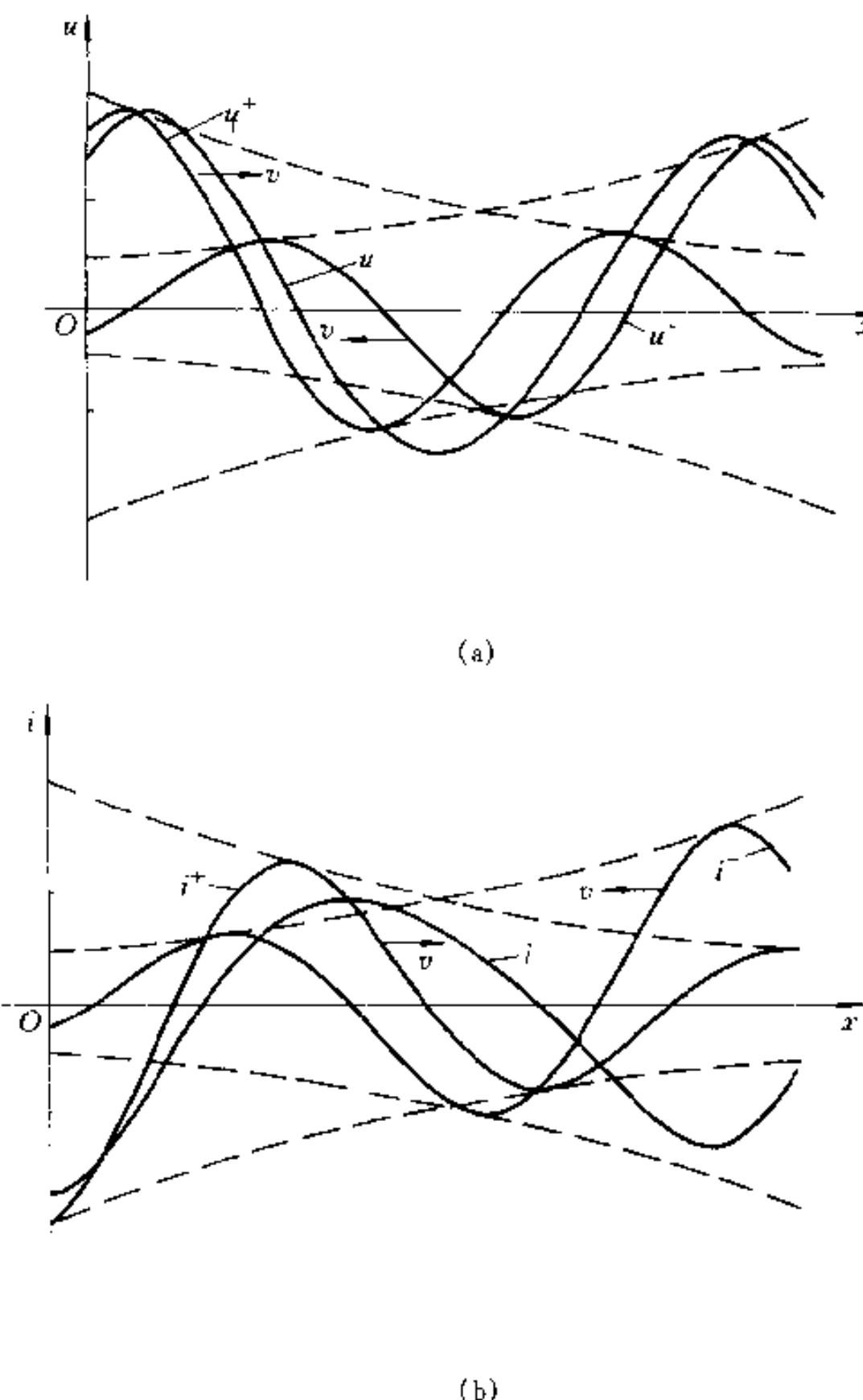


图 18-7 电压波和电流波的沿线分布

$$n = \frac{\dot{U}^+}{\dot{U}^-} = \frac{\dot{I}^+}{\dot{I}^-} = \frac{\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2} e^{-2nx'} = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} e^{-2nx'} \quad (18-14)$$

式中 $Z_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ 为传输线终端的负载阻抗。反射系数 n 是一个复数, 说明反射波与入射波在幅值和相位上的差异。从上式看出, 当终端负载 $Z_2 = Z_c$ 时, 在线上任何处均有 $n = 0$, 即不存在反射波, 这时称为终端阻抗和传输线阻抗匹配^①。在通信线路和设备中, 通常希望不存在反射波。当 $x' = 0$, 从式(18-14)就可以得到传输线终端的反射系数并以 n_2 表示。可见当 $Z_2 = \infty$ 即终端开路时, $n_2 = 1$; 当 $Z_2 = 0$ 即终端短路时, $n_2 = -1$ 。 $|n_2| = 1$ 称为全反射。这两种情况下都

^① 这里的“匹配”(要求 $Z_2 = Z_c$)与最大功率传输时的匹配有所不同。

是全反射,但相位不同。终端的反射大小反映了传输线在终端必须满足的边界条件。

例 18-3 有一均匀传输线长 300 km, 在频率 $f = 50$ Hz 时, 传播常数 $\gamma = 1.06 \times 10^{-3}/84.7^\circ$ 1/km, $Z_c = 400/-5.3^\circ$ Ω, 若已知 $\dot{U}_1 = 120/0^\circ$ kV, $\dot{I}_1 = 30/-10^\circ$ A。求:(1) 行波的相速; (2) 距始端 50 km 处电压、电流入射波和反射波的瞬时值表达式。

解 由于 $\gamma = 1.06 \times 10^{-3}/84.7^\circ$ 1/km $\approx (0.979 \times 10^{-4} + j1.055 \times 10^{-3})$ 1/km, 故相速

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 50}{1.055 \times 10^{-3}} = 2.98 \times 10^5 \text{ km/s}$$

再按式(18-4)、(18-8)求出 \dot{U}_1^+ 和 \dot{U}_1^- :

$$\dot{U}_1^+ = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) = 65806/-1.38^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_1^- = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) = 54236/1.67^\circ \text{ V}$$

由式(18-9):

$$u_1^+ = \sqrt{2} \times 65806 e^{0.979 \times 10^{-4} x} \cos(314t - 1.055 \times 10^{-3}x - 1.38^\circ) \text{ V}$$

$$u_1^- = \sqrt{2} \times 54236 e^{0.979 \times 10^{-4} x} \cos(314t + 1.055 \times 10^{-3}x + 1.67^\circ) \text{ V}$$

所以在 $x = 50$ km 处, 有:

$$u^+ = \sqrt{2}65485 \cos(314t - 4.4^\circ) \text{ V}$$

$$u^- = \sqrt{2}54502 \cos(314t + 4.7^\circ) \text{ V}$$

根据电压和电流入射波和反射波之间的关系:

$$i^+ = \sqrt{2}163.7 \cos(314t + 0.9^\circ) \text{ A}$$

$$i^- = \sqrt{2}136.2 \cos(314t + 10^\circ) \text{ A}$$

§ 18-4 均匀传输线的原参数和副参数

传输线单位长度的电阻 R_0 、电感 L_0 、电容 C_0 和电导 G_0 称为它的原参数, L_0 和 C_0 的计算公式在电磁场课程中介绍。上一节引入的传播常数 γ 和特性阻抗 Z_c 称为传输线的副参数。

传播常数 γ 是一个复数, 其实部 α 称为衰减常数; 虚部 β 称为相位常数。从式(18-9)及以后有关的讨论中可以看出, α 表示入射波和反射波沿线的衰减

特性,其单位通常用 Np/m 或 dB/m^①;而 β 表示入射波和反射波沿线的相位变化的特性,其单位通常用 rad/m。

为了计算均匀传输线的 α 和 β ,设 R_0 、 L_0 、 C_0 和 G_0 为已知,则根据 $\gamma = \alpha + j\beta$ 有

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

所以:

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \\ \gamma^2 &= \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta \\ &= (R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + j(G_0 \omega L_0 + R_0 \omega C_0) \end{aligned}$$

从以上两式不难分别求得:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} [R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}]} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}]} \end{aligned} \right\} \quad (18-15)$$

值得注意的是,相位常数 β 是单调地随频率增高而增加,图 18-8 给出了 α 和 β 与角频率的变化关系。

按式(18-10)和(18-11),相位速度和波长是由相位常数 β 决定的,即有:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

满足条件 $R_0/G_0 = L_0/C_0$ 的传输线称为无畸变线,信号在无畸变线上传播时,不会产生畸变。此时,按式(18-15), $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$, $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ 。满足 $R_0 = G_0 = 0$ 的传输线称为无损耗线,此时 $\alpha = 0$, $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ 。无损耗线也是无畸变线,对于上述两种情况,有

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

^① 在有线通信中通常用奈培(Neper, Np)表示电平。Np 是根据研究的量的自然对数定义的。以两个电压 U_1 、 U_2 为例,Np 定义为

$$Np = \ln \left| \frac{U_2}{U_1} \right|$$

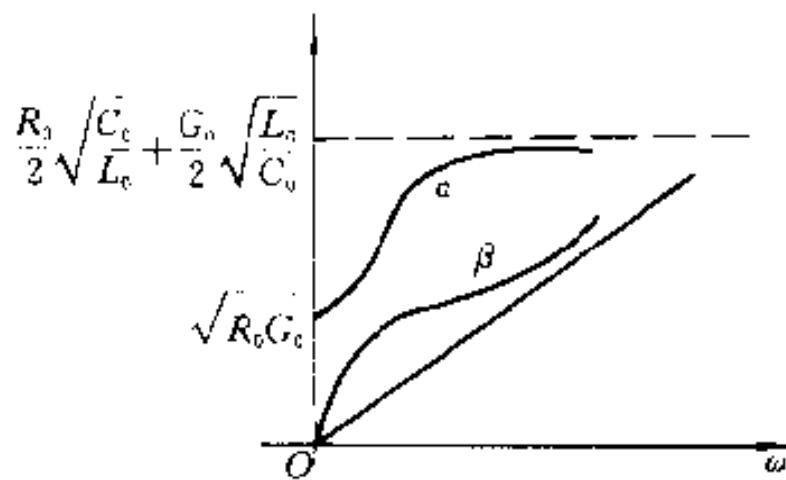
前面已指出分贝(dB)是根据常用对数定义的,即

$$dB = 20 \log \left| \frac{U_2}{U_1} \right|$$

由上述定义,可推出:

$$1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB}$$

$$1 \text{ dB} = 0.115 \text{ Np}$$

图 18-8 α 和 β 的频率特性

或^①

$$v_p \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

后一式中， c 为真空中的光速， ϵ_r 和 μ_r 分别为导线周围媒质的相对介电常数和相对磁导率。对于架空线， $\epsilon_r \approx 1$ 和 $\mu_r \approx 1$ ，即波的传播速度 v_p 实际上等于真空中的光速。对于电缆，这一速度要小一些，因为电缆中用的绝缘介质的相对介电常数 $\epsilon_r \approx 4 \sim 5$ ，所以波的相速比真空中的光速低。在有损耗的线中 ($R_0 \neq 0, G_0 \neq 0$)，相速总是比光速为小。

从式(18-8)可见，特性阻抗 Z_c 为人射波(或反射波)电压、电流相量的比值。它与原参数的关系是

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = |Z_c| e^{j\theta} \quad (18-16)$$

式中：

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2}} \quad (18-17)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\omega L_0}{R_0} \right) - \arctan \left(\frac{\omega C_0}{G_0} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\omega L_0 G_0 - \omega C_0 R_0}{R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0} \right) \end{aligned} \quad (18-18)$$

当 $\omega = 0$ 时，即在直流情况下

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}, \quad \theta = 0$$

此时特性阻抗是纯电阻。对工作频率较高的传输线，由于 $R_0 \ll \omega L_0$ 和 $G_0 \ll$

^① 此公式的证明需用计算 L_0 和 C_0 的公式，请参阅电磁场教材。

ωC_0 , 所以

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{j\omega L_0 \left(1 + \frac{R_0}{j\omega L_0}\right)}{j\omega C_0 \left(1 + \frac{G_0}{j\omega C_0}\right)}} \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

可见此时 Z_c 也是纯电阻性质的。

显然, $R_0 = 0$ 和 $G_0 = 0$ 的无损耗传输线的特性阻抗也是一个纯电阻, 且其 $Z_c = \sqrt{L_0/C_0}$ 。一般架空线的特性阻抗 $|Z_c|$ 约为 400 至 600 Ω , 而电力电缆约为 50 Ω , 这是因为与架空线相比, 电缆中的导线彼此相距较近, 而且导线间的绝缘材料的相对介电常数 $\epsilon_r \approx 4 \sim 5$, 所以 L_0 与 C_0 的比值要比架空线的小。因此电缆的 $|Z_c|$ 只有架空线的 $\frac{1}{6}$ 至 $\frac{1}{8}$ 。在通信中使用的同轴电缆的 $|Z_c|$ 一般为 40 至 100 Ω , 常用的有 75 Ω 和 50 Ω 两种。

由于 $\omega C_0 \gg G_0$, 式(18-16)中分母复数的辐角接近 45° , 要比分子复数的辐角大, 所以特性阻抗的辐角 θ 常为负值。

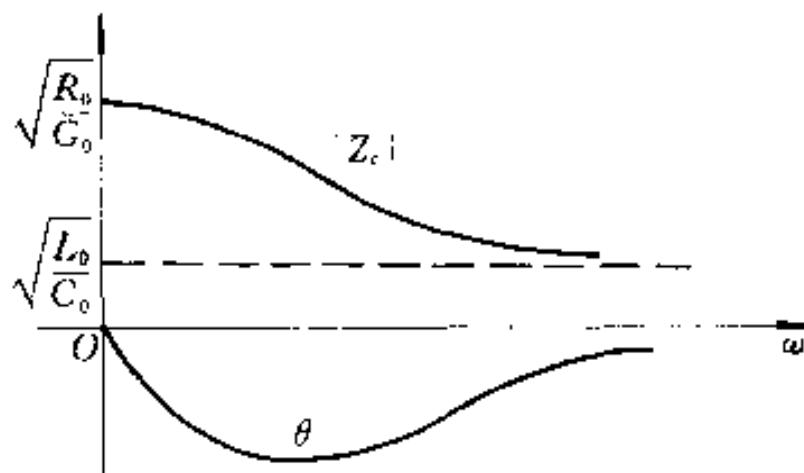


图 18-9 $|Z_c|$ 和 θ 的频率特性

根据式(18-17)和(18-18)作出 $|Z_c|$ 和 θ 的频率特性如图 18-9 所示。从式(18-16)可以看出, 当 $\omega = 0$ 时

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$$

而当 $\omega \rightarrow \infty$ 时

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

不论是架空线还是电缆, 都有 $R_0/G_0 > L_0/C_0$, 所以 $\omega = 0$ 时的 $|Z_c|$ 比 $\omega \rightarrow \infty$ 时的大。

例 18-4 已知传输线的特性阻抗 $Z_c = 500/-37^\circ \Omega$, $\gamma = 0.2/45^\circ \text{ 1/km}$; 负载阻抗 $Z_L = 400 \Omega$, 负载电流 $I_2 = 0.5 \text{ A}$, 工作频率为 1000 Hz, 线长 5 km。试求

始端电压 \dot{U}_1 和电流 \dot{I}_1 。

解 根据式(18-7)：

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh(\gamma l) + Z_c \dot{I}_2 \sinh(\gamma l)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cosh(\gamma l) + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh(\gamma l)$$

由已知条件求出：

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2 = 400 \times 0.5 / 0^\circ \text{ V} = 200 / 0^\circ \text{ V}$$

$$\gamma l = 0.2 / 45^\circ \times 5 = 1 / 45^\circ = 0.707 + j0.707$$

$$\cosh(\gamma l) = 1.08 / 27.48^\circ$$

$$\sinh(\gamma l) = 1.005 / 54.5^\circ$$

从而计算出：

$$\dot{U}_1 = (200 / 0^\circ \times 1.08 / 27.48^\circ + 0.5 \times 500 / -37^\circ \times 1.005 / 54.5^\circ) \text{ V}$$

$$= 465.5 / 22.1^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = (0.5 \times 1.08 / 27.48^\circ + 200 / 0^\circ / 500 / -37^\circ \times 1.005 / 54.5^\circ) \text{ A}$$

$$= 0.802 / 54.3^\circ \text{ A}$$

§ 18-5 终端接特性阻抗的传输线

如果在均匀传输线的终端接入的负载 Z_2 与特性阻抗 Z_c 相等, 从式(18-14)可以得出反射系数 $n = 0$, 也就是反射波不存在。前面已指出, 这时传输线工作于匹配状态。根据式(18-6), 有:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x}, \quad \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x}$$

可见, 当终端接特性阻抗后, 沿线任何一点的电压相量 \dot{U} 和电流相量 \dot{I} 之比值都等于特性阻抗, 即有

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_c$$

因此, 对于匹配的传输线($Z_2 = Z_c$), 从沿线任何处向终端看的输入阻抗 Z_{in} 总等于特性阻抗 Z_c 。

当传输线终端的负载为特性阻抗时, 该线传输的功率称为自然功率。在始端从电源吸收的功率为

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \theta$$

而在终端, 负载获得的功率为

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \theta$$

上两式中的 θ 为特性阻抗 Z_c (也即 Z_2)的幅角。

考虑到沿线距终端 x 处的电压和电流为：

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x} = \dot{U}_2 e^{ax} e^{j\beta x}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x} = \dot{I}_2 e^{ax} e^{j\beta x}$$

始端功率 P_1 可以写为(此时 $x = l$)

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \theta = U_2 I_2 e^{2al} \cos \theta = P_2 e^{2al}$$

其中 l 为线的长度。于是传输效率为

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2al}$$

显然,在负载 Z_2 与特性阻抗匹配下运行时,由于反射波不存在,通过入射波传输到终端的功率全部为负载吸收。但是当负载不匹配时,入射波的一部分功率将被反射波带回给始端电源,因此负载得到的功率将比匹配时的小,传输效率也就较低。

对于终端在无限远处的传输线(半无限长线),反射波就不可能发生,因此可以认为其工作情况与匹配的有限长的线相同,所以上面的讨论对这种传输线也同样适用。

§ 18-6 终端接任意阻抗的传输线

先考虑两种情况,即终端负载阻抗 $Z_2 = \infty$ (开路)和 $Z_2 = 0$ (短路)。

当终端开路时, $\dot{I}_2 = 0$,按式(18-7),可以求得距终端为 x 处的电压 \dot{U}_x 和电流 \dot{I}_x 为:

$$\begin{aligned}\dot{U}_x &= \cosh(\gamma x) \\ \dot{I}_x &= \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh(\gamma x)\end{aligned}\tag{18-19}$$

其中下标“oc”表示开路情况。由此可以得到开路时在始端的输入阻抗为($x = l$)

$$Z_{\infty} = \left. \frac{\dot{U}_x}{\dot{I}_x} \right|_{x=l} = Z_c \frac{\cosh(\gamma l)}{\sinh(\gamma l)} = Z_c \coth(\gamma l)$$

当传输线的长度 l 改变时,输入阻抗将随之而改变。 Z_{∞} 的模 $|Z_{\infty}|$ 随 l 的变化如图 18-10 所示。显然,当 $l \rightarrow \infty$ 时(半无限长线), $|Z_{\infty}| = |Z_c|$ 。

为了便于说明电压和电流沿线的变化,将电压和电流用有效值表示,并利用下列数学关系式:

$$|\cosh(\gamma x)|^2 = |\cosh^2(ax + j\beta x)| = \frac{1}{2} [\cosh(2ax) + \cos(2\beta x)]$$

$$|\sinh(\gamma x)|^2 = |\sinh^2(ax + j\beta x)| = \frac{1}{2} [\cosh(2ax) - \cos(2\beta x)]$$

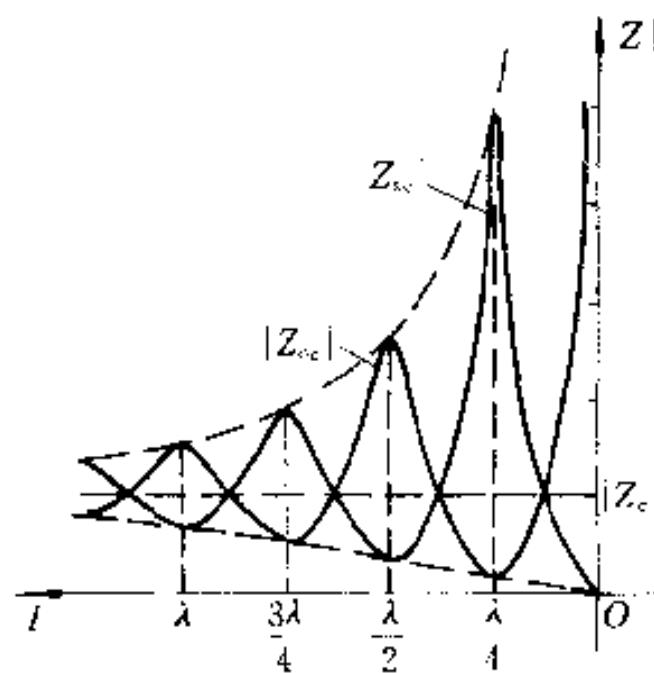


图 18-10 终端开路和短路时传输线的输入阻抗

这样,从式(18-19),可以求得:

$$U_{\infty}^2 = \frac{1}{2} U_2^2 [\cosh(2\alpha x) + \cos(2\beta x)]$$

$$I_{\infty}^2 = \frac{1}{2} \frac{U_2^2}{|Z_e|^2} [\cosh(2\alpha x) - \cos(2\beta x)]$$

图 18-11 画出了 U_{∞}^2 和 I_{∞}^2 随 x 变化的曲线。可以看出, U_{∞}^2 和 I_{∞}^2 的最大值和最小值大约每隔 $\lambda/4$ 更替一次。在终端处电流为零,而电压为最大值。如果传输线的长度不超过 $\lambda/4$,则空载时电流的有效值从线的始端逐渐变小,到终端时为零,而电压的有效值则从始端向终端增长,到终端时为最大值。显然,这时终端电压的有效值将比始端高。 U_{∞} 和 I_{∞} 随 x 的变化与 U_{∞}^2 和 I_{∞}^2 相似,不过其波动较小。

当终端为短路时, $Z_2 = 0$, $\dot{U}_2 = 0$ 。从式(18-7)可以得到距终端为 x 处的电压 \dot{U}_{∞} 和电流 \dot{I}_{∞} 为:

$$\dot{U}_{\infty} = Z_e \dot{I}_2 \sinh(\gamma x), \quad \dot{I}_{\infty} = I_2 \cosh(\gamma x)$$

其中下标“sc”表示短路情况。终端短路时,始端的输入阻抗为

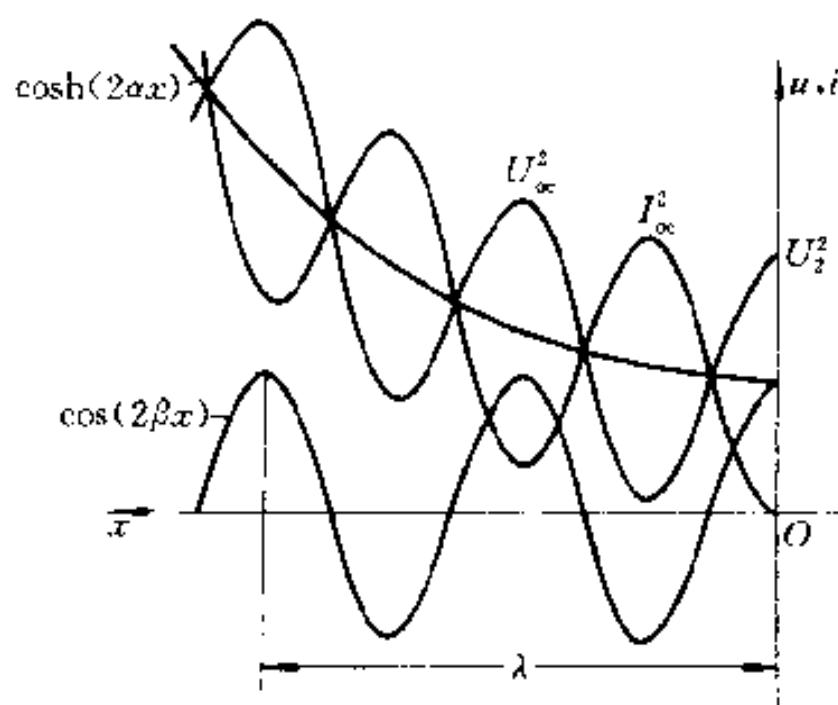
$$Z_{\infty} = \frac{\dot{U}_{\infty}}{\dot{I}_{\infty}} = Z_e \tanh(\gamma l)$$

$|Z_{\infty}|$ 与 l 的变化关系如图 18-10 所示,同理可得:

$$U_{\infty}^2 = \frac{1}{2} |Z_e|^2 I_2^2 [\cosh(2\alpha x) - \cos(2\beta x)]$$

$$I_{\infty}^2 = \frac{1}{2} I_2^2 [\cosh(2\alpha x) + \cos(2\beta x)]$$

与开路时的 U_{∞}^2 和 I_{∞}^2 对比,可见 U_{∞}^2 沿线的变化规律与 I_{∞}^2 相似,而 I_{∞}^2 则与 U_{∞}^2

图 18-11 终端开路的传输线 U_∞^2 和 I_∞^2 沿线的变化

相似。

当传输线的终端接任意阻抗 Z_2 时, 有 $\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2$, 按式(18-7), 距终端 x 处的电压和电流为:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cosh(\gamma x) + Z_c \dot{I}_2 \sinh(\gamma x)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \cosh(\gamma x) + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh(\gamma x)$$

令

$$M \cosh \sigma = \dot{U}_2 \quad M \sinh \sigma = Z_c \dot{I}_2$$

$$N \cosh \sigma = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \quad N \sinh \sigma = \dot{I}_2$$

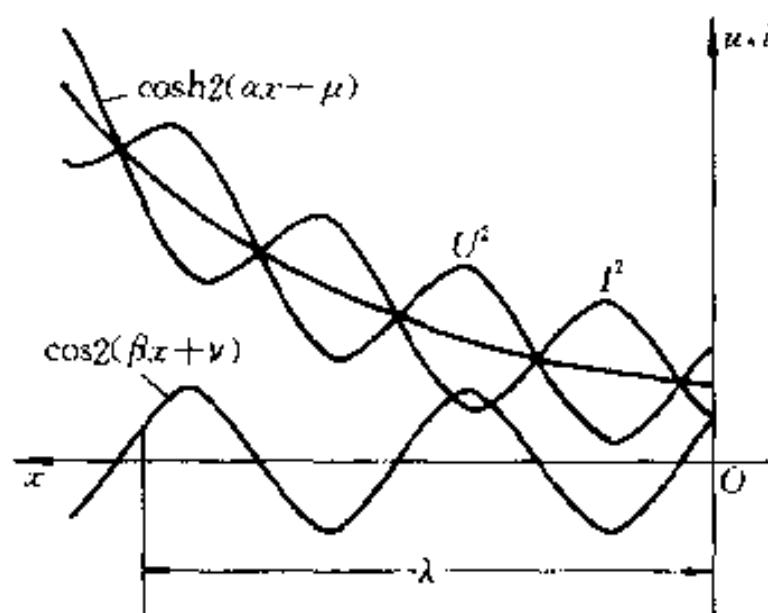
其中 $\sigma = \mu + j\nu$, 代入上式后, 可以得出

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_2 \cosh(\sigma + \gamma x)}{\cosh \sigma} \\ \dot{I} &= \frac{\dot{I}_2 \sinh(\sigma + \gamma x)}{\sinh \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (18-20)$$

在有负载 Z_2 时的 U^2 和 I^2 沿线变化的曲线与空载或短路时的 U^2 和 I^2 的沿线变化曲线有类似形状, 其主要区别在于终端电压和电流都不等于零, 如图 18-12。

按式(18-7), 终端接负载 Z_2 时, 始端的输入阻抗为

$$Z_{in} = \left. \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \right|_{x=0} = \frac{\dot{U}_2 \cosh(\gamma l) + Z_c \dot{I}_2 \sinh(\gamma l)}{\frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh(\gamma l) + \dot{I}_2 \cosh(\gamma l)}$$

图 18-12 终端负载为 Z_2 时 U^2 和 I^2 沿线的变化

$$= Z_c \frac{1 + \frac{Z_c}{Z_2} \tanh(\gamma l)}{\tanh(\gamma l) + \frac{Z_c}{Z_2}} \quad (18-21)$$

由于

$$\frac{Z_c I_2}{U_2} = \frac{M \sinh \sigma}{M \cosh \sigma} = \tanh \sigma$$

故

$$Z_{in} = Z_c \frac{1 + \tanh \sigma \tanh(\gamma l)}{\tanh(\gamma l) + \tanh \sigma} = Z_c \coth(\sigma + \gamma l) \quad (18-22)$$

§ 18-7 无损耗传输线

如果传输线的电阻 R_0 和导线间的漏电导 G_0 等于零, 这种传输线就称为无损耗传输线, 简称为无损耗线。

在无线电工程中由于工作频率较高, 因此 $\omega L_0 \gg R_0$, $\omega C_0 \gg G_0$, 如将损耗略去不计, 即令 $R_0 = 0$ 和 $G_0 = 0$, 不致引起较大的误差。在这种情况下

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(j\omega L_0)(j\omega C_0)} = j\omega \sqrt{L_0 C_0}$$

故 $\alpha = 0$, 而 $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ 。特性阻抗

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

可见无损耗线的特性阻抗是一个纯电阻且与频率无关。下面分几种不同情况讨论无损耗线。

终端开路时, $Z_2 = \infty$, $I_2 = 0$ 。从式(18-6)距终端 x 处的电压和电流为

$$\left. \begin{aligned} U_\infty &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 e^{j\beta x} + \dot{U}_2 e^{-j\beta x}) = \dot{U}_2 \cos(\beta x) \\ I_\infty &= \frac{1}{2Z_c}(\dot{U}_2 e^{j\beta x} - \dot{U}_2 e^{-j\beta x}) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin(\beta x) \end{aligned} \right\} \quad (18-23)$$

设终端电压 $u_2 = \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t)$, 把上式化为时间函数后, 有:

$$u_\infty = \sqrt{2} U_2 \cos(\beta x) \sin(\omega t)$$

$$i_\infty = \frac{\sqrt{2} U_2}{Z_c} \sin(\beta x) \cos(\omega t)$$

这两个解答称为驻波解答。从式(18-23)可以看出, u_∞ 和 i_∞ 是由振幅相同但不衰减(因为 $\alpha = 0$)的人射波和反射波叠加的结果。在 $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$ 处, $\cos(\beta x)$ 为 ± 1 , 而 $\sin(\beta x)$ 为零, 因此在这些地方, $u_\infty = \pm \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t)$, $i_\infty = 0$; 在 $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ 处, $\cos(\beta x)$ 为零, $\sin(\beta x) = \pm 1$, 因此在这些地方, $u_\infty = 0$,

$i_\infty = \pm \frac{\sqrt{2} U_2}{Z_c} \cos(\omega t)$ 。图 18-13 画出了几个不同瞬间 u_∞ 和 i_∞ 沿线的分布曲线, 图中对应于波形的时间自变量 t 为 $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$; 在 $t + \frac{T}{4} = (4k + 1)\frac{T}{4}$

瞬间, 沿线各处电流都变为零; 在 $t + \frac{T}{2} = (2k + 1)\frac{T}{2}$ 瞬间, 沿线各处电压都变为零。在 $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ 处有电压的波腹和电流的波节; 在 $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ 处有电压的波节和电流的波腹。在波腹处总出现分布曲线的最大值, 在波节处则恒为零。图 18-13 表明电压和电流的波腹和波节的位置都是固定不变的。这种波腹、波节位置固定不变的波称为驻波。

空载时, 在始端的输入阻抗为

$$Z_\infty = \frac{U_\infty}{I_\infty} = -j Z_c \cot(\beta l) = -j Z_c \cot\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right) = j X_\infty \quad (18-24)$$

式中 $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = \omega / \lambda f = 2\pi / \lambda$ 。上式表示输入阻抗是一个纯电抗, 且可以看出, $0 < l < \lambda/4$ 时, X_∞ 为容抗; $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ 时, X_∞ 为感抗, 余类推(见图 18-14)。

在 $l = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ 处, 即在电压波节(电流波腹)处, $Z_\infty = 0$, 相当于发生串联谐振; 在 $l = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ 处即在电压波腹(电流波节)处, $Z_\infty = \infty$, 相当于并联谐振。

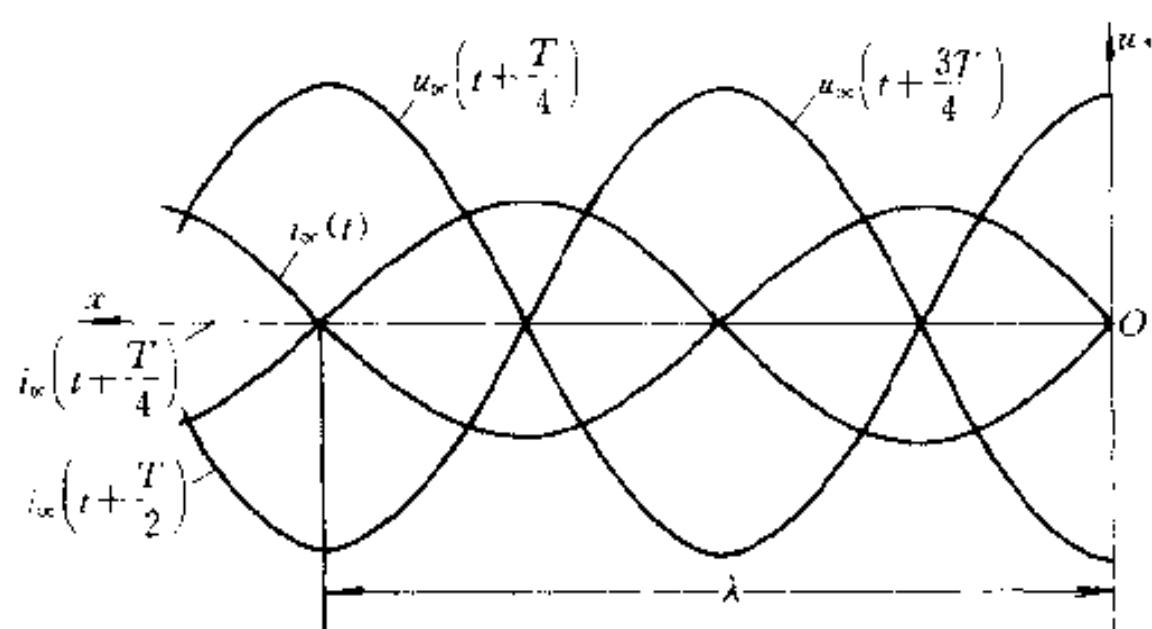


图 18-13 空载无损耗线的电压和电流分布曲线

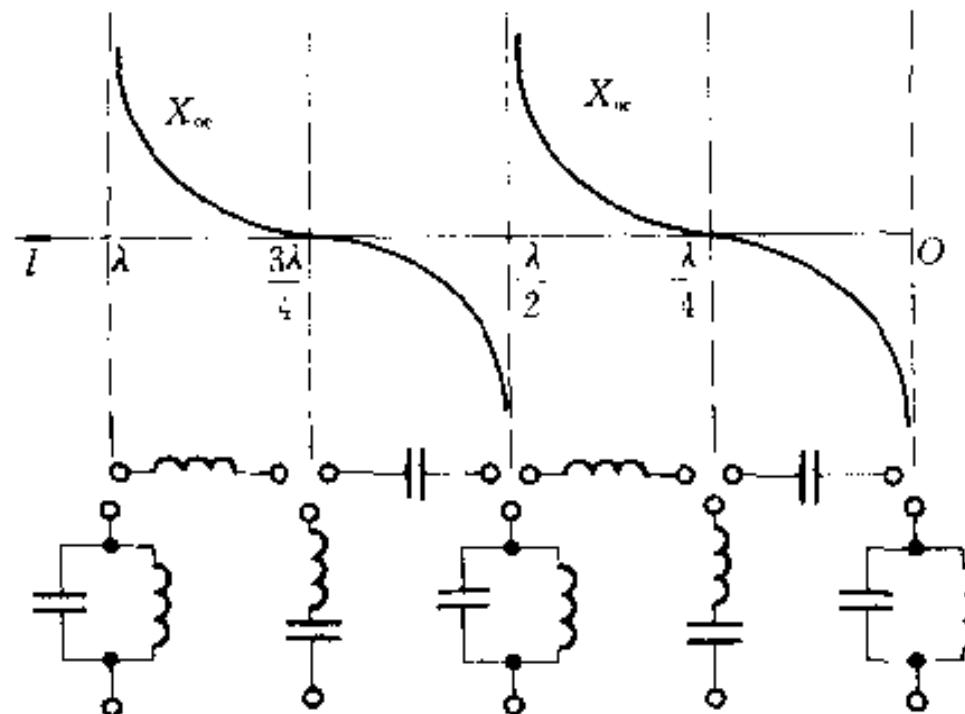


图 18-14 空载无损耗线的输入阻抗

终端短路时, $Z_2 = 0$, $\dot{U}_2 = 0$ 。同样从式(18-6)得到距终端 x 处的电压和电流:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{sc} &= \frac{1}{2} (Z_c \dot{I}_2 e^{j\beta x} - Z_c \dot{I}_2 e^{-j\beta x}) = j Z_c \dot{I}_2 \sin(\beta x) \\ \dot{I}_{sc} &= \frac{1}{2} (\dot{I}_2 e^{j\beta x} + \dot{I}_2 e^{-j\beta x}) = \dot{I}_2 \cos(\beta x) \end{aligned} \right\} \quad (18-25)$$

设终端电流 $i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t)$, 则上式化为时间函数后, 有:

$$u_{sc} = \sqrt{2} Z_c I_2 \sin(\beta x) \cos(\omega t)$$

$$i_{sc} = \sqrt{2} I_2 \cos(\beta x) \sin(\omega t)$$

可以看出, 在这种情况下电压和电流也是由不衰减且振幅相同的人射波和反射波叠加而成的, 而且它们也是驻波。但波腹和波节的位置与空载时不同。此时

电压的波腹和电流的波节出现在 $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ 处, 而电压的波节和电流的波腹出现在 $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ 处。电压 u_{sc} 和电流 i_{sc} 的沿线分布如图 18-15 所示。图中对应于波形的时间自变量 t 为: $t = kT, k = 0, 1, 2, \dots$; 在 $t + \frac{T}{2} = (2k + 1)\frac{T}{2}$ 瞬间, 沿线各处电流都变为零; 在 $t + \frac{T}{4} = (4k + 1)\frac{T}{4}$ 瞬间, 电压处处为零。

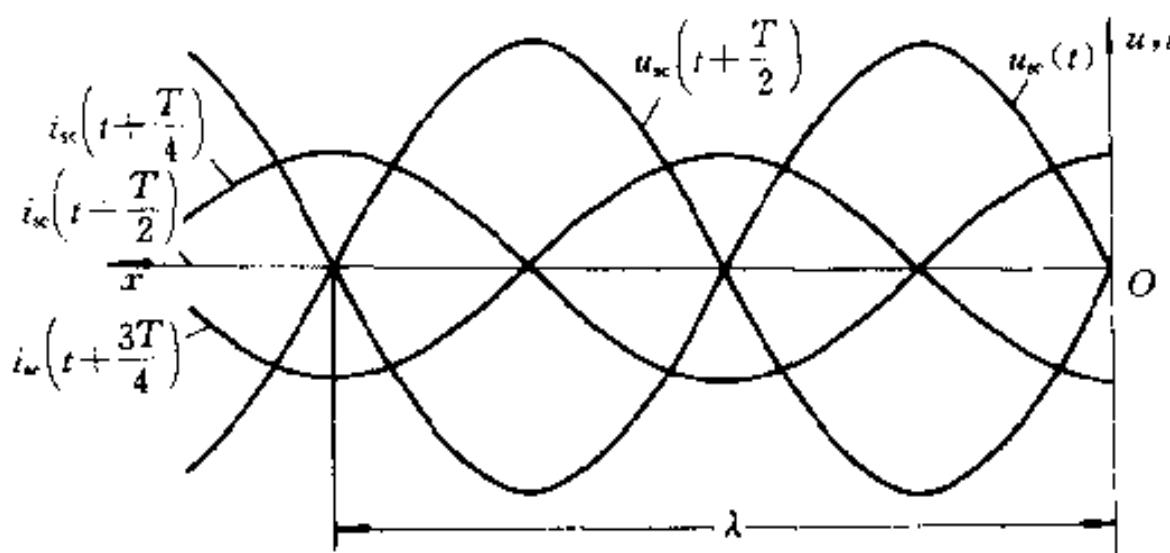


图 18-15 短路无损耗线的电压和电流分布曲线

终端短路的无损耗线的始端的输入阻抗为

$$Z_{sc} = \frac{U_{sc}}{I_{sc}} = jZ_c \tan(\beta l) = jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right) = jX_{sc}$$

可见 Z_{sc} 也是一个纯电抗, 其大小和性质与线长有关。由图 18-16 可以看出, $0 < l < \frac{\lambda}{4}$ 时, X_{sc} 为感抗; $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ 时, X_{sc} 为容抗; 余类推。在 $l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ 时, 输入阻抗 $Z_{sc} = 0$, 相当于串联谐振, 而 $l = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots$ 时, $Z_{sc} = \infty$, 相当于并联谐振。

上述无损耗线在终端开路或短路时, 其输入阻抗具有的一些特点在高频技术中获得了一定的应用。

例如长度小于 $\frac{\lambda}{4}$ 的开路无损耗线可以用来代替电容, 而长度小于 $\frac{\lambda}{4}$ 的短路无损耗线可以用来代替电感。考虑到频率较高时, 常用的电感线圈或电容器已经不可能作为电感元件或电容元件工作, 这种方法的意义就更明显了。假定要替代的容抗 X_C 或感抗 X_L 为已知, 则利用下列公式就可以分别决定所需开路无损耗线或短路无损耗线的长度 l :

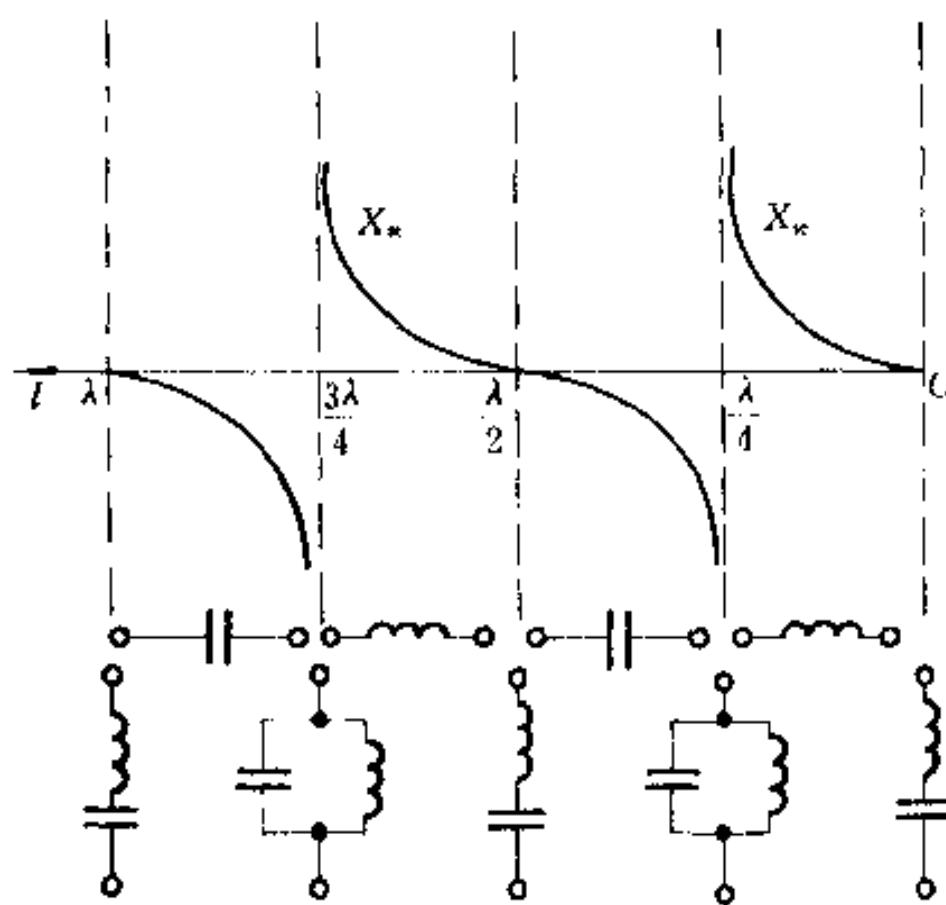


图 18-16 短路无损耗线的输入阻抗

$$X_c = -\frac{1}{\omega C} = -Z_c \cot\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)$$

$$X_L = \omega L = Z_c \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)$$

长度为 $1/4$ 波长的无损耗线，还可以用来作为接在传输线和负载之间的匹配元件，它的作用如同一个阻抗变换器。下面介绍其工作原理。

设无损耗线的特性阻抗为 Z_c ，负载阻抗为 Z_2 ，且设 Z_2 为纯电阻（即 $Z_2 = R_2$ ），现在要求设法使 Z_2 和 Z_c 匹配。为此目的，在传输线的终端与负载 Z_2 之间插入一段 $l = \frac{\lambda}{4}$ 的无损耗线（见图 18-17）。根据式(18-11)，可以求得这段

长度为 $\frac{\lambda}{4}$ 的无损耗线的输入阻抗 Z_{in} 为（注意其终端负载为 Z_2 ）

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_2 + jZ_c \tan\left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{1}{4}\right)}{jZ_2 \tan\left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{1}{4}\right) + Z_c}$$

式中 Z_c 为无损耗线的特性阻抗。因为 $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$ ，所以上式成为 $Z_{in} = \frac{Z_c^2}{Z_2}$ 。

可见，为了达到匹配的目的，应使 $Z_{in} = Z_c$ 。于是求得此 $\frac{\lambda}{4}$ 无损耗线的特性阻抗应为

$$Z_c = \sqrt{Z_c Z_2}$$

此外，在超高频技术中，用固体介质做成支持传输线的绝缘子，其介质损耗往往会太大，以致失去绝缘的作用。因而有时采用所谓“金属绝缘子”，也就是一段长度为 $\frac{\lambda}{4}$ 的短接传输线作为支架。由于这种短路的传输线的输入阻抗非常大（在理想情况等于无限大），因此其损耗小于介质绝缘子中的损耗。

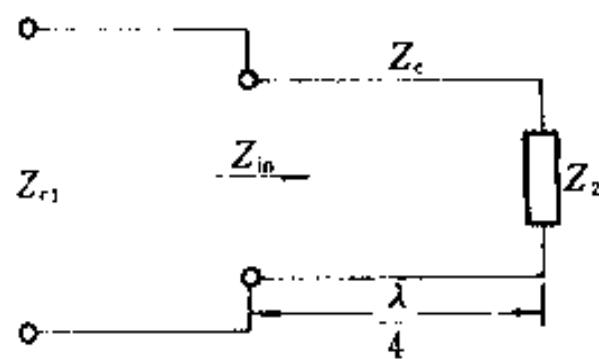


图 18-17 无损耗线作为阻抗变换器

当无损耗线的终端所接负载 $Z_2 = \pm jX_2$ 为纯电抗时，沿线也将出现电压和电流驻波。这不难解释如下：由于电抗可以用一段适当长的开路或短路无损耗线代替，因此，沿终端接有电抗负载的无损耗线的电压和电流的分布情况，与开路或短路的无损耗线上的分布将没有什么本质上的差别。显然，终端接有电抗负载时，在终端处将既不是电压或电流的波腹，也不是电压或电流的波节（见图 18-18）。

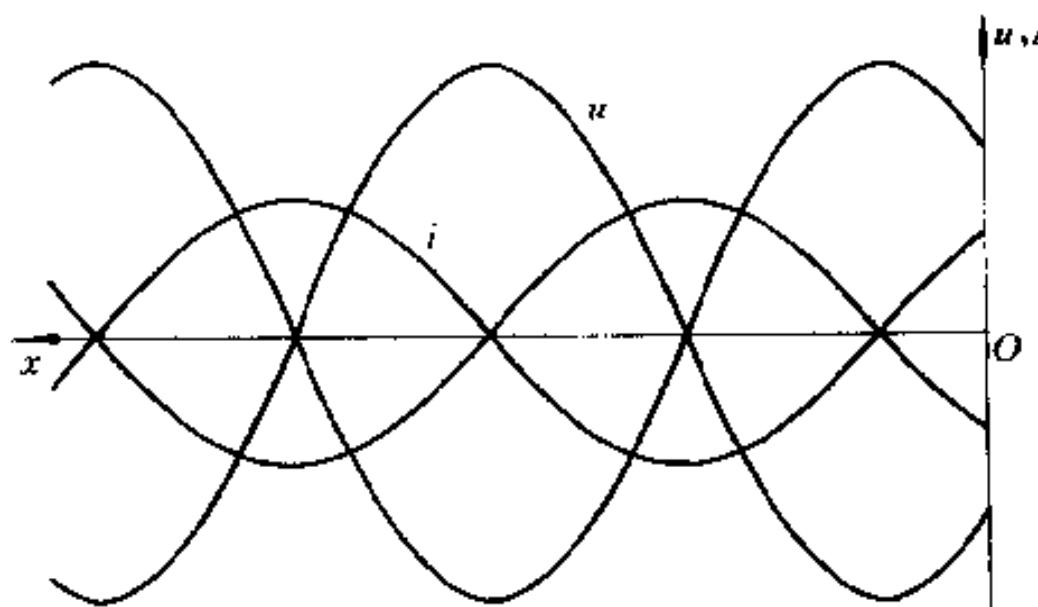


图 18-18 负载为纯电抗的无损耗线的电压和电流分布

不论在哪种情况下，当出现驻波时，在任何瞬间波节处的电压或电流始终为零。所以在这些波节所在处功率也恒等于零。这样，在相邻电压和电流波节之间能量（线上电感的磁场能量和线间电容的电场能量）被封闭在 $\lambda/4$ 的区域内，而不能越出波节而彼此交换。因此，在传输线上出现驻波，将意味着没有有功功率被传输到终端负载。一般说来，只有电压和电流的行波才能传输有功功率。

例 18-5 现用特性阻抗为 75Ω 终端短路的无损耗线来实现工作频率 $f =$

600 MHz 下 $0.7589 \mu\text{H}$ 的电感, 试求其长度 l 。如果改用终端开路的同一线实现, 则长度应为多少?

解 根据终端短路时输入阻抗公式, 有

$$Z_{in} = jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$$

现有 $Z_c = 75 \Omega$, $\lambda = \frac{3 \times 10^8}{600 \times 10^6} \text{ m} = 0.5 \text{ m}$

$$Z_{in} = jX_L = j2\pi \times 600 \times 10^6 \times 0.7589 \times 10^{-6} \Omega = j2861 \Omega$$

故有 $\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right) = \frac{2861}{75} = 38.146$, 解得 $\frac{2\pi}{0.5}l = 1.5446$, $l = 0.123 \text{ m}$ 。

如果使用终端开路的同一无损耗线, 参阅图 8-14 和 18-16 可知, 应为 $l' = 0.123 + \frac{\lambda}{4} = 0.248 \text{ m}$ 。

例 18-6 现有一长度为 0.0625 m 终端开路且 $|Z_c| = 50 \Omega$ 的无损耗线, 已知其工作频率为 600 MHz, 试求其输入阻抗, 它相当于什么元件?

解 输入阻抗

$$Z_{in} = -jZ_c \cot\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$$

现 $Z_c = 50 \Omega$, $\lambda = 0.5 \text{ m}$, $l = 0.0625 \text{ m}$, 代入后可得 $Z_{in} = -j50 \Omega$, 故为容抗。相当的电容

$$C = \frac{1}{\omega \times 50} = 5.305 \text{ pF}$$

例 18-7 架空无损耗线的特性阻抗 $Z_c = 100 \Omega$, 线长 $l = 60 \text{ m}$, 工作频率 $f = 10^6 \text{ Hz}$ 。今欲使始端的输入阻抗为零, 试问终端应接怎样的负载?

解 根据输入阻抗的公式和题意, 有

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_2 + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_2 \tan(\beta l)} = 0$$

从而得

$$Z_2 + jZ_c \tan(\beta l) = 0$$

其中 $\beta = \omega/v_p$, 而 v_p 为真空中的光速, 故

$$\begin{aligned} Z_2 &= -jZ_c \tan(\beta l) = -j100 \tan\left(\frac{2\pi \times 10^6}{3 \times 10^8} \times 60\right) \\ &= -j308 \Omega \end{aligned}$$

在终端应接容抗值为 308Ω 的负载。

例 18-8 把两段无损耗传输线连接起来, 如图 18-19 所示。已知它们的特性阻抗分别为 $Z_{c1} = 60 \Omega$, $Z_{c2} = 100 \Omega$ 。为了使这两段线上都不产生反射, 试

求应接的负载 Z_1 和 Z_2 。

解 由图 18-19 可以看出, 要求在第二段线上不产生反射, 必须满足 $Z_2 = Z_{\infty} = 100 \Omega$ 。这样在 $2-2'$ 处第二段线的输入阻抗 $Z_{in2} = Z_{\infty} = 100 \Omega$ 。

为了使得在第一段线上没有反射, 必须使该线的特性阻抗为

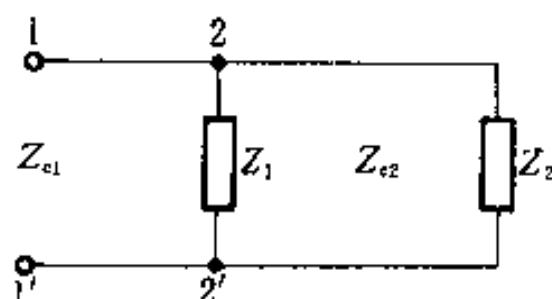


图 18-19 例 18-8 图

$$Z_{in1} = \frac{Z_1 Z_{\infty}}{Z_1 + Z_{\infty}} = \frac{100 Z_1}{Z_1 + 100}$$

或

$$60 = \frac{100 Z_1}{Z_1 + 100}$$

所以

$$Z_1 = 150 \Omega$$

§ 18-8 无损耗线方程的通解

在前面各节中讨论了在正弦稳态下均匀传输线的一些特点, 本节和下一节介绍均匀传输线的时域分析, 并简要地讨论其中发生的过渡过程。这种过渡过程是一系列的波过程, 所以与集总电路的有所不同。

在 § 18-1 中导出了均匀传输线的偏微分方程(18-1)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

式中 R_0 、 L_0 、 C_0 和 G_0 是传输线的原参数, x 是从始端到讨论点的距离。

为简化起见, 忽略传输线的损耗, 即认为 $R_0 = 0$ 和 $G_0 = 0$, 则上述方程成为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (18-26)$$

由于讨论的是均匀传输线, 因此 L_0 和 C_0 为常数且与 x 无关。上述偏微分方程的通解具有下列形式

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= f_1(x - vt) + f_2(x + vt) = u^+ + u^- \\ i(x, t) &= \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] = i^+ - i^- \end{aligned} \right\} \quad (18-27)$$

式中 $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ 称为波的速度, 简称波速(在数值上恰好等于正弦稳态下的相速 v_p); 而函数 f_1 和 f_2 均为待定, 要根据具体的边界条件和初始条件确定。此通解的正确性, 可以把它们代入方程(18-26)加以验证。

为了理解通解的每一项表示的意义, 首先对式(18-27)中的电压分量 u^+

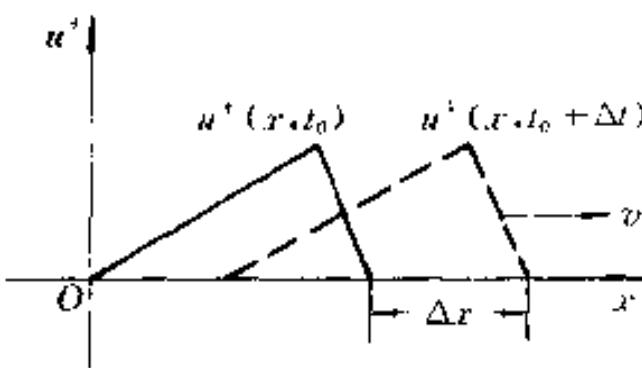


图 18-20 电压入射波沿线的分布

进行讨论。设在 $t = t_0$ 时, 电压分量

$$u^+(x, t_0) = f_1(x - vt_0)$$

设此时电压沿线的分布如图 18-20 中实线所示。在经过时间 Δt 后, 此电压分量 u^+ 将为 $u^+(x, t_0 + \Delta t) = f_1(x - v\Delta t - vt_0) = f_1(x - \Delta x - vt_0)$, 式中 $\Delta x = v\Delta t$ 。比较上两式可以看出, $u^+(x, t_0 + \Delta t)$ 和 $u^+(x, t_0)$ 沿线的分布规律是相同的, 只不过前者比后者向 x 增加的方向移动了一个距离 $\Delta x = v\Delta t$ 。所以 $u^+(x, t)$ 是向前(即从始端向终端)运动的行波分量, 也即入射波, 其波速显然就是 $v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ 。为了便于描述波的传播过程, 引进“波前”的概念。对应于离始端为 x_1 的点, 如果当 $x > x_1$ 时, $u^+ = 0$, 而 $x = x_1$ 时, $u^+ \neq 0$, 则称该点为入射波的波前。

同理, 用相同的方法分析电压分量 u^- , 不难看出它是一个以相同波速 v 向 x 减少的方向运动的行波, 也即反射波。

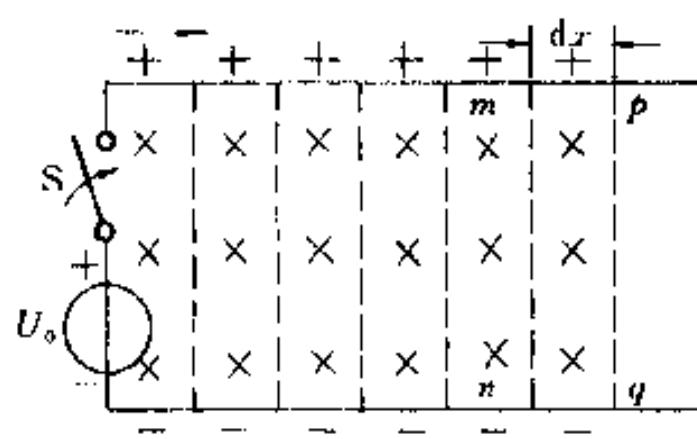
从式(18-27)可以得出沿线任一点电压分量 u^+ (u^-) 和电流分量 i^+ (i^-) 的比值为

$$\frac{u^+}{i^+} = \frac{u^-}{i^-} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_c$$

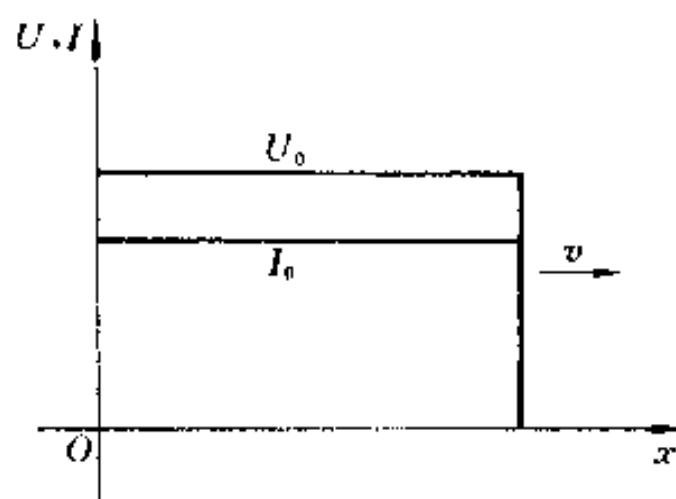
Z_c 就是无损耗线的特性阻抗或波阻抗。因此, u^+ 和 i^+ 都是从始端向终端传播的入射波; 而 u^- 和 i^- 都是向相反方向传播的反射波。这样, 在任何瞬间, 沿线的电压和电流都可以看作是入射波和反射波的叠加。

为了形象地阐明电压波或电流波沿线传播的过程, 假定研究的无损耗线原来没有充电, 且其终端在无限远处(半无限长线)。设在 $t = 0$ 时, 将电压为 U_0

的直流电压源接到该线的始端。由于反射波是在终端产生的，而现在终端在无限远处，因此在有限的时间内，传输线上不会出现反射波，所以只要研究入射波就可以了。这时，电压波将沿线由始端向终端行进，使传输线充电到 U_0 。设在某一瞬间波前传播到 mn 处（见图 18-21），于是在 mn 处的左边沿各处线间电压为 U_0 ，同时来线（上方导线）带正电荷，回线（下方导线）带负电荷（显然，每单位长度所带电量为 $q_0 = C_0 U_0$ ），而在 mn 处的右边，由于电压波尚未到达，各处线间电压均为零，来、回线上也就没有电荷。



(a)



(b)

图 18-21 波沿线的传播

在时间 dt 内，电压波向前移动了距离 $dx = vdt$ 。与此同时在线段 dx 中获得的电荷 $dq = q_0 dx = C_0 U_0 dx$ 。此充电电荷将通过 mn 左边的所有截面，于是从电源到 mn 的全线上就产生了充电电流

$$I_0 = \frac{dq}{dt} = q_0 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0 v = \frac{U_0}{Z_c}$$

入射电流波伴随着入射电压波以同样速度向终端传播。

电源供给的功率为 $U_0 I_0$ ，而入射波在 dt 时间内经过线段 dx 建立的电场和磁场储存的能量分别为：

$$dW_C = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 dx, \quad dW_L = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 dx$$

由于 $\frac{U_0}{I_0} = Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$, 所以 $dW_C = dW_L$, 在线段 dx 内储存的总能量为

$$dW = dW_C + dW_L = C_0 U_0^2 dx \quad (8-28)$$

此能量是在 dt 时间内建立起来的, 所以传输线吸收的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = C_0 U_0^2 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0^2 v = \frac{U_0^2}{Z_c} = U_0 I_0$$

此功率恰好就是始端电源供给的功率。

在无反射情况下传输线上的电压、电流行波可以解析形式表示。设始端电压为 $u(0, t) = U_0 \epsilon(t)$, 式中 $\epsilon(t)$ 为单位阶跃函数, 线上任一点的电压、电流波为:

$$u(x, t) = U_0 \epsilon\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$i(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \epsilon\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

图 18-22 示出这些波形。

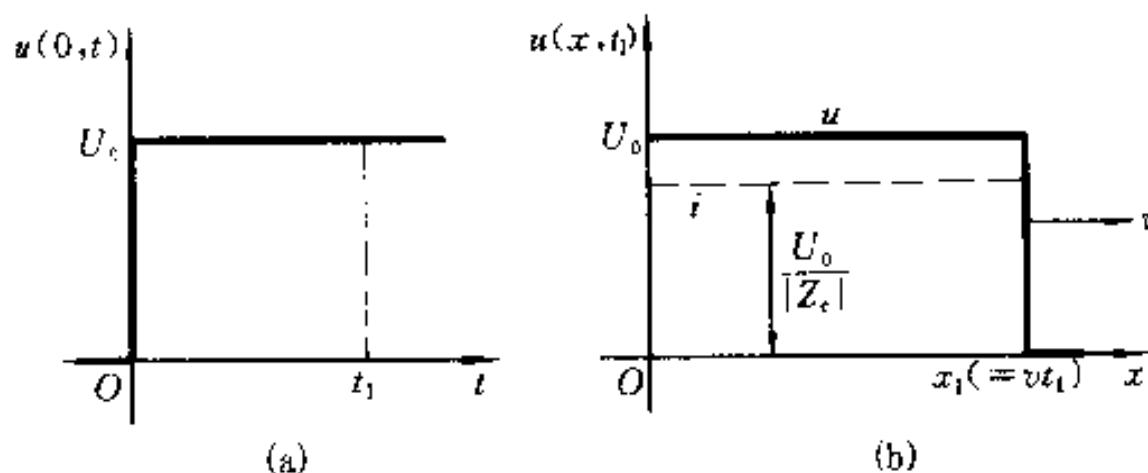


图 18-22 半无限长线的电压和电流行波

如果始端的激励电压为任意波形 $u_s(t)\epsilon(t)$ 如图 18-23(a) 所示, 可得到线上任一点

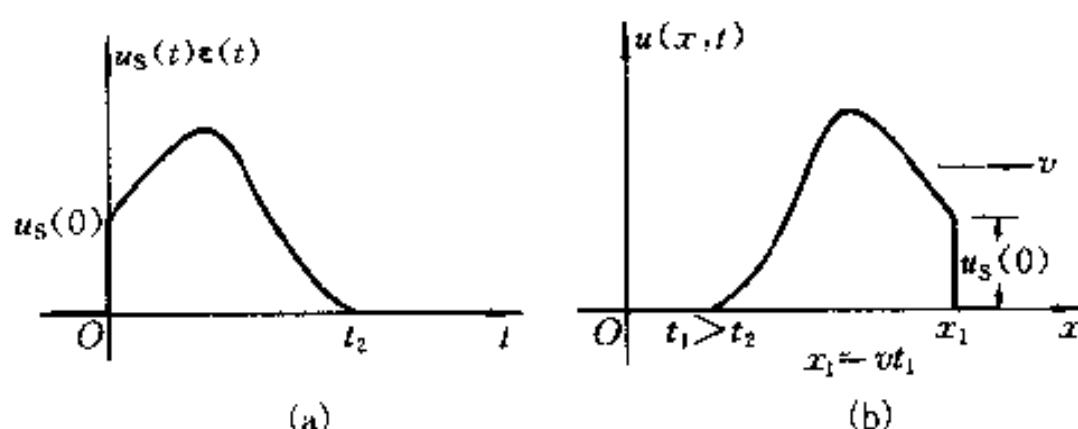


图 18-23 始端激励为任意波时波过程

$$u(x, t) = u_s \left(t - \frac{x}{v} \right) \epsilon \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

示于图(b)之中。注意电压波是以 $u_s(0)$ 为波前向 x 方向行进, 图(a)、(b)中的波形形状相似而对纵轴倒转。

§ 18-9 无损耗线的波过程

上节中讨论了不存在反射时无损耗线上的波过程。当传输线存在终端且不匹配的情况下, 在终端将引起波的反射, 因此, 传输线上除了入射波以外还将存在反射波。本节讨论无损耗线在终端开路和短路两种情况下波的反射过程。

首先研究终端开路的无损耗线接通直流电压 U_0 的波过程。在入射波未到达终端 $0 < t < \frac{l}{v}$ 的时间间隔内, 反射尚未产生, 因此线上的波过程和上节所述相同。在 $t = \frac{l}{v}$ 时波到达终端, 由于终端开路, 这一边界条件要求电流反射波大小为 I_0 , 因为只有电流的这种全反射才能使终端电流为零 ($i = i^+ - i^-$)。反射波所到之处电流变为零。由于 $u^- = Z_c i^- = U_0$, 而 $u^+ = U_0$, 因此, 电压的反射波所到之处使线间电压成为 $2U_0$, 见图 18-24(a) 和 (b)。这一过程发生在 $\frac{l}{v} \leq t < \frac{2l}{v}$ 之间。当反射波到达始端的前一瞬间时, 全线电流为零, 电压为 $2U_0$ 。当反射波到达始端时, 由于始端的边界条件要求电压为 U_0 , 因此在始端也将产生反射, 反射波也即是第二次入射波将为 $-U_0$ 以满足始端的边界条件, 这也决定了第二次入射电流波为 $-I_0$ 。故 $\frac{2l}{v} \leq t < \frac{3l}{v}$ 的时间间隔内, 波所到之处将使电压为 U_0 而电流为 $-I_0$, 见图(c)。在 $t = \frac{3l}{v}$ 第二次入射波到达终端时, 终端的边界条件要求第二次反射波为 $-I_0$, 使 $i^+ - i^- = 0$, 第二次反射电压为 $-U_0$ 。故在 $\frac{3l}{v} \leq t < \frac{4l}{v}$ 时间间隔内, 波所到之处将使线上电压和电流均为零, 如图(d)所示。当 $t = \frac{4l}{v}$ 时, 第二次反射波到达始端, 全线电压和电流均为零, 完成接通过程的一次循环, 即回复到开始接通的状态。以后的过程将周期性地重复出现。此周期等于波行进 4 倍线长所需的时间, 即 $T = \frac{4l}{v} = 4l \sqrt{L_0 C_0}$ 。

终端短接的无损耗线与直流电压的接通过程与上述开路线相仿。当第一次入射波到达终端时将产生电压的全反射, 第一次电压反射波为 $-U_0$ 而电流反

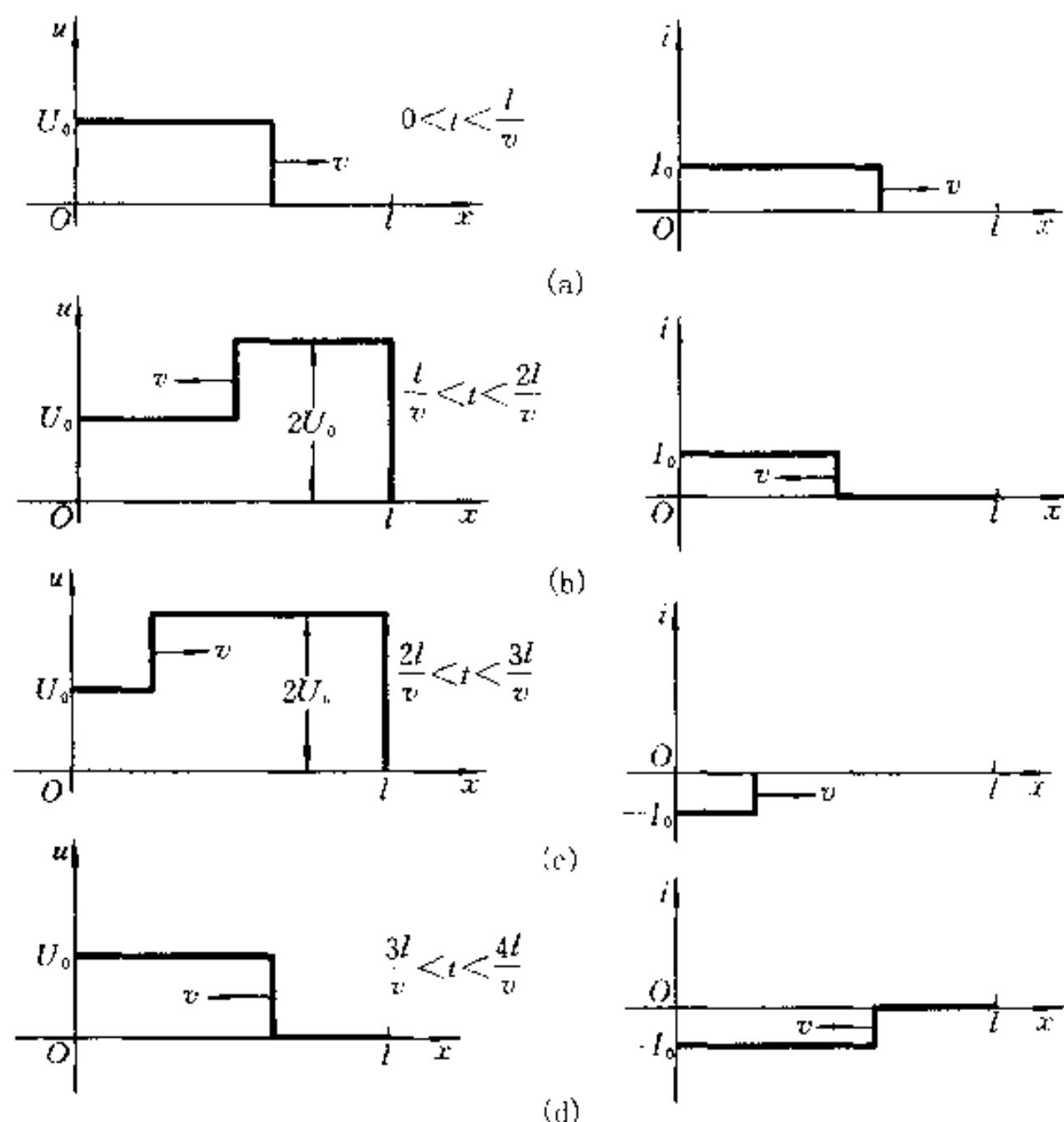


图 18-24 电压波和电流波在开路线上的多次入射和反射

射波为 $-I_0$ 将使线上电流增加为 $2I_0$, 从图 18-25(a)、(b) 可以看出, 经 $\frac{2l}{v}$ 时间, 电压就完成一次周期重复而电流将增至 $2I_0$ 。之后, 每次由始端产生的入射波使沿线电压变为 U_0 , 从终端产生的反射波使电压为零, 所以, 电压在零和 U_0 之间变动。对电流来说, 在始端产生的入射波和终端产生的反射波, 总是使得沿线电流增加一个 I_0 。因此, 线上电流最后将增加到无限大。

如果终端接以非匹配的电阻负载 R_L , 则视此电阻 R_L 与 Z_c 的大小关系将有不同的反射。如果 $R_L > Z_c$, 则反射使电流减小、电压增加; 如果 $R_L < Z_c$, 则反射将使电流增加、电压减少。两种情况下, 经过多次反射以后沿线电压与电流趋近恒定。如果终端的负载不是纯电阻而是电阻与电感或电容的组合, 则由于终端将出现集总元件的过渡过程, 反射的方式也将随时间而变。对这类问题不再深入讨论。

前面介绍的是无损耗线的时域分析。如果需要计及传输线的 R_0 和 G_0 , 对有损耗线进行时域分析则要困难得多。

近年来由于超大规模集成电路的进展, 并为提高数字电子计算机的运算速

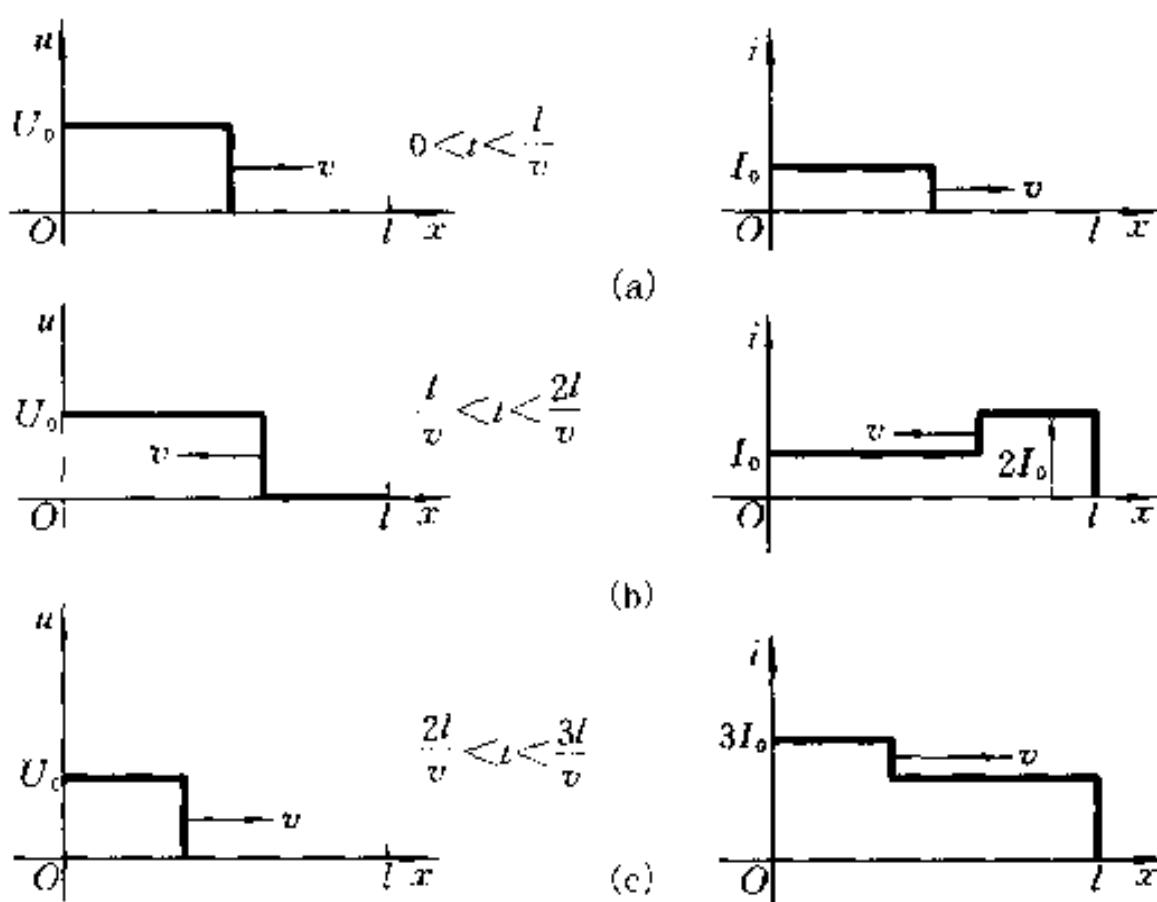


图 18-25 电压波和电流波在短线上的多次入射和反射

度, 使用了更高的工作频率和变化更快的短脉冲, 信号经过集成电路芯片之间的相互连接导线(简称互连)时, 会产生延迟、畸变和交叉干扰等现象。对这种互连的时域分析需要用分布参数电路或传输线的观点处理。同时, 这类传输线的损耗不能忽略, 加上互连的数目惊人之多, 它们之间还有互感耦合, 这些使得这类问题的分析变得更为复杂。

习 题

18-1 一对架空传输线的原参数是 $L_0 = 2.89 \times 10^{-3} \text{ H/km}$, $C_0 = 3.85 \times 10^{-9} \text{ F/km}$, $R_0 = 0.3 \Omega/\text{km}$, $G_0 = 0$ 。试求当工作频率为 50 Hz 时的特性阻抗 Z_c , 传播常数 γ 、相位速度 v_p 和波长 λ 。如果频率为 10⁴ Hz, 重求上述各参数。

18-2 一同轴电缆的原参数为: $R_0 = 7 \Omega/\text{km}$, $L_0 = 0.3 \text{ mH/km}$, $C_0 = 0.2 \mu\text{F/km}$, $G_0 = 0.5 \times 10^{-9} \text{ S/km}$ 。试计算当工作频率为 800 Hz 时此电缆的特性阻抗 Z_c 、传播常数 γ 、相位速度 v_p 和波长 λ 。

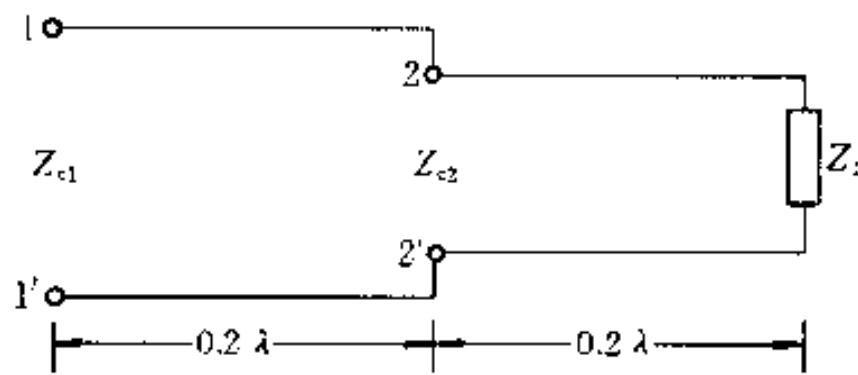
18-3 传输线的长度 $l = 70.8 \text{ km}$, 其 $R_0 = 1 \Omega/\text{km}$, $\omega C_0 = 4 \times 10^{-4} \text{ S/km}$, 而 $G_0 = 0$, $L_0 = 0$ 。在线的终端所接阻抗 $Z_2 = Z_c$ 。终端的电压 $U_2 = 3 \text{ V}$ 。试求始端的电压 U_1 和电流 I_1 。

18-4 一高压输电线长 300 km, 线路原参数 $R_0 = 0.06 \Omega/\text{km}$, $L_0 = 1.40 \times 10^{-3} \text{ H/km}$, $G_0 = 3.75 \times 10^{-9} \text{ S/km}$, $C_0 = 9.0 \times 10^{-9} \text{ F/km}$ 。电源的频率为 50 Hz。终端为一电阻负载, 终端的电压为 220 kV, 电流为 455 A。试求始端的电压 U_1 和电流 I_1 。

18-5 架空无损耗传输线的特性阻抗 $Z_c = 300 \Omega$, 线长 $l = 2 \text{ m}$ 。当频率为 300 MHz 和 150 MHz 时, 试分别画出终端开路、短路及接上匹配负载时, 电压 u 和 $|U|$ 沿线的分布。

18-6 两段特性阻抗分别为 Z_{c1} 和 Z_{c2} 的无损耗线连接的传输线如图。已知终端所接

负载为 $Z_2 = (50 + j50) \Omega$ 。设 $Z_{c1} = 75 \Omega, Z_{c2} = 50 \Omega$ 。两段线的长度都为 0.2λ (λ 为线的工作波长), 试求 1' 1' 端的输入阻抗。



题 18-6 图

18-7 特性阻抗为 50Ω 的同轴线, 其中介质为空气, 终端连接的负载 $Z_2 = (50 + j100) \Omega$ 。试求终端处的反射系数, 距负载 2.5 cm 处的输入阻抗和反射系数。已知线的工作波长为 10 cm 。

18-8 试证明无损耗线沿线电压和电流的分布及输入导纳可以表示为下面的形式:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \left[\cos(\beta x) + j \frac{Y_2}{Y_c} \sin(\beta x) \right]$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \left[\cos(\beta x) + j \frac{Y_c}{Y_2} \sin(\beta x) \right]$$

$$Y_m = Y_c \frac{Y_2 + j Y_c \tan(\beta x)}{Y_c + j Y_2 \tan(\beta x)}$$

其中 $Y_c = \frac{1}{Z_c}, Y_2 = \frac{1}{Z_2}, Z_2$ 为负载阻抗。

附录 A

磁路和铁心线圈

— 内容提要 —

本附录介绍磁场、磁路和磁路定律，并对无分支磁路和有分支磁路的计算作简要介绍。另外还简要地介绍铁磁物质的磁化过程和铁心损耗以及磁饱和对电流和磁通波形的影响。最后介绍铁心线圈的电路模型和分析。

§ A-1 磁场和磁路

根据电磁场理论，磁场是由电流产生的，它与电流在空间的分布和周围空间磁介质的性质密切相关。在工程中，常把载流导体制成的线圈绕在由磁性材料制成的(闭合)铁心上。由于磁性材料的磁导率比周围空气的磁导率大很多，因此，铁心中的磁场比周围空气中的磁场强得多，磁场的磁力线大部分汇聚于铁心中，工程上把这种由磁性材料组成的、能使磁力线集中通过的整体，称为磁路。磁路这种形式，可以用相对较小的电流，在其限定的区域内获得较强的磁场。在工程上，凡需要强磁场的场合，都广泛采用磁路实现，如各种型号的电机、变压器、继电器、电磁铁和电磁仪表等电气设备中，都有由磁性材料制成的磁路，图A-1是一种变压器的示意图。

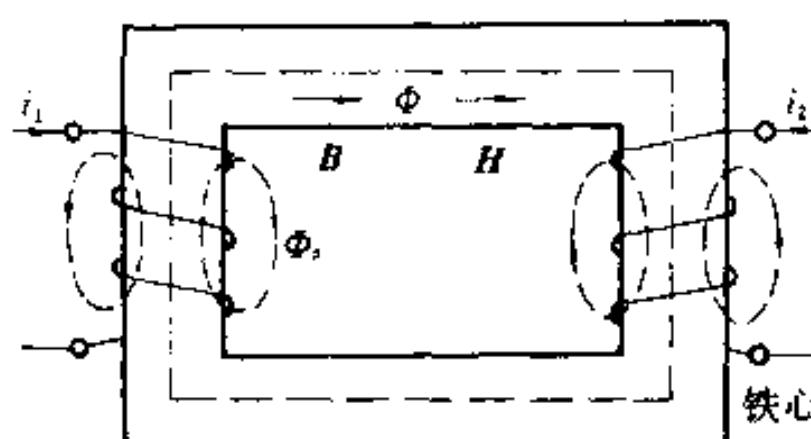


图 A-1 变压器的磁路

磁路在载流线圈的作用下(如图 A-1 中的电流 i_1 和 i_2),在其内外分布着电磁场,因此,磁路的分析计算实际上是电磁场的求解问题。描述磁场的两个基本物理量:磁感应强度 B (向量),磁场强度 H (向量)以及它们的积分性质是分析计算磁路的基础。

磁感应强度,用向量 B 表示,是根据洛伦兹力定义的。在 SI 制中, B 的单位是 T(特斯拉)。 B 与电流的关系满足毕奥-沙伐定律。穿过某一截面 S 的磁感应强度 B 的通量称为磁通量,简称磁通,它定义为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

所以 B 在某截面 S 上的面积分就是通过该截面的磁通。磁通是一个标量,在 SI 制中,它的单位是 Wb(韦伯)。磁通的参考方向与电流的方向满足右螺旋定则在磁场中,对 B 的任意闭合面积分为零,即有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{A-1})$$

上式中的 $d\mathbf{S}$ 的方向规定为闭合面的外法线方向,同时又规定穿出闭合面的磁通为它的参考方向。所以在上式中穿进闭合面的磁通取负号,穿出闭合面的磁通取正号,两者的绝对值是相等的,这就是磁通连续性原理。

磁场强度用向量 H 表示,在 SI 制中它的单位是 A/m,它是计及磁介质的作用后,描述磁场的另一个物理量,它与磁感应强度 B 、磁介质的磁导率 μ 之间有如下关系

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

由于磁性材料的 μ 不是常量,所以,在磁路中上述关系为非线性关系。在磁场中,对 H 的任意闭合路径(环路)的线积分,等于该闭合路径所界定面的电流的代数和,即

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum N_i \quad (\text{A-2})$$

该积分称为安培环路定律。当电流的参考方向与环路的绕向符合右螺旋定则时,该电流前取“+”号,反之,取“-”号。 N_i 又称为磁通势,可用 F_m 表示,即 $F_m = N_i$,其单位为 A,有时也用 At(安匝)。

以上有关 B 和 H 内容可参阅电磁场理论或物理学的有关部分。

现对图 A-1 所示磁路作进一步的说明。图中载流线圈的电流 i_1 和 i_2 共同产生的磁通分为两部分,其中只经铁心闭合的磁通 Φ 称为主磁通,另一部分是部分经铁心、部分经空气闭合的磁通 Φ_a ,称为漏磁通^①。要精确分析计算电

^① 主磁通与两个线圈交链,漏磁通只穿过一个线圈。

流与这两部分磁通在空间分布的关系,是一个非线性磁场的求解问题。为简化磁路的分析,工程上根据实际情况假设如下的近似条件存在:

(1) 由于铁心的磁性材料的磁导率 μ 与空气的磁导率 μ_0 (真空)之比约为 $10^3 \sim 10^4$,在计算精度要求不高的情况下,可假设 $\Phi_e = 0$ (漏磁通),认为磁通全部集中在磁路内,即只考虑主磁通 Φ 的计算。

(2) 磁路通常是用同种类磁性材料或规则分段的不同种类的磁性材料组成,可以根据磁通的走向,按磁介质和截面都相同的原则分段计算。当每段磁路的截面较小时,可以近似地认为磁场是均匀分布的,即 B 和 H 在各磁路段内分别处处相等,并假设它们的方向和磁通的方向相同,均平行于磁路段的中心线,如图 A-1 中所示。

在上述条件下,可按下述关系分段计算磁路

(1) 第 k 段磁路内的磁通

$$\Phi_k = \int_{S_k} \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{S}_k = B_k S_k, B_k = \Phi_k / S_k \quad (\text{A-3})$$

(2) 沿第 k 磁路段的中心线,有

$$\int_{l_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_k l_k = u_{mk} \quad (\text{A-4})$$

上述积分是安培环路定律在一段路径上的积分结果,称为 k 磁路段的端磁位差(与电路中的端电压类似)。

(3) B_k 与 H_k 之间的关系仍为

$$\mathbf{B}_k = \mu_k \mathbf{H}_k$$

这一非线性关系,在工程上将用 $B = f(H)$ 函数关系画出的曲线表示,称为 $B-H$ 曲线,或磁化曲线,计算时可查阅。

真空的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, μ_0 是一个常数。非铁磁物质的磁导率 μ 与 μ_0 相差无几,所以一般可以当作 μ_0 计算。

§ A-2 铁磁物质的磁化曲线

工程上常用的铁磁材料主要是指铁、钴、镍及其合金,它们的磁化特性常用 $B-H$ 曲线的形式表示,称为磁化曲线,通常是通过实验的方法获得的。

图 A-2(a)、(b) 所示就是实验测得的磁化曲线,它表现为回线的形式,分别称为磁滞回线[图(a)所示]和磁滞回线族[图(b)所示]。回线表明: B 和 H 之间是多值的函数关系,而且回线的形状与磁场强度的最大值 H_m 和磁化状态的历史有关。回线的走向与 ΔH 的符号有关,在回线任一点上 $\Delta H > 0$ (上升) 和 ΔH

$\Delta H < 0$ (下降)时的曲线不在同一条曲线上,当 $\Delta H > 0$ 时,曲线是沿着右侧的曲线上升[图(a)所示], $\Delta H < 0$ 时,曲线是沿着左侧所示曲线下降,图(a)所示的回线是在相同的 H_m 和 $-H_m$ 下,连续地来回反复十多次获得的结果。如果在回线上的任一点上[如图(a)中的a点],小范围内来回反复变化一次或数次,可以生成一条小回线(称为局部回线)。图(b)所示回线族是在不同的最大值 H_m 下形成的磁滞回线。如果回线横向宽度较窄(回线所围成的面积较小),则铁磁材料称为软磁材料,电机、变压器等铁心是用软磁材料制成。如果回线横向宽度较宽,则称为硬磁材料,工程上多用此材料制成永久磁铁。

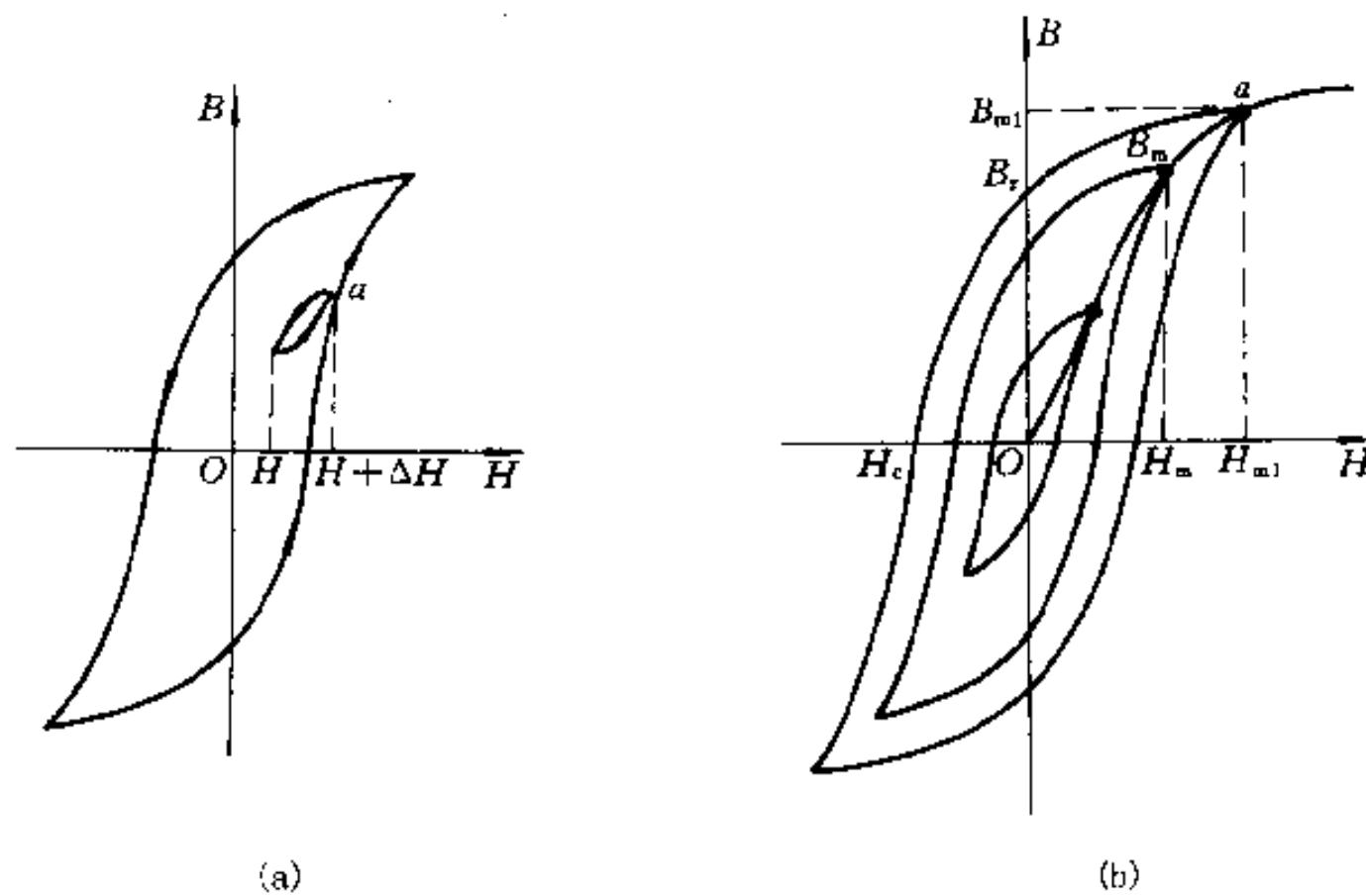


图 A-2 磁滞回线(族)

计算软磁材料制成的磁路时,常采用一条基本磁化曲线近似替代磁滞回线。它是从 $B - H$ 平面坐标的零点开始,到磁滞回线族的顶点(H_m, B_m)描成的一条曲线,如图A-2(b)所示。工程给出的磁化曲线都是基本磁化曲线,见图A-3。从曲线上可以看出,开始 B 随 H 增长较慢(Oa 段),然后迅速增长(ab 段),之后,增长速率减慢(bc 段),逐渐趋向于饱和(cd 段)。 c 点称为曲线的饱和点。图中又画出了磁导率 μ 随 H 的变化曲线。

磁化曲线还与温度有关,磁导率 μ 一般随温度的升高而下降,高于某一温度时(居里点)可能完全失去磁性材料的磁性,使 $\mu = \mu_0$ (真空),如铁的居里点为760℃。

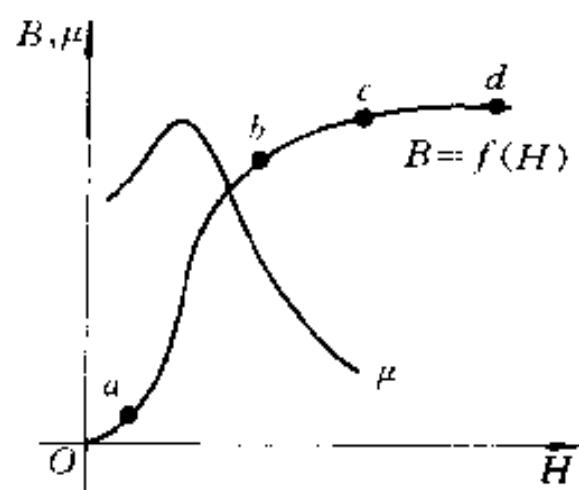


图 A-3 基本磁化曲线

§ A - 3 磁路的基本定律

由式(A-1)表示的磁感应强度 B 的闭合面积分在磁路中也处处适用,当用于磁路中不同磁段的截面结合处时,有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_k + \cdots = 0$$

即有

$$\sum \Phi = 0 \quad (\text{A-5})$$

积分式中的闭合面包括结合处所有磁段的截面。这是磁通连续性原理在磁路中的表示,式(A-5)称为磁路的基尔霍夫第一定律,可叙述为:穿过磁路中不同截面结合处的磁通的代数和等于零。式(A-5)也可表示为

$$B_1 S_1 + B_2 S_2 + \cdots + B_k S_k + \cdots = 0$$

$$\sum B S = 0$$

该定律形式上类似于电路中的 KCL。

在近似计算磁路时,取每一磁路段的中心线为计算长度的路径,当积分环路由磁路段的中心线组成时,应用(A-2)表示的磁场强度闭合线积分有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \cdots + H_k l_k + \cdots = \sum N_i$$

根据式(A-2), N_i 为磁通势 F_m , 是磁路中的激励,故

$$\sum Hl = \sum F_m \quad (\text{A-6})$$

上式(A-6)称为磁路的基尔霍夫第二定律,可叙述为:磁路中由磁路段的中心线组成的环路上各磁路段的 Hl 的代数和等于中心线(环路)交链的磁通势的代数和。此定律形式上类似于电路中的 KVL。

计算磁路时有时用到磁阻的概念。每一磁路段的磁阻 R_{mk} 是该磁路段的磁位差 $U_{mk} = H_k l_k$ 与该磁路段中的磁通 Φ_k 之比, 即有

$$R_{mk} = \frac{H_k l_k}{\Phi_k} = \frac{H_k l_k}{\mu_k H_k S_k} = \frac{l_k}{\mu_k S_k}$$

磁阻类似于电路中的非线性电阻。上式表示的磁阻是静态磁阻, 由于 μ_k 与 B H 曲线有关, 不是常数, 直接计算磁阻不很方便。

现以图 A-4 的有分支磁路为例说明磁路定律的应用。绕组 1 和 2 的匝数分别为 N_1 和 N_2 , 其中电流为 i_1 和 i_2 。先把磁路分段, 并画出各段的中心线, 如图中的虚线。为简化起见, 设 ab、fa、ef 3 段的材料和截面积相同, 面积设为 S_1 ; bc、cd、de 3 段也作为一磁路段, 面积设为 S_2 。根据磁通连续性原理, 在 ab、fa、ef 3 磁路段内的磁通是相等的, 设为 Φ_1 。由于这 3 段的截面又相等, 故 3 段的 B 和 H 值分别是相等的, 设为 B_1 和 H_1 , 而 Φ_1 (或 B_1 和 H_1) 的方向取为与电流 i_1 成右螺旋关系。同理, 在 bc、cd、de 3 磁路段内的磁通相等, 设为 Φ_2 , B 和 H 设为 B_2 和 H_2 , 其方向与电流 i_2 成右螺旋关系。对 be 段内的磁通设为 Φ_3 , B 和 H 设为 B_3 和 H_3 , 截面积 S_3 , Φ_3 的方向可任意指定, 如图所示。

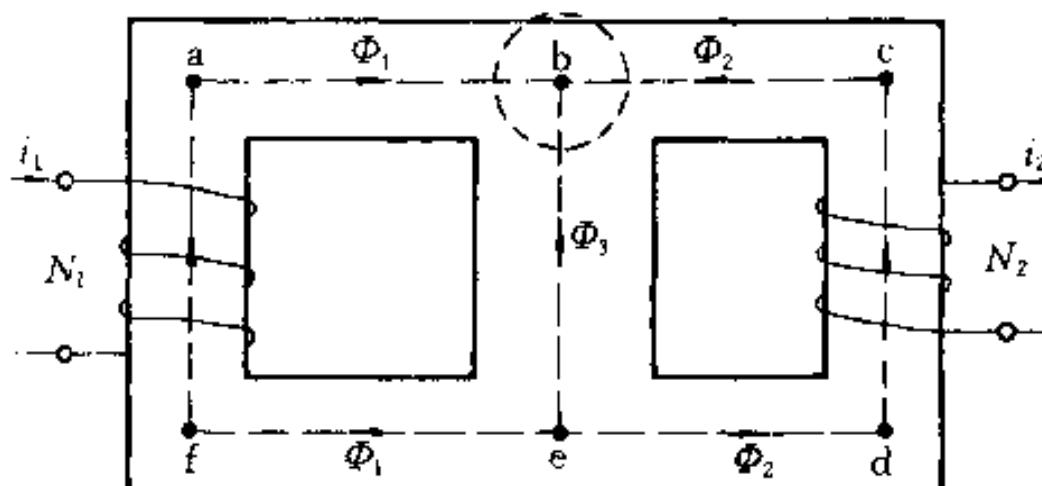


图 A-4 分支磁路的例子

按式(A-5), 在 b 处有

$$-\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

按式(A-6), 有:

$$H_1(l_k + l_{ab} + l_{ef}) - H_3 l_{be} = N_1 i_1$$

$$H_2(l_k + l_{cd} + l_{de}) - H_3 l_{be} = N_2 i_2$$

其他关系有:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}, \quad B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$$

$$B_1 = \mu_1 H_1, \quad B_2 = \mu_2 H_2, \quad B_3 = \mu_3 H_3$$

式中 μ_1 、 μ_2 和 μ_3 分别为 3 磁路段的磁导率。

若磁路为同一铁磁材料构成，则有 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 。

§ A-4 恒定磁通磁路的计算

通常在计算电机、电器的磁路时有两类问题，一类是预先给定磁通（或磁感应强度），然后按照给定的磁通和磁路的结构及材料去求所需磁通势 F_m 。另一类问题是预先给定磁通势，要求求出磁路中的磁通。

恒定磁通磁路是指磁路中各励磁线圈的电流是直流，就是说磁路中的磁通和磁通势都是恒定的。

首先介绍无分支恒定磁通磁路的计算。无分支磁路的主要特点是在不计及漏磁通时，磁路中处处都有相等的（主）磁通 Φ ，其计算可按下列步骤进行：

(1) 根据磁路中各部分的材料和截面积进行分段，要求每一段磁路具有相同的材料和截面积。

(2) 根据各分段磁路的尺寸计算出各段的截面积和平均长度（一般沿中心线计算）。在计算截面积时，必须注意，计算出的截面积称为视在面积，要扣除硅钢片之间的绝缘层占去的截面积，才是磁感应线通过的有效面积，一般可以用下式近似表示

$$\text{有效面积} = k \times \text{视在面积}$$

式中 k 称为填充因数，它随硅钢片厚度和绝缘层厚度而定，一般约为 0.9 左右。

如磁路中存在空气隙，则磁通会向外扩张，造成边缘效应，如图 A-5，增大了有效面积。对于铁心为矩形截面时，其有效面积可按下式估算（空气隙很短时）

$$S_a \approx (a + \delta)(b + \delta) \approx ab + (a + b)\delta$$

式中 a 、 b 分别为矩形截面的长和宽， δ 为空气隙长度。

对于半径为 r 的圆形截面，可按下式估算

$$S_a \approx \pi \left(r + \frac{\delta}{2} \right)^2 \approx \pi r^2 + \pi r\delta$$

(3) 根据已知的磁通计算各磁路段的磁感应强度

$$B = \frac{\Phi}{S}$$

(4) 根据每一磁路段的 B ，查阅对应的磁性材料的基本磁化曲线，求得每一磁路段的磁场强度 H ；对于空气隙有 $H_a = \frac{B_a}{\mu_0}$ ，或采用下列近似公式

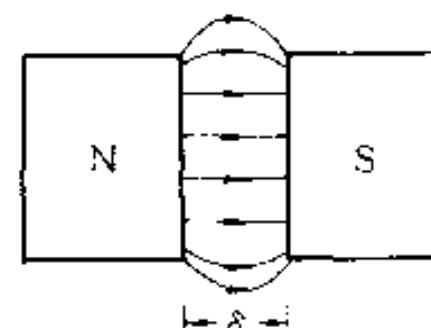


图 A-5 空气隙中磁通的边缘效应

$$H_a = \frac{B_a}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 0.8 \times 10^6 B_a$$

(5) 求出每一磁段的 HI 值。

(6) 按式(A-6)求出所需磁通势。

例 A-1 某磁路的结构与尺寸(单位为 mm)如图 A-6 所示。已知 $\Phi = 15 \times 10^{-4}$ Wb, $k = 0.90$ (填充因数), 励磁绕组的匝数为 120, 所用硅钢片的基本磁化曲线如图(b)所示。求励磁电流 I 。

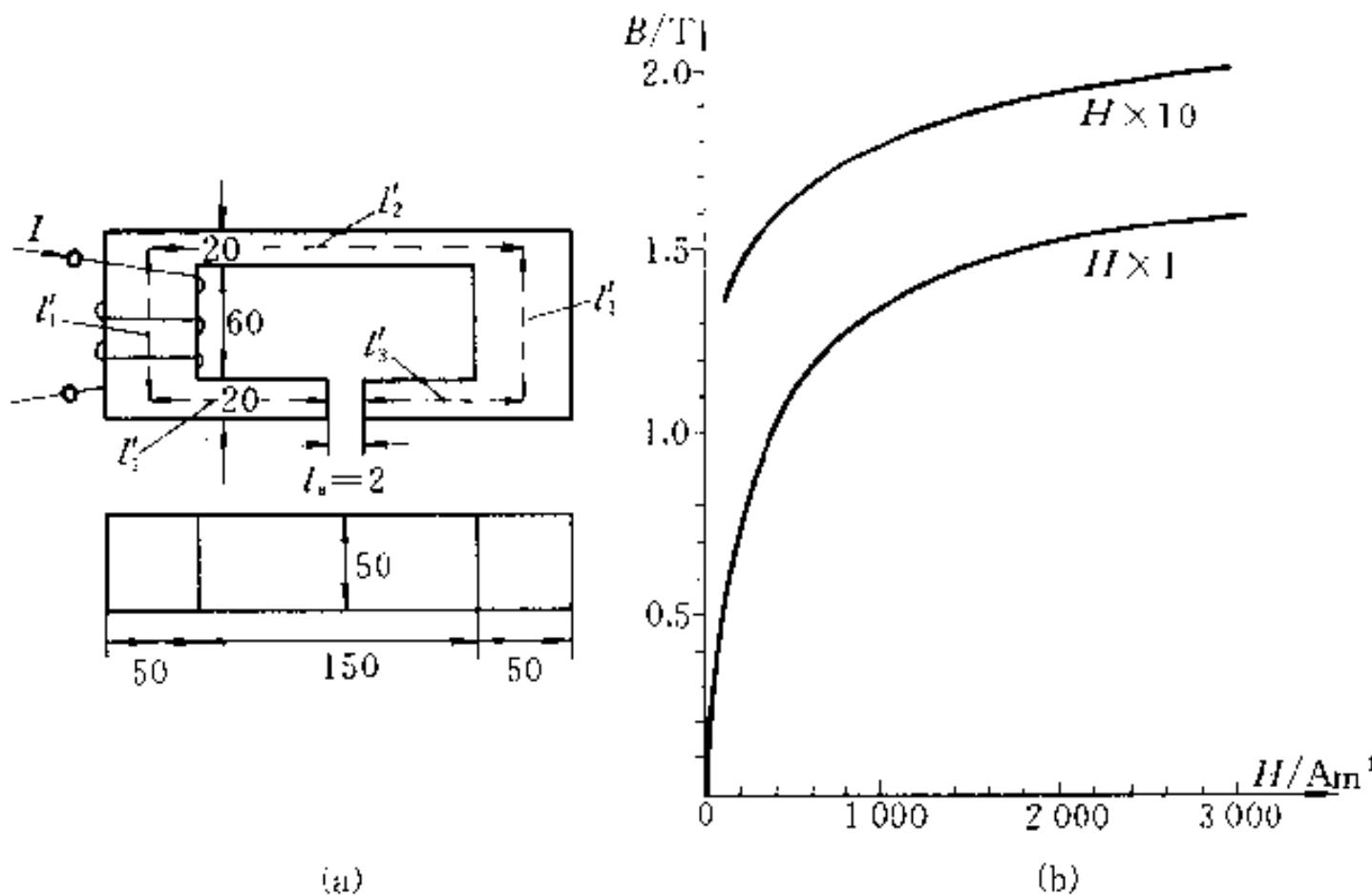


图 A-6 例 A-1 图

解 (1) 根据该磁路的结构和尺寸, 硅钢片有两种截面积, 所以, 该磁路连同空气隙共分为 3 段计算。

(2) 每段的截面积和平均长度:

$$\begin{cases} S_1 = 50 \times 50 \times 0.9 \text{ mm}^2 = 22.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ l_1 = 2l'_1 = (100 - 20) \times 2 \text{ mm} = 0.16 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_2 = 50 \times 20 \times 0.9 \text{ mm}^2 = 9 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ l_2 = l'_2 + 2l'_3 = [(250 - 50) \times 2 - 2] \text{ mm} = 0.398 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 = [20 \times 50 + (20 + 50) \times 2] \text{ mm}^2 = 11.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ l_3 = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m} \end{cases}$$

(3) 每磁路段的磁感应强度:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{15 \times 10^{-4}}{22.5 \times 10^{-4}} \text{ T} = 0.667 \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{15 \times 10^{-4}}{9 \times 10^{-4}} \text{ T} = 1.667 \text{ T}$$

$$B_3 = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{15 \times 10^{-4}}{11.4 \times 10^{-4}} \text{ T} = 1.316 \text{ T}$$

(4) 每磁路段的磁场强度：

由图(b)所示曲线查得

$$H_1 = 170 \text{ A/m}, \quad H_2 = 4500 \text{ A/m}$$

根据公式可得

$$H_3 = 0.8 \times 10^5 \text{ B}_3 = 10.53 \times 10^5 \text{ A/m}$$

(5) 每磁路段的 HL ：

$$H_1 l_1 = 170 \times 0.16 \text{ A} = 27.2 \text{ A}$$

$$H_2 l_2 = 4500 \times 0.398 \text{ A} = 1791 \text{ A}$$

$$H_3 l_3 = 10.53 \times 10^5 \times 0.002 \text{ A} = 2106 \text{ A}$$

(6) 总磁通势：

$$F_m \approx NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = 3924 \text{ At}$$

$$I = \frac{F_m}{N} = \frac{3924}{120} \text{ A} = 32.7 \text{ A}$$

从以上计算可以看出，空气隙虽然很短，它只占磁路平均长度的 0.35%，但空气隙的 $H_3 l_3$ 却占总磁通势的 53.4%。这是由于空气的磁导率比硅钢片的磁导率小很多的缘故。在本例中， l_3 部分的截面积较小，在磁通 $\Phi = 15 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ 的作用下已处于饱和状态，使这部分硅钢片的磁导率显著下降，所以这一段的磁阻较大，磁位差增大，否则空气隙的磁位差所占比例还要高。

如果给定无分支磁路的磁通势而要求出该磁通势在磁路中激发的磁通，则由于磁路各段的磁导率不是常数，因此需要采用试探法或图解法，其求解步骤见下例。

例 A - 2 图 A - 7(a) 所示磁路中，空气隙的长度 $l_3 = 1 \text{ mm}$ ，磁路横截面面积 $S = 16 \text{ cm}^2$ ，中心线长度 $l = 50 \text{ cm}$ ，线圈的匝数 $N = 1250$ ，励磁电流 $I = 800 \text{ mA}$ 。磁路的材料为铸钢，其基本磁化曲线如图(b)。求磁路中的磁通。

解 此磁路由两段构成，其平均长度和面积分别为(铸钢段)： $S_1 = 16 \text{ cm}^2 = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

$$l_1 \approx 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

(空气隙段)：为简化起见，忽略空气隙的边缘效应，设

$$S_3 \approx 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad l_3 = 0.1 \text{ cm} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

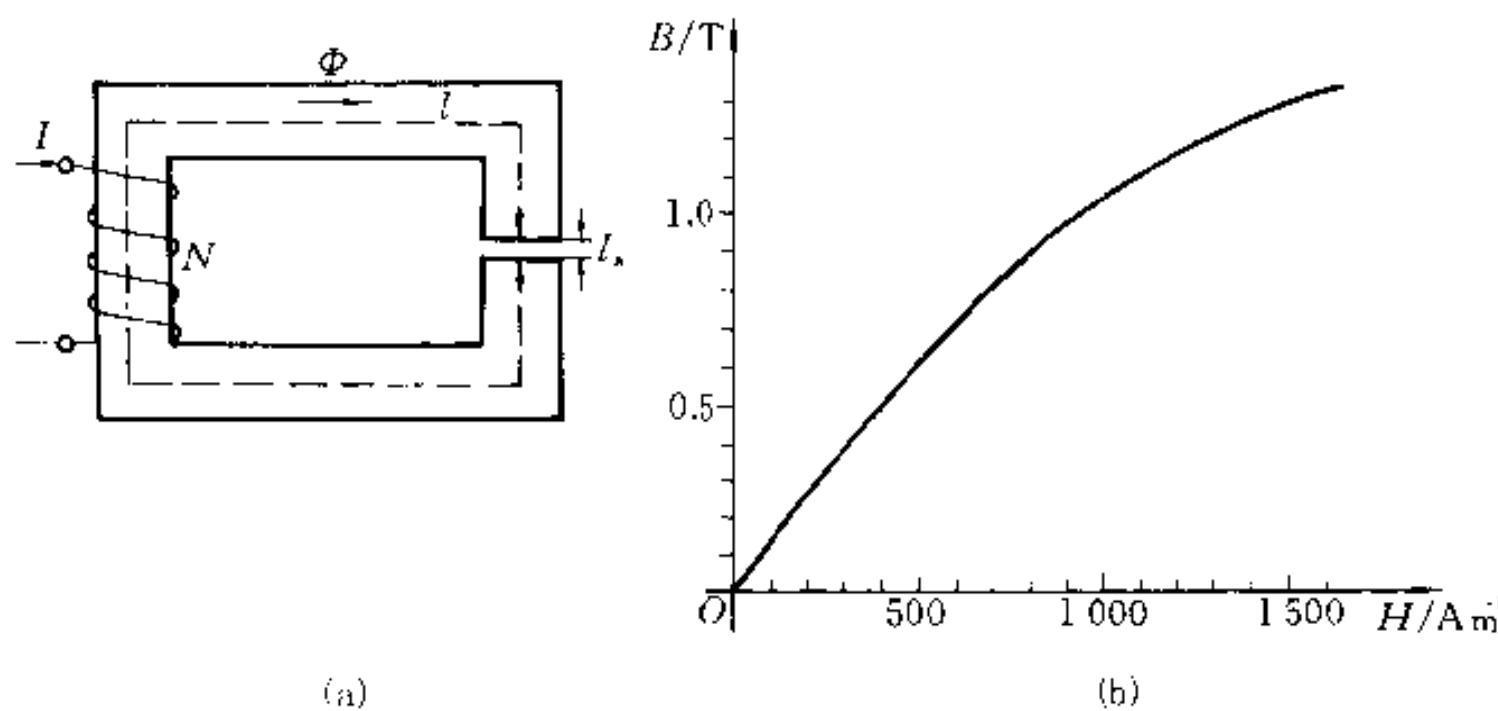


图 A-7 例 A-2 图

磁路中的磁通势为

$$F_m = NI = 1250 \times 800 \times 10^{-3} \text{ At} = 1000 \text{ At}$$

由于空气隙的磁阻较大,故可暂设整个磁路磁通势全部用于空气隙中,这样算出的磁通作为第1次试探值 Φ^1 ,即

$$\begin{aligned}\Phi^1 &= B_s^1 S_s = \frac{NI\mu_0 S_s}{l_a} = \frac{1000 \times 16 \times 10^{-4} \times 4\pi \times 10^{-7}}{1 \times 10^{-3}} \text{ Wb} \\ &\approx 20.11 \times 10^{-4} \text{ Wb}\end{aligned}$$

由于设 $S_i = S_s$,故算得磁感应强度为

$$B_s^1 = B_i^1 = \frac{\Phi^1}{S_i} = \frac{20.11 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-4}} \text{ T} = 1.26 \text{ T}$$

按图(b)查得

$$H^1 = 1410 \text{ A/m}$$

空气隙中的磁场强度为

$$H_a^1 = 0.8 \times 10^6 B_s^1 = 10.08 \times 10^5 \text{ A/m}$$

磁通势为

$$F_a^1 = H_i^1 l_i + H_a^1 l_a = 1713 \text{ At}$$

由于 $F_a^1 \neq F_m (= NI)$,所以要进行第2、3、…次试探,直至误差小于某一给定值为止。从第2次试探起,各次试探值与前1次试探值之间可按下式联系起来

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n \frac{F_m}{F_m^n}$$

各次试探结果列表如下

表 A-1

n	$\Phi^n \times 10^{-4}$ Wb	$B_1 = B_s/T$	H_1/Am^{-1}	H_s/Am^{-1}	F_m/At	误差 %
1	20.11	1.26	1410	10.10×10^5	1713	+71.3
2	11.74	0.733	640	5.87×10^5	906	9.4
3	12.94	0.809	680	6.47×10^5	987	1.3
4	13.11	0.819	694	6.55×10^5	1002	0.2

可见,第4次试探值可以作为最后的结果,即 $\Phi = \Phi^4 = 13.11 \times 10^{-4}$ Wb。

求解这类问题的图解法与非线性电阻电路的图解法相似。以例 A-2 的无分支磁路为例说明,它可以看作是由两段磁路的磁阻串联组成,一是空气隙的磁阻 R_{ma} ,它是线性的,另一是铁心(铸钢)的磁阻 R_{m1} ,它是非线性的,可以用韦安特性即磁通 Φ 与磁位差 U_{m1} (= $H_1 l_1$)的关系曲线 $\Phi(U_{m1})$ 表示,它可以根据该磁段的截面积和平均长度,按基本磁化曲线上的磁感应强度值和对应的磁场强度值逐点求出。而 R_{ma} 则可表示为 $R_{ma} = l_s / \mu_0 S_s$ 。这样就可以获得图 A-8(a) 计算磁路图,其中 $F_m = NI$ 相当于电路中的电压源电压。于是可以用类似于非线性电阻电路中的“曲线相交法”得出图(b),从两条曲线的交点即可求得所需磁通。

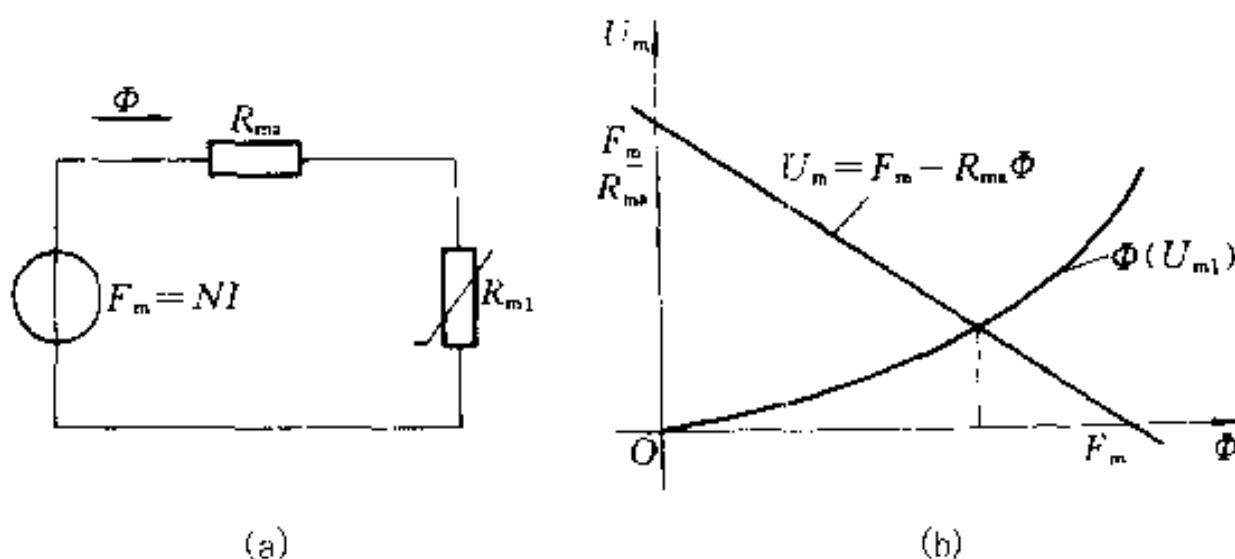


图 A-8 计算磁路图及其图解法

如果给定的无分支磁路是由几段不同的磁段组成,则其计算磁路图可以看作是几个磁阻串联组成,同样可以用图解法求解。

有分支的恒定磁通磁路的计算比较复杂。下面通过一个具体的例子介绍计算方法的思路。

图 A-9 是具有一个磁通势的分支磁路。按假设的各磁通参考方向和磁路定律式(A-5)、(A-6),有下列关系式:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

$$H_2 l_2 + H_3 l_3 = H_1 l_1$$

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = NI$$

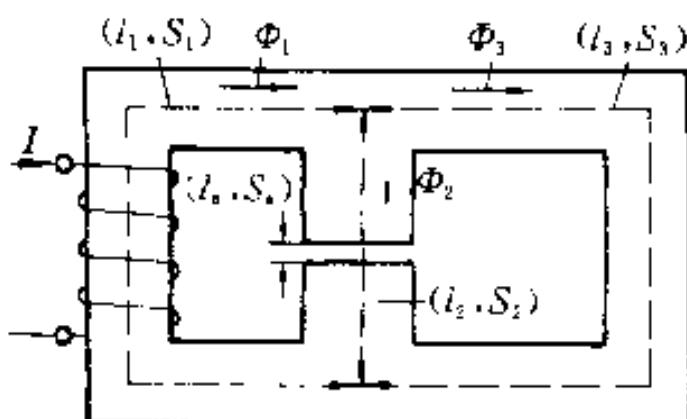


图 A-9 有分支磁路

如果给定的为通过空气隙的磁通 Φ_2 , 则可直接求出所需磁通势。主要步骤如下:

(1) 从给定 Φ_2 可以求得 $B_2 (= \Phi_2 / S_2)$, 并从相应的基本磁化曲线查出 H_2 , 这样就可以按下式求出 H_3

$$H_3 = (H_2 l_2 + H_3 l_3) / l_3$$

(2) 由 H_3 和基本磁化曲线 $B_3 - H_3$ 查得 B_3 , 并可求得 $\Phi_3 = B_3 S_3$;

(3) 按式: $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, 求得 Φ_1 ;

(4) 从 Φ_1 求得 $B_1 (= \Phi_1 / S_1)$, 查 $B_1 - H_1$ 曲线得 H_1 和求得 $H_1 l_1$;

(5) 最后求得磁通势: $NI = H_1 l_1 + H_3 l_3$ 。

如果给定的是其他支路的磁通, 则有一部分要采用试探法或图解法计算。如果给定是磁通势求各支路磁通, 则必须用试探法或图解法求解。

§ A-5 交变磁通磁路简介

恒定磁通的磁路中没有功率损耗。如果磁通随时间变化, 这时, 铁磁物质的磁滞现象将会产生磁滞损耗, 电磁感应现象将会在铁磁物质中产生涡流, 引起涡流损耗。通常把磁滞损耗和涡流损耗的总和称为铁心损耗。

可以证明磁滞损耗功率与铁磁物质的磁滞回线的面积成正比。对于同一铁心, 磁滞回线的形状与磁感应强度的最大值 B_m 有关。工程上采用下列经验公式计算磁滞损耗

$$P_h = \sigma_h / B_m^n V$$

式中 B_m 为磁感应强度最大值; n 由 B_m 值决定, 当 $B_m < 1\text{ T}$ 时, 取 $n = 1.6$, 当 $B_m > 1.6\text{ T}$ 时, 取为 2; f 为工作频率; σ_h 是与材料有关的系数, 同时又取决于所

用单位; V 为铁心的体积。

铁心的涡流损耗功率的计算要用电磁场理论进行。涡流损耗功率与铁心的几何尺寸和材料有关。若铁心是由平行于磁感应强度的钢片叠成, 涡流损耗与钢片厚度的平方成正比, 还与交变磁通的频率、材料的电导率及磁感应强度最大值有关。所以为了减小涡流损耗, 硅钢片越薄越好(电工钢片渗入硅, 其电导率就减小)。受工艺条件的限制, 硅钢片不可能做得很薄, 工频下硅钢片的厚度约为 0.35 至 0.5 mm, 音频下约为 0.02 至 0.05 mm, 而高频下则采用磁介质, 如铁淦氧。涡流损耗一般与工作频率 f 和磁感应强度的最大值 B_m 有关。

铁心损耗等于磁滞损耗和涡流损耗之和。

铁磁物质的磁感应强度与磁场强度之间不成线性关系, 所以磁路中的磁通也就与励磁电流之间不成线性关系。当磁通是正弦形时, 励磁电流则为非正弦形; 反之, 当励磁电流是正弦形时, 磁通为非正弦形。

设无分支磁路由铁磁物质构成, 其平均长度为 l , 截面积为 S [图 A-10(a)]。在交变电流作用下, 铁磁物质的磁化状态将沿磁滞回线周而复始地改变。为了简化讨论起见, 设磁化状态是沿着基本磁化曲线变化的。这样, 磁通 Φ 与电流 i 的关系就可以根据基本磁化曲线求得。按图 A-10(a), 有 $\Phi = BS$, 而励磁电流 $i = HI/N$, 所以只要把铁心的基本磁化曲线上 B 的坐标乘以 S , H 的坐标乘以 l/N , 即可获得表示铁心特性的 $\Phi - i$ 曲线, 显然其形状与 $B - H$ 曲线的形状是相似的。

图 A-10(b)和(c)分别绘出了正弦磁通和正弦电流对应的电流和磁通的波形。当磁通作正弦变化时(至饱和区), 电流曲线具有尖顶波形; 而当电流作正弦变化且工作到饱和区域, 则磁通具有平顶波形。如对非正弦形的电流和磁通波形进行谐波分析, 则可以看出它们都是奇谐波函数, 主要含有 3 次谐波, 而且随铁心饱和程度的提高, 3 次谐波分量就越显著。如果正弦电流和正弦磁通的最大值不太大, 使铁心的工作状态在饱和点以下的近似直线段, 则对应磁通和电流波形将比较接近于正弦形。以上讨论未计及磁滞回线的影响。如果考虑到这一因素, 则在正弦磁通下的电流波形将与图 A-10(b)所示不同。铁心中的涡流损耗也会影响电流的波形。

交变磁通磁路的计算比较复杂, 因为需要计及磁饱和、磁滞和涡流等影响。

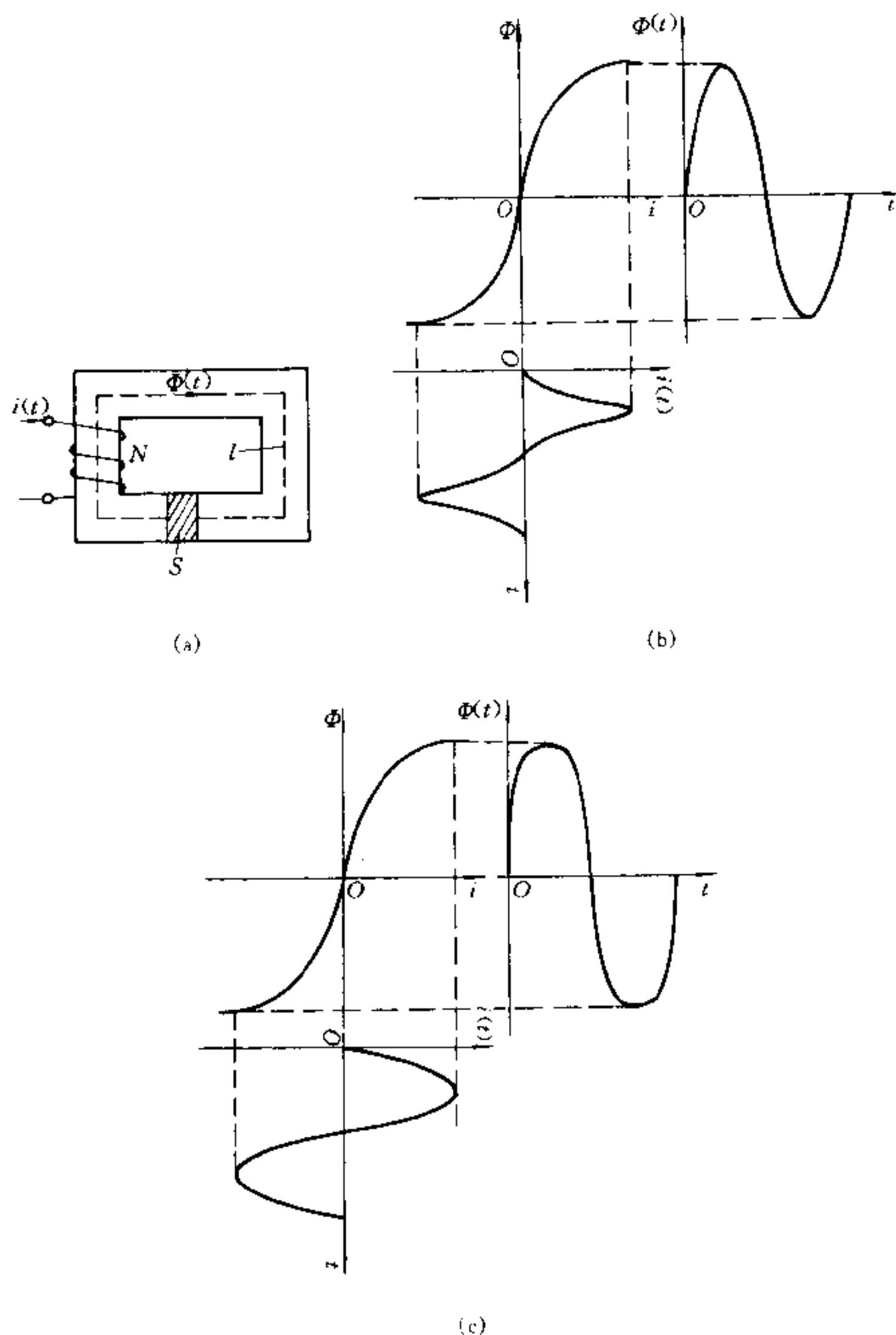


图 A-10 交变磁通电流和磁通的波形

§ A-6 铁心线圈

如图 A-11(a)所示的铁心线圈中通以交变电流时,其中便有交变磁通。 Φ 是其主磁通, Φ_o 是其漏磁通。

下面分析铁心线圈的电压和电流关系。主磁通和漏磁通分别在线圈中产生的感应电压 u 和 u_o , 再加上线圈的电阻上的电压 u_R , 线圈端电压 $u_1 = u + u_o + u_R$ 。通常 u_o 和 u_R 都比 u 小很多, 因而有 $u_1 \approx u$, 这样, 当线圈两端的电压 u_1 是正弦形时, 主磁通 Φ 同样是正弦形(这是因为 $u = d\Phi/dt$), 但是电流则是非正弦波。为了简化计算且利于应用相量法, 常采用等效正弦电流替代实际的非正弦电流, 其条件是两者的有效值相等, 并保持有功功率不变。当然, 这只有在高次谐波不显著时才相对准确。

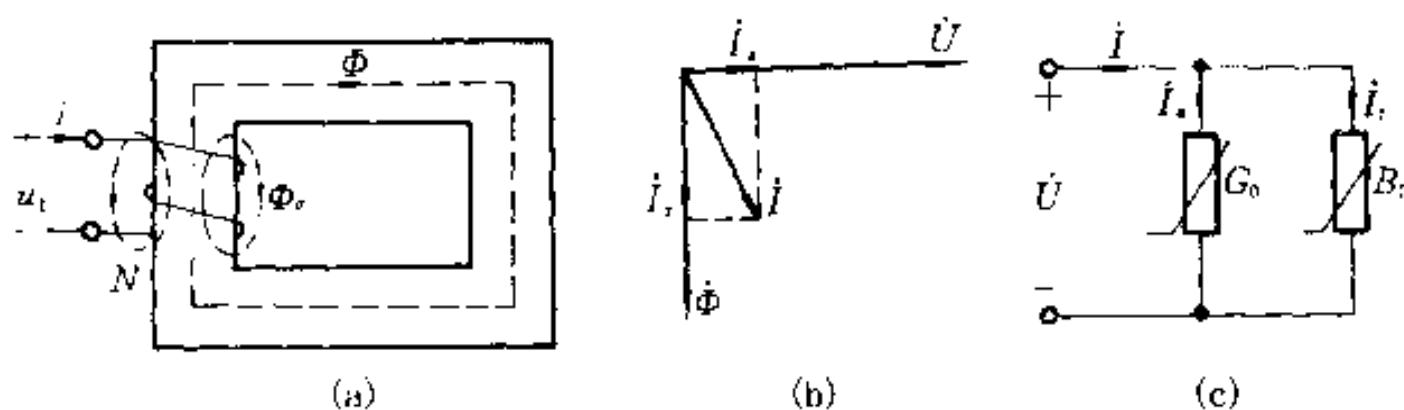


图 A-11 铁心线圈的部分电压电流关系

如果暂不考虑线圈的电阻和漏磁通, 图 A-11(b)给出了主磁通、电压和电流的相量图。图中电流相量 I 具有两个分量, 一个分量 I_a 与电压相量 U 同相, 它是用来计及铁心损耗的, 它是电流 I 的有功分量; 另一个分量 I_r 与磁通相量 Φ 同相, 而滞后电压 U 的相位为 $\pi/2$, 称为铁心线圈的磁化电流, 是 I 的无功分量。通常 $I_r > I_a$ 。可以用图(c)的电路模型描述这部分的电压、磁通和电流的关系, 它由两条并联支路组成, 一条支路为电导 G_o , 通过的电流为 I_a , 另一条支路为电感, 通过电流为 I_r , 其中 $G_o = I_a/U$, 而感纳 $|B_o| = I_r/U$ 。

设 $\Phi = \Phi_m \sin(\omega t)$, 则

$$u = N \frac{d\Phi}{dt} = N\omega\Phi_m \cos(\omega t) = 2\pi f N \Phi_m \cos(\omega t)$$

式中 N 为线圈的匝数, 感应电压的有效值

$$U = \frac{N\omega\Phi_m}{\sqrt{2}} = 4.44 f N B_m S$$

式中 B_m 为磁感应强度最大值。设 P 和 Q 分别表示铁心的有功功率和无功功率, 则有 $P = I_a U$, $Q = I_r U$ 。这样:

$$G_0 = \frac{P}{U^2} = \frac{P}{(4.44 f N B_m S)^2}$$

$$B_0 = \frac{Q}{(4.44 f N B_m S)^2}$$

P 和 Q 与 B_m 的关系是比较复杂的, 要严格计算必须按照交变磁通磁路的观点进行。一般说来, G_0 和 B_0 都不是常数而随 B_m 或 U 而变, 因此在图中用非线性元件表示。

现在, 计及线圈的电阻和漏磁通的作用。线圈电阻 R 上的电压 $\dot{U}_R = R\dot{I}$, 与电流同相。漏磁通链产生的感应电压 $\dot{U}_e = j\omega\Psi_e = j\omega L_e \dot{I}$, 它超前电流 \dot{I} 的相位为 $\pi/2$, 式中 Ψ_e 表示漏磁通链的有效值, $L_e = \Psi_e/I$ 是漏电感。因为漏磁通主要经过空气闭合, 漏磁通磁路的磁阻主要取决于空气段的磁阻, 所以, 可以认为漏磁通链与电流之间有线性关系, 而 L_e 也可以视为常数。于是, 有

$$\dot{U}_i = \dot{U}_R + \dot{U}_e + \dot{U} = R\dot{I} + j\omega L_e \dot{I} + \dot{U}$$

按照上式, 并参照图 A-11(b)、(c), 铁心线圈的相量图和电路模型将如图 A-12(a)、(b) 所示, 图中 U_R 和 U_e 一般仅为 U 的长度的百分之几, 而图中画的是有意放大的。可见铁心线圈电路是一个含非线性电感的电路。

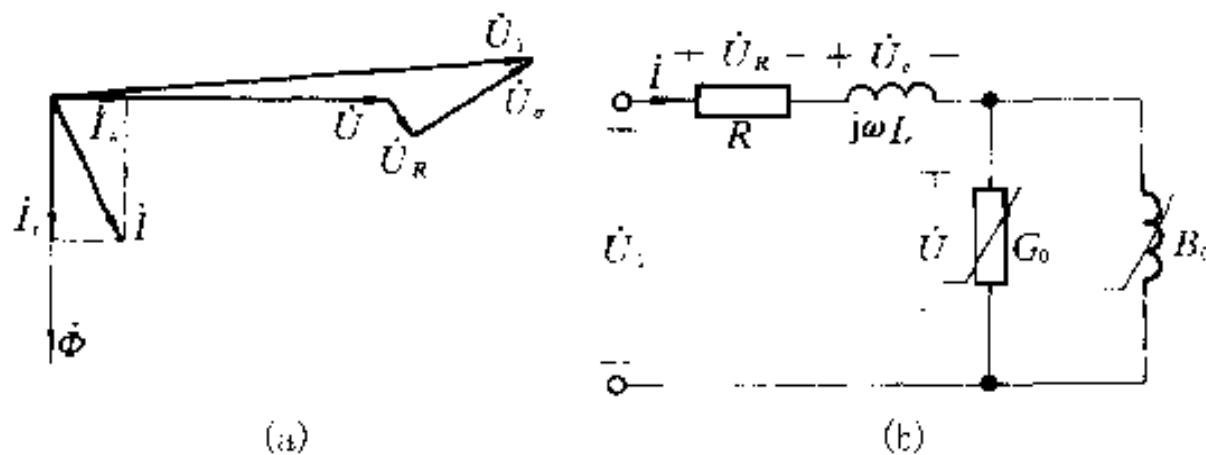


图 A-12 铁心线圈的电路模型及相量图

如果铁心线圈所用铁心带有较大的空气隙, 或者铁心是不闭合的(如磁棒), 则在这种情况下常把电感作为线性来处理, 当然电感值比无铁心时仍要增大很多。

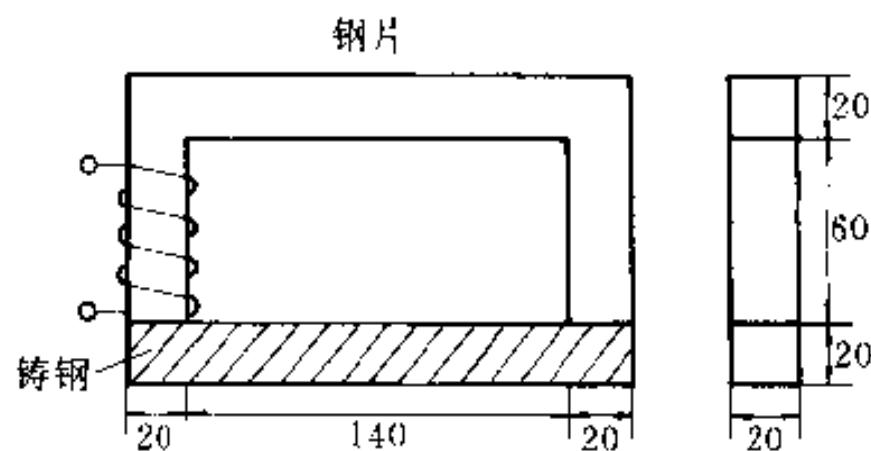
习题

A-1 图示磁路中的磁通为 3.2×10^{-4} Wb, 设填充因数 $k = 1$, 铸钢和电工钢片的基本磁化曲线用下列表格表示。求磁通势(磁路尺寸: mm)。

铸 钢										
$H/A\text{m}^{-1}$	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
B/T	0.27	0.39	0.50	0.61	0.72	0.82	0.90	0.98	1.05	1.11

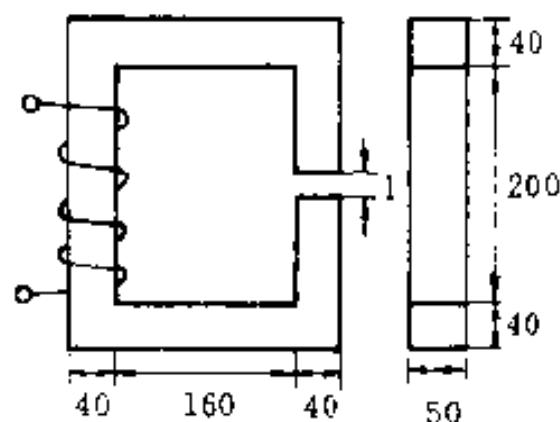
电工钢片

H/Am^{-1}	40	60	80	100	120	140	160	180	200
B/T	0.12	0.30	0.45	0.57	0.65	0.70	0.76	0.80	0.85



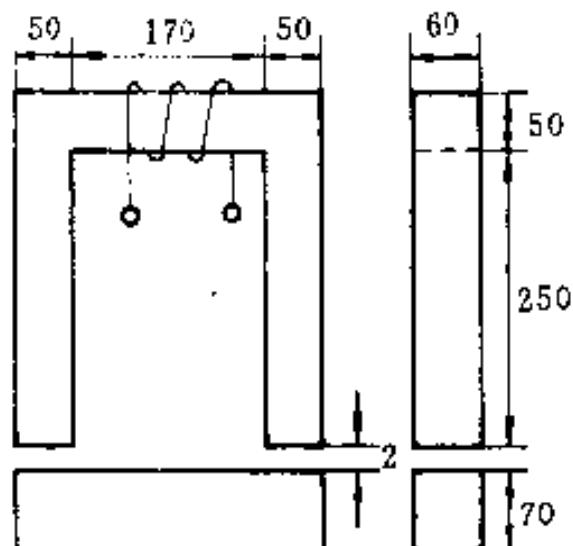
题 A-1 图

A-2 已知图示磁路中尺寸单位为 mm, 构成磁路的电工钢片的基本磁化曲线如图 A-6(b)所示, 设 $k = 0.91$, 计算时要考虑空气隙的扩散作用。设磁通势为 860 At。求空气隙中的磁通。



题 A-2 图

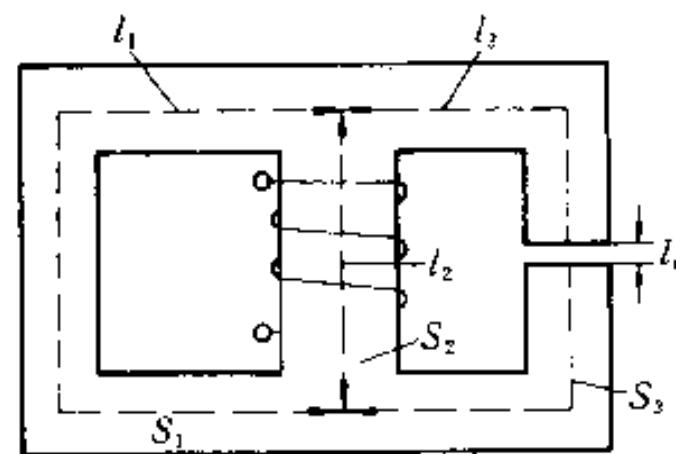
A-3 已知磁路如图所示, 其铁心材料的基本磁化曲线同上题, 磁路中的磁通 $\Phi = 3.6 \times 10^{-3} \text{ Wb}$, $k = 1$, 计算时要计及空气隙的扩散作用。图中所示尺寸单位为 mm。求磁通势。



题 A-3 图

A-4 图示为有分支磁路, 由同一电工钢片叠成。各段磁路的平均长度和截面面积均

示于图中, $l_1 \ll l_2$ 。现在要求出在空气隙中产生磁通 Φ_a 所需磁通势, 试给出解题的步骤。



题 A-4 图

附录 B

PSPICE 简介

———— 内容提要 ————

本附录结合本书涉及的内容简要介绍电路计算机辅助分析的有关概念和常用的一种电路模拟程序,即 PSPICE 的初步知识。

§ B-1 电路的计算机辅助分析

电路的计算机辅助分析^①是利用计算机作为辅助手段对电路进行分析。自数字电子计算机产生和发展后,人们就开始研究如何利用电子计算机对电路进行分析。电路分析包括许多内容,其中有电阻电路分析(或直流电路分析),正弦电流电路分析,线性动态电路分析,非线性电路分析等等。

用计算机进行电路分析,一般需要针对要求解决问题的类型编制程序,让计算机执行。用计算机进行电路分析,首先需要把电路的拓扑结构的信息,电路元件的类型及元件值作为数据送进计算机。然后,使计算机根据输入数据自动形成电路方程并进行求解。一般在程序中还应考虑让计算机显示所需计算结果并打印出来。

下面主要介绍建立电路方程的一些有关问题,其目的不在于程序的编制,而是试图说明编制程序的一些思路。

现结合图 B-1(a)所示电路说明如何用计算机形成结点列表法方程。图 B-1(b)示出了该电路的图,它共有 4 个结点和 7 条支路。每条支路仅含一个元件。独立电压源和电流源为同频率正弦量,所以用相量法进行分析。为了简化起见,没有考虑受控源、耦合电感、理想变压器等。结点和支路的编号示于图 B-1(b),其中每条支路有一个始结点和一个终结点,支路的(参考)方向自始结点指

^① “计算机辅助分析”(CAA, Computer Aided Analysis)简称“机辅分析”。

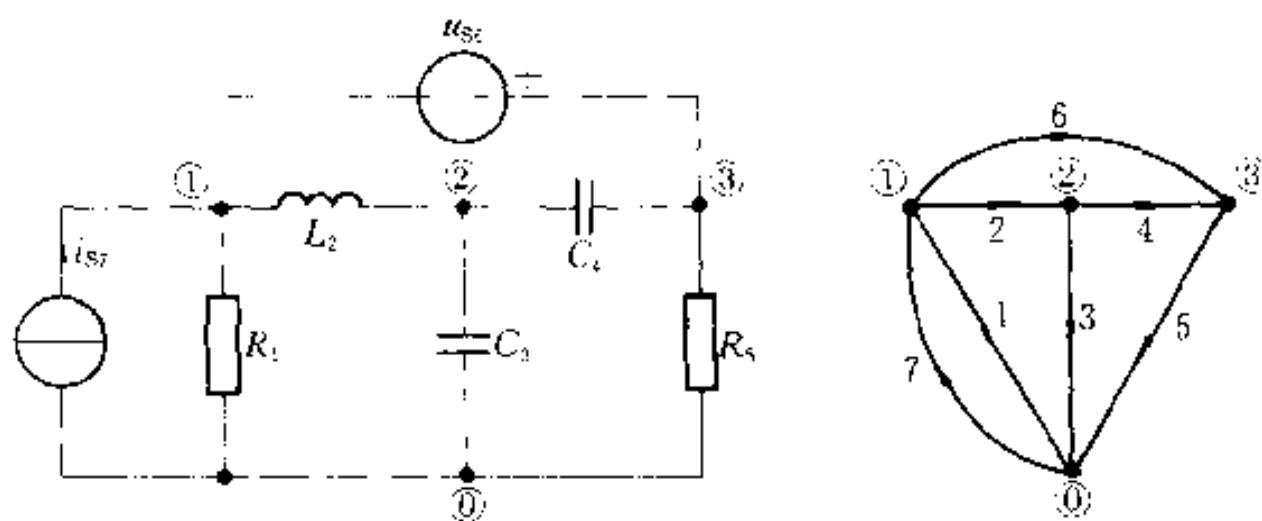


图 B-1 建立结点列表法的电路

向终结点,所以依据始结点和终结点的编号可以明确支路的方向。设计一个 5 变量数组(k, i, j, g, h),其中 k 表示支路编号; i 表示第 k 支路的始结点; j 表示第 k 支路的终结点; g 为一个数,用来表示元件的类型,例如可以用“1”表示电阻,“2”表示电容,“3”表示电感,“4”表示电压源,“5”表示电流源; h 表示元件的参数值。这个数组共有 5 列和 7 行,即:

支路号	始结点号	终结点号	元件类型	元件值
1	1	0	1	R_1
2	1	2	3	L_2
3	2	0	2	C_3
4	2	3	2	C_4
5	3	0	1	R_s
6	1	3	4	U_{S2}
7	0	1	5	I_{S1}

注:当独立电压源电压的正负极性和独立电流源电流的方向与该支路方向相反时,应冠以“-”号。

按 § 15-7,结点列表法的方程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\dot{\mathbf{I}} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_n + \dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{I}} &= \dot{\mathbf{U}}_s + \dot{\mathbf{I}}_s \end{aligned}$$

其中 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 为结点电压列向量, $\dot{\mathbf{U}}$ 和 $\dot{\mathbf{I}}$ 分别为支路电压和支路电流列向量,它们是方程中的未知量。

上列第一式可以按如下的步骤形成。按数组第 2、3 列,令 i, j 自 1 到 3 依次寻找连接于相同编号结点的支路,凡支路与同号始结点连接的,这些支路电流分别乘以“+1”,支路与同号终结点连接,这些支路电流分别乘以“-1”;这样,可得:

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 + I_6 - I_7 &= 0 \\- I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\- I_4 + I_5 - I_6 &= 0\end{aligned}$$

第二式可以按如下的步骤直接形成。令数组第 1 列的 k 自 1 到 7, 依次检查第 2、3 列的 i 和 j 。当 $i > 0$, 该结点电压 \dot{U}_{ni} 乘以“-1”, 当 $j > 0$, 该结点电压 \dot{U}_{nj} 乘以“+1”, 否则为零; 支路电压 \dot{U}_k 则依次分别乘以“+1”。这样可得:

$$\begin{aligned}- \dot{U}_{n1} + \dot{U}_1 &= 0 \\- \dot{U}_{n1} + \dot{U}_{n2} + \dot{U}_2 &= 0 \\\dots\dots \\- \dot{U}_{n1} + \dot{U}_{n3} + \dot{U}_6 &= 0 \\- \dot{U}_{n1} + \dot{U}_7 &= 0\end{aligned}$$

第三式直接形成的步骤如下。按数组第 1 列, 令 k 从 1 到 7, 依次检查第 4 列和第 5 列。当第 k 支路为电容 C_k 时, 该支路电压 \dot{U}_k 乘以 $j\omega C_k$, 该支路电流 I_k 乘以“-1”; 当第 k 支路为电阻 R_k 或 L_k 时, 该支路电压 \dot{U}_k 乘以“-1”, 支路电流 I_k 则乘以 R_k 或 $j\omega L_k$ 。当第 k 支路为独立电压源时, 该支路电压 \dot{U}_k 乘以“+1”, 右方 \dot{U}_{sk} 置为元件值; 当第 k 支路为独立电流源时, 该支路电流 I_k 乘以“+1”, 右方 I_{sk} 置元件值。这样, 可得:

$$\begin{aligned}- \dot{U}_1 + R_1 \dot{I}_1 &= 0 \\- \dot{U}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 &= 0 \\j\omega C_3 \dot{U}_3 - \dot{I}_3 &= 0 \\j\omega C_4 \dot{U}_4 - \dot{I}_4 &= 0 \\- \dot{U}_5 + R_5 \dot{I}_5 &= 0 \\\dot{U}_6 = - \dot{U}_{s6} \\I_7 = I_{s7}\end{aligned}$$

以上通过一个简单的实例说明如何根据输入的数据直接形成结点列表法方程的思路。如果电路中有受控源, 耦合电感, 理想变压器等, 只要相应改变输入数组的结构, 仍然可以直接建立所需方程。显然, 如果要建立其他形式的电路方程, 形成的方法将随之改变。

动态电路方程的形成以及电路方程的数值求解法超出本书范围。在机辅分析中, 线性代数方程的求解一般采用的有高斯消去法、LU 分解法、高斯-塞德尔迭代法、稀疏矩阵法等等。对于动态电路的分析, 要求解微分方程, 常用的计算方法有梯形法、龙格-库塔法、基尔法等等。可参阅有关书籍。

国内外有很多电路的机辅分析程序。为了便于使用者应用, 这类程序往往

只要求使用者将被分析电路的有关信息,进行哪种分析和需要的输出,按规定编写成一个输入文件,送入计算机中,让计算机执行。至于该程序是根据什么原理(包括使用的电路方程的形式,数值求解法等)编制的,其细节如何,使用者无需了解。

用计算机代替人工对电路进行分析和计算具有许多优点,它能处理大规模电路,如具有成千结点的集成电路,大型电力系统电路等。同时计算迅速,结果精确可靠。依靠机辅分析还可以验证电路设计的正确性,所以机辅分析是计辅设计^① 的重要组成部分。

§ B-2^② PSPICE

PSPICE 是国际上广泛应用的通用电路模拟程序。它侧重于分析电子电路和集成电路。SPICE^③ 自 70 年代推出后,经过不断完善和修改,版本不断更新,有 SPICE2,SPICE2G,SPICE3 以及许多不同的新版本。

PSPICE 是适用于 PC 机上的一种 SPICE2 的版本。供教学使用的 PSPICE 只能分析规模较小的电路。

可以用 PSPICE 分析的电路允许含有电阻、电容、电感、耦合电感、独立电源、受控电源、传输线以及几种通用的半导体器件(包括二极管、双极型三极管、结型场效应管和 MOS 场效应管)。它可以进行直流分析(电阻电路分析)、交流分析(正弦稳态分析)、瞬态分析(动态电路的时域分析)、傅里叶分析以及其他分析。

应用 PSPICE,需要把涉及的电路用电路描述语言对其连接方式、元件类型、元件值、执行方式和输出方式等进行描述。电路描述语言有:标题描述、元件描述、电路分析功能描述、输出结果和要求描述、说明语句和结束描述。元件描述用下列关键字,电容用 C, VCVS 用 E, CCCS 用 F, VCCS 用 G, CCVS 用 H, 独立电流源用 I, 互感用 K, 电感用 L, 电阻用 R, 独立电压源用 V。

执行和输出功能描述用下列关键词:交流分析用.AC, 直流分析用.DC, 瞬态分析用.TRAN, 打印输出曲线用.PLOT, 打印输出数据用.PRINT。

使用的数字可以用整数、浮点数和指数(如 1.25E-12, 1.35E+4)。比例因子规定有 10 种,以下只列出 8 种:

T=1E+12, G=1E+9, MEG=1E+6, K=1E+3, M=1E-3, U=1E-6,

① 计算机辅助设计(CAD, Computer Aided Design)的简称。

② 本节的目的只在于让读者对 PSPICE 有所了解。要使用该程序需要参阅有关资料。

③ “Simulation program with integrated circuit emphasis”的缩语。

$N = 1E - 9, P = 1E - 12$ 。

电路结点编号可以用任意的正整数。0 必须编入,且作为参考结点。

下面通过 2 个实例说明。

例 B-1 图 B-2 的线性电路中,已知 $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega, R_3 = 1 \text{ M}\Omega, R_4 = 100 \Omega, R_5 = 1 \text{ k}\Omega, C_1 = 1.414 \mu\text{F}, C_2 = 0.707 \mu\text{F}$, VCVS 增益 $A = 5 \times 10^5$ 。输入正弦电压 u_{in} 的幅值为 1 V, 频率可变。要求在频率 1 Hz 到 10 kHz 范围内,按每个数量级取 20 个频率点,绘制输出电压 u_o 的幅频特性。

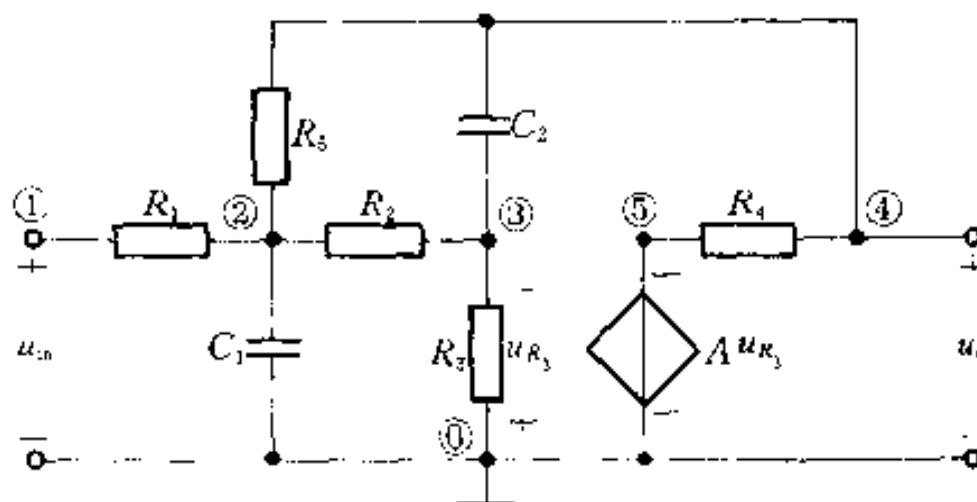


图 B-2 例 B-1 电路

解 输入文件:

```

EX1
VIN 1 0 AC 1
R1 1 2 1K
R2 2 3 1K
R3 3 0 1MEG
R4 4 5 100
R5 2 4 1K
C1 2 0 1.414U
C2 3 4 0.707U
E1 5 0 0 3 500K
.AC DEC 20 1 10K
.PLOT AC VM(4)
.PROBE
.END

```

输入描述语言说明如下:

第 1 句是标题说明(可以由任意字符构成)。

第 2 句为独立电压源的说明,指出电源的名称,“1”,“0”表示其正极和负极连接的结点编号,“AC”表示“交流”,“1”表示电压的幅值为 1 V(正弦量的大小都用幅值,不用有效值)。

第 3—7 句为电阻的说明,给出了电阻的名称,连接的始结点和终结点的编号和电阻值(单位为 Ω)。

第 8、9 句为电容的说明,给出了电容的名称,连接的始结点和终结点的编号和电容值(单位为 F)。

第 10 句为 VCVS 的说明,受控电压源的正极和负极连接的 2 个结点编号,控制电压的正极和负极连接的 2 个结点编号,控制系数 A 值。

第 11 句为 AC 频率范围的说明,“DEC”表示按数量级变化,“20”表示在每一数量级内取 20 点,最后 2 个数字表示起始频率和终止频率。

第 12 句为曲线打印语句,AC 表示分析类型,VM 表示输出为电压幅值,括号内的“4”表示该电压是结点 4 的结点电压(即要求的输出电压)。

第 13 句是探针显示语句。

图 B-3 示出了打印出的输出电压的幅频特性曲线,横坐标的“h”表示“Hz”。

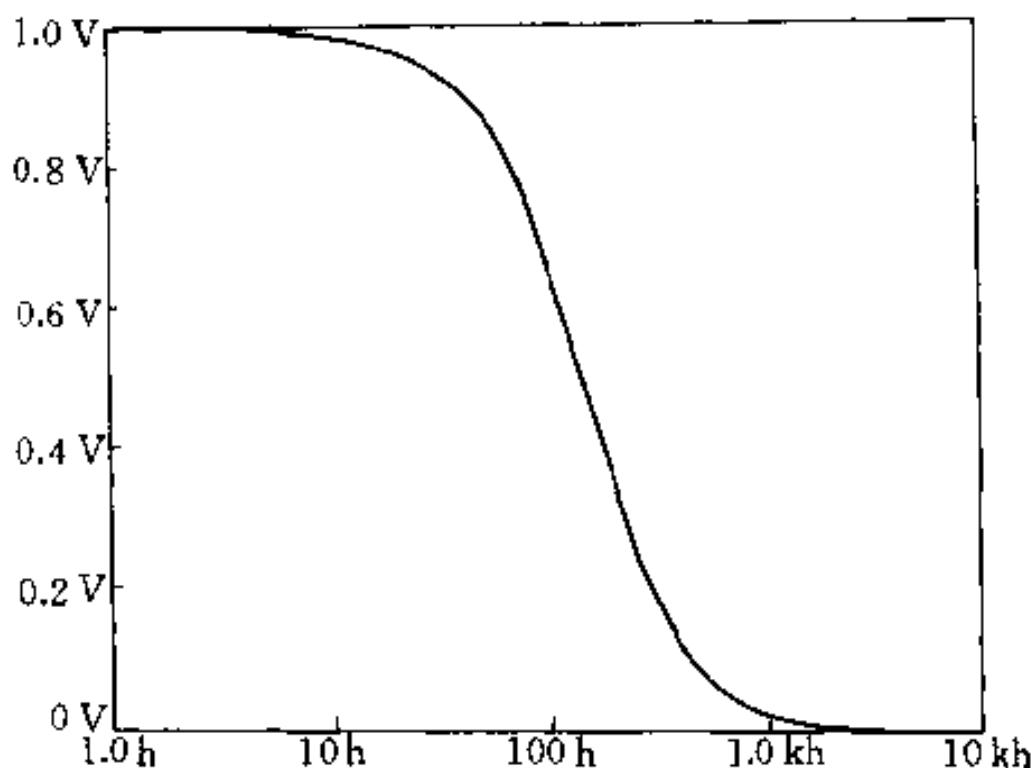


图 B-3 输出电压的幅频特性

例 B-2 图 B-4 的电路中,已知 $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $L_1 = 200 \text{ mH}$, $C_1 = 5 \mu\text{F}$, 电压源 $u_s(t) = 5\epsilon(t) \text{ V}$, 其中 $\epsilon(t)$ 为单位阶跃函数, $u_{C_1}(0) = 20 \text{ V}$, $i_{L_1}(0) = 0.2 \text{ A}$ 。求 $u_{C_1}(t)$ 并绘制 $u_{C_1}(t)$ 波形,设时间区间为 0—50 ms, 打印时间间隔为 0.1 ms。

解 输入文件为:

EX2

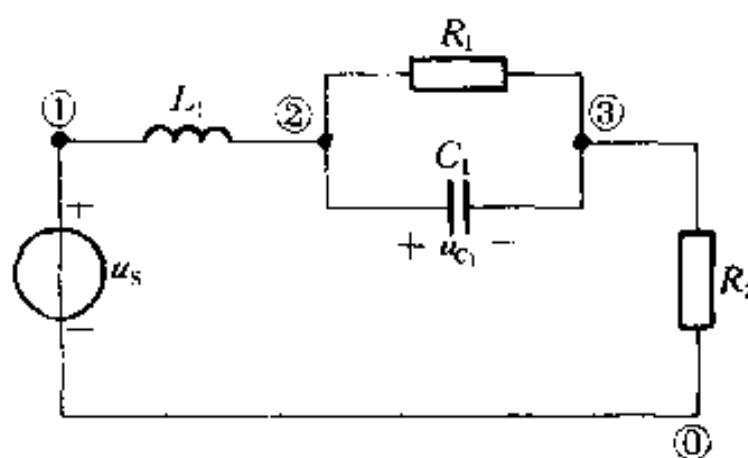


图 B-4 例 B-2 图

```

VS105
R12320K
R23030
L112200M IC=0.2
C1235U IC=20
TRAN0.1M 50M UIC
PLOT TRAN V(2,3)
PROBE
END

```

输入描述语言说明如下：

第 1 句为标题说明。

第 2 句为电压源的说明,指出电源的名称(阶跃函数的说明在第 7 句),它的正极和负极连接的结点编号和电压值。

第 3、4 句为电阻的说明,指出电阻的名称,连接的始结点和终结点编号和电阻值。

第 5 句为电感的说明,指出电感的名称,连接的始结点和终结点编号,电感值,电感电流的初始值(用“IC”表示)。

第 6 句为电容的说明,指出电容的名称,连接的始结点和终结点编号,电容值,电容电压的初始值。

第 7 句,TRAN 定义瞬态分析,打印的时间间隔(0.1M 表示 0.1 ms),打印的终止时间(50M 表示 50 ms),“UIC”表示使用者自己规定初始条件来进行瞬态分析,也规定了结点电压的初始值。所以第 2 句本来是直流电压源的说明,不过此句用了“UIC”,表示此电压为阶跃电压。

第 8 句为曲线打印语句,TRAN 表示分析类型,V(2,3)表示结点②、③之间的电压,即题中要求的电容电压。

第 9 句是探针显示语句。

最后一句为结束语句。

图 B-5 示出了打印出的电容电压 $u_c(t)$ 的曲线。

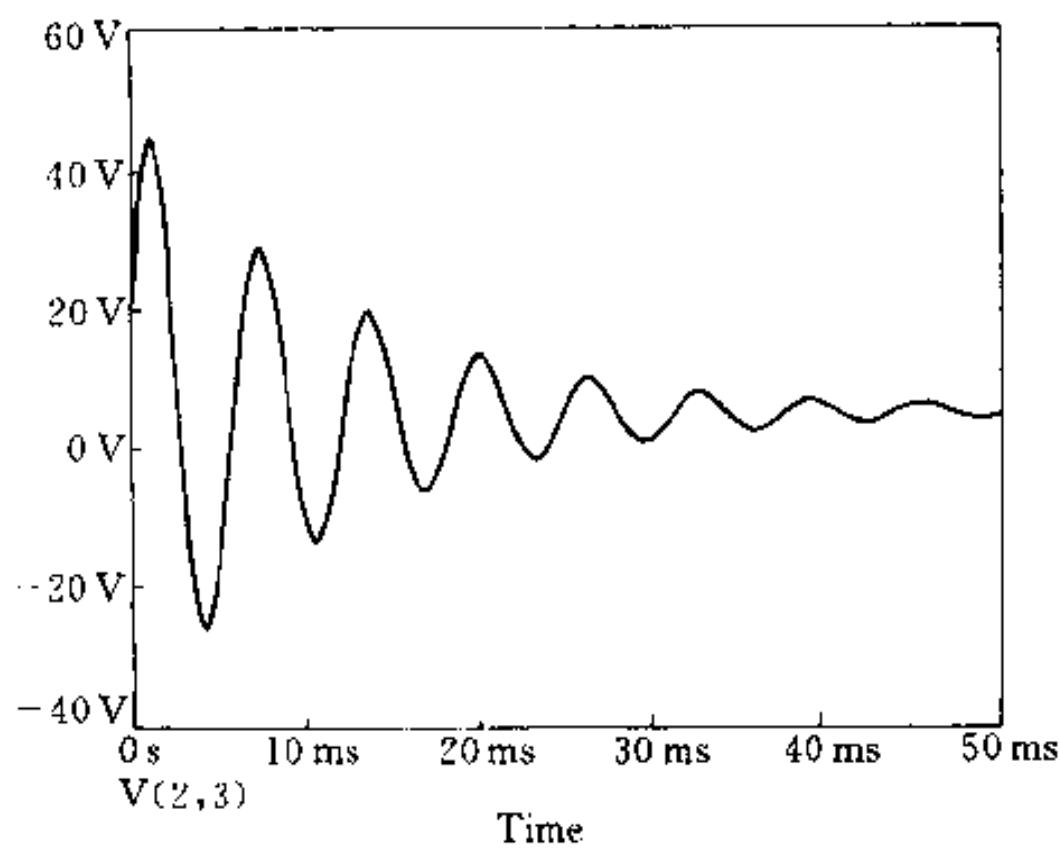


图 B-5 $u_c(t)$ 的变化曲线

部分习题答案

1-2 (1) 595 W; (2) 595 W

1-4 (a) $u = -10^4 i$; (b) $u = -2 \times 10^{-5} \frac{di}{dt}$; (c) $i = 10^{-5} \frac{du}{dt}$; (d) $u = -5 V$; (e) $i = 2 A$

1-6 2.5 A, 5 A, 5 A, 3.75 A

1-7 $t: 0 \rightarrow 60 \mu s, u = 200 V, t: 60 \rightarrow 64 \mu s, u = -3000 V$

1-9 (1) $u_R = 4 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) V, u_L = 4 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) V, u_C = 50 - 100 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $u_R = 2 e^{-t} V, u_C = (100 - 100 e^{-t}) V$

1-10 $= \omega L I e^{-\omega t}, = \omega C_2 U_m \sin(\omega t)$

1-11 (1) 20 W, 20 W

1-13 (a) 16 V; (b) 8 V; (c) -6 V; (d) 8 V

1-15 (a) 7.5 A; (b) 6 A

1-17 $u_{11} = 5 V, u_{15} = 7 V, u_{36} = 2 V, u_{56} = 0 V, u_{57} = 1 V$

1-20 (a) 8 V; (b) 6 V

1-22 $u_1 = 20 V, u = 200 V$

2-1 (1) 66.67 V, 8.333 mA, 8.333 mA; (2) 80 V, 10 mA, 0 A; (3) 0 V, 0 A, 50 mA

2-3 (1) $\frac{K}{1+K} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[K = \frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \right]$; (2) -1%, -10%

2-4 (a) 4.4 Ω; (b) 3 Ω; (c) 1.5 Ω(S 合上), 1.5 Ω(S 打开); (d) 0.5 Ω; (e) 3 Ω; (f) 1.269 Ω; (g) 1.667 Ω

2-6 (1) 5 V; (2) 150 V

2-8 (a) 30 V; (b) -5 V

2-10 0.3

2-12 (a) $(1 - \mu)R_1 + R_2$; (b) $R_1 + (1 + \beta)R_2$

2-14 0.4 Ω

3-4 123, 124, 125, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 246, 256, 345, 346, 456

3-7 -0.956 A

3-8 -0.956 A

3-9 -1.552 A

3-10 2.4 A

3-11 80 V

3-12 276.25 V

3-13 (a) $U_\varphi = 20$ V; (b) $U_\varphi = 30$ V3-19 $I_s = 9$ A, $I_o = -3$ A

3-20 32 V

3-22 无解

4-2 80 V

4-4 1 V

4-6 1.8 倍

4-8 $u_\infty = -0.5$ V, $R_{eq} = 2 \Omega$ 4-10 (a) $u_\infty = 5/8$ V, $R_{eq} = 11/16 \Omega$; (b) $u_\infty = aU_s$, $R_{eq} = a(1-a)R + R_1$; (c) $u_\infty = 40$ V, $R_{eq} = 40 \Omega$, $i_\infty = 1$ A; (d) $u_\infty = 20$ V, $R_{eq} = 10 \Omega$

4-11 10 V, 0.2 Ω

4-13 (a) $u_\infty = 5$ V, $R_{eq} = 0$; (b) $i_\infty = 7.5$ A, $G_{eq} = 0$ 4-15 (1) $10 \Omega, 35.16$ W

4-17 1.6 V

4-19 2 A, -1 A

4-21 10.8 A

5-2 $u_o = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1)$ 5-4 $-R_2R_3(R_4 + R_5)/R_1(R_2R_4 + R_2R_5 + R_3R_4)$ 5-5 $-R_2R_4/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)$ 5-7 $u_o = \frac{[(G_3 + G_4)G_1 u_{S1} + (G_1 + G_2)G_3 u_{S2}]}{(G_1G_4 - G_2G_3)}$ 6-1 (a) $u_C(0_+) = 10$ V, $i_C(0_+) = -1.5$ A; (b) $i_L(0_+) = 1$ A, $u_L(0_+) = -5$ V6-3 $126 e^{-3.3t}$ V6-5 $2e^{-8t}$ A, $-16 e^{-8t}$ V6-7 (1) 1.024 kV; (2) $52.66 \text{ M}\Omega$; (3) 4588.5 s; (4) 50 kA, 50 MW; (5) 7.5 s, 0.1 A, 100 W6-9 $RI_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$, $RI_s^2 \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ 6-11 $14e^{-50t}$ V, $-(6 + 14e^{-50t})$ W6-13 $\frac{U_s}{R(1 - e^{-\frac{R}{2L}})}$, $\frac{U_s^2}{R \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{R}{2L}}\right)}$

6-15 (1) $(12 - 9e^{-\frac{t}{2}})$ V, $4.5 e^{-\frac{t}{2}}$ A, $(72 - 54 e^{-\frac{t}{2}})$ W; (2) $(12 + 3e^{-\frac{t}{2}})$ V, $-1.5 e^{-\frac{t}{2}}$ A, $(72 + 18e^{-\frac{t}{2}})$ W

6-17 $3e^{-25t}$ mA, 396×10^{-6} J

6-19 $4(1 - e^{-7t})$ A

6-20 $-6 \times 10^{-3} e^{-4000t}$ A

6-22 $\{(1 - e^{-\frac{6}{5}t})\epsilon(t) - [1 - e^{-\frac{6}{5}(t-1)}]\epsilon(t-1)\}$ A

6-24 $[-66.67e^{-200t}\epsilon(t) + 0.333\delta(t)]$ mA, $22.22e^{-200t}\epsilon(t)$ mA, $133.3 e^{-200t}\epsilon(t)$ V

6-25 $4e^{-240t}\epsilon(t)$ A, $[-96e^{-240t} + 0.4\delta(t)]$ V

6-28 $2.5(1 - e^{-0.3t})\epsilon(t)$ A

6-29 $(5 + 5e^{-50t})\epsilon(t)$ A

6-32 $-10(1 - e^{-t/200})\epsilon(t)$ V

7-1 6 V, 2 A, -24 V/s, 0.4 A/s

7-3 $11.2 e^{-200t} \sin(400t + 63.6^\circ)$ V, $10e^{-200t} \sin(400t)$ mA, $-11.2e^{-200t} \sin(400t + 63.6^\circ)$ V, 5.14 mA

7-5 (1) $0.044(e^{-382t} - e^{-2618t})$ A, $(100 - 117e^{-382t} + 17e^{-2618t})$ V; (2) $100te^{-1000t}$ A, $[100 - 100(1 + 1000t)e^{-1000t}]$ V; (3) $0.01e^{-100t} [\sin(995t + 84.3^\circ) - \cos(995t + 84.3^\circ)]$ A, $[100 - 100.5e^{-100t} \sin(995t + 84.3^\circ)]$ V

7-7 $358e^{-25t} \sin(139t + 176^\circ)$ V

7-9 $(5e^{-t} + 3e^{-2t})$ A

7-11 (1) $10 - \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 60^\circ\right)$ V;

(2) $\left[\frac{10}{\sqrt{3}}e^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 60^\circ\right) - 10e^{-0.5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 60^\circ\right)\right]$ V

8-2 (1) $2.92 - j9.56$; (2) $-5.76 + j13.85$; (3) $-1.06 + j0.563$; (4) $0 - j10$; (5) $-5 + j0$; (6) $-7.07 - j7.07$

8-4 $48.1/216.33^\circ, 0.52/69.93^\circ$

8-6 (1) $3.54/-120^\circ$ A, $7.07/-30^\circ$ A, $2.83/60^\circ$ A; (2) $-90^\circ, -180^\circ$; (5) 20 ms, 50 Hz

8-8 (1) $U_1 = U_2 = 220$ V, 50 Hz, 20 ms; (2) $220/-120^\circ$ V, $220/30^\circ$ V, -150°

8-10 (1) 0; (2) $380\sqrt{2}\cos(\omega t + 40^\circ)$ V, $380\sqrt{2}\cos(\omega t - 80^\circ)$ V

8-12 (1) 7.07 A; (2) 40.31 A

8-13 $30 \Omega, 127.4$ mH

8-15 $66.05 \Omega, 1.416 \cos(1000t - 20.73^\circ)$ A

8-17 $2\sqrt{2}/45^\circ$ V

9-2 $G = 2.07$ S, $C = 0.733$ F(并联)

9-4 (a) $10/0^\circ$ V; (b) $10/-90^\circ$ V

9-6 $10\sqrt{2}/45^\circ$ A, $5\sqrt{2}/45^\circ$ V(设 $I_2 = 10/90^\circ$ A)

9-8 48 mA

9-10 $(15.03 - j40.02)$ Ω

9-12 $3.16/-18.43^\circ$ A, $1.41/45^\circ$ A, $0.5/0^\circ$ S

9-14 $5.13/77.5^\circ$ Ω(或 $34.2/88.14^\circ$ Ω), $22/-62.96^\circ$ Ω

9-16 均为 1 A

9-18 $\frac{-gR_2 \dot{U}_2}{(1+gR_1)}$

9-20 1000 pF

9-22 (1) $\omega CR = \sqrt{3}$; (2) $\omega CR = \sqrt{6}$; (3) $\omega CR = \frac{1}{\sqrt{6}}$

9-24 (a) $\dot{U}_\infty = \frac{R_3 \dot{U}_s}{[(R_1 + R_2)(1 + j\omega CR_3) + R_3]}$

$Z_{eq} = \frac{[R_3(R_1 + R_2 - gR_2)]}{[(R_1 + R_2)(1 + j\omega CR_3) + R_3]}$;

(b) $\dot{U}_\infty = 3/0^\circ$ V, $Z_{eq} = 3/0^\circ$ Ω; (c) $\dot{I}_\infty = 2/-90^\circ$ A, $Y_{eq} = 0$ S

9-26 $-G_1 G_3 / [-\omega^2 C_1 C_2 + j\omega C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3]$, $G_k = 1/R_k$, $k = 1, 2, 3$

9-28 $(250 + j1250)$ V·A, $-j1300$ V·A

9-30 $\dot{U}_L = 61.86/-149.04^\circ$ V, $\dot{U}_S = 52.16/-151.7^\circ$ V, $\dot{U}_R = 10/45^\circ$ V, $I = 20.62/-120.96^\circ$ A, $(50 + j1074)$ V·A

9-32 $(2-j1)$ Ω, 6.25 W

9-34 20 A, 100 W, 1 Ω

9-35 44.72 V

9-38 117.7 μF

9-40 $Y = (1 - \mu)/R_1 - j\omega C$

9-42 (1) 20 mH, 50

9-44 25 μF, 180 V

9-46 (a) $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ (并联谐振), $\sqrt{\frac{(L_1 + L_2)}{L_1 L_2 (C_1 + C_2)}}$ (串联谐振); (b) $\frac{1}{\sqrt{3LC}}$

10-1 (a) $(1, 2')$; (b) $(1, 2'), (1, 3'), (2, 3')$

10-3 (1) $\Psi_1 = [12 + 30\cos(10t + 30^\circ) - 40e^{-5t}]$ Wb, $\Psi_2 = [-8 - 20\cos(10t + 30^\circ) + 30e^{-5t}]$ Wb; (2) $u_{11'} = [-300\sin(10t + 30^\circ) + 200e^{-5t}]$ V, $u_{22'} = [200\sin(10t + 30^\circ) - 150e^{-5t}]$ V; (3) 0.943

10-5 (d) 0.667 H

10-7 (1) $10.85/-77.47^\circ$ A(打开), $43.85/-37.88^\circ$ A(闭合); (2) $4385/37.88^\circ$ V·A

10-9 (1) $136.4/-119.7^\circ$ V, $311.1/22.38^\circ$ V; (2) 33.33 μF

10-11 41.52 rad/s**10-13** 0 A, $32/0^\circ$ V**10-15** $I_{L_1} = I_{L_2} = 1.104 \angle -83.66^\circ$ A, $I_C = 0$ A**10-17** (1) $0.1106\cos(314t - 64.8^\circ)$ A; (2) $0.3503\cos(314t + 1.1^\circ)$ A**10-19** 2.236**11-2** 30.08 A, 17.37 A**11-4** 3.593 A, 1162 W**11-6** (1) 6.1 A; (2) 3350 W; (3) 18.26 A, 6665 W; (4) 0 A, 1665 W**11-7** 332.9 V, 0.992**11-8** (1) $W_1 : 0, W_2 : 3939$ W (设 $\dot{U}_{AB} = 380/30^\circ$ V); (2) $W_1 : W_2 : 1313$ W**11-10** (1) $3.11 \angle -45^\circ$ A, $3.11 \angle -165^\circ$ A, $3.11/75^\circ$ A (设 $\dot{U}_{AN} = 220/0^\circ$ V); (2) 2128 W, 40.85 W**11-13** (1) 65.82 A, 0 A, 25.6 kW; (2) 65.82 A, 40.5 A, 5.450 kW (无意义)**11-14** (1) $I_A = 5.18/50.56^\circ$ A ($\dot{U}_{AN} = 220/0^\circ$ V); (2) $(2166 - j2633)$ V·A**11-15** 658.2 W, -658.2 W**12-1** $a_0 = 0, a_k = 0, b_k = 2E_m \sin(ka)/k^2 \alpha(\pi - \alpha), k = 1, 2, 3, \dots$ **12-3** $[12.83\cos(1000t - 3.71^\circ) - 1.396 \sin(2000t - 64.3^\circ)]$ A, 916 W**12-5** 77.14 V, 63.63 V**12-7** (1) 102 V, 113.6 V, 128.5 V, 147.6 V, 84.26 V; (2) 113.6 V, 59.16 V, 83.67 V, 20 V**12-9** $L = 1/49\omega^2, C = 1/9\omega^2$ **12-11** $[0.5 + \sqrt{2}\sin(1.5t + 45^\circ) + \sqrt{2}\sin(2t + 36.87^\circ)]$ V, 3.75 W**12-13** 215.2 V, 90 V**13-1** (1) $\frac{a}{s(s+a)}$; (2) $\frac{\omega\cos\varphi + s\sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$; (3) $\frac{s}{(s+a)^2}$; (4) $\frac{1}{s(s+a)}$; (5) $\frac{2}{s^3}$; (6) $\frac{3s^2 + 2s + 1}{s^2}$; (7) $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$; (8) $\frac{a^2}{s^2(s+a)}$ **13-3** (1) $e^{-t} - (t+1)e^{-2t}$; (2) $0.5 + 7.07e^{-t}\cos(t - 135^\circ)$; (3) $1 + 2e^{-2t}\sin t$; (4) $\frac{t}{2}\sin t$ **13-5** $(1 - 1.5e^{-50t} + 0.5e^{-150t})$ A**13-7** $(30 - 10e^{-50000t})$ V, $(30 - 20e^{-50000t})$ V**13-9** $\left[10 + \frac{50}{3}e^{-t}\sin(3t)\right]$ A**13-11** $\frac{8s}{(4s^3 - 14s^2 + 16s + 3)}$

13-12 $(900e^{-200t} - 900e^{-\frac{800t}{3}}) V$

13-14 (1) $\frac{25(s+1)^2}{s(11s^2 + 15s + 6)}$; (2) $\frac{-5(s+1)^2}{s^2(5s+3)}$

13-16 $(6.667 - 0.447e^{-6.34t} - 6.22e^{-23.66t}) A$

13-18 $(2.732e^{-7.464t} - 0.7321e^{-0.5359t}) V, (-1.57e^{-7.464t} + 81.57e^{-0.5359t} - 79e^{-0.5t}) V$

13-19 $(4e^{-t}\cos t + 6e^{-t}\sin t) V$

13-20 $\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right) V, \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t}\right) V$

13-21 $[(1 - e^{-\frac{t}{6}})\epsilon(t) + (1 - e^{-\frac{t-1}{6}})\epsilon(t-1) - 2(1 - e^{\frac{t-2}{6}})\epsilon(t-2)] A$

13-24 $(10 - 4e^{-0.04t}) V, 4e^{-0.04t} V, [12\delta(t) + 0.32e^{-0.04t}] A, [12\delta(t) - 0.48e^{-0.04t}] A, 0.8e^{-0.04t} A$

14-2 (a) $\frac{30s^2 + 14s + 1}{6s^2 + 12s + 1}$; (b) $\frac{2s + 1}{2s^2 + s + 1}$

14-4 $\frac{(s+1)^2}{s^2 + 5s + 2}$

14-6 $i_1(t) = (9e^{-3t} - 3.75e^{-10t} - 5.25e^{-2t}) A, H(s) = \frac{3s}{(s+3)(s+10)}, h(t) = -\frac{9}{7}e^{-3t} + \frac{30}{7}e^{-10t}$

14-8 $\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$

14-9 (1) $\frac{5s+8}{5(s+1)}$; (2) $\frac{(s+a)\sin\theta + \omega\cos\theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$;

(3) $\frac{27s^4 + 262s^3 + 1153s^2 + 2025s + 1215}{45s^2(s+1)(s+3)^2}$

14-11 $\frac{1}{s^2 + 3s + 1}$

14-13 $\frac{0.27s^2 + 1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$; (4) $1.27e^{-t} + 1.035e^{-0.5t}\cos(0.866t - 165.1^\circ)$; (5) $1 - 1.27e^{-t} + 1.035e^{-0.5t}\cos(0.866t + 74.88^\circ)$

14-14 (1) $\frac{2}{s^2 + s + 1}$; (2) $2.31e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

14-16 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}} F, \sqrt{2} H$; (2) $\frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 1}}$

15-1 (a)
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$15-3 \quad B_f = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_f = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$15-6 \quad \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & 15 & 5 \\ -5 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -10 \\ 13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

15-8

$$\begin{bmatrix} R_4 + R_5 + R_6 + j\omega L_2 & R_4 + R_5 + j\omega(L_2 - M) & 0 \\ R_4 + R_5 + j\omega(L_2 - M) & R_3 + R_4 + R_5 + R_7 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) & R_3 \\ 0 & R_3 & \frac{R_3 + 1}{(j\omega C_8)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_4 I_{S4} \\ -U_{S2} + R_4 I_{S4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$15-10 \quad \begin{bmatrix} j\omega C_1 + 1/R_2 + 1/R_3 & g - 1/R_3 & -g \\ -1/R_3 & 1/R_3 + 1/R_5 + 1/(j\omega L_4) - g & g - 1/R_5 \\ 0 & -1/R_5 & 1/R_5 + 1/R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} U_{n2}/R_2 - U_{n3}/R_3 \\ U_{n3}/R_3 \\ -I_{S4} \end{bmatrix}$$

15-13

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 + G_8 & G_4 + G_8 & G_4 + G_8 & -G_4 \\ G_4 + G_8 & G_2 + G_4 + G_5 + G_6 & G_4 + G_5 + G_6 & -G_4 \\ G_4 + G_8 & G_4 + G_5 + G_6 & G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_8 & -(G_3 + G_4) \\ -G_4 & -G_4 & -(G_3 + G_4) & G_3 + G_4 + G_7 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_4 U_{S4} + G_8 U_{S8} \\ I_{S8} + G_4 U_{S4} + G_8 U_{S8} \\ G_4 U_{S4} + G_8 U_{S8} \\ -G_4 U_{S4} \end{bmatrix}$$

15-15 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \dot{U}_s + \dot{I}_s = [-I_{S1} \ 0 \ 0 \ \dot{U}_{S4} \ 0 \ 0 \ 0]^T$

$$F = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -j\omega C_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -j\omega C_7 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -R_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -j\omega L_5 & -j\omega M & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -j\omega M & -j\omega L_6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

15-17 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C & -1/C \\ -1/L_1 & -R_1 R_2 / (R_1 + R_2) L_1 & 0 \\ -1/L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 / (R_1 + R_2) L_1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 R_2 / (R_1 + R_2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} R_2 / (R_1 + R_2) \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{bmatrix}$$

16-1 (a) $Y = \begin{bmatrix} -j1/(\omega L) & j1/(\omega L) \\ j1/(\omega L) & j[(\omega C - 1/(\omega L))] \end{bmatrix};$ (b) $T = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L \\ j\omega C & 1 - \omega^2 LC \end{bmatrix}$

16-2 (a) $Y = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/3 \end{bmatrix};$ (b) $Z = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

16-4 (a) $\begin{bmatrix} 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix};$ (b) $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

16-6 $5 \Omega, 5 \Omega, 5 \Omega, 3 \Omega$

16-7 $\begin{bmatrix} 0.667 & 0.8 \\ -0.8 & 0.84 \end{bmatrix}$

16-9 -2

16-11 $Y_{11} = Y_{22} = \frac{sC[s+1/(RC)]}{2[s+1/2(RC)]} + \frac{[s+1/(RC)]}{R[s+2/(RC)]}$

$$Y_{12} = Y_{21} = \left\{ \frac{s^2 C}{2[s+1/2(RC)]} + \frac{1/R^2 C}{s+2/(RC)} \right\}$$

16-13 $\begin{bmatrix} 3.25 & 27 \\ j0.025 & 0.1 \end{bmatrix}$

16-15 $\frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + s + 4}$

17-1 $u = 1 - 8i^2 + 8i^4$

17-3 3 J

17-5 $i_1 \approx 0.04193 \text{ A}, i_3 \approx 0.04192 \text{ A}$

17-9 $U_Q = 0.34 \text{ V}, I_Q = 0.66 \text{ A}$

17-10 $\left[1 + \frac{1}{7} \cos(\omega t) \right] \text{ A}$

17-13 $U_Q \approx 3.5 \text{ V}, I_Q \approx 3 \text{ A}$

17-14 $(-2t/3C + U_0^{2/3})^{3/2} \text{ V}$

17-15 $u_C(t) = (1 - 2e^{-t}) \text{ V}, (0.693 \text{ s} \leq t \leq 1.386 \text{ s}), u_C(t) = [3 - e^{(t-0.693)}] \text{ V}$
 $(0.693 \text{ s} \leq t \leq 1.386 \text{ s}), u_C(t) = e^{-2(t-1.386)} \text{ V}, (t > 1.386 \text{ s})$

18-2 $84.39/\underline{-38.9^\circ} \Omega/\text{km}, (53.32 + j65.99) \times 10^{-3} \text{ S/km}, 7.617 \times 10^7 \text{ m/s}, 95.20 \text{ km}$

18-3 $8.164 \text{ V}, 0.1633 \text{ A}$

18-4 $224.1/\underline{15.73^\circ} \text{ kV}, 470.4/\underline{23.5^\circ} \text{ A}$

18-6 $(40.50 + j46.28) \Omega$

A-1 176.4 At

A-2 $17 \times 10^{-4} \text{ Wb}$

A-3 4096 At

索 引

一 画

- 一阶电路 123
- $RC \sim$ 123
- $RL \sim$ 123
- 一相计算电路 253
- 一端口 43
- 含源 \sim 88

二 画

- 二阶电路 158
- $RLC \sim$ 158
- 二极管 395
- 二端口 369
 - \sim 参数 370
 - \sim 参数互换表 378
 - \sim 连接 384
- 人工神经元 421
- 人工神经网络 420
- 二瓦计法 257
- 入射波 435

三 画

- 三相三线制 250
- 三相四线制 250
- 三相电路 248
 - 不对称 \sim 255
 - 对称 \sim 250
- 三相电路的连接 250
- 三相电压 248

- 三相电流 251
- 三相电源 248
- 三角形电源 249
- 三角形负载 250
- 三角形连接 35
- 三要素法 138
- 工作点(静态) 399
- 小信号分析 403

四 画

- 元件 2
 - 二端 \sim 2
 - 三端 \sim 2
 - 四端 \sim 2
 - 多端 \sim 113
 - 无源 \sim 9
 - 有源 \sim 15
 - 线性 \sim 6
 - 非线性 \sim 6
 - 时变 \sim 6
- 方程 50
 - 结点电压 \sim 69
 - 结点列表法 \sim 355
- 回路电流 \sim 63
- 网孔电流 \sim 60
- 割集电压 \sim 352
- 状态 \sim 358
- 自治 \sim 413
- 非自治 \sim 413
- 开路 8

- 开路电压 88
 支路 19
 ~电流法 56
 ~阻抗矩阵 343
 ~导纳矩阵 347
 中点 249
 ~位移 255
 中线 249
 互易定理 102
 互感 232
 互感抗 234
 分布(参数)电路 427
 分贝 213
 分段线性化 406
 反射波 436
 反射系数 436
 比例器 115
- 电感的能量 14
 电感的初始值 124
 电导 7
 电抗 191
 容(性电)抗 191
 感(性电)抗 191
 电纳 192
 容(性电)纳 193
 感(性电)纳 192
 电源 1
 受控 ~ 17
 独立 ~ 17
 电源的等效变换 40
 电压源 15
 电压控制电压源 17
 电压控制电流源 17
 电压跟随器 117
 电流源 16
 电流控制电压源 17
 电流控制电流源 17
 对偶元素 102
 对偶原理 104
 正弦电流电路 179
 正弦量(波) 179
 正弦稳态分析 198
 正弦稳态电路 179
 功率 5
 三相电路 ~ 256
 无功 ~ 203
 有功(平均) ~ 202
 视在 ~ 203
 瞬时 ~ 202
 自然 ~ 442
 功率因数 203
 ~提高 207
 功率守恒 206
 去耦法 238

五 画

- 电路 1
 线性 ~ 31
 非线性 ~ 394
 时不变 ~ 31
 电路模型 2
 电阻(元件) 7
 压控 ~ 395
 负 ~ 9
 流控 ~ 394
 线性 ~ 6
 非线性 ~ 394
 电容(元件) 9
 线性 ~ 10
 非线性 ~ 399
 电容的能量 11
 电容的初始值 124
 电感(元件) 13
 线性 ~ 13
 非线性 ~ 401

六 画

- 导纳 192
 运算～ 300
 复(数)～ 192
 有效值(均方根值) 177
 正弦量～ 178
 非正弦周期量～ 270
 回路 19
 独立～ 53
 基本～ 53
 回转器 386
 回转常数 387
 网孔 55
 网络 3
 网络函数 314
 ~零点 316
 ~极点 316
 过渡过程 123
 过阻尼 166
 齐性定理 85
 自感(系数) 13
 自由分量 133
 并联 33
 电阻～ 33
 导纳～ 195
 动态元件 11
 动态电路 123
 阶跃函数 141
 单位～ 141
 阶跃响应 141
 一阶电路～ 141
 二阶电路～ 166
 冲激函数 144
 单位～ 144
 冲激响应 144
 一阶电路～ 144
 二阶电路～ 168

同名端 232
 行波 435

七 画

- 阻抗 190
 运算～ 299
 特性～ 432
 复(数)～ 191
 折线(分段线性)电阻 413
 折线法 406
 初始条件 124
 非独立～ 124
 独立～ 124
 初始状态 413
 运算电路 299
 运算法 290
 运算放大器(运放) 111
 ~外特性 113
 ~饱和电压 113
 串联 32
 电阻～ 33
 阻抗～ 194
 状态 357
 ~平面 413
 ~变量 357
 连支 53
 均匀传输线 428
 ~方程 429
 ~原参数 438
 ~副参数 438
 ~稳态解 431
 时间常数 127
 RC 电路～ 127
 RL 电路～ 130

八 画

- 图 50
 连通～ 52

- 平面～ 55
 拉氏变换 289
 ～定义 289
 ～积分性质 293
 ～线性性质 291
 ～微分性质 292
 ～延迟性质 293
 拉氏变换表 294
 拉氏反变换 295
 ～部分分式展开 295
 驱动点导纳 193
 驱动点阻抗 192
 参考方向 3
 关联～ 4
 变压器 239
 空心～ 239
 理想～ 240
 波形 15
 波长 436
 波过程 453
 波速 454
 非振荡放电 160
 非正弦周期电量(流) 264
 ～平均值 271
 ～功率 271
 驻波 447
 奈培 439
 固有频率 213
 拓扑 19
 卷积 326

九画

- 复合支路 342
 复数 173
 ～运算 173
 复功率 205
 ～守恒 206
 复频率 290
- ～平面 316
 相位(角) 177
 初～(初相) 177
 ～差 178
 ～速度(相速) 436
 相量 180
 有效值～ 180
 振幅～ 180
 相量法 179
 相量图 180
 相轨道 413
 响应 1
 全～ 137
 零输入～ 126
 零状态～ 132
 树 53
 树支 53
 结点 19
 始～ 479
 终～ 479
 星形电源 249
 星形负载 250
 星形连接 250
 品质因数 212
 选择性 214
 语句 482

十画

- 能量 5
 电场～ 9
 磁场～ 14
 振荡 160
 衰减～ 162
 自激～ 417
 张弛～ 410
 谱顿定理 92
 特勒根定理 96
 高次谐波 265

三相电路 ~ 275

铁心线圈 475

~ 电路模型 476

铁心损耗 472

矩阵 333

关联 ~ 335

回路 ~ 337

割集 ~ 338

H (混合)参数 ~ 377

T (一般)参数 ~ 377

Y 参数 ~ 371

Z 参数 ~ 374

十一画

基尔霍夫定律 19

基尔霍夫电压定律 21

基尔霍夫电流定律 19

基波 265

梯形电路 85

虚地 116

虚断 116

虚短 116

混沌电路 417

描述语言 482

谐振 210

~ 频率 211

串联 ~ 210

并联 ~ 216

谐波 265

~ 分析法 265

子 ~ 418

理想运放 114

~ 饱和特性 411

十二画

集总(参数)元件 19

集总(参数)电路 19

等效电阻 33

等效电路 31

戴维宁 ~ 89

诺顿 ~ 92

等效变换 31

短路 8

短路电流 41

强制分量 133

最大功率 94

傅里叶变换(积分) 281

傅里叶级数 264

~ 三角形式 265

~ 指数形式 277

割集 332

独立 ~ 333

基本 ~ 334

替代定理 86

十二画以上

频率 17

复 ~ 290

角 ~ 17

频率响应 213

频谱 266

输入 1

~ 电阻 43

~ 导纳 193

~ 阻抗 192

输出 1

滤波器 274

叠加定理 80

戴维宁定理 89

端线 249

稳定状态 133

稳态分量 133

磁路 461

~ 定律 465

恒定磁通 ~ 467

交变磁通 ~ 472

- 磁场强度 462 II 形等效电路 379
磁通 462 T 形等效电路 379
磁通链 12 CAA 479
磁感应强度 462 CAD 482
磁化曲线 463 CCCS 17
磁滞回线 463 CCVS 17
耦合电感 231 KCL 19
耦合因数 234 KVL 21
激励 1 PSPICE 482
瞬时值 15 Q 值(见品质因数) 212
瞬态分量 133 SPICE 482
△形连接(同三角形连接) 35 VCR 19
Y 形连接(同星形连接) 250 VCCS 17
Y-△ 等效变换 36 VCVS 17

参考书目

- [1] 江泽佳主编. 电路原理.(第三版). 北京: 高等教育出版社, 1992
- [2] 俞大光编. 电工基础(中册). (修订本). 北京: 高等教育出版社, 1965
- [3] 周长源主编. 电路理论基础. (第二版). 北京: 高等教育出版社, 1996
- [4] 李瀚荪编. 电路分析基础. (第三版). 北京: 高等教育出版社, 1993
- [5] 吴锡龙编. 电路分析导论. 北京: 高等教育出版社, 1987
- [6] C. A. 狄苏尔, 葛守仁著, 林争辉主译. 电路基本理论. 北京: 高等教育出版社, 1979
- [7] Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Engineering Circuit Analysis* (3rd edition). McGraw-Hill, Inc, 1978
- [8] Van Valenburgh, M. E. *Network Analysis* Prentice-Hall, Inc., 1974
- [9] Huelsman, L. P. *Basic Circuit Theory* (2nd edition). Prentice-Hall, Inc., 1984
- [10] Bobrow, L. S. *Elementary Linear Circuit Analysis* Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1981
- [11] Chua, L. O., Desoer, C. A., Kuh, E. S. *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill Inc., 1987
- [12] 肖达川编著. 电路分析. (第一版). 北京: 科学出版社, 1984
- [13] 林争辉著. 电路理论. (第一卷). 北京: 高等教育出版社, 1988
- [14] 邱关源主编. 电工基础. (上册). (第一版). 北京: 高等教育出版社, 1965
- [15] 邱关源编著. 网络理论分析. (第一版). 北京: 科学出版社, 1982

参考书目

- [1] 江泽佳主编. 电路原理.(第三版). 北京: 高等教育出版社, 1992
- [2] 俞大光编. 电工基础(中册). (修订本). 北京: 高等教育出版社, 1965
- [3] 周长源主编. 电路理论基础. (第二版). 北京: 高等教育出版社, 1996
- [4] 李瀚荪编. 电路分析基础. (第三版). 北京: 高等教育出版社, 1993
- [5] 吴锡龙编. 电路分析导论. 北京: 高等教育出版社, 1987
- [6] C. A. 狄苏尔, 葛守仁著, 林争辉主译. 电路基本理论. 北京: 高等教育出版社, 1979
- [7] Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Engineering Circuit Analysis* (3rd edition). McGraw-Hill, Inc, 1978
- [8] Van Valenburgh, M. E. *Network Analysis* Prentice-Hall, Inc., 1974
- [9] Huelsman, L. P. *Basic Circuit Theory* (2nd edition). Prentice-Hall, Inc., 1984
- [10] Bobrow, L. S. *Elementary Linear Circuit Analysis* Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1981
- [11] Chua, L. O., Desoer, C. A., Kuh, E. S. *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill Inc., 1987
- [12] 肖达川编著. 电路分析. (第一版). 北京: 科学出版社, 1984
- [13] 林争辉著. 电路理论. (第一卷). 北京: 高等教育出版社, 1988
- [14] 邱关源主编. 电工基础. (上册). (第一版). 北京: 高等教育出版社, 1965
- [15] 邱关源编著. 网络理论分析. (第一版). 北京: 科学出版社, 1982