

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP

大家好，我是深蓝学院的教研负责人赵松，以下内容是自己与多位 SLAM 工程师讨论，并整合自己对 IMLS-ICP 的理解，整理出来的。如有不妥之处，欢迎拍砖！纸质讲义完善之后，会录制成视频。

1. 背景

前面我们讲解了点到点的 ICP，以及点到线的 ICP，但不可忽视的情况是，每次激光扫描时，未必会扫描到同一个点，也未必会扫描到之前帧激光点构建的子图所在的线段上，但大概率会扫描到之前帧激光点所在的平面上，因此，更恰当的方式是当前帧的激光点与之前帧的激光点云所在的曲面进行匹配。

那么，如何重建出之前帧的激光点所在的曲面呢？

2. 曲面重建

曲面重建的任务是指，已知前 n 帧激光点的坐标，拟合出这些激光点所在的曲面（如图 1 所示）。如果我们事先知道曲面的参数方程，那么直接采用最小二乘法求得曲面方程的参数，就直接拟合出曲面了，但是，我们并不知道这些曲面方程的形式。这种情况下应该如何拟合曲面呢？

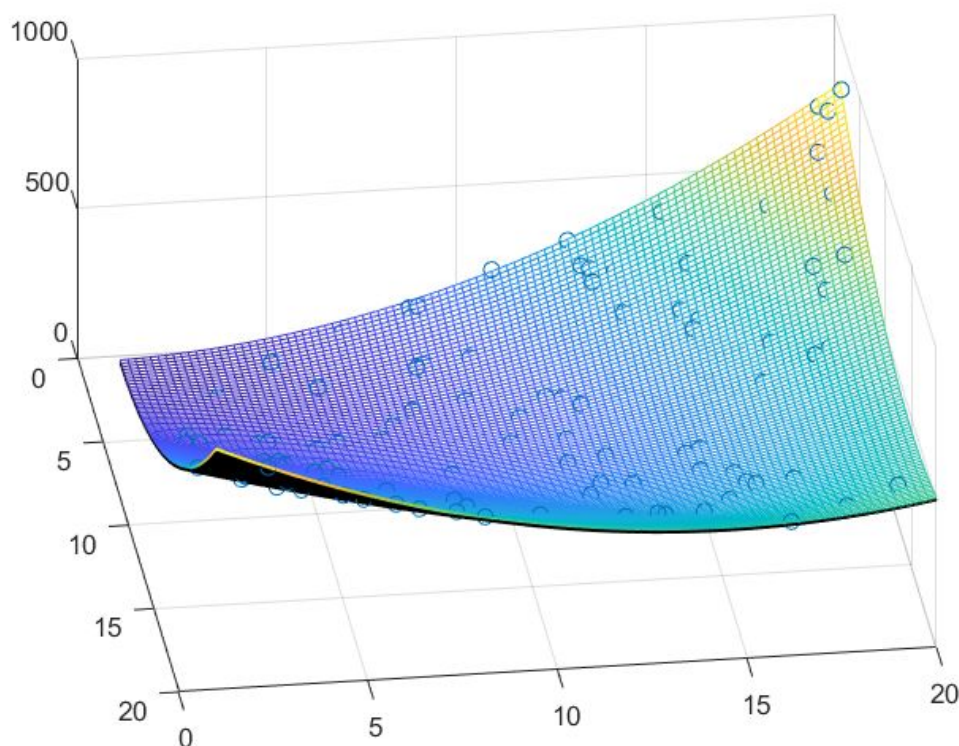


图 1 三维曲面拟合

在计算机图形学领域，基于 SDF(Signed Distance Function, 符号距离函数)的拟合方法是重建点云曲面的主流方法之一，该类方法完全是基于点的特征完成曲面重建，并且将曲面看作一个符号距离函数的等值面，曲面内外函数值的符号相反（大于 0，小于 0），其零等值面即为所求的曲面。

在 IMLS-ICP 方法中，作者直接采用的符号距离函数形式为：

$$I^{P_k}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{\mathbf{p}_i \in P_k} (W_{\mathbf{p}_i}(\mathbf{x}) ((\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) \cdot \vec{\mathbf{n}}_i))}{\sum_{\mathbf{p}_j \in P_k} W_{\mathbf{p}_j}(\mathbf{x})}$$

其中，

P_k : 前 n 帧激光数据组成的子图；

$I^{P_k}(\mathbf{x})$: \mathbb{R}^3 空间的点 \mathbf{x} 到点云集 P_k 蕴含的曲面的距离；

\mathbf{p}_i : 点云集 P_k 中的点；

$\vec{\mathbf{n}}_i$: 点 \mathbf{p}_i 的单位法向量；

$W_{\mathbf{p}_i}(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2 / h^2}$: 权重。

此时，待重建的曲面的表达式为 $I^{P_k}(\mathbf{x}) = 0$ ，需要注意的是 $I^{P_k}(\mathbf{x})$ 并不是 IMLS-ICP 方法提出的，而是直接用的现成的结论。关于 $I^{P_k}(\mathbf{x})$ 的性质，可以参考论文《Provably good moving least squares》，该论文中有两个重要的性质，值得大家关注：

第一，论文中的 Theorem 10，该定理证明了为什么 $I^{P_k}(\mathbf{x})$ 可以有效地估计点云隐藏的真实曲面；

第二，论文中的 Theorem 9，该定理证明了，对于曲面内的点 $I^{P_k}(\mathbf{x}) < 0$ ；对于曲面外的点 $I^{P_k}(\mathbf{x}) > 0$ 。

Theorem 9 后面我们才会用到它的结论。

2.1 如何理解 $I^{P_k}(\mathbf{x})$?

首先我们来看， $(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) \cdot \vec{\mathbf{n}}_i$ 的物理意义是空间中由点 \mathbf{p}_i 指向点 \mathbf{x} 的向量在 \mathbf{p}_i 单位法向量的投影（图 2）。那么表达式中加权的考虑是什么呢？

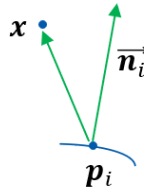


图 2 空间示意图

加权相当于引入了多目标数据关联，即当前帧的点和地图（前 n 帧激光数据组成的子图）中多个点进行关联，增加了鲁棒性。举个例子，比如原来地图中的点 \mathbf{p}_i 可能是噪声，与多个点加权后可以减弱噪声点 \mathbf{p}_i 的影响。此外，地图里可能没有与当前帧的点 \mathbf{x} 真正对应的匹配点，加权平均之后的或许更接近它真正的匹配点（类似样条插值的思想）。到这里，我们就理解了 $I^{P_k}(\mathbf{x})$ 表达的是，空间的点 \mathbf{x} 到点云集 P_k 蕴含的曲面的符号距离（带正负号），那么 $|I^{P_k}(\mathbf{x})|$ 就表示点 \mathbf{x} 到曲面的距离。

2.2 如何求解位姿 \mathbf{R}, \mathbf{t}

我们的目标是通过不断调整当前帧的位姿变换 \mathbf{R}, \mathbf{t} ，使得当前帧的激光点到曲面的距离之和最小，即

$$\min \sum_{\mathbf{x}_j \in S_k} |I^{P_k}(\mathbf{R}\mathbf{x}_j + \mathbf{t})|$$

其中， S_k 表示新一帧激光数据。

上述目标函数中，由于包含指数项（权重），难以优化。

我们换一种思路，如果能找到 x_j 在表面上的投影点 y_j ，那么目标函数可以调整为：

$$\min \sum_{x_j \in S_k} |\vec{n}_j \cdot (R x_j + t - y_j)|^2$$

并且，点 x_j 、投影点 y_j 、单位法向量 \vec{n}_j ，三者之间应该满足： $y_j = x_j - I^{P_k}(x_j) \vec{n}_j$ (\vec{n}_j 表示点 x_j 在曲面上投影点 y_j 处的单位法向量， $I^{P_k}(x_j)$ 为符号距离)，如图 3。

可惜的是，我们并不知道点 x_j 的投影点 y_j ，进而也就不知道该点处的单位法向量 \vec{n}_j 。换句话说， $\vec{n}_j \cdot (R x_j + t - y_j)$ 中除了 x_j 已知，其他都是未知量，因此依然无法求解 R, t 。

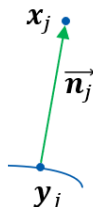


图 3 点 x_j 投影示意图

那么如何确定点 x_j 的投影点 y_j 呢？一种估计的方法是，用前 n 帧激光点云地图 P_k 中距离点 x_j 最近的点的单位法向量当作 \vec{n}_j ，至此，投影点 y_j 就被估计出来了。通过目标函数就可以求得当前帧激光点云的姿态 R, t 。

讲到这里，对于 SLAM 问题而言，流程上已经全部通了，这时候如果我告诉你 IMLS-ICP 方法的精华并不在于刚才这些，而是接下来要讲解的内容。此刻……



3. 如何选择激光点

IMLS-ICP 方法的精华在于，对于新的当前帧，并不选择其所有的激光点参与匹配过程，而是选择对于各个姿态影响较大（可观）的激光点参与匹配过程。据说，这是工程中的核心!!! 那么接下来我们的任务就是，如何选择对各个姿态可观性较强的激光点了。

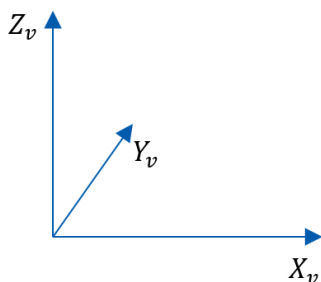


图 4 激光雷达坐标系

我们直接上公式：

(1) 3 个平移方向(X_v, Y_v, Z_v)的可观性

$$\begin{aligned} a_{2D}^2 |\vec{n}_i \cdot X_v| \\ a_{2D}^2 |\vec{n}_i \cdot Y_v| \\ a_{2D}^2 |\vec{n}_i \cdot Z_v| \end{aligned}$$

$a_{2D}^2 |\vec{n}_i \cdot X_v|$ 筛选出法向量与 X_v 轴夹角尽可能小的激光点，最好法向量是平行于 X_v 轴的，那么也就是说，车两侧平面上的激光点；同理， $a_{2D}^2 |\vec{n}_i \cdot Y_v|$ 筛选的是车辆正前方垂直于地面的平面上的点； $a_{2D}^2 |\vec{n}_i \cdot Z_v|$ 筛选的是地面上的点。

(2) 3 个姿态角(roll, pitch, yaw)的可观性

$$\begin{aligned} a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot X_v \\ -a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot X_v \\ a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot Y_v \\ -a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot Y_v \\ a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot Z_v \\ -a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot Z_v \end{aligned}$$

对于地面上的点， x_i 的方向是沿着 Y_v 轴的方向， \vec{n}_i 的方向是垂直于 $X_v - O - Y_v$ 平面的，因此 $x_i \times \vec{n}_i$ 的方向是平行于 X_v 轴的，即 $a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot X_v$ 以及 $-a_{2D}^2 (x_i \times \vec{n}_i) \cdot X_v$ 的数值更大，其它 4 项数值趋向于 0，也就是地面上的激光点对于俯仰角(pitch)可观；同理，车辆前方的激光点对于偏航角可观，车辆两侧的激光点对于横滚角可观。

4. 小结

上述就是 IMLS-ICP 的全部内容，当然算法具体实现时，还有很多细节。比如，在计算投影点 $y_j = x_j - I^{P_k}(x_j)\vec{n}_j$ 时， $I^{P_k}(x_j)$ 并不是所有的 $p_i \in P_k$ 都参与计算，而是仅选择以 x_j 为球心的球体内的点。再比如，在选择 3 个姿态角(roll, pitch, yaw)的可观性强的激光点时，为什么用 x_i 参与叉积计算，而不是 x_i 的单位法向量，这是因为倾向于选择距离激光雷达原点 O 更远一些的点。这些细节有待大家在看论文以及代码的时候发掘。

总之，通过本章节的学习，大家要重点知道在激光 SLAM 的工程中，选择参与匹配的激光点真的很关键！到这里就结束了吗，当然还没有……

我们讨论了点到点的 ICP，点到线的 ICP，点到面的 ICP，还有没有更鲁棒的算法？当然有，那就是面到面的 ICP，江湖人称 GICP。