深蓝学院
shenlanxueyuan.com

多传感器融合定位

第6讲 惯性导航解算及误差分析

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者

目录

目录

三维运动描述基础知识

1. 概述

多传感器融合中三维运动的导航信息包含姿态、速度、位置，其中姿态的处理最为复杂，也最为核心。
姿态有三种表示形式：欧拉角、旋转矩阵、四元数，此外还有等效旋转矢量，但它一般在中间计算过程中使用。

注：本课程只介绍基于四元数和旋转矩阵的姿态更新，不介绍基于欧拉角的更新。

参考文献：

1. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter
2. 《捷联惯导算法与组合导航原理》（严恭敏等著）

文献1属于机器人技术体系，文献2属于高精度惯性导航技术体系，因此，本章以文献1为核心，文献2中只借鉴部分推导过程。

三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

1) 欧拉角

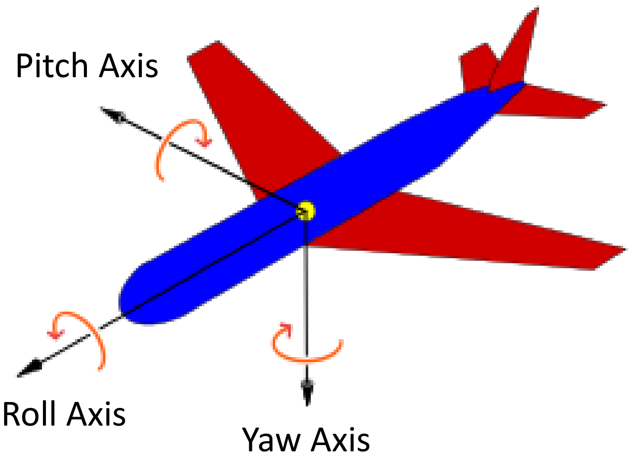
欧拉角等同于把姿态绕三次不同轴旋转。

不同的旋转顺序会得到不同的欧拉角，常见的有：

a. 机器人坐标系：xyz分别对应前左上，旋转顺序为z-y-x；

b. 惯性导航坐标系：xyz分别对应右前上，旋转顺序为z-x-y；

c. 另一种惯性导航坐标系：xyz分别对应前右下，旋转顺序为z-y-x。



思考：为什么不同的坐标系定义下，会选择不同的旋转顺序？

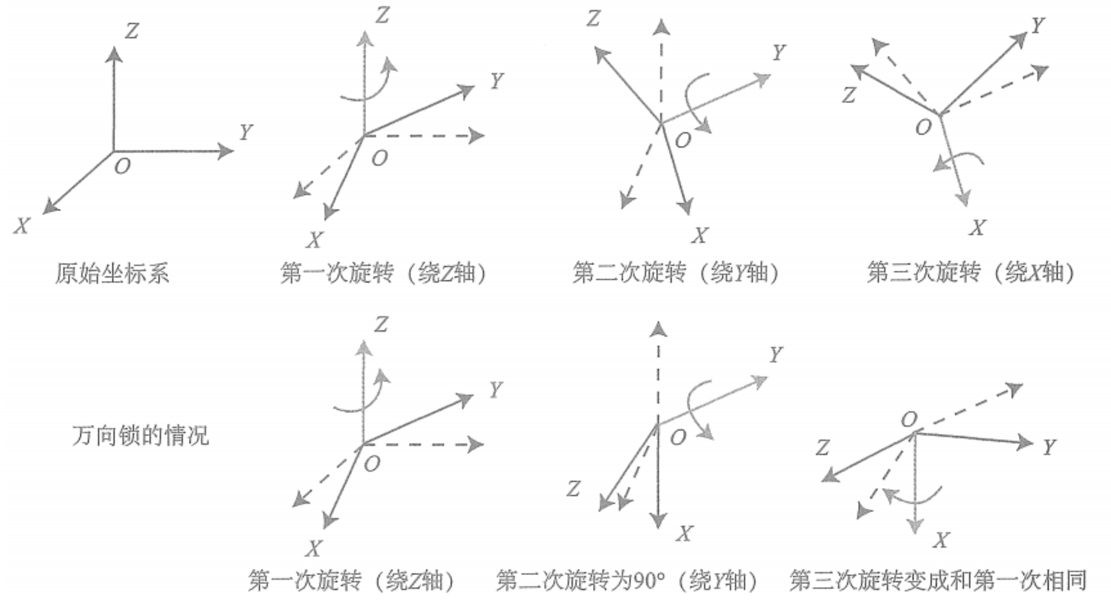
三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

1) 欧拉角

万向锁：当载体处在某个姿态时，会产生奇异性问题，导致丢失一个自由度。

不同的旋转顺序下，产生万向锁时所处的姿态不同。下图展示了z-y-x的旋转顺序下的万向锁问题。



2. 姿态描述方法

1) 欧拉角

不同坐标系定义下，选择不同旋转顺序的原因：其本质都是按照“航向->俯仰->横滚”的顺序旋转，因为此时万向锁出现在俯仰为90°时的情况，而多数载体出现该姿态的几率最小。

需要注意的是，欧拉角有明确的物理意义，不随坐标系定义的不同而改变：

a. 俯仰角：载体抬头为正，低头为负；
b. 横滚角：向右滚为正，向左滚为负；
c. 航向角：机器人中，一般以逆时针旋转为正，顺时针旋转为负。(在与地理系相关的惯性导航中，常以北偏东为正，北偏西为负，遇到时需要注意)

由于欧拉角必然产生奇异性，因此一般只用它做人机交互的显示，而不用来做姿态解算。

2. 姿态描述方法

2) 旋转矩阵

旋转矩阵是描述旋转的一个三维矩阵，一个真实姿态对应一个唯一的旋转矩阵。

假设旋转前，载体系(b系)的单位正交基为 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$，旋转后对应的单位正交基为 $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$

假设在世界坐标系(w系，不随载体的旋转而旋转)下有向量 $\boldsymbol{a}$ ，它在旋转前后两个坐标系中的坐标分别为 $[a_1, a_2, a_3]^{\mathrm{T}}$ 和 $[a'_1, a'_2, a'_3]^{\mathrm{T}}$，那么有

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3]\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}$$

由此可以得到

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 便是旋转矩阵，在结合机器人模型推导时，记为 $\boldsymbol{R}_{wb}$

2. 姿态描述方法

2) 旋转矩阵

旋转矩阵是单位正交矩阵，即行列式为1，且满足 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}'$

优点：

a. 没有奇异性，适合用于解算；

缺点：

a. 用9个元素表示3个自由度，会增加计算复杂度；

b. 为了保持正交性，一般更新完毕后，要重新做正交化。

2. 姿态描述方法

3) 四元数

四元数是超复数，即“复数的复数”。

若有复数

$$A = a + b\boldsymbol{i}$$
$$B = c + d\boldsymbol{i}$$

则复数的复数为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q} &= A + B\boldsymbol{j} \\ &= a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

若令$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$，则有

$$\boldsymbol{q} = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$$

此即为四元数。

一般四元数的常见表示符号为

$$\boldsymbol{q} = q_w + \boldsymbol{q}_v = q_w + q_x\boldsymbol{i} + q_y\boldsymbol{j} + q_z\boldsymbol{k}$$

共轭四元数(实部相同，虚部相反)：

$$\boldsymbol{q}^* = q_w - \boldsymbol{q}_v = q_w - q_x\boldsymbol{i} - q_y\boldsymbol{j} - q_z\boldsymbol{k}$$

四元数的逆：

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \frac{\boldsymbol{q}^*}{\|\boldsymbol{q}\|}$$

姿态运算时，四元数为单位四元数，此时有

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^* = q_w - \boldsymbol{q}_v$$

2. 姿态描述方法

3) 四元数

四元数乘法

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - \boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_v \\ p_w \boldsymbol{q}_v + q_w \boldsymbol{p}_v + \boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix}$$

若在四元数乘法中出现三维向量，指的是和三维向量构成的纯虚四元数相乘，比如

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \boldsymbol{i} \\ u_2 \boldsymbol{j} \\ u_3 \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$$

乘法结合律

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r})$$

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}$$

2. 姿态描述方法

3) 四元数

四元数相乘，可以展开为矩阵与向量相乘的形式

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = [\boldsymbol{p}]_L \boldsymbol{q}$$

其中

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{p}]_L &= \begin{bmatrix} p_w & -p_x & -p_y & -p_z \\ p_x & p_w & -p_z & p_y \\ p_y & p_z & p_w & -p_x \\ p_z & -p_y & p_x & p_w \end{bmatrix} \\ &= p_w \boldsymbol{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_v & [\boldsymbol{p}_v]_\times \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中，符号 $[\bullet]_\times = [\bullet]^\wedge$ ，同样表示反对称矩阵。

也可以展开为

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = [\boldsymbol{q}]_R \boldsymbol{p}$$

其中

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{q}]_R &= \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix} \\ &= q_w \boldsymbol{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_v & -[\boldsymbol{q}_v]_\times \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此，可以得出重要性质(后续推导时常用)：

$$(\mathbf{q} \otimes \mathbf{x}) \otimes \mathbf{p} = [\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L \mathbf{x}$$

$$\mathbf{q} \otimes (\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}) = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R \mathbf{x}$$

2. 姿态描述方法

4) 等效旋转矢量

理解：把旋转当做绕空间一个固定轴转过一个角度。在不引起歧义的情况下可简称为旋转矢量或旋转向量。

直接用向量 $\boldsymbol{\phi}$ 表示，其方向即为转轴方向，对应的单位向量记为 $\boldsymbol{u}$ 它的长度 $\phi = |\boldsymbol{\phi}|$ 即为转角。

等效旋转矢量的指数形式，可以表示为

$$\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) = \exp\left(\phi \boldsymbol{u}^{\wedge}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\phi \boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{n}$$

上式包含高次幂，为了便于后续计算，需要对高次幂进行化简。

由于反对称矩阵具有以下性质(可自行推导)，

$$\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)^{i} = \begin{cases} (-1)^{(i-1)/2} \phi^{i-1} \left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) & i = 1, 3, 5, \cdots \\ (-1)^{(i-2)/2} \phi^{i-2} \left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)^{2} & i = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

4) 等效旋转矢量

因此，等效旋转矢量的指数函数可以表示如下：

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) &= I + \phi\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right) + \frac{1}{2!}\phi^{2}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{2} + \frac{1}{3!}\phi^{3}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{3} + \frac{1}{4!}\phi^{4}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{4} + \cdots \\
&= I + \phi\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right) + \frac{1}{2!}\phi^{2}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{2} - \frac{1}{3!}\phi^{3}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right) - \frac{1}{4!}\phi^{4}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{2} + \cdots \\
&= I + \left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{2} + \underbrace{\left(\phi - \frac{1}{3!}\phi^{3} + \frac{1}{5!}\phi^{5} - \cdots\right)}_{\sin\phi}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right) - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\phi^{2} + \frac{1}{4!}\phi^{4} - \cdots\right)}_{\cos\phi}\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{2} \\
&= I + \sin\phi\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right) + (1 - \cos\phi)\left(\boldsymbol{u}^{\wedge}\right)^{2} \\
&= I + \frac{\sin\phi}{\phi}\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) + \frac{(1 - \cos\phi)}{\phi^{2}}\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)^{2}
\end{aligned}
$$

3. 各描述方法之间的关系

1) 欧拉角与旋转矩阵

按照机器人前(x)-左(y)-上(z)的坐标系定义，并令横滚角为α、俯仰角为β、航向角为γ。

a. 欧拉角转旋转矩阵

由于旋转矩阵是按照z-y-x的顺序旋转得来，因此可以表示为

$$\boldsymbol{R}_{wb} = (\boldsymbol{R}_x(\alpha)\boldsymbol{R}_y(-\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma))^T$$

其中

$$\boldsymbol{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ 0 & -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_y(-\beta) = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} cos(\gamma) & sin(\gamma) & 0 \\ -sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 各描述方法之间的关系

1) 欧拉角与旋转矩阵

b. 旋转矩阵转欧拉角

由欧拉角得到的旋转矩阵，其完整形式为

$$\boldsymbol{R}_{wb} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & -c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

其中符号： $s\bullet = sin(\bullet)$ $c\bullet = cos(\bullet)$

观察矩阵，可以看出

$$\alpha = arctan2\left(\boldsymbol{R}_{wb}(3,2), \boldsymbol{R}_{wb}(3,3)\right)$$

$$\beta = arcsin\left(\boldsymbol{R}_{wb}(3,1)\right)$$

$$\gamma = arctan2\left(\boldsymbol{R}_{wb}(2,1), \boldsymbol{R}_{wb}(1,1)\right)$$

3. 各描述方法之间的关系

2) 旋转矩阵与四元数

它们转换的推导过程较为复杂，此处直接给出结论。

四元数转旋转矩阵：

$$\boldsymbol{R}_{wb}=\begin{bmatrix} q_w^2+q_x^2-q_y^2-q_z^2 & 2\left(q_xq_y-q_wq_z\right) & 2\left(q_xq_z+q_wq_y\right) \\ 2\left(q_xq_y+q_wq_z\right) & q_w^2-q_x^2+q_y^2-q_z^2 & 2\left(q_yq_z-q_wq_x\right) \\ 2\left(q_xq_z-q_wq_y\right) & 2\left(q_yq_z+q_wq_x\right) & q_w^2-q_x^2-q_y^2+q_z^2 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵转四元数：

$$q_w=\frac{\sqrt{1+R_{wb}(1,1)+R_{wb}(2,2)+R_{wb}(3,3)}}{2}$$

$$q_x=\frac{R_{wb}(3,2)-R_{wb}(2,3)}{4q_w}$$

$$q_y=\frac{R_{wb}(1,3)-R_{wb}(3,1)}{4q_w}$$

$$q_z=\frac{R_{wb}(2,1)-R_{wb}(1,2)}{4q_w}$$

需要注意的是，这需要满足

$$q_w\neq 0, 1+R_{wb}(1,1)+R_{wb}(2,2)+R_{wb}(3,3)>0$$

当不满足该条件时，转换步骤比较复杂，此处不讲述。

3. 各描述方法之间的关系

3) 旋转矩阵与旋转矢量

a. 由旋转矢量计算旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}_{wb} = I + \frac{\sin\phi}{\phi}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}) + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^2$$

此公式也被称为罗德里格斯公式，并且与旋转矢量的指数运算结果相同。

b. 由旋转矩阵计算旋转矢量

$$\phi = \arccos\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{wb})-1}{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\left(\boldsymbol{R}_{wb}-(\boldsymbol{R}_{wb})^T\right)^{\vee}}{2\sin\phi}$$

其中，符号 $\bullet^{\vee}$ 表示由反对称矩阵得到对应的矢量。

3. 各描述方法之间的关系

4) 四元数与旋转矢量

a. 由旋转矢量计算四元数

$$\boldsymbol{q} = \cos\frac{\phi}{2} + \frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\phi}\boldsymbol{\phi}$$

思考：为什么角度是旋转矢量转角的一半?

三维空间中的一个矢量，使用四元数对它进行旋转，得到新的矢量时，其计算过程为 $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{q}^*$

原因是矢量是三维的，四元数与矢量(对应的纯虚四元数)直接相乘是四维(即实部不为零)，而用上式计算出的结果则能保证永远是三维。

可以理解为两次旋转，第一次转到四维，第二次再转回三维，每次转总角度的一半。

b. 由四元数计算旋转矢量

$$\phi = 2\arctan\left(\|\boldsymbol{q}_v\|, q_w\right)$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{q}_v / \|\boldsymbol{q}_v\|$$

目录

三维运动的微分性质

1. 旋转矩阵微分方程

假设世界坐标系(w系)中有一个固定不动的矢量 $\boldsymbol{r}^w$，它在载体坐标系(b系)下的表示为 $\boldsymbol{r}^b$，则有

$$\boldsymbol{r}^w = \boldsymbol{R}_{wb}\boldsymbol{r}^b$$

两边同时微分，可得

$$\dot{\boldsymbol{r}}^w = \boldsymbol{R}_{wb}\dot{\boldsymbol{r}}^b + \dot{\boldsymbol{R}}_{wb}\boldsymbol{r}^b$$

由于

$$\dot{\boldsymbol{r}}^w = \mathbf{0}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}^b = -\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \boldsymbol{r}^b$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{wb}^b$ 代表载体旋转角速度在b系下的表示，实际使用时，指的就是陀螺仪的角速度输出(暂不考虑误差)。

因此有

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{R}_{wb}\left(-\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \boldsymbol{r}^b\right) + \dot{\boldsymbol{R}}_{wb}\boldsymbol{r}^b$$

移项可得

$$\boldsymbol{R}_{wb}\left(\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \boldsymbol{r}^b\right) = \dot{\boldsymbol{R}}_{wb}\boldsymbol{r}^b$$

变换可得

$$\boldsymbol{R}_{wb}\left([\boldsymbol{\omega}_{wb}^b]_\times \boldsymbol{r}^b\right) = \dot{\boldsymbol{R}}_{wb}\boldsymbol{r}^b$$

因此有

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{wb} = \boldsymbol{R}_{wb}[\boldsymbol{\omega}_{wb}^b]_\times$$

三维运动的微分性质

2. 四元数微分方程

$\boldsymbol{r}^w$ 和 $\boldsymbol{r}^b$ 两个矢量之间可以用四元数转换如下

$$\boldsymbol{r}^w = \boldsymbol{q}_{wb} \otimes \boldsymbol{r}^b \otimes \boldsymbol{q}_{wb}^*$$

等式两边同时右乘 $\boldsymbol{q}_{wb}$ ，可得

$$\boldsymbol{r}^w \otimes \boldsymbol{q}_{wb} = \boldsymbol{q}_{wb} \otimes \boldsymbol{r}^b$$

上式两边同时求微分，可得

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{r}}^w \otimes \boldsymbol{q}_{wb} + \boldsymbol{r}^w \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb}\\ =&\dot{\boldsymbol{q}}_{wb} \otimes \boldsymbol{r}^b + \boldsymbol{q}_{wb} \otimes \dot{\boldsymbol{r}}^b\end{aligned}$$

由于

$$\dot{\boldsymbol{r}}^b = -\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \boldsymbol{r}^b = -\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \boldsymbol{r}^b$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}^w = \boldsymbol{0}$$

则有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}^w \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb}\\ =&\left(\boldsymbol{q}_{wb} \otimes \boldsymbol{r}^b \otimes \boldsymbol{q}_{wb}^*\right) \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb}\\ =&\dot{\boldsymbol{q}}_{wb} \otimes \boldsymbol{r}^b - \boldsymbol{q}_{wb} \otimes \boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \boldsymbol{r}^b\end{aligned}$$

等式两边同时左乘 $\boldsymbol{q}_{wb}^*$ ，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}^b \otimes \boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb}\\ =&\boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb} \otimes \boldsymbol{r}^b - \boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \boldsymbol{r}^b\end{aligned}$$

移项可得

$$\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \boldsymbol{r}^b = (\boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb}) \otimes \boldsymbol{r}^b - \boldsymbol{r}^b \otimes (\boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb})$$

三维运动的微分性质

2. 四元数微分方程

利用前面四元数相乘展开成矩阵与向量相乘的公式，

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = [\boldsymbol{p}]_L \boldsymbol{q} \qquad \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = [\boldsymbol{q}]_R \boldsymbol{p}$$

其中，$[\boldsymbol{p}]_L = p_w \boldsymbol{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_v & [\boldsymbol{p}_v]_\times \end{bmatrix}$ 其中，$[\boldsymbol{q}]_R = q_w \boldsymbol{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_v & -[\boldsymbol{q}_v]_\times \end{bmatrix}$

将$\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \boldsymbol{r}^b = (\boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb}) \otimes \boldsymbol{r}^b - \boldsymbol{r}^b \otimes (\boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb})$展开得，

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times1} & [\boldsymbol{\omega}_{wb}^b]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{r}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times1} & 2\left[(\boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb})_v\right]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{r}^b \end{bmatrix}$$

因此有 $(\boldsymbol{q}_{wb}^* \otimes \dot{\boldsymbol{q}}_{wb})_v = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{wb}^b$

即虚部求解完毕。

三维运动的微分性质

2. 四元数微分方程

根据四元数与旋转矢量的关系，有

$$\boldsymbol{q}_{wb}^{*}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2}\\-\boldsymbol{u}\sin\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}\qquad\qquad \dot{\boldsymbol{q}}_{wb}=\begin{bmatrix}-\frac{\dot{\phi}}{2}\sin\frac{\phi}{2}\\\dot{\boldsymbol{u}}\sin\frac{\phi}{2}+\boldsymbol{u}\frac{\dot{\phi}}{2}\cos\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}$$

因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_{wb}^{*}\otimes\dot{\boldsymbol{q}}_{wb}&=\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2}\\-\boldsymbol{u}\sin\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}-\frac{\dot{\phi}}{2}\sin\frac{\phi}{2}\\\dot{\boldsymbol{u}}\sin\frac{\phi}{2}+\boldsymbol{u}\frac{\dot{\phi}}{2}\cos\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-\frac{\dot{\phi}}{2}\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}+\left(\boldsymbol{u}\sin\frac{\phi}{2}\right)^{\mathrm{T}}\left(\dot{\boldsymbol{u}}\sin\frac{\phi}{2}+\boldsymbol{u}\frac{\dot{\phi}}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)\\\cos\frac{\phi}{2}\left(\dot{\boldsymbol{u}}\sin\frac{\phi}{2}+\boldsymbol{u}\frac{\dot{\phi}}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)+\boldsymbol{u}\sin\frac{\phi}{2}\cdot\frac{\dot{\phi}}{2}\sin\frac{\phi}{2}-\left(\boldsymbol{u}\sin\frac{\phi}{2}\right)\times\left(\dot{\boldsymbol{u}}\sin\frac{\phi}{2}+\boldsymbol{u}\frac{\dot{\phi}}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0\\\dot{\boldsymbol{u}}\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\phi}{2}+\boldsymbol{u}\frac{\dot{\phi}}{2}-\boldsymbol{u}\sin\frac{\phi}{2}\times\dot{\boldsymbol{u}}\sin\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

可以看出实部为0

因此有 $\boldsymbol{q}_{wb}^{*}\otimes\dot{\boldsymbol{q}}_{wb}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\dot{\boldsymbol{q}}_{wb}=\boldsymbol{q}_{wb}\otimes\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\end{bmatrix}$

3. 等效旋转矢量微分方程

在旋转矩阵微分方程中，把旋转矩阵用等效旋转矢量表示，则可以求出等效旋转矢量的微分方程。
同样地，在四元数微分方程中也可以按此方式得到。

此处直接给出结论

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega}_{wb}^{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{wb}^{b} + \frac{1}{\phi^2}\left(1 - \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right)(\boldsymbol{\phi}\times)^2\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}$$

形式较为复杂，为了化简，对三角函数泰勒展开，并去除高阶项，可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega}_{wb}^{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}$$

目录

1. 惯性导航解算概述

1)目的：利用IMU测量的角速度、加速度，根据上一时刻导航信息，推算出当前时刻导航信息，包括姿态解算、速度解算、位置解算。

2)方法：由姿态、速度、位置的微分方程，推导出它们的解，并转变成离散时间下的近似形式，从而可以在离散时间采样下，完成导航信息求解。

3)优点：IMU不受外界信号干扰，可以得到稳定、平滑的导航结果。

4)缺点：误差随时间累计，一般时间越长，累计误差越大。因此需要融合，而导航解算(本小节)及其误差分析(下一小节)，是融合的基础。

2. 姿态更新

1) 基于旋转矩阵的姿态更新

根据前面推导，旋转矩阵的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{wb} = \boldsymbol{R}_{wb}[\boldsymbol{\omega}]_{\times}$$

根据微分方程的求解方法，可以写出由k-1时刻求解k时刻旋转矩阵的公式为

$$\boldsymbol{R}_{wb_k} = \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}} e^{\int_{t_{k-1}}^{t_k} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} d\tau}$$

指数上的积分结果其实就是k-1时刻到k时刻之间的相对旋转对应的等效旋转矢量构成的反对称矩阵。

因此上式可以重新写为

$$\boldsymbol{R}_{wb_k} = \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}} e^{\phi \times}$$

由于反对称矩阵的指数函数前面已经推导完毕，因此上式又可以写为

$$\boldsymbol{R}_{wb_k} = \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}} \boldsymbol{R}_{b_{k-1}b_k}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_{b_{k-1}b_k} = I + \frac{\sin\phi}{\phi}(\boldsymbol{\phi}\times) + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2}(\boldsymbol{\phi}\times)^2$$

2. 姿态更新

1) 基于旋转矩阵的姿态更新

可以看出，解算过程中需要求解等效旋转矢量，需要借助其微分方程实现。

在旋转矢量的微分方程 $\dot{\boldsymbol{\phi}} \approx \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}$中，对于右侧第二项，根据叉乘的定义可知，当叉乘的两个矢量之间方向重合时，则结果为0，在k-1时刻到k时刻的极短时间内，可认为接近重合，因此，旋转矢量微分方程可进一步化简为

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} \approx \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\phi} \approx \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau$$

a. 欧拉法： $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\omega}_{k-1}(t_k - t_{k-1})$

b. 中值法： $\boldsymbol{\phi} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{k-1}+\boldsymbol{\omega}_k}{2}(t_k - t_{k-1})$

中值法精度大于欧拉法，后续本课程解算全部采用中值法进行。

另有四阶龙格库塔法，在IMU采样频率较高(>100HZ)时，收益不大，此处不做介绍。

2. 姿态更新

2) 基于四元数的姿态更新

根据前面推导，四元数的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{wb} = \boldsymbol{q}_{wb} \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

其矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{wb} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_R \boldsymbol{q}_{wb}$$

同样按照解微分方程的方法，并对指数项做积分，可以得到

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{wb} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{q}_{wb}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_x & -\phi_y & -\phi_z \\ \phi_x & 0 & \phi_z & -\phi_y \\ \phi_y & -\phi_z & 0 & \phi_x \\ \phi_z & \phi_y & -\phi_x & 0 \end{bmatrix}$$

为了求解该方程，要对指数函数进行泰勒展开，同样包含高次幂，展开方法与前述方法相同（可以自行推导，此处直接给出结论）：

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}(T)} = I \cos\frac{\phi}{2} + \frac{\Theta}{\phi} \sin\frac{\phi}{2}$$

2. 姿态更新

2) 基于四元数的姿态更新

因此有

$$\boldsymbol{q}_{wb_k} = \left[I \cos\frac{\phi}{2} + \frac{\boldsymbol{\Theta}}{\phi} \sin\frac{\phi}{2} \right] \boldsymbol{q}_{wb_{k-1}}$$

由于

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \frac{\boldsymbol{\phi}}{\phi}\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}_R = \left[I \cos\frac{\phi}{2} + \frac{\boldsymbol{\Theta}}{\phi} \sin\frac{\phi}{2} \right]$$

令

$$\boldsymbol{q}_{b_{k-1}b_k} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \frac{\boldsymbol{\phi}}{\phi}\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{q}_{wb_k} = \boldsymbol{q}_{wb_{k-1}} \otimes \boldsymbol{q}_{b_{k-1}b_k}$

旋转矢量的计算仍采用中值法进行。

3. 速度更新

速度微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}_{wb}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}$$

其中$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$为测量加速度，

$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_0 \end{bmatrix}$为重力加速度。

该微分方程的通解形式为

$$\Delta\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{R}_{wb}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}\right)\Delta t$$

对应的基于中值法的速度更新形式为

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1} + \left(\frac{\boldsymbol{R}_{wb_k}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}}\boldsymbol{a}_{k-1}}{2} - \boldsymbol{g}\right)(t_k - t_{k-1})$$

4. 位置更新

位置微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}$$

其通解形式为 $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\Delta t$

此处 $\boldsymbol{v}$ 指的是该时间段内的平均速度，该形式对应的基于中值法的离散形式为

$$\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_{k-1} + \frac{\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_{k-1}}{2}(t_k - t_{k-1})$$

另外，通解还可以写为

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\Delta t + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\Delta t^2$$

需要注意的是，此处的 $\boldsymbol{v}$ 指的是该时间段起始时刻速度，该形式对应的基于中值法的离散形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_k = &\boldsymbol{p}_{k-1} + \boldsymbol{v}_{k-1}(t_k - t_{k-1}) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{R}_{wb_k}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}}\boldsymbol{a}_{k-1}}{2} - \boldsymbol{g}\right)(t_k - t_{k-1})^2\end{aligned}$$

5. 惯性导航解算总结

1)姿态解算

a. 基于旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}_{wb_k} = \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}}\left(I + \frac{\sin\phi}{\phi}(\boldsymbol{\phi}\times) + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2}(\boldsymbol{\phi}\times)^2\right) \qquad \text{其中 } \boldsymbol{\phi} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{k-1}+\boldsymbol{\omega}_k}{2}(t_k - t_{k-1})$$

b. 基于四元数

$$\boldsymbol{q}_{wb_k} = \boldsymbol{q}_{wb_{k-1}} \otimes \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \frac{\boldsymbol{\phi}}{\phi}\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{其中} \qquad \boldsymbol{\phi} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{k-1}+\boldsymbol{\omega}_k}{2}(t_k - t_{k-1})$$

2) 速度解算

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1} + \left(\frac{\boldsymbol{R}_{wb_k}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}}\boldsymbol{a}_{k-1}}{2} - \boldsymbol{g}\right)(t_k - t_{k-1})$$

3) 位置解算

$$\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_{k-1} + \frac{\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_{k-1}}{2}(t_k - t_{k-1}) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_{k-1} + \boldsymbol{v}_{k-1}(t_k - t_{k-1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{R}_{wb_k}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{R}_{wb_{k-1}}\boldsymbol{a}_{k-1}}{2} - \boldsymbol{g}\right)(t_k - t_{k-1})^2$$

目录

1. 误差方程推导方法

误差方程：状态量(速度误差、位置误差、姿态误差、bias误差等)误差形式的表示。

误差方程及其推导方法，是后续滤波、图优化等融合方案的基础，是重中之重。

误差方程的推导有固定的套路，举例说明具体步骤：

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{z} = x + y$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{x} + \tilde{y}$$

3) 写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{z} = z + \delta z$$

$$\tilde{x} = x + \delta x$$

$$\tilde{y} = y + \delta y$$

4) 把3)中的关系，带入2)

$$\dot{z} + \delta \dot{z} = x + \delta x + y + \delta y$$

5) 把1)中的关系，带入4)

$$x + y + \delta \dot{z} = x + \delta x + y + \delta y$$

6) 化简方程

$$\delta \dot{z} = \delta x + \delta y$$

2. 姿态误差方程

1) 写出不考虑误差的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{q}}_t = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$

2) 写出考虑误差的微分方程

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_t - \tilde{\boldsymbol{b}}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$

3) 写出带误差的值与理想值之间的关系

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_t = \boldsymbol{q}_t \otimes \delta\boldsymbol{q}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_t = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_{\omega_t} = \boldsymbol{b}_{\omega_t} + \delta\boldsymbol{b}_\omega$$

其中 $\boldsymbol{n}_\omega$ 为陀螺仪白噪声。

其中

$$\delta\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} cos(\frac{|\delta\theta|}{2}) \\ \frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{|\delta\theta|} sin(\frac{|\delta\theta|}{2}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{2} \end{bmatrix}$$

$\delta\boldsymbol{\theta}$是姿态误差对应的旋转矢量(有时被称为失准角)。

4) 将3)中的关系带入2)

$$(\boldsymbol{q}_t \dot{\otimes} \delta\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t \otimes \delta\boldsymbol{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta\boldsymbol{b}_\omega \end{bmatrix}$$

2. 姿态误差方程

5) 把1)中的关系带入4)

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{q}_t \dot{\otimes} \delta \boldsymbol{q}\right) \\
=&\dot{\boldsymbol{q}}_t \otimes \delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_t \otimes \delta \dot{\boldsymbol{q}} \\
=&\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix} \otimes \delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_t \otimes \delta \dot{\boldsymbol{q}} \\
=&\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t \otimes \delta \boldsymbol{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

6) 化简方程

首先把5)中最后两行左乘 $(\boldsymbol{q}_t)^{-1}$ 并移项可得

$$
\begin{aligned}
\delta \dot{\boldsymbol{q}} =&\frac{1}{2}\delta \boldsymbol{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_\omega \end{bmatrix} \\
&- \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t} \end{bmatrix} \otimes \delta \boldsymbol{q}
\end{aligned}
$$

根据前面所讲，四元数相乘可以转换成矩阵与向量相乘

$$
\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = [\boldsymbol{p}]_L \boldsymbol{q} = [\boldsymbol{q}]_R \boldsymbol{p}
$$

$$
[\boldsymbol{p}]_L = \begin{bmatrix} p_0 & -\boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_v & p_0 \boldsymbol{I} + [\boldsymbol{p}_v]_\times \end{bmatrix}
$$

$$
[\boldsymbol{q}]_R = \begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_v & q_0 \boldsymbol{I} - [\boldsymbol{q}_v]_\times \end{bmatrix}
$$

2. 姿态误差方程

令

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - \boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_\omega$$
$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_\omega$$

则

$$\begin{aligned}\delta \dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_1\end{bmatrix}_R \delta \boldsymbol{q} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_2\end{bmatrix}_L \delta \boldsymbol{q}\\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)^T\\ (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) & -[\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2]_\times\end{bmatrix} \delta \boldsymbol{q}\end{aligned}$$

由于融合时，状态量中往往不是使用四元数，而是使用失准角，因此要把上式转成失准角的微分形式。

由于

$$\delta \boldsymbol{q} \approx \begin{bmatrix}1\\ \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2}\end{bmatrix} \rightarrow \delta \dot{\boldsymbol{q}} \approx \begin{bmatrix}0\\ \frac{\delta \dot{\boldsymbol{\theta}}}{2}\end{bmatrix}$$

把它代入上式，又可以得到

$$\begin{aligned}\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} &= -[\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2]_\times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2} + (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2)\\ &= -[2\boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{n}_\omega - 2\boldsymbol{b}_{\omega_t} - \delta \boldsymbol{b}_\omega]_\times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2}\\ &\quad + \boldsymbol{n}_\omega - \delta \boldsymbol{b}_\omega\end{aligned}$$

忽略其中的二阶小项，可得

$$\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t}]_\times \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{n}_\omega - \delta \boldsymbol{b}_\omega$$

3. 速度误差方程

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}_t = \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t})$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}}_t = \tilde{\boldsymbol{R}}_t(\tilde{\boldsymbol{a}}_t - \tilde{\boldsymbol{b}}_{a_t})$$

3) 写出真实值和理想值之间的关系

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{R}}_t &= \boldsymbol{R}_t exp([\delta\boldsymbol{\theta}]_\times) \\ &\approx \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)\end{aligned}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_t = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{n}_a$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_{a_t} = \boldsymbol{b}_{a_t} + \delta\boldsymbol{b}_a$$

其中 $\boldsymbol{n}_a$ 为加速度计白噪声

4) 将3)中的关系带入2)

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{v}} + \delta\dot{\boldsymbol{v}} \\ =&\boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)(\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{n}_a - \boldsymbol{b}_{a_t} - \delta\boldsymbol{b}_a)\end{aligned}$$

5) 将1)中的关系带入4)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}) + \delta\dot{\boldsymbol{v}} \\ =&\boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)(\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{n}_a - \boldsymbol{b}_{a_t} - \delta\boldsymbol{b}_a)\end{aligned}$$

6) 化简方程(忽略二阶小项)

$$\begin{aligned}&\delta\dot{\boldsymbol{v}} \\ =&\boldsymbol{R}_t[\delta\boldsymbol{\theta}]_\times(\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}) + \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{n}_a - \delta\boldsymbol{b}_a) \\ =& -\boldsymbol{R}_t[\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}]_\times\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{n}_a - \delta\boldsymbol{b}_a)\end{aligned}$$

惯性导航误差分析

4. 位置误差方程

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} = \tilde{\boldsymbol{v}}$$

3) 写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{p}$$

4) 将3)中的关系带入2)

$$\dot{\boldsymbol{p}} + \delta\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}$$

5) 把1)中的关系带入4)

$$\boldsymbol{v} + \delta\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}$$

6) 化简方程

$$\delta\dot{\boldsymbol{p}} = \delta\boldsymbol{v}$$

5. bias误差方程

在IMU精度较高时，bias认为是常值，即有

$$\delta \dot{\boldsymbol{b}}_a = 0$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{b}}_\omega = 0$$

但自动驾驶和机器人领域所用的mems多数达不到这种精度，因为角速度随机游走和加速度随机游走较大，因此误差方程常写为

$$\delta \dot{\boldsymbol{b}}_a = \boldsymbol{n}_{b_a}$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{b}}_\omega = \boldsymbol{n}_{b\omega}$$

其中 $\boldsymbol{n}_{b_a}$ 和 $\boldsymbol{n}_{b\omega}$分别为加速度计和陀螺仪的随机游走对应的白噪声。

以上两种形式都很常见，没有绝对的对和错。

6. 惯性导航误差分析总结

$$\delta\dot{\boldsymbol{p}} = \delta\boldsymbol{v}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{R}_t[\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}]_\times\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{n}_a - \delta\boldsymbol{b}_a)$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\left[\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t}\right]_\times\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{n}_\omega - \delta\boldsymbol{b}_\omega$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_a = \boldsymbol{n}_{b_a} \qquad \delta\dot{\boldsymbol{b}}_a = 0$$

或

$$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_\omega = \boldsymbol{n}_{b\omega} \qquad \delta\dot{\boldsymbol{b}}_\omega = 0$$

作业

利用IMU仿真数据，进行惯性导航解算，并通过计算与ground truth之间的误差，对比欧拉法与中值法的精度差异。

评价标准：

1) 及格：根据课程给定的数据，完成基于中值法的解算；

2) 良好：根据课程给定的数据，完成基于中值法、欧拉法的解算，并对精度做对比分析；

3) 优秀：利用IMU仿真程序，自己生成不同运动状况(静止、匀速、加减速、快速转弯等)的仿真数据，对比两种解算方法精度差异与运动状况的关系，并给出原因分析。

IMU数据仿真程序地址：https://github.com/Aceinna/gnss-ins-sim

作业

附加题(不参与作业考核)：

1. 四阶龙格库塔法也是一种导航解算方法，但多数情况下并没有必要，在剧烈运动情况下才会产生精度差异，所以本课程并没有讲解。
感兴趣或有疑问的，可以通过仿真证明这一点，即利用IMU仿真程序产生不同运动状况下的仿真数据，对比四阶龙格库塔方法与中值法的精度差异。

2. 从惯性导航的误差方程里，可以看出导航误差与器件误差(陀螺仪或加速度计bias等)以及初始导航误差(初始姿态误差、速度误差、位置误差等)的关系。
例如，假设初始姿态为单位阵，当 x 加速度计有零偏 b_{ax} ，且没有其他器件误差和初始导航误差时，x 方向的速度误差、位置误差随时间的变化分别为 $\delta v_x = b_{ax} t \quad \delta p_x = \frac{1}{2} b_{ax} t^2$ 。

请仿照上述例子，自行推导导航误差与其他器件误差和初始导航误差的关系函数，并用仿真数据证明该函数关系正确。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢聆听！

Thanks for Listening