



便携式直线一级倒立摆 实 验 指 导 书

（第四版）

深圳市元创兴科技有限公司

2018年03月

目录

第一章 开发环境要求及其系统组成.....	2
一 开发环境要求.....	2
二 系统组成.....	2
第二章 系统控制原理简介.....	3
第三章 直线一级倒立摆的建模、仿真及实验.....	4
一 直线一级倒立摆的数学模型.....	4
1 牛顿—欧拉方法建模.....	4
2 拉格朗日方法建模.....	10
二 系统的阶跃响应分析与可控性分析.....	13
1 系统阶跃响应分析.....	13
2 系统可控性分析.....	14
三 MATLAB(Simulink)仿真实验与实时控制实验.....	16
1 运动控制基础实验.....	17
2 根轨迹校正实验.....	19
3 频率响应校正实验.....	30
4 PID 校正实验.....	38
5 状态空间极点配置控制实验.....	43
6 LQR 控制实验.....	50
7 LQR 控制(Bang-Bang 自摆起)实验.....	56
8 LQR 控制(能量自摆起)实验.....	60
9 模糊逻辑控制实验	63
10 模糊逻辑控制(Bang-Bang 自摆起)实验.....	71
11 模糊逻辑控制(能量自摆起)实验.....	72
12 模糊 PID 控制实验.....	73
13 神经网络控制实验.....	74

第一章 开发环境要求及其系统组成

一 开发环境要求

硬件要求：

- 1、处理器 I3、I5、AMD Athlon 或者更高；
- 2、内存至少 1GB，推荐 2GB 以上；
- 3、至少有一个 USB2.0 接口；

软件要求：

- 1、Microsoft Windows XP、Microsoft Windows 7；
- 2、Microsoft Visual C++ 6.0、Microsoft Visual Studio 2010；
- 3、Matlab 6.5、Matlab7.0、Matlab R2013a；

二 系统组成

便携式直线一级倒立摆试验系统总体结构如图 1-1 所示

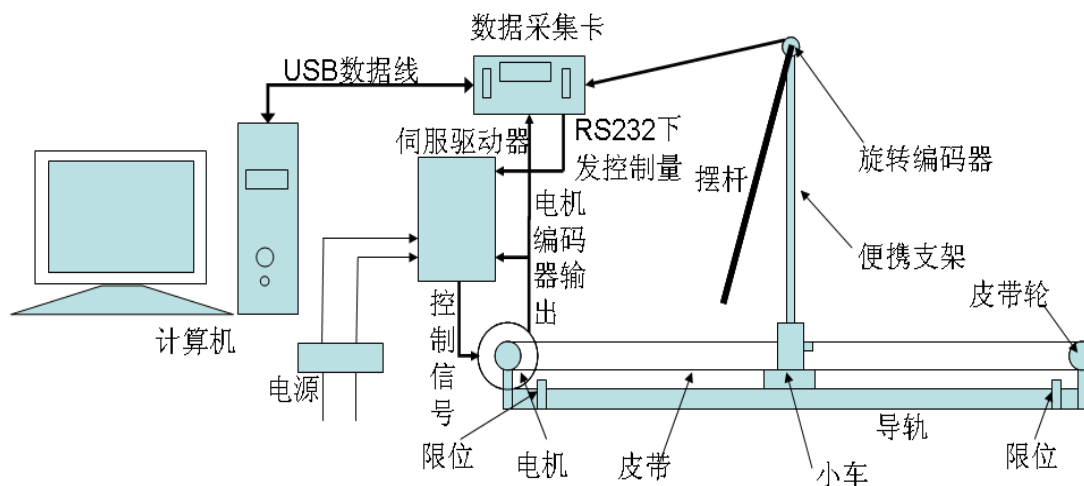


图 1-1 便携式一级倒立摆试验系统总体结构图

本实验系统的主体包括摆杆、小车、便携支架、导轨、直流伺服电机等。主体、驱动器、电源和数据采集卡都置于实验箱内，实验箱通过一条 USB 数据线与上位机进行数据交换，另有一条线接 220v 交流电源。便携支架为实验箱方便携带和安装而设计。移动实验箱时，可以扭下便携支架和小车之间的旋钮，将支架和摆杆放倒在实验箱内，简单的接线可以使得本系统方便做课堂演示实验。

第二章 系统控制原理简介

本实验系统以自动控制中的经典控制和现代控制理论为理论基础。

便携式直线一级倒立摆的实验原理是：数据采集卡采集到旋转编码器数据和电机尾部编码器数据，旋转编码器与摆杆同轴，电机与小车通过皮带连接，所以通过计算就可以得到摆杆的角位移以及小车位移，角位移差分得角速度，位移差分可得速度，然后根据自动控制中的各种理论转化的算法计算出控制量。控制量由计算机通过 USB 数据线下发给伺服驱动器，由驱动器实现对电机控制，电机尾部编码器连接到驱动器形成闭环，从而可以实现摆杆直立不倒以及自摆起。

其工作原理如图 2-1 所示

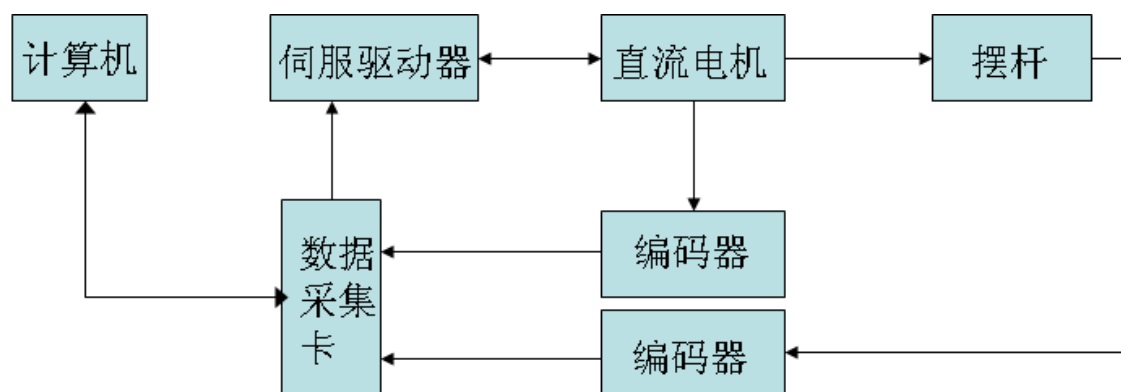


图 2-1 直线一级倒立摆工作原理图

倒立摆的控制目标有两个，一是稳摆，即使摆杆直立不倒；二是自摆起，即控制电机使摆杆左右摆动进入稳摆范围。整个过程是动态的，表现为小车的左右移动也就是电机的正反转。倒立摆系统的实时性很强，就是说它的速度比较快，所以采样时间较小，一般取 10ms 左右。

通过建立直线一级倒立摆的数学模型，我们得到其模型是可控的，所以我们可以通过自动控制原理课堂所学建立相应的控制器来实现本系统的控制，使它达到稳定。

第三章 直线一级倒立摆的建模、仿真及实验

本章的目的是让实验者掌握对直线一级倒立摆实际系统进行建模的方法，熟悉利用 MATLAB 对系统模型进行仿真，利用学习的控制理论对系统进行控制器的设计，并对系统进行实际控制实验，对实验结果进行观察和分析，非常直观的感受控制器的控制作用。

一 直线一级倒立摆的数学模型

在控制系统的分析和设计中，首先要建立系统的数学模型。控制系统的数学模型是描述系统内部物理量(或变量)之间关系的数学表达式。

系统建模可以分为两种：机理建模和实验建模。实验建模就是通过在研究对象上加上一系列的研究者事先确定的输入信号，激励研究对象并通过传感器检测其可观测的输出，应用数学手段建立起系统的输入—输出关系。这里面包括输入信号的设计选取，输出信号的精确检测，数学算法的研究等等内容。机理建模就是在了解研究对象的运动规律基础上，通过物理、化学的知识和数学手段建立起系统内部的输入—状态关系。对于倒立摆系统，由于其本身是自不稳定的系统，实验建模存在一定的困难。但是忽略掉一些次要的因素后，倒立摆系统就是一个典型的运动的刚体系统，可以在惯性坐标系内应用经典力学理论建立系统的动力学方程。下面我们采用其中的牛顿—欧拉方法和拉格朗日方法分别建立直线型一级倒立摆系统的数学模型。

1 牛顿—欧拉方法建模

在忽略了空气阻力和各种摩擦之后，可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统，如图3-1所示。

M 小车质量

m 摆杆质量

b 小车摩擦系数

l 摆杆转动轴心到杆质心的长度

I 摆杆惯量

F 加在小车上的力

x 小车位置

ϕ 摆杆与垂直向上方向的夹角

θ 摆杆与垂直向下方向的夹角（考虑到摆杆初始位置为竖直向下）

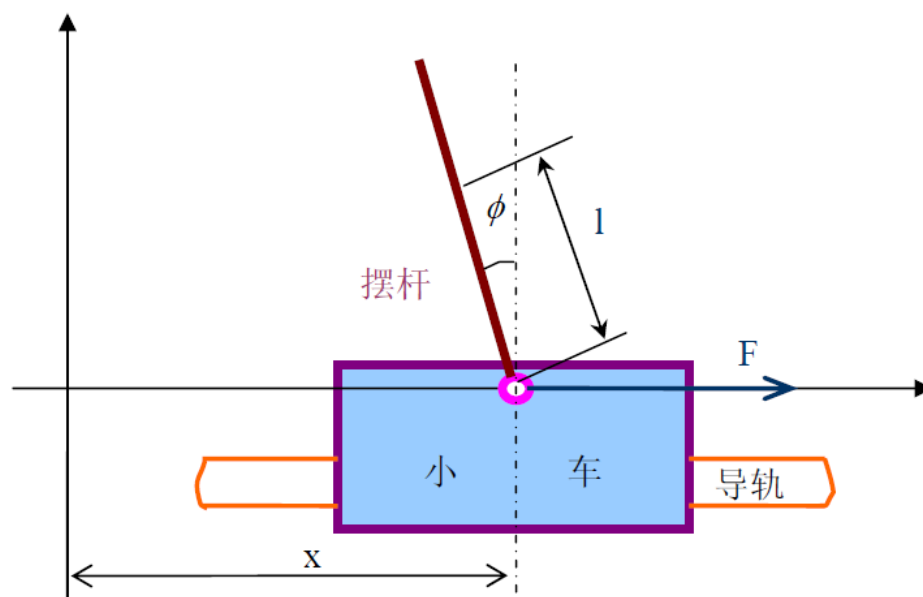


图3-1 直线一级倒立摆模型

图3-2是系统中小车和摆杆的受力分析图。其中， N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。注意：在实际倒立摆系统中检测和执行装置的正负方向已经完全确定，因而矢量方向定义如图所示，图示方向为矢量正方向。

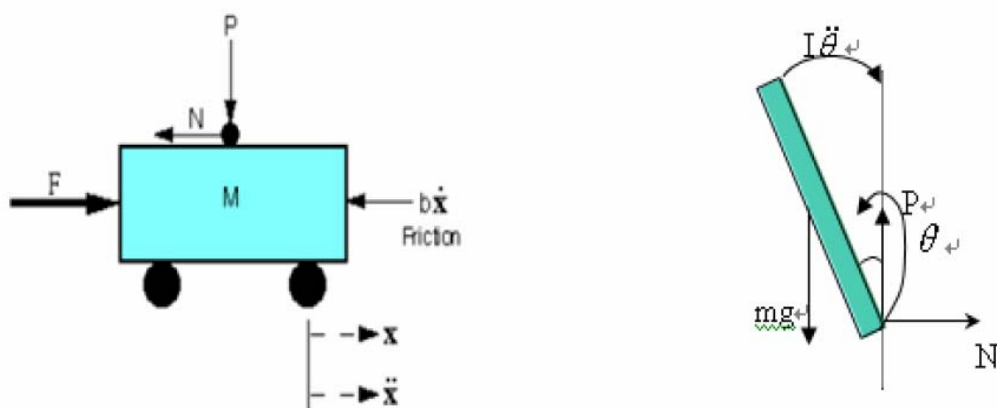


图3-2 小车及摆杆受力分析图

分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M \ddot{x} = F - b \dot{x} - N \quad (1)$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式：

$$N = m \frac{d}{dt}^2 (x + l \sin \theta) \quad (2)$$

即：

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (3)$$

把这个等式代入(1)式中，就得到系统的第一个运动方程：

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (4)$$

为了推出系统的第二个运动方程，我们对摆杆垂直方向上的合力进行分析，可以得到下面方程：

$$P - mg = m \frac{d}{dt}^2 (l \cos \theta) \quad (5)$$

$$P - mg = -ml\ddot{\theta} \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (6)$$

力矩平衡方程如下：

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (7)$$

注意：此方程中力矩的方向，由于 $\theta = \pi + \phi$, $\cos \phi = -\cos \theta$, $\sin \phi = -\sin \theta$ ，故等式前面有负号。合并这两个方程，约去 P 和 N ，得到第二个运动方程：

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (8)$$

设 $\theta = \pi + \phi$ ，（ ϕ 是摆杆与垂直向上方向之间的夹角），假设 ϕ 与 1（单位是弧度）相比很小，即 $\phi \ll 1$ ，则可以进行近似处理：

$$\cos \theta = -1, \sin \theta = -\phi, \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$$

用 u 来代表被控对象的输入力 F ，线性化后两个运动方程如下：

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl \phi = ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \end{cases} \quad (9)$$

对方程组(9)式进行拉普拉斯变换，得到方程组：

$$\begin{cases} (I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl \Phi(s) = mlX(s)s \\ (M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \end{cases} \quad (10)$$

注意：推导传递函数时假设初始条件为 0。由于输出为角度 ϕ ，求解方程组的第一个方程，可以得到：

$$X(s) = \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) \quad (11)$$

如果令 $V = \ddot{x}$, 则有:

$$\Phi(s) = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl} V(s) \quad (12)$$

把上式代入方程组的第二个方程, 得到:

$$(M + m) \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s} \right] \Phi(s) s^2 + b \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} + \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s - ml \Phi(s) s^2 = U(s) \quad (13)$$

整理后得到传递函数:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s^2}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q} s^3 - \frac{(M + m)mgl}{q} s^2 - \frac{bmgl}{q} s} \quad (14)$$

$$\text{其中 } q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2]$$

设系统状态空间方程为:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du \end{aligned} \quad (15)$$

方程组对 $\ddot{x}, \ddot{\phi}$ 解代数方程, 得到解如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b\dot{x}}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{m^2 gl^2 \phi}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{(I + ml^2)u}{I(M + m) + Mml^2} \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{-mlb\dot{x}}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{mgl(M + m)\phi}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{mlu}{I(M + m) + Mml^2} \end{cases} \quad (16)$$

整理后得到以外界作用力(u 来代表被控对象的输入力 F)作为输入的系统状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u \quad (17)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

由方程组(9)得第一个方程为:

$$(I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \quad (19)$$

对于质量均匀分布的摆杆有:

$$I = \frac{1}{3}ml^2 \quad (20)$$

于是可以得到:

$$\left(\frac{1}{3}ml^2 + ml^2\right)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \quad (21)$$

$$\text{化简得到:} \quad \ddot{\phi} = \frac{3g}{4l}\phi + \frac{3}{4l}\ddot{x} \quad (22)$$

设 $X = \{x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}\}$, $u' = \ddot{x}$, 则可以得到以小车加速度作为输入的系统状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u' \quad (23)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \quad (24)$$

以小车加速度为控制量，摆杆角度为被控对象，此时系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\frac{3}{4l}}{s^2 - \frac{3g}{4l}} \quad (25)$$

表 3.1 元创兴便携式直线一级倒立摆实际系统的物理参数

摆杆质量 m	摆杆长度 L	摆杆转轴到质心长度 l	重力加速度 g
0.0426 kg	0.305 m	0.152 m	9.81 m/s ²

将表3.1中的物理参数代入上面的系统状态方程和传递函数中得到系统精确模型。

系统状态空间方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 48.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4.9 \end{bmatrix} u \quad (26)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (27)$$

系统传递函数：

$$G(s) = \frac{4.9}{s^2 - 48.3} \quad (28)$$

2 拉格朗日方法建模

下面采用拉格朗日方程建模。拉格朗日方程为：

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (29)$$

其中 L 为拉格朗日算子， q 为系统的广义坐标， T 为系统的动能， V 为系统的势能。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad (30)$$

其中 $i=1,2,3,\dots,n$, f_i 为系统在第 i 个广义坐标上的外力。在一级倒立摆系统中，系统的广义坐标有三个广义坐标，分别为 x, ϕ, θ_1 。

$$\text{首先计算系统的动能: } T = T_M + T_m \quad (31)$$

其中 T_M, T_m 分别为小车的动能和摆杆的动能。

$$\text{小车的动能: } T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (32)$$

下面计算摆杆的动能: $T_m = T_m' + T_m''$ 其中 T_m', T_m'' 分别为摆杆的平动动能和转动动能。

设以下变量：

xpend —— 摆杆质心横坐标；

ypend —— 摆杆质心纵坐标；

有：

$$\begin{cases} xpend = x - l \sin \phi \\ ypend = l \cos \phi \end{cases} \quad (33)$$

摆杆的动能：

$$\begin{aligned} T_m' &= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{d(xpend)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ypend)}{dt} \right)^2 \right) \\ T_m'' &= \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (34)$$

于是有系统的总动能:

$$T_m = T_m' + T_m'' = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{d(x_{pend})}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(y_{pend})}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\phi}^2 \quad (35)$$

系统的势能为:

$$V = V_m = m \times g \times y_{pend} = mgl \cos \phi \quad (36)$$

由于系统在 ϕ 广义坐标下只有摩擦力作用, 所以有:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = b \dot{\phi} \quad (37)$$

对于直线一级倒立摆系统, 系统状态变量为: $\{x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}\}$; 为求解状态方程:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases} \quad (38)$$

需要求解 $\ddot{\phi}$, 因此设

$$\dot{\phi} = f(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, \ddot{x})$$

将在平衡位置附近进行泰勒级数展开, 并线性化, 可以得到

$$\dot{\phi} = k_{11} x + k_{12} \phi + k_{13} \dot{x} + k_{14} \dot{\phi} + k_{15} \ddot{x} \quad (39)$$

其中:

$$k_{11} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0}$$

$$k_{12} = \left. \frac{\partial f}{\partial \phi} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0}$$

$$k_{13} = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0}$$

$$k_{14} = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0}$$

$$k_{15} = \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0}$$

求解上式得到：

$$k_{11} = 0; k_{12} = \frac{3g}{4l}; k_{13} = 0; k_{14} = 0; k_{15} = \frac{3}{4l}$$

设 $X = \{x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}\}$ ， $u' = \ddot{x}$ ，则可以得到以小车加速度作为输入的系统状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u' \quad (40)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \quad (41)$$

可以看出，利用拉格朗日方法和牛顿欧拉学方法得到的状态方程的是相同的，不同之处在于，输入 u 为小车的加速度 \ddot{x} ，而输入 u 为外界给小车施加的力，对于不同的输入，系统的状态方程不一样，需要说明的是，在元创兴科技所有提供的控制器设计和程序中，采用的都是以小车的加速度作为系统的输入。对比较简单的直线一级倒立摆，利用牛顿力学的方法计算比较方便和快捷，但对于多级倒立摆，利用拉格朗日方法编程计算会比较方便。

二 系统的阶跃响应分析与可控性分析

1 系统阶跃响应分析

上面已经得到系统的状态方程式，对其进行阶跃响应分析，在MATLAB指令区中键入以下命令：

```
>> clear;  
A=[ 0 1 0 0;  
    0 0 0 0;  
    0 0 0 1;  
    0 0 48.3 0];  
B=[ 0 1 0 4.9]';  
C=[ 1 0 0 0;  
    0 1 0 0];  
D=[ 0 0 ]';  
step(A,B,C,D);
```

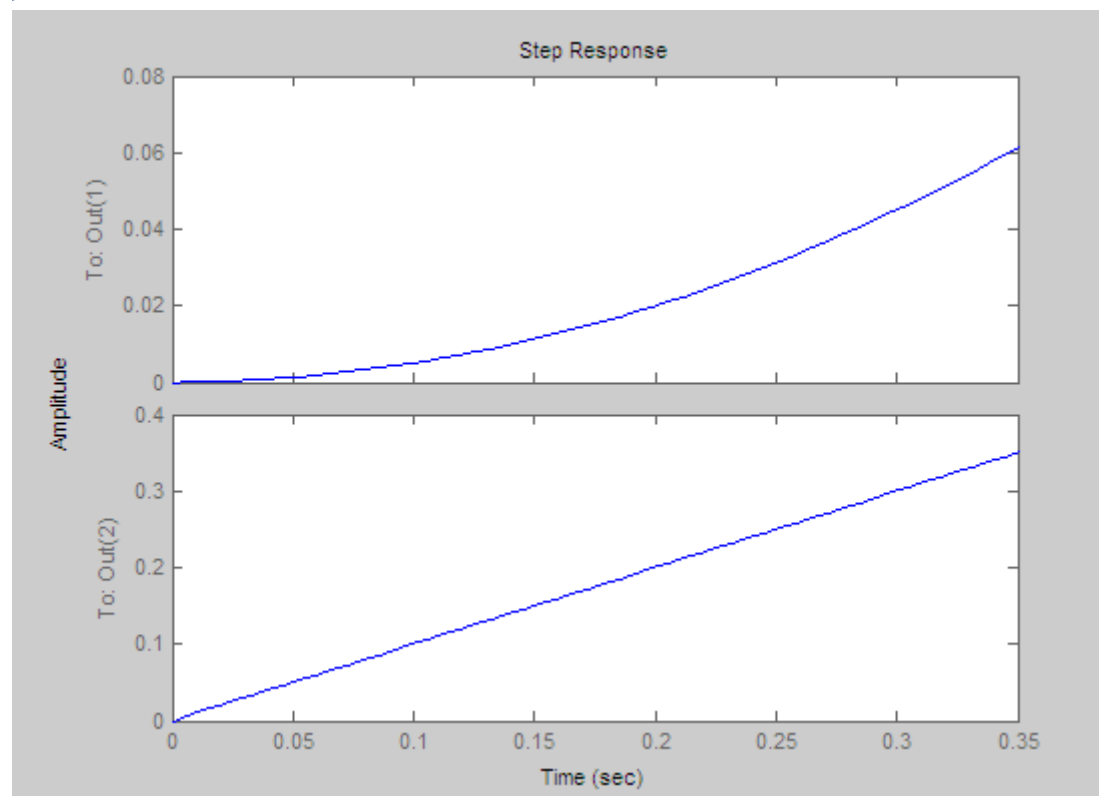


图3-3 小车位置和摆杆角度阶跃响应曲线

可以看出，在单位阶跃响应作用下，小车位置和摆杆角度都是发散的，即未校正前的系统是不稳定的。

2 系统可控性分析

系统的可控性分析原理可参考《现代控制工程》中第11章的控制系统的状态分析内容或其它相关资料。

对于连续时间系统：

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du\end{aligned}$$

系统状态完全可控的条件为：当且仅当向量组 $B, AB, A^2B \cdots A^{n-1}B$ 是线性无关的，或 $n \times n$ 维矩阵：

$$[B, AB, A^2B, \cdots A^{n-1}B] \quad (42)$$

的秩为 n 。

系统的输出可控性的条件为：当且仅当矩阵：

$$[CB, CAB, CA^2B, \cdots CA^{n-1}B, D] \quad (43)$$

的秩等于输出向量 y 的维数。

应用以上原理对系统进行可控性分析。

由（40）式和（41）式可以得到：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 48.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4.9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将矩阵A, B, C, D分别代入（42）式和（43）式中，并在MATLAB中计算对应的秩。MATLAB计算过程如下：

```
>> clear;
A=[ 0 1 0 0;
0 0 0 0;
0 0 0 1;
0 0 48.3 0];
B=[ 0 1 0 4.9]';
C=[ 1 0 0 0;
0 1 0 0];
D=[ 0 0 ]';
cona=[B A*B A^2*B A^3*B];
cona2=[C*B C*A*B C*A^2*B C*A^3*B D];
rank(cona)
rank(cona2)

ans =

    4

ans =

    2
```

从计算结果可以看出，系统的状态完全可控性矩阵的秩(4)等于系统的状态变量维数(4)，系统的输出完全可控性矩阵的秩(2)等于系统输出向量y的维数(2)，所以系统是可控的，因此可以对系统进行控制器的设计，使系统稳定。对于以外界作用力作为输入的系统状态方程的可控性分析，读者可以按上述方法自行计算。

三 MATLAB(Simulink) 仿真实验与实时控制实验

在开展实验之前必须确定计算机上已经成功安装了本公司提供的便携式倒立摆安装包，如果没有则根据元创兴便携倒立摆快速安装使用指南(Quick Install Guide)进行安装。安装成功后打开实验箱，取出实验箱内的连接线连接实验箱，即把USB数据线与计算机连接，将电源插头插入插座（此时实验箱电源开关应是断开的），连接完毕后，立起便携支架，取出旋钮固定支架，并将小车移到导轨中间位置，打开实验箱电源，指示灯亮表示电源接通。

上述准备工作完成以后就可以开始我们的实验了。进入程序所在目录，双击MATLAB(Simulink)实时控制程序（reinovo.mdl），便携式直线一级倒立摆Simulink实时控制程序的主界面如图3-4所示。

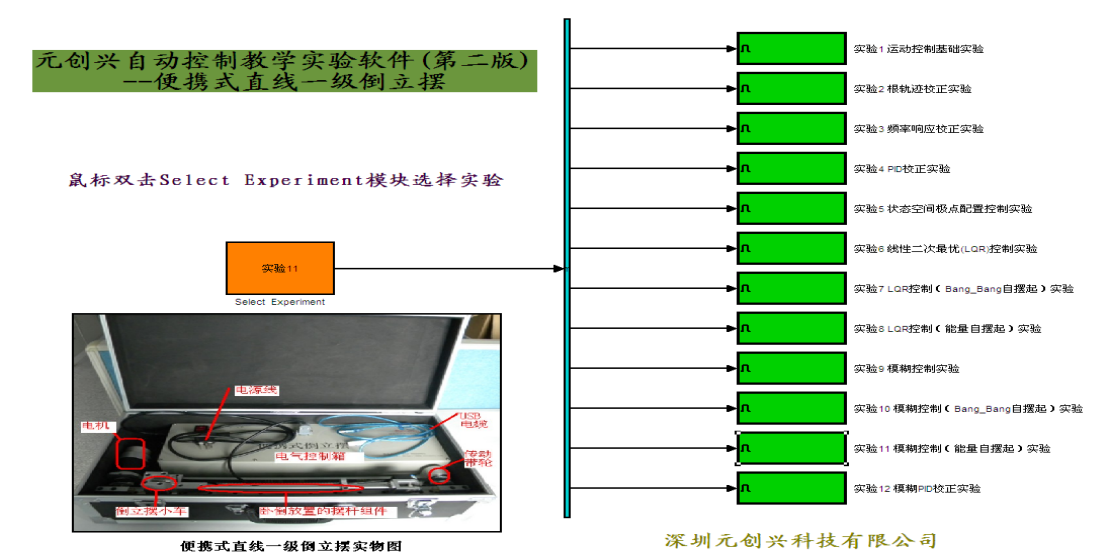


图3-4 便携式直线一级倒立摆MATLAB实验平台

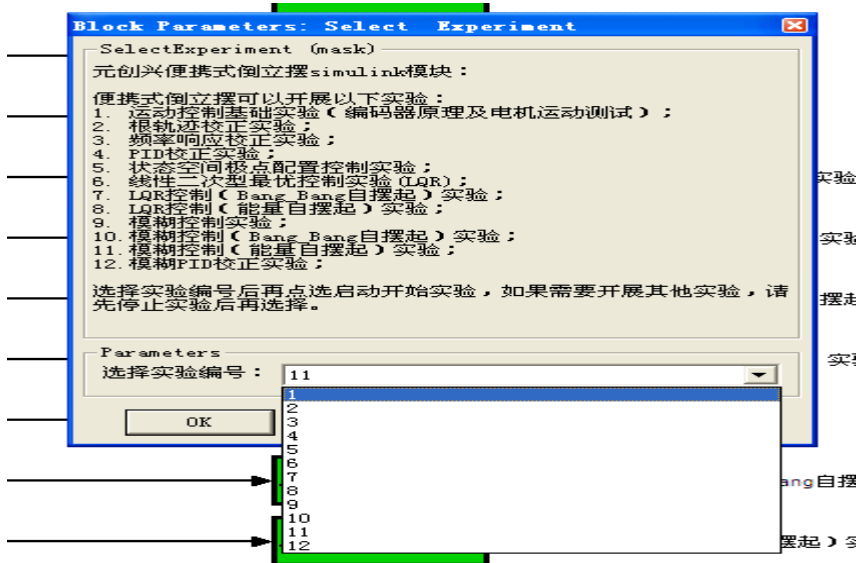


图3-5 选择实验编号

首先鼠标双击左侧的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号1，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现下图所示界面。

1 运动控制基础实验

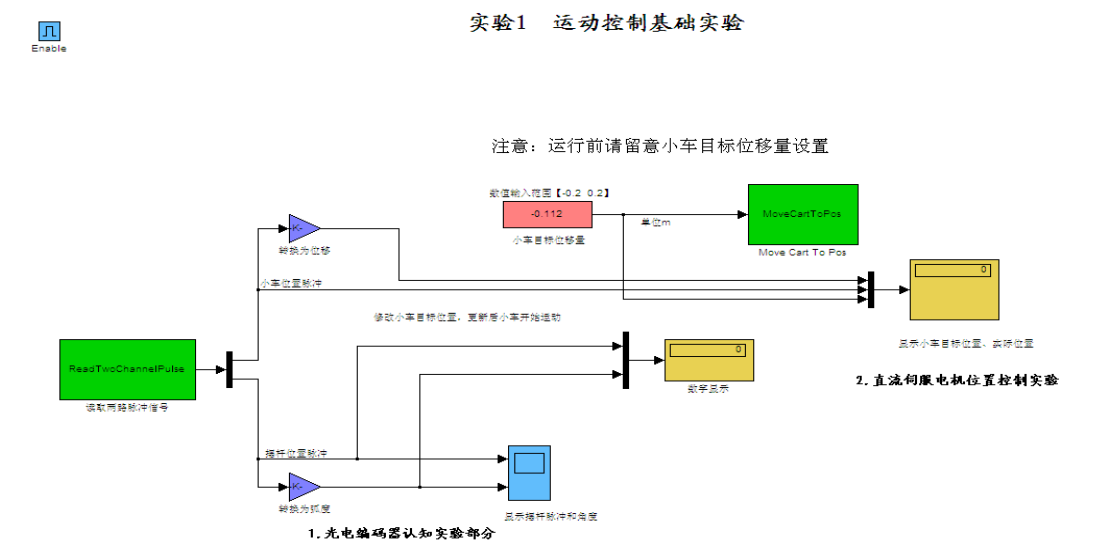


图 3-6 实验 1 运动控制基础实验

本实验的目的是让实验者熟悉旋转编码器的基本原理，掌握利用计算机和数据采集卡对编码器进行数据采集的方法，以及利用计算机对电机进行控制的基本原理和方法，了解机电一体化的两个重要内容：传感技术和运动控制技术, 以便顺利完成倒立摆的各项试验。

1.1 光电编码器认知实验

旋转编码器是一种角度传感器，它分为光电式、接触式和电磁感应式三种。我们在闭环系统中常用光电式编码器来测角度。

旋转编码器有增量编码器和绝对编码器两种, 如图 3-7 为光电式编码器原理示意图，它由发光元件、光电码盘、光敏元件和光电检测装置组成。光电式编码器，是一种通过光电转换将输出轴上的机械几何位移量转换成脉冲或数字量的传感器，这是目前应用最多的传感器。光电码盘是在一定直径的圆板上等分地开通若干个长方形孔，圆板不透光，长方孔透光。由于光电码盘与被测装置同轴，被测装置旋转时，光电码盘与之同速旋转，光源透过光电码盘的孔在光栏板上形成忽明忽暗的光信号，经光电检测装置检测到并转换为电信号，然后通过信号处理电路的整形、放大、分频、记数、译码后输出。

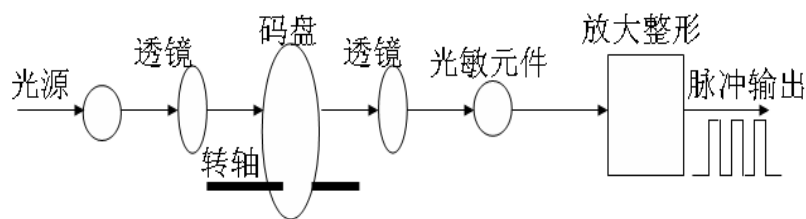


图 3-7 光电式编码器原理示意图

增量式光电编码器直接利用光电转换原理输出三组方波脉冲 A 、 B 和 Z 相； A 、 B 两组脉冲相位差 $\pi/2$ ，将输出信号送入鉴向电路，从而可方便地判断出旋转方向，而 Z 相为每转一个脉冲，用于基准点定位。

光电式增量编码器的测量精度取决于它所能分辨的最小角度 α （分辨角、分辨率），而这与码盘圆周内所分狭缝的线数有关。

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \quad n \text{—编码器线数。}$$

由于光电式脉冲编码盘每转过一个分辨角就发出一个脉冲信号，因此，根据脉冲数目可得出工作轴的回转角度，由传动比换算出直线位移距离；根据脉冲频率可得工作轴的转速；根据 A 、 B 两相信号的相位先后，可判断光电码盘的正、反转，以得到待测装置转向。

由于光电编码器输出的检测信号是数字信号，因此可以直接进入计算机进行处理，不需放大和转换等过程，使用非常方便，因此应用越来越广泛。

由于我们选用的旋转编码器分辨率为 500 线，那么经数据采集卡四倍频后为 2000 线，也就是说摆杆旋转一周，编码器计数 2000 个，那么计数对应角度公式如下（摆杆竖直向下时角度为零，逆时针方向为正）：

$$\theta = \frac{2\pi}{2000} n \quad (\text{单位为弧度}),$$

θ —摆杆旋转角度； n —编码器读数。

左击“▶”按钮，运行实验，摆动摆杆，观察编码器输出和摆杆角度的示数，可以让摆杆转动半周或一周，看示数是否与实际值相对应。

1.2 直流伺服电机位置控制实验

电机编码器的线数为 1000 线，经过数据采集卡四倍频后为 4000 线，即电机转动一周，采集卡采集到 4000 个编码器计数脉冲。电机皮带轮周长为 0.1117465m，即电机转一周，小车走过 0.1117465m 的距离。小车位移模块对应实验的输入量，单位为米，实验时，实验者可双击此模块，输入期望小车移动的

距离，然后单击运行实验“▶”，小车会在电机的带动下移动，移动的距离为小车位移量的输入数据。电机停止后，停止实验“■”。观察示数是否与实际值相对应。

注：导轨的实际长度约为 0.4m，我们对下发位移做了限制，下发的位移数据范围为“-0.2~0.2”。超出此范围，默认下发数据为上一次的范围内数据。

2 根轨迹校正实验

闭环系统瞬态响应的基本特性与闭环极点的位置紧密相关，如果系统具有可变的环路增益，则闭环极点的位置取决于所选择的环路增益，从设计的观点来看，对于有些系统，通过简单的增益调节就可以将闭环极点移到需要的位置，如果只调节增益不能满足所需要的性能时，就需要设计校正器，常见的校正器有超前校正、滞后校正以及超前滞后校正等。当系统的性能指标以时域形式提出时，通常用根轨迹法对系统进行校正。基于根轨迹法校正的基本思想是：假设系统的动态性能指标可由靠近虚轴的一对共轭闭环主导极点来表征，因此，可把对系统提出的时域性能指标的要求转化为一对期望闭环主导极点。确定这对闭环主导极点的位置后，首先根据绘制根轨迹的相角条件判断一下它们是否位于校正前系统的根轨迹上。如果这对闭环主导极点正好落在校正前系统的根轨迹上，则无需校正，只需调整系统的根轨迹增益即可；否则，可在系统中串联一个超前校正装置：

$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} (a > 1)$$

通过引入新的开环零点 $z_c = -1/aT$ 和新的开环极点 $p_c = -1/T$ 来改变系统原根轨迹的走向，使校正后系统的根轨迹经过这对期望闭环主导极点。

2.1 根轨迹分析

前面我们已经得到了直线一级倒立摆系统的开环传递函数，输入为小车的加速度，输出为倒立摆系统摆杆的角度，被控对象的传递函数为：

$$G(s) = \frac{4.9}{s^2 - 48.3}$$

可知系统没有零点，有两个极点 $\lambda_1 = 6.9498, \lambda_2 = -6.9498$ 。

画出系统传递函数的根轨迹如图 3-8 所示，可以看出传递函数的一个极点位于右半平面，并且有一条根轨迹起始于该极点，并沿着实轴向左到位于原点的零

点处，然后沿着虚轴向上，这意味着无论增益如何变化，这条根轨迹总是位于右半平面，即系统总是不稳定的。

Matlab 绘制未校正前的系统根轨迹程序如下：

```
>> clear;
num=[4.9];
den=[1,0,-48.3];
rlocus(num,den)
z=roots(num)
p=roots(den)

z =

Empty matrix: 0-by-1

p =

    6.9498
   -6.9498
```

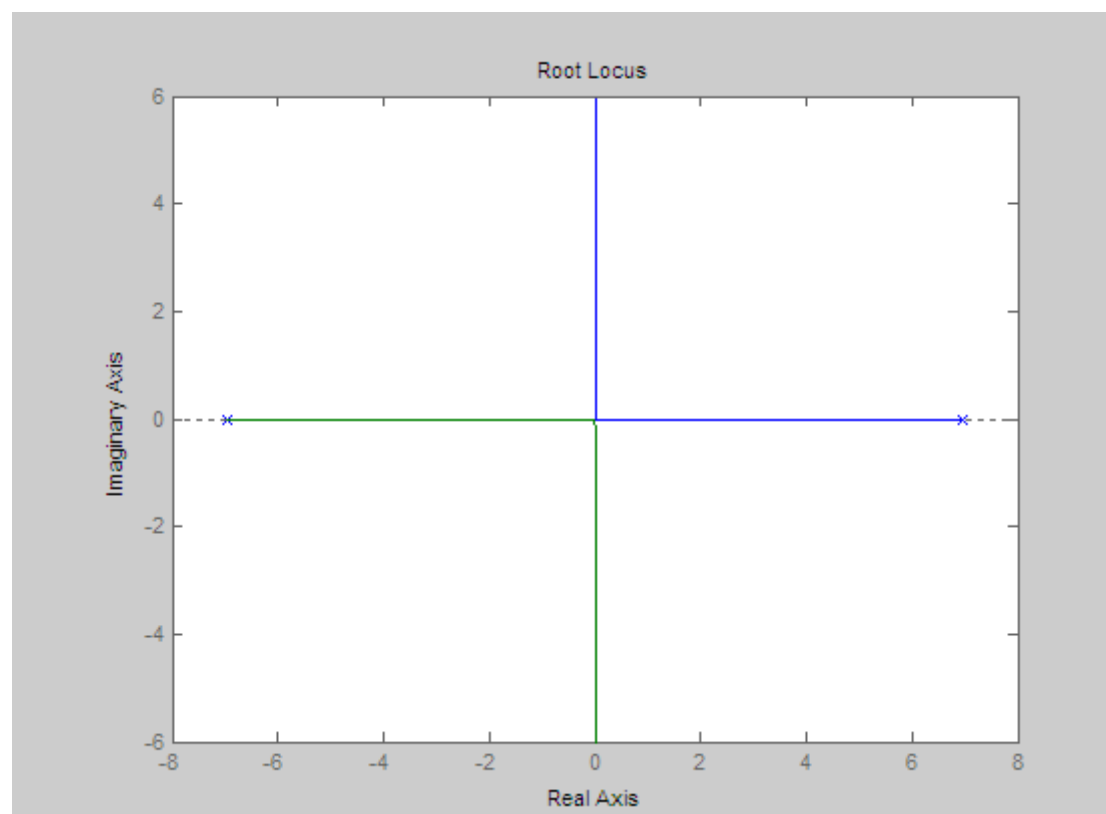


图3-8 未校正前的系统开环根轨迹

Matlab 绘制未校正前的闭环系统阶跃响应曲线程序如下：

```
>> num=[4.9];
den=[1,0,-48.3];
sys=tf(num,den);
close_sys=feedback(sys,1);
step(close_sys);
```

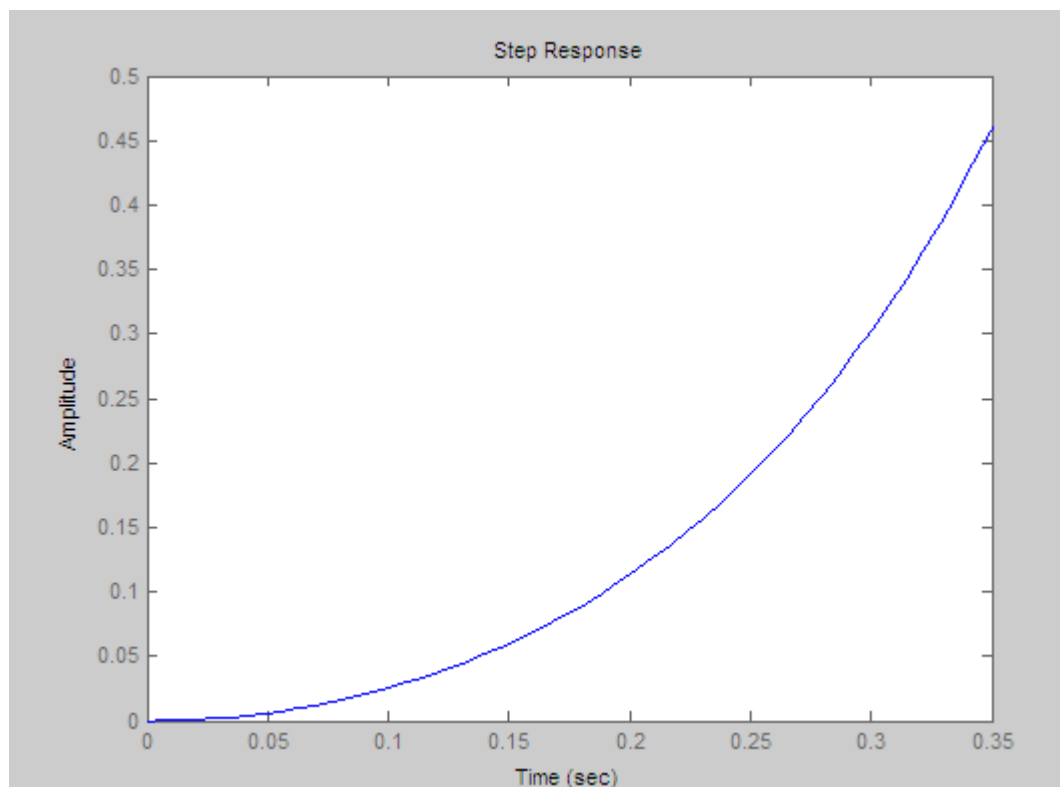


图 3-9 未校正前的系统阶跃响应曲线

2.2 根轨迹校正器设计及仿真

直线一级倒立摆的根轨迹校正可以转化为如下的问题：对于传递函数为：

$$G(s) = \frac{4.9}{s^2 - 48.3}$$

的系统，设计控制器使得校正后系统的性能指标如下：

1. 调整时间 $t_s = 0.5s$;
2. 最大超调量 $M_p \leq 10\%$;

根轨迹设计步骤如下：

1. 确定闭环期望极点 s_d 的位置，由最大超调量：

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \leq 10\%$$

可以得到 $\zeta \geq 0.5912$ ，取 $\zeta = 0.6$ ，由 $\zeta = \cos \theta$ 得 $\theta = 0.9273 \text{ rad}$ ，其中 θ 为位

于第二象限的极点和原点的连线与实轴负方向的夹角。

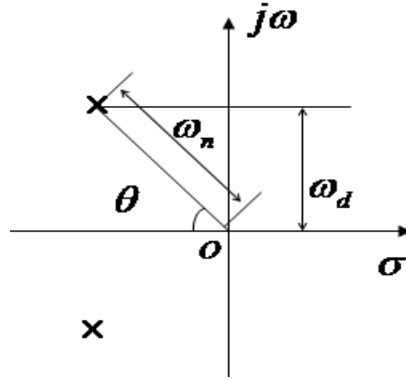


图3-10 性能指标与根轨迹关系图

又由 $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 0.5s$ ，可以得到 $\omega_n \geq 13.3333$ ，取 $\omega_n = 13.5$ ，于是可以得到期望的闭环极点 $s_d = 13.5(-\cos\theta \pm j\sin\theta) \approx -8.1 \pm j*10.8$ 。

2. 未校正系统的根轨迹在实轴和虚轴上，不通过闭环期望极点，因此需要对系统进行超前校正，设控制器为：

$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} = \frac{s+z_c}{s+p_c} \quad (a>1)$$

3. 计算超前校正装置应提供的相角，已知系统原来的极点在主导极点产生的滞后相角和为：

$$G(s_d) = -\left(\tan^{-1}\left(\frac{13.5\sin\theta}{13.5\cos\theta - 7.746} \right) + \tan^{-1}\left(\frac{13.5\sin\theta}{13.5\cos\theta + 7.746} \right) \right) \approx 2.1362$$

所以一次校正装置提供的相角为：

$$\phi = 3.1416 - 2.1362 = 1.0054$$

4. 设计超前校正装置，已知 $\theta = 0.9273$ ，对于最大的 a 值的 γ 角度：

$$\gamma = \frac{1}{2}(\pi - \theta - \phi) = 0.6045$$

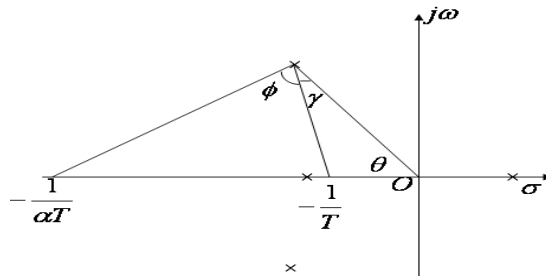


图3-11 根轨迹校正计算图

按最佳确定法作图规则，在上图中画出相应的直线，求出超前校正装置的零点和极点，分别为： $z_c = -7, z_p = -24$

校正后系统的开环传递函数为：

$$Q(s) = KG_c(s)G(s) = \frac{K(s+7)}{s+24} \frac{4.9}{s^2 - 48.3}$$

5. 由幅值条件 $|Q(s_d)H(s_d)| = 1$ ，并设反馈为单位反馈，即 $|Q(s_d)| = 1$ 。

$$\left| KG_c(s)G(s) \right| = \left| \frac{K(s+7)}{s+24} \frac{4.9}{s^2 - 48.3} \right|_{s=-8.1+j10.8} = 1$$

求得： $K = 52.71$

6. 于是我们得到了系统的控制器：

$$G(s) = \frac{52.71(s+7)}{s+24}$$

校正后用 Matlab 绘制根轨迹和阶跃响应曲线的程序如下：

```
>> num=[4.9];
den=[1,0,-48.3];
sys=tf(num,den);
close_sys=feedback(sys,1);
step(close_sys);
>> clear;
num=[4.9]; % Transfer function of the Linear 1 stage
den=[1 0 -48.3]; % inverted penulum
numlead=-7; % Controller Zeros
denlead=-24; % Controller Poles
[Z,P,K]=tf2zp(num,den);
Za=[Z;numlead]; % Add Zeros to the system
Pa=[P;denlead]; % Add Poles to the system
[num2,den2]=zp2tf(Za,Pa,K);
sys=tf(num2,den2);
rlocus(sys);
figure
KK=52.71 % compensated system
sys2=zpk(Za,Pa,KK*K);
sysc=sys2/(1+sys2);
t=0:0.01:3;
step(sysc,t); % Response of the Close-loop system

KK =

52.7100
```


校正后系统的根轨迹如下图所示：

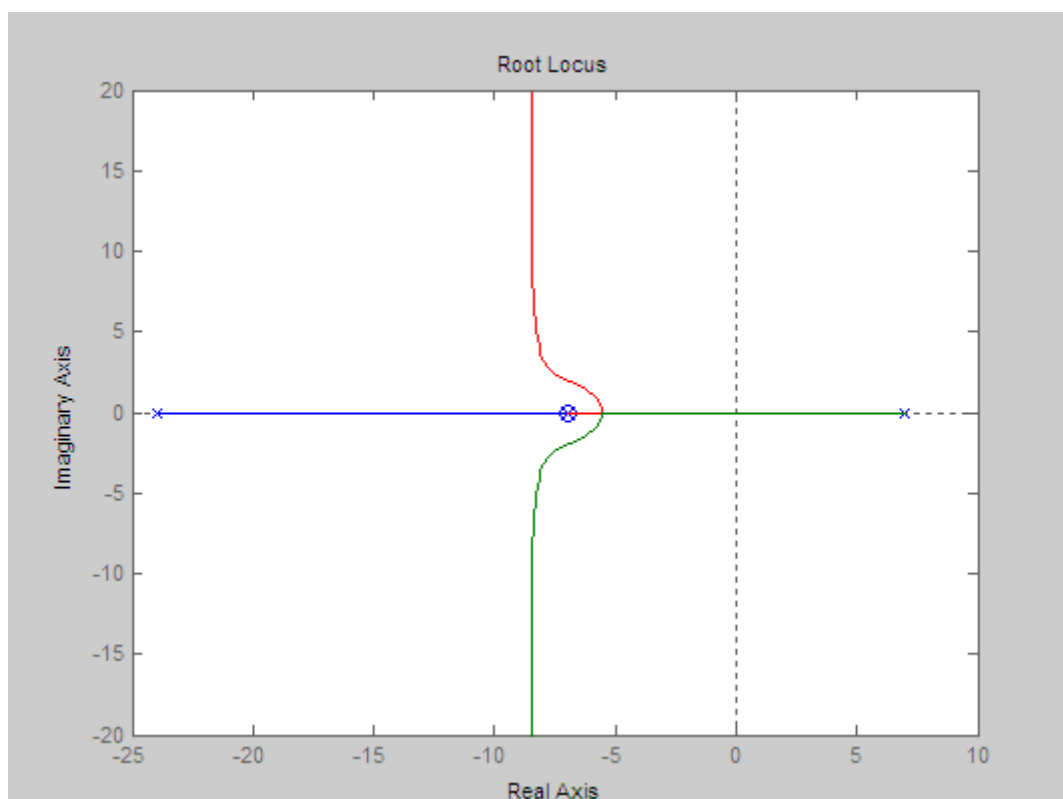


图3-12 校正后系统根轨迹

校正后的系统阶跃响应曲线如下图所示：

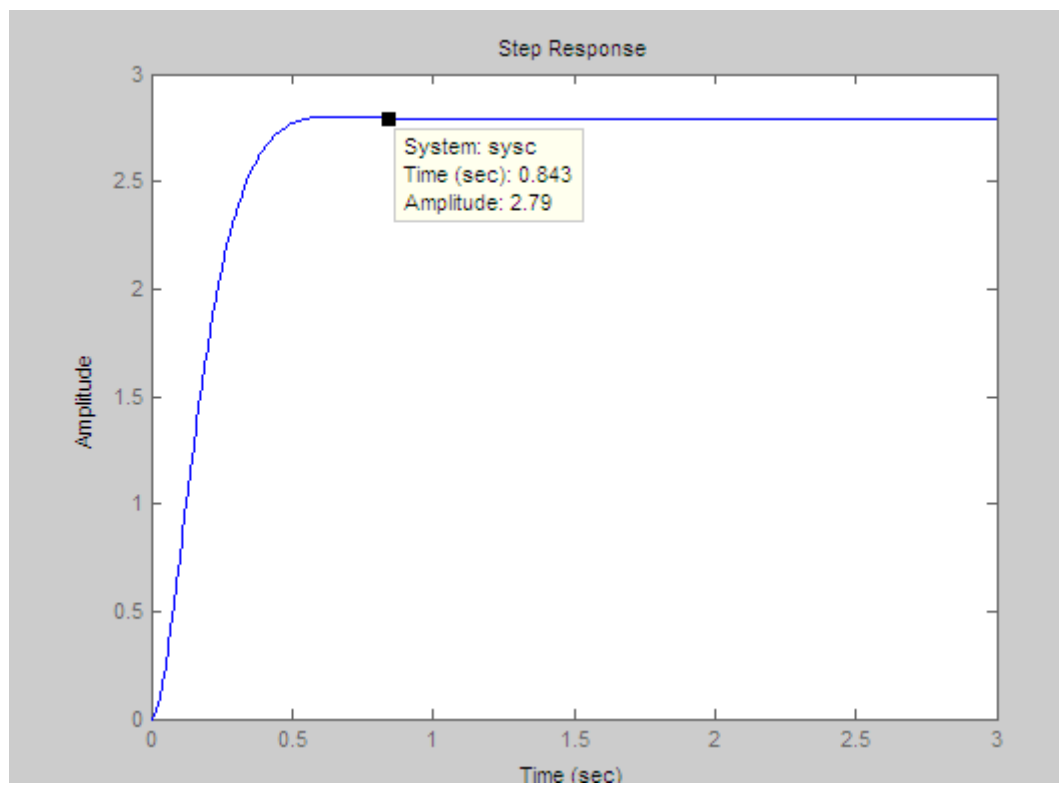


图3-13 校正后系统阶跃响应曲线

可以看出，系统有较好的稳定性，但系统存在一定的稳态误差，所以此次设计的校正器并不是最优的，为使系统瞬态响应满足要求，可以采用增大 K 的方法。另外， K 增大后可能会出现超调过大的现象，为使系统满足要求，下面提供两种方法：




第一种方法：增加阻尼 ζ ，重复上面的设计方法，重新设计，直到系统的响应满足要求。请实验者自行设计，这里不再描述其过程。

第二种方法：在保持 ϕ 角不变的情况下，将校正装置的零点向左侧偏移，以减少闭环零点和极点的影响，实验者可以按此方法重新进行设计。

2.3 Simulink 仿真实验

MATLAB提供了一个强大的图形化仿真工具Simulink，下面在Simulink中建立直线一级倒立摆的仿真模型，（对于初次使用MATLAB Simulink 实验者，请在进行此实验之前熟悉Simulink相关的知识和使用方法）。

根轨迹校正倒立摆模型的建立步骤：

1、鼠标双击 Matlab 图标  启动 Matlab，在指令区键入指令 Simulink 或双击 Matlab 工具栏中的图标 （Simulink）均可启动 Simulink 模块库浏览器；然后单击浏览器的工具栏中图标 （create a new model）新建一个 Simulink 模型窗口。

2、从“Continuous”中选择Transfer Fcn并按住鼠标拖到新建窗口中如下图。

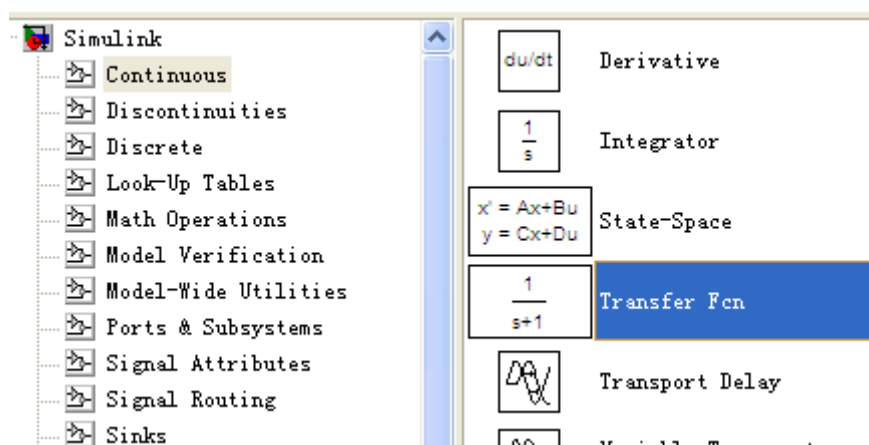


图3-14 Matlab中Transfer Fcn 模块图

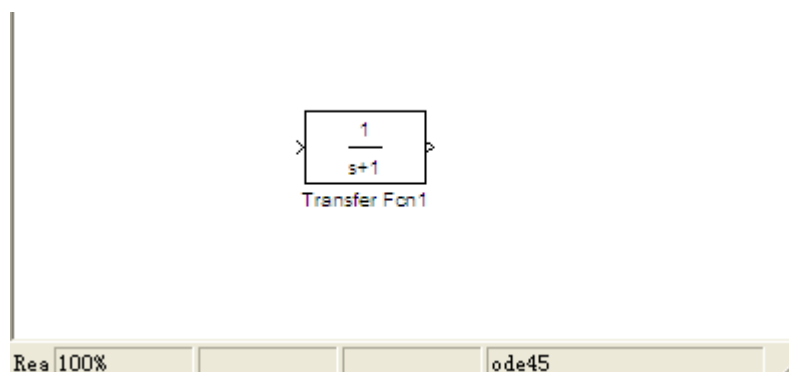


图3-15 Transfer Fcn 模块搭建图

3、双击Transfer Fcn模块，打开参数设置窗口如下图，按照图示的数据输入，然后点击OK按钮完成输入。

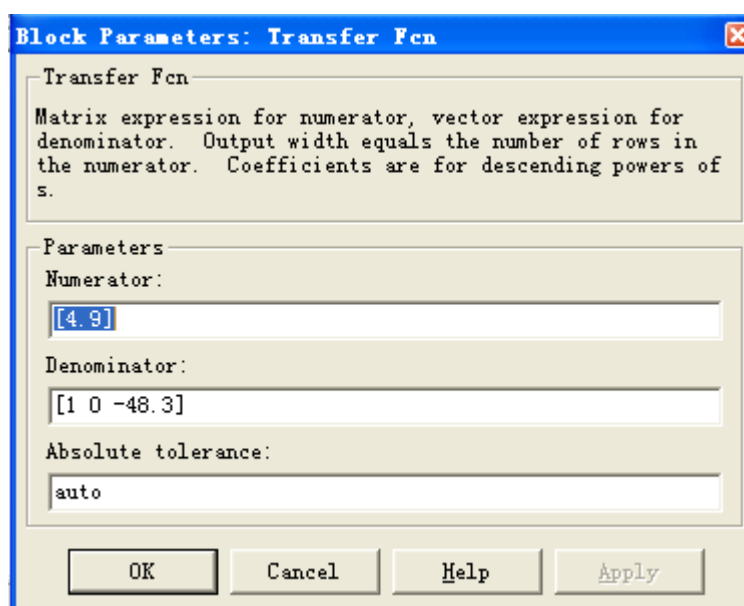


图3-16 Transfer Fcn 参数

4、同样从 Simulink 模型库 “Continuous” 中拖一个 “Zero-Pole” 模块到窗口中作为控制器，双击模块，设定零点、极点和上面程序计算得到的增益KK值。

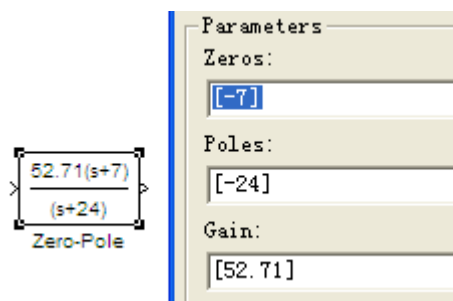


图 3-17 Zero-Pole 参数更改效果图

5、从 Simulink 模型库 “Math Operations” 中拖一个 “Sum” 模块编辑窗口中，并双击模块改为如下图所示（把其中的 “++” 改为 “+-”）。

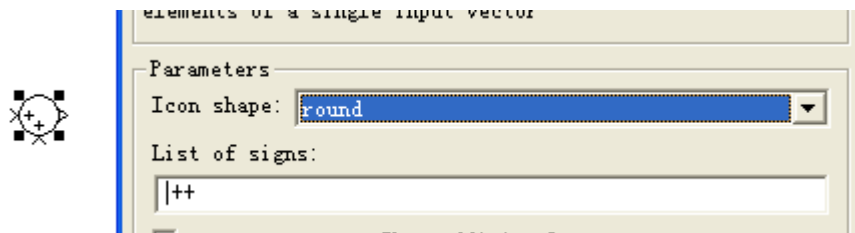


图3-18 Sum 参数

6、从 Simulink 模型库 “ Sources ” 中拖一个 “Step” 信号模块到编辑窗口中，并双击模块设置阶跃信号参数。

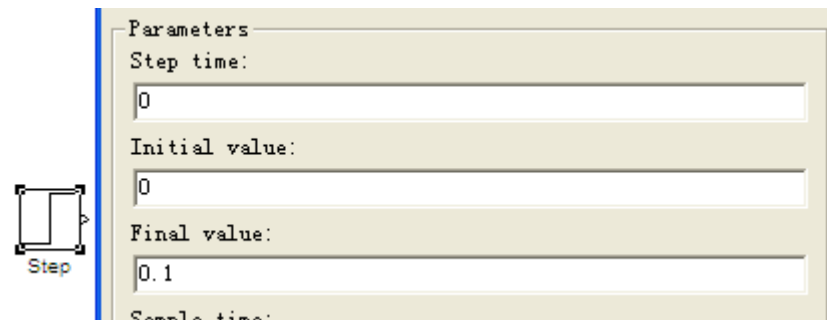


图3-19 阶跃信号参数

7、从 Simulink 模型库 “Sinks” 中拖两个 “Scope” 信号模块到编辑窗口中，如下图所示。

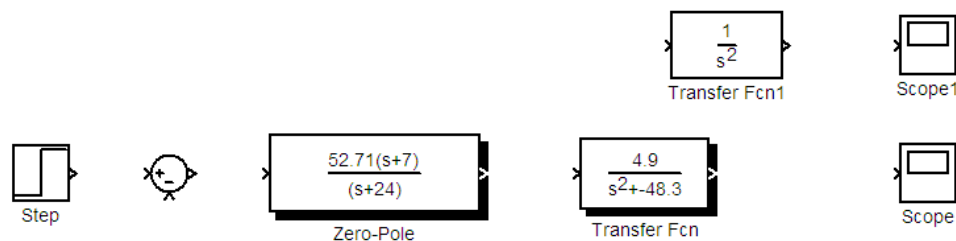


图3-20 “Scope” 信号模块搭建过程

8、把各个模块连接起来构成一个闭环系统，并对各个模块填充颜色，如下图。

Reinovo Linear 1-Stage Pendulum Root-Locus Control Simulink Model

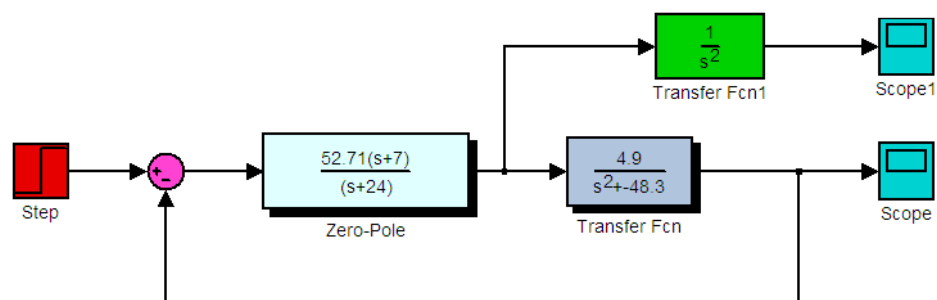


图 3-21 模型搭建完成

9、点击“Simulation”菜单，在下拉菜单中选择“Simulation Parameters”，

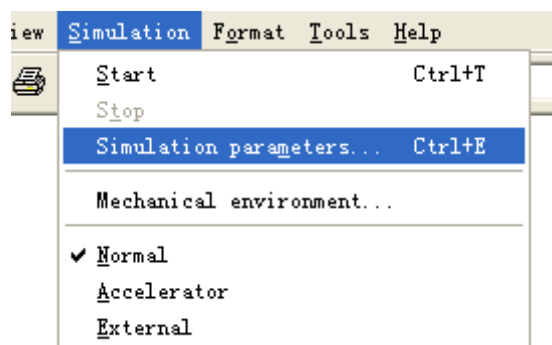


图3-22 Simulation Parameters选择

打开如下窗口：

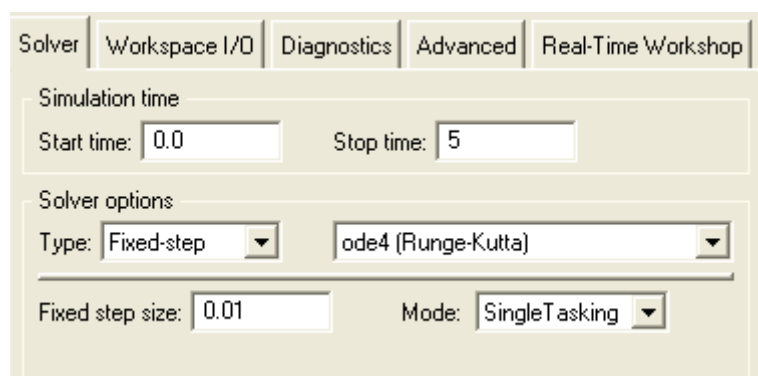


图3-23 Simulation Parameters界面

在上面窗口中设置“Simulation time”以及“Solver options”等选项。设置仿真步长为0.01秒。设置好各项参数后，点击“▶”运行仿真，得到仿真结果：

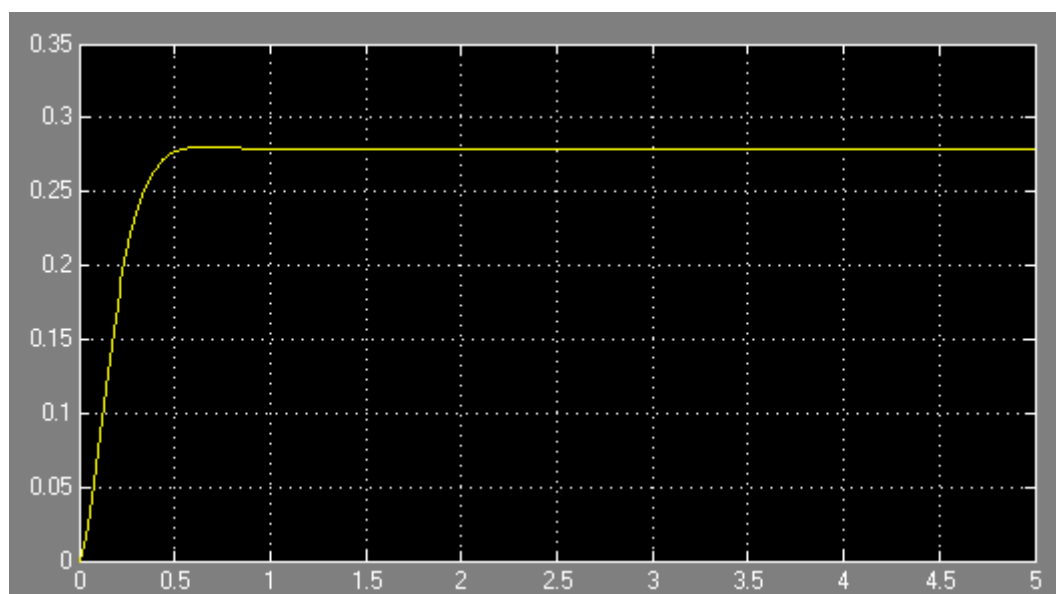


图3-24 摆杆角度响应曲线

从上面仿真结果可以看出，系统在1秒内达到平衡，超调量也比较小，但存在一定的稳态误差，此控制器参数仅供实验者参考。

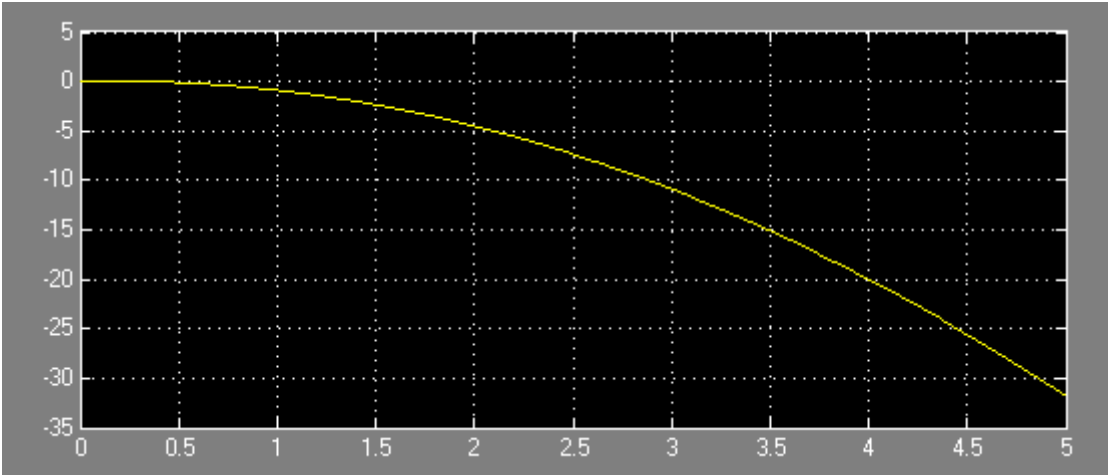


图 3-25 小车位置响应曲线

从图3-25可以看出，由于根轨迹控制器为单输入单输出系统，所以只能控制摆杆的角度，并不能控制小车的位置，所以小车会往一个方向运动。

2.4 Simulink 实时控制实验

鼠标双击主界面上的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号2，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现下图所示界面。

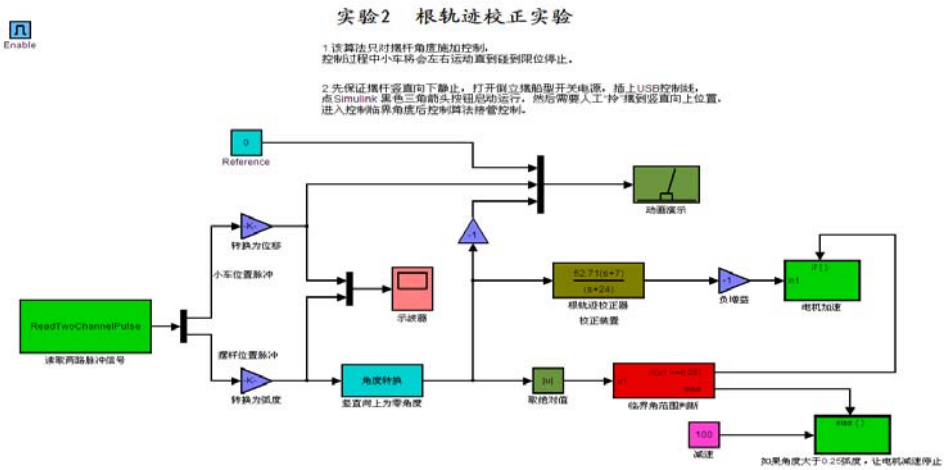


图 3-26 实验 2 根轨迹校正实验

运行前查看是否为自己设计好的根轨迹校正器，并确定保证摆杆此时竖直向下。不用编译链接，直接单击“▶”按钮，用手捏住摆杆顶端（不要抓住中部或下部），慢慢地提起，到接近竖直方向时放手，当摆杆与竖直向上的方向夹角小于0.25弧度时，进入稳摆范围，可以观察到，摆杆直立不倒，小车会向着一个方向运动直到撞到限位开关停下来，然后单击“■”停止实验。

3 频率响应校正实验

系统对正弦输入信号的响应，称为频率响应。在频率响应方法中，我们在一定范围内改变输入信号的频率，研究其产生的响应。

频率响应可以采用以下三种比较方便的方法进行分析，一种为波特图或对数坐标图，波特图采用两幅分离的图来表示，一幅表示幅值和频率的关系，一幅表示相角和频率的关系；一种是极坐标图，极坐标图表示的是当 ω 从0变化到无穷大时，向量 $G(j\omega)\angle G(j\omega)$ 端点的轨迹，极坐标图也常称为奈奎斯特图，奈奎斯特稳定判据使我们有可能根据系统的开环频率响应特性信息，研究线性闭环系统的绝对稳定性和相对稳定性。

3.1 频率响应分析

由直线一级倒立摆的传递函数绘制系统的波特图和奈奎斯特图。

Matlab绘制系统的波特图程序如下：

```
clear;
num=[4.9];
den=[1 0 -48.3];
G=tf(num,den);
bode(G);grid
```

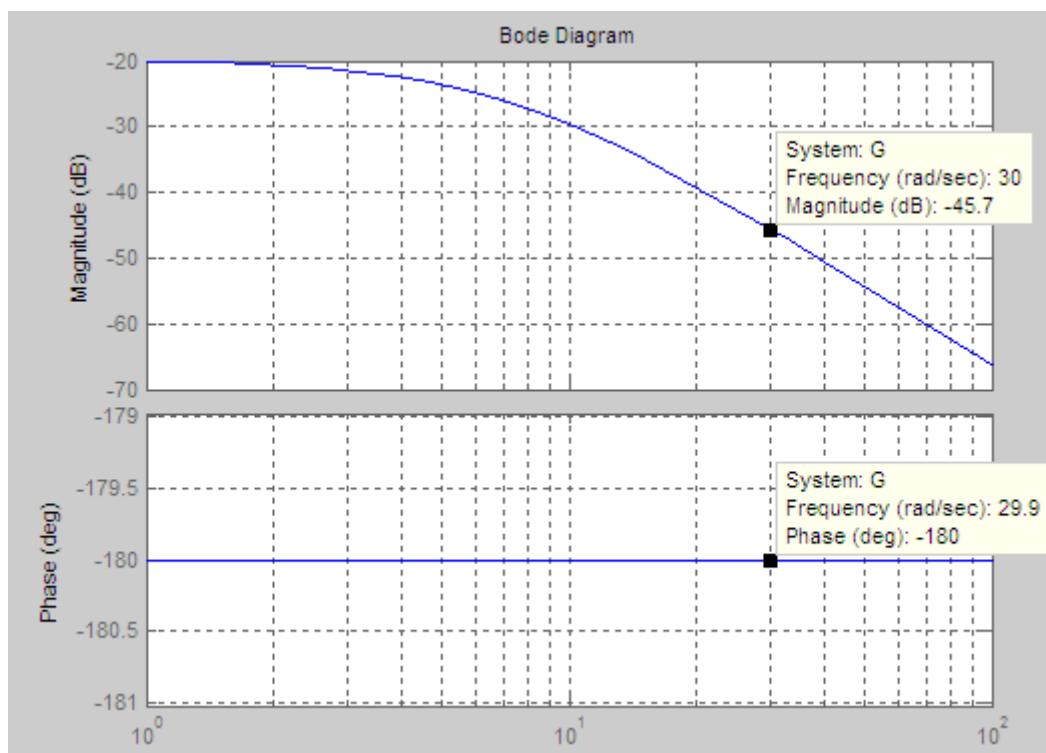


图3-27 系统波特图

Matlab绘制系统的奈奎斯特图程序如下：

```
>> clear;
num=[4.9];
den=[1 0 -48.3];
G=tf(num,den);
nyquist(G);grid
```

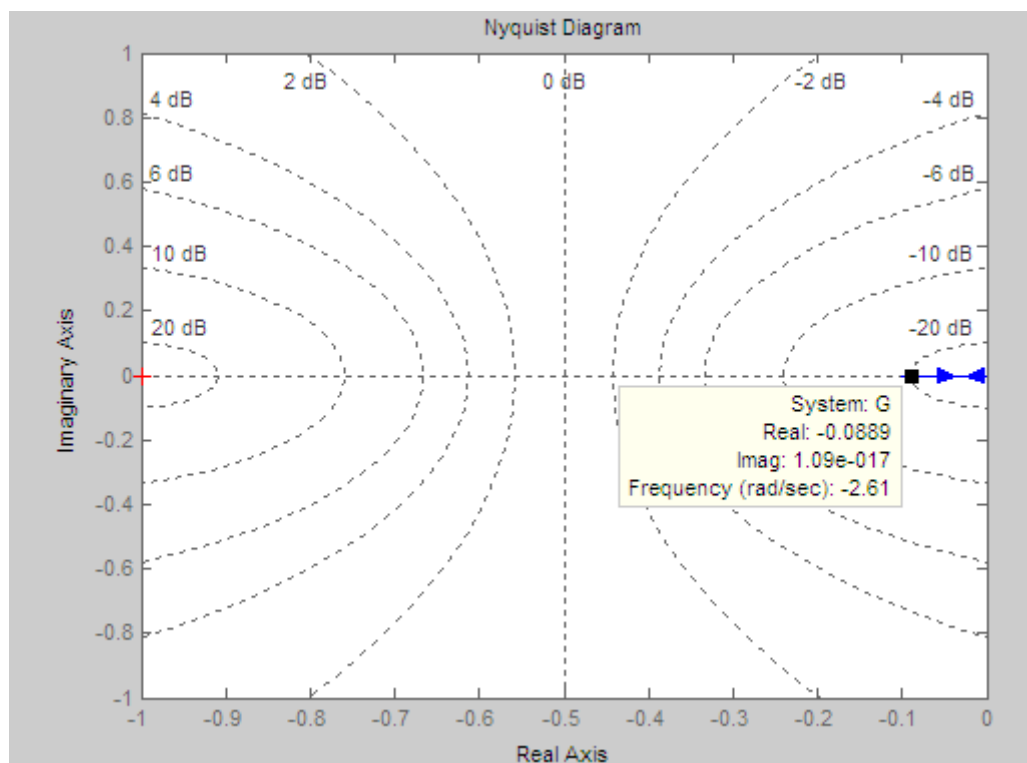


图3-28 系统奈奎斯特图

从上图可知系统没有零点，但存在两个极点，其中一个极点位于右半S平面，根据奈奎斯特稳定判据，闭环系统稳定的充分必要条件是：当 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时，开环传递函数 $G(j\omega)$ 沿逆时针方向包围-1点 p 圈，其中 p 为开环传递函数在右半S平面内的极点数。对于直线一级倒立摆，由图我们可以看出，开环传递函数在S右半平面有一个极点，因此 $G(j\omega)$ 需要沿逆时针方向包围-1点一圈。可以看出，系统的奈奎斯特图并没有逆时针绕-1点一圈，因此系统不稳定，需要设计控制器来稳定系统。

3.2 频率响应校正器设计

直线一级倒立摆的频率响应设计可以表示为如下问题。

考虑一个单位负反馈系统，其开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{4.9}{s^2 - 48.3}$$

设计控制器 $G_c(s)$ ，使得系统的静态位置误差常数为10，相位裕量为 50° ，增益裕量等于或大于10分贝。

根据要求，控制器设计如下：

1. 选择控制器，上面我们已经得到了系统的波特图，可以看出，给系统增加一个超前校正就可以满足设计要求，设超前校正装置为：

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

已知校正系统具有开环传递函数 $G_c(s)G(s)$

设：

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{4.9K}{s^2 - 48.3} \quad (\text{式中 } K = K_c \alpha)$$

2. 根据稳态误差要求计算增益 K ：

$$K_p = \left| \lim_{s \rightarrow 0} K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \frac{4.9}{s^2 - 48.3} \right| = 10$$

计算可得：

$$K = K_c \alpha = 98.57$$

于是有：

$$G_1(s) = \frac{98.57 \times 4.9}{s^2 - 48.3}$$

Matlab绘制增加增益后系统的波特图和奈奎斯特图程序如下：

```
>> clear;
num=[98.57*4.9];
den=[1 0 -48.3];
G=tf(num,den);
subplot(2,1,1)
bode(G);grid
subplot(2,1,2)
nyquist(G);grid
```

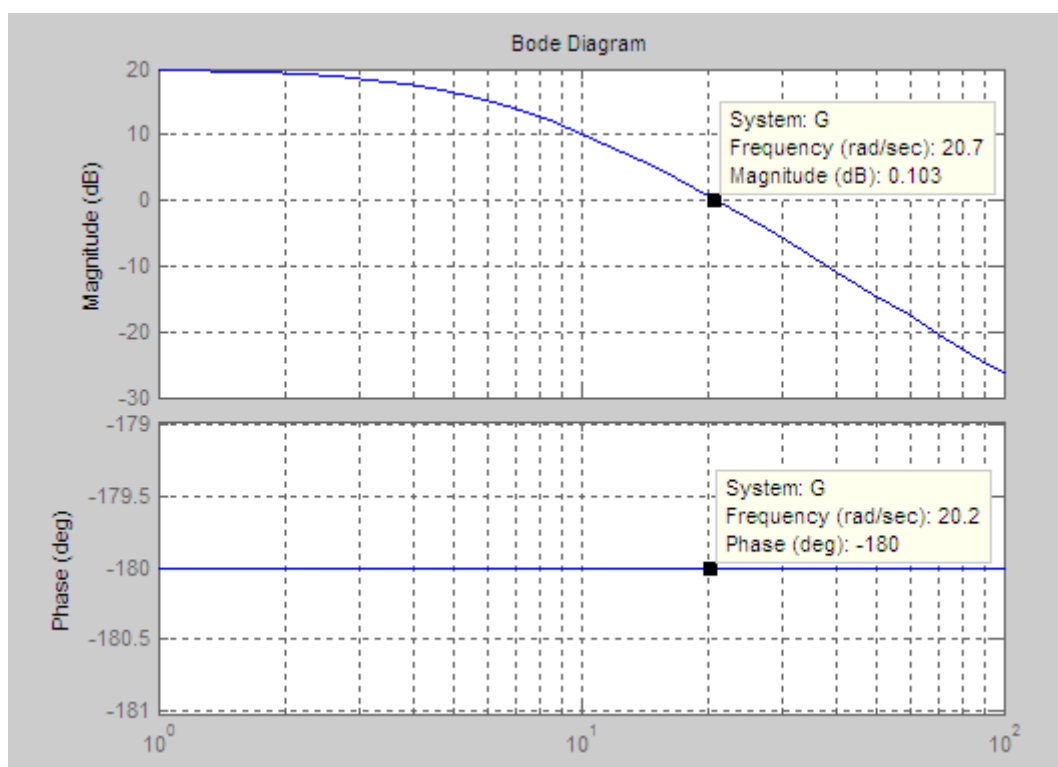


图3-29 增加增益后系统波特图

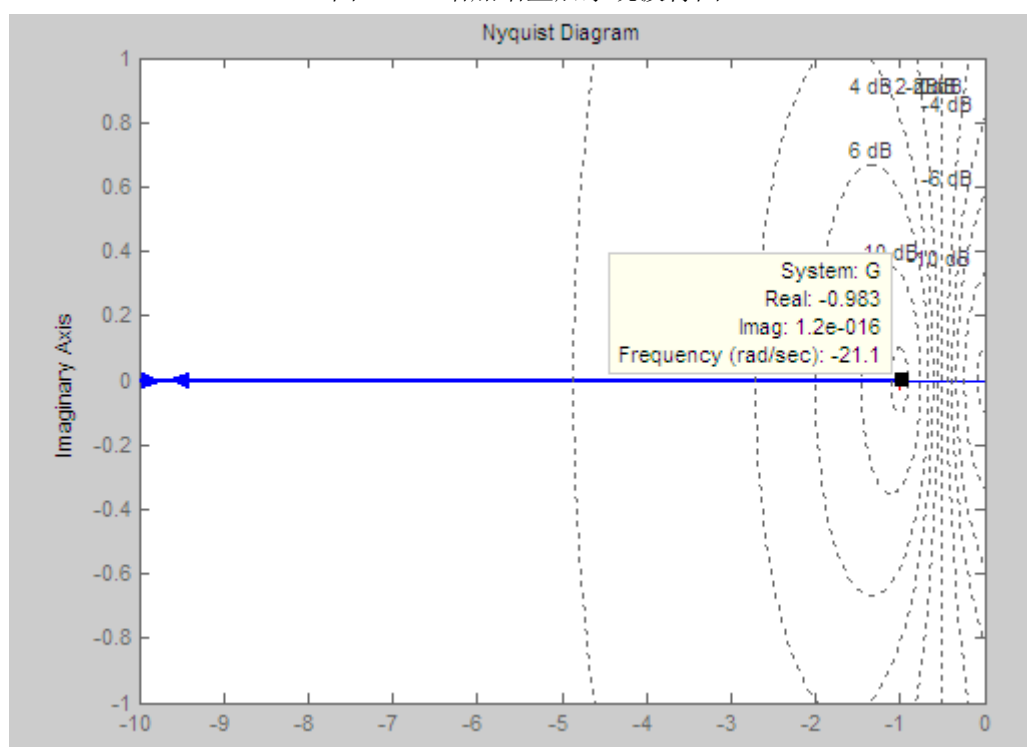


图3-30 增加增益后系统奈奎斯特图

3. 可以看出，系统的相位裕量为 0° ，根据设计要求，系统的相位裕量为 50° ，因此需要增加的相位裕量为 50° ，增加超前校正装置会改变波特图的幅值曲线，这时增益交界频率会向右移动，必须对增益交界频率增加所造成的 $G_1(j\omega)$ 的相位滞后增量进行补偿，因此，假设需要的最大相位超前量 ϕ_m 近似等于 55° 。

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m}, \quad \text{求得: } \alpha = 0.0994$$

4. 确定未校正系统幅值 $|G_1(j\omega)| = 10 \lg \alpha = -10.026$ ，由波特图确定幅值对应的频率 $\omega = 42.93$ ，我们选择此频率作为新的增益交界频率 ω_c ，这一频率相应于 $\omega = 1/\sqrt{\alpha}T$ ，即 $\omega_c = 1/\sqrt{\alpha}T$ ，于是：

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} \omega_c = 13.535$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 136.166$$

5. 于是校正装置确定为：

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + 13.535}{s + 136.166}$$

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = 991.65$$

6. 增加校正后系统的波特图和奈奎斯特曲线图如下：

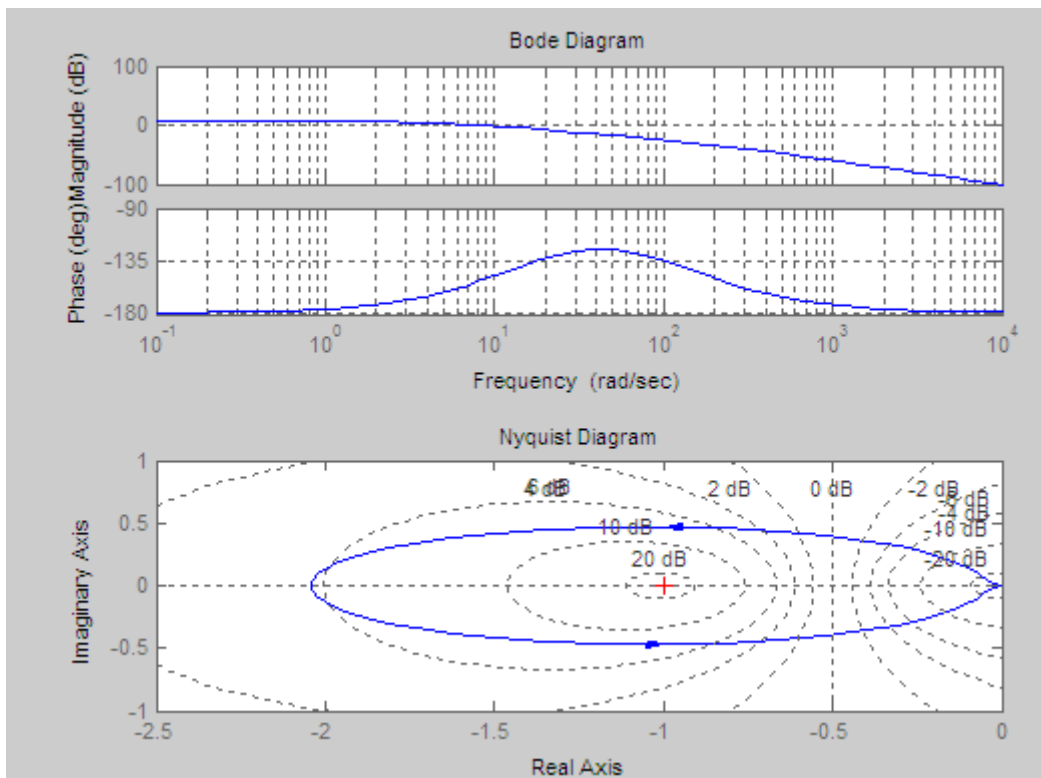


图3-31 校正后系统的波特图和奈奎斯特曲线图

从波特图中可以看出,系统具有要求的相角裕度和幅值裕度,从奈奎斯特图中可以看出,曲线绕-1点逆时针一圈,因此校正后的系统是稳定的。得到系统的单位阶跃响应如下：

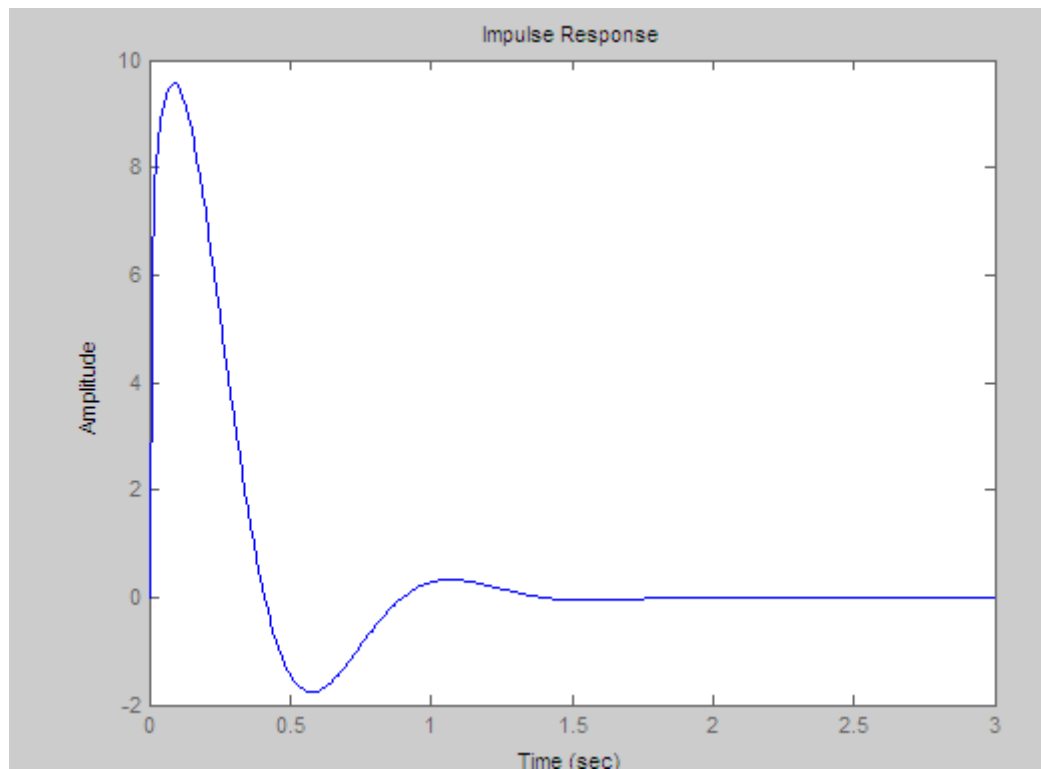


图3-32 校正后系统的单位阶跃响应曲线

可以看出，系统在遇到干扰后，在1.5秒内可以达到新的平衡。

Matlab绘制校正后系统的波特图、奈奎斯特图和单位阶跃响应程序如下：

```
>> clear;
num=[98.57*4.9];
den=[1 0 -48.3];
subplot(2,1,1)
bode(num,den);grid
subplot(2,1,2)
nyquist(num,den);grid
z=roots(num);
p=roots(den);
za=[z;-13.535];
pa=[p;-136.166];
k=991.65;
sys=zpk(za,pa,k);
figure
subplot(2,1,1)
bode(sys);grid
subplot(2,1,2)
nyquist(sys);grid
figure
sysc=sys/(1+sys);
t=0:0.01:3;
impz(sysc,t)
```

3.3 Simulink 仿真实验

根据本章 2.3 节根轨迹校正倒立摆模型的建立步骤搭建直线一级倒立摆频率响应控制仿真模型。

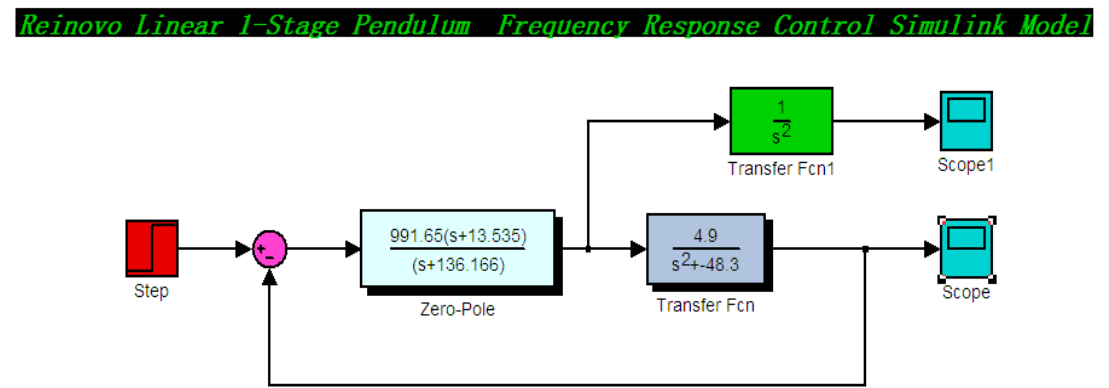


图 3-33 直线一级倒立摆频率响应控制仿真模型

设置好各项参数后，点击 “▶” 运行仿真，得到仿真结果：

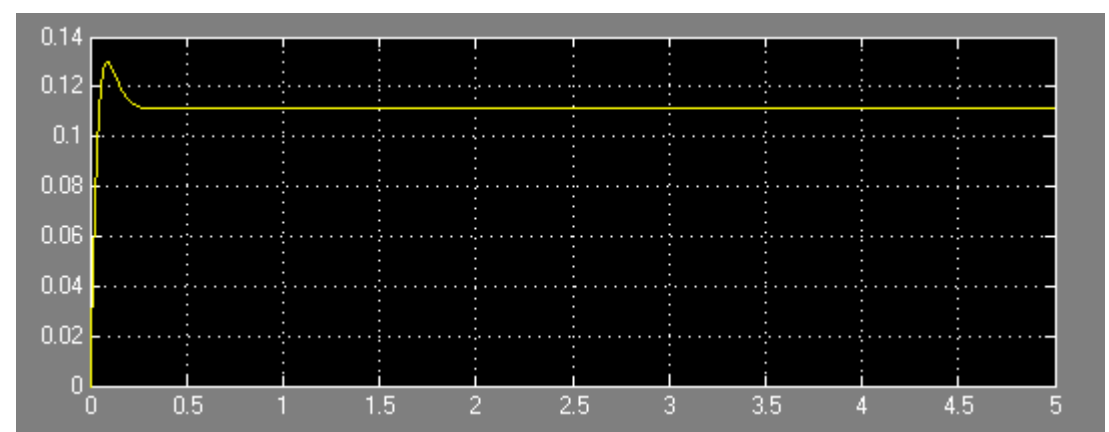


图 3-34 摆杆角度响应曲线

从上面仿真结果可以看出，系统在0.3秒内达到平衡，超调量也比较小，但存在一定的稳态误差，此控制器参数仅供实验者参考。

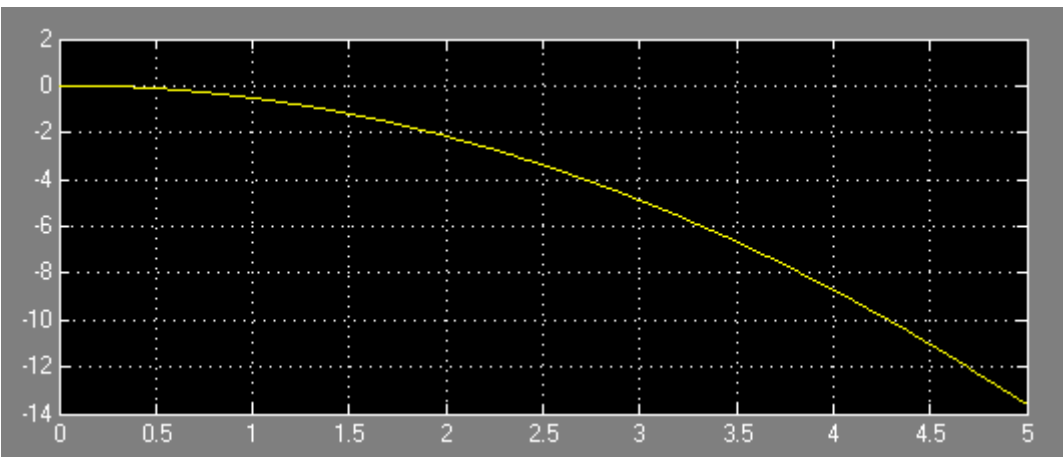


图 3-35 小车位置响应曲线

从图 3-35 可以看出，由于频率响应控制器为单输入单输出系统，所以只能控制摆杆的角度，并不能控制小车的位置，所以小车会往一个方向运动。

3.4 Simulink 实时控制实验

鼠标双击主界面上的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号3，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现下图所示界面。

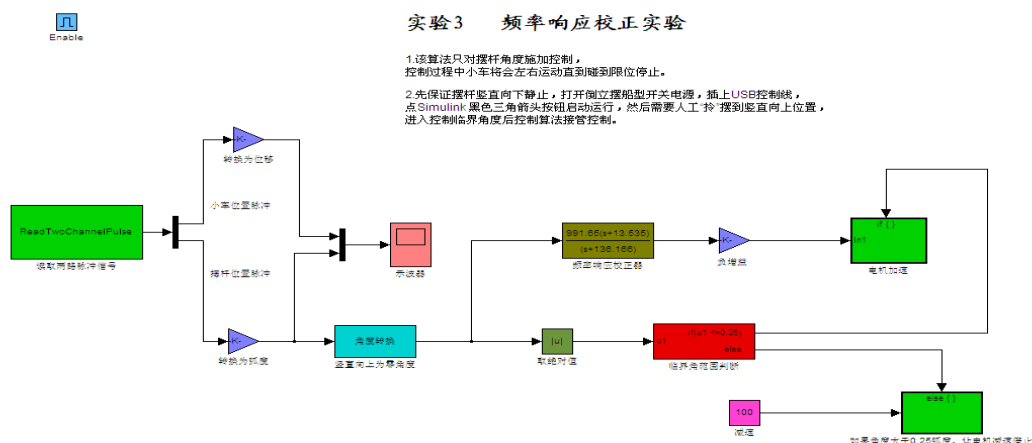


图 3-36 实验 3 频率响应校正实验

打开实验箱，将USB数据线和电源线取出，确定实验箱上的电源开关是关闭的，然后把数据线与电脑USB接口连接，电源插头插入插座。把小车推到导轨中间位置，打开实验箱上的电源开关，此时，小车就推不动了，因为电机已经上伺服了。

运行前查看是否为自己设计好的频率响应校正器，并确定保证摆杆此时竖直向下。不用编译链接，直接单击“▶”按钮，用手捏住摆杆顶端（不要抓住中部或下部），慢慢地提起，到接近竖直方向时放手，当摆杆与竖直向上的方向夹角小于0.25弧度时，进入稳摆范围，可以观察到，摆杆直立不倒，小车会向着一个方向运动直到撞到限位开关停下来，然后单击“■”停止实验。

注：由于系统采用近似线性模型，忽略了一些非线性及外界干扰的作用，所以实物控制与仿真有一定差别。设计控制器时可适当减小开环增益K。

4 PID校正实验

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出的系统，控制器设计时一般需要有关被控对象的较精确模型。PID控制器因其结构简单，容易调节，且不需要对系统建立精确的模型，在实际控制中应用较广。在控制理论和技术高速发展的今天，工业过程控制中95%以上的控制回路都具有PID结构，并且许多高级控制都是以PID控制为基础的。本系统采用的伺服驱动器中也有PID结构。

4.1 PID控制分析

由前面的讨论已知实际系统的物理模型：

$$G(s) = \frac{4.9}{s^2 - 48.3}$$

对于倒立摆系统输出量为摆杆的角度，它的平衡位置为垂直向上的情况。系统控制结构框图如图3-37，图中KD(s)是控制器传递函数，G(s)是被控对象传递函数。

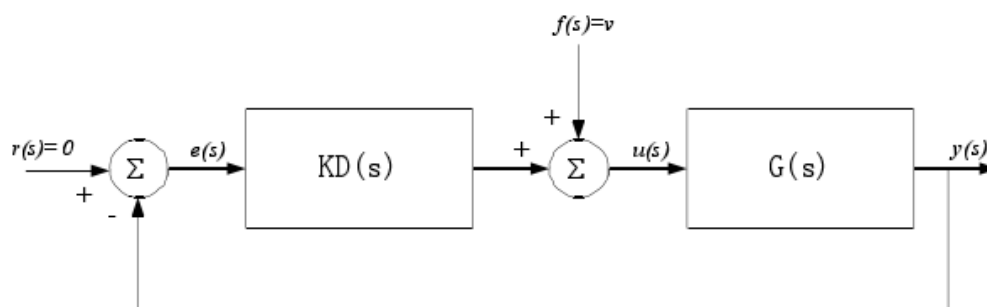


图3-37 PID控制结构框图

$$\text{其中 } KD(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

此次实验只考虑控制摆杆的角度，小车的位置是不受控的，即摆杆角度的单闭环控制，立起摆杆后，会发现小车向一个方向运动直到碰到限位信号。那么要使倒立摆稳定在固定位置，还需要增加对电机位置的闭环控制，这就形成了摆杆角度和电机位置的双闭环控制。立摆后表现为电机在固定位置左右移动控制摆杆不倒。

4.2 PID控制参数整定及Simulink仿真实验

PID参数设定法则可以参考《现代控制工程》第十章PID控制与鲁棒控制，对于PID控制参数，我们采用以下的方法进行设定。

由系统的实际模型：

$$G(s) = \frac{4.9}{s^2 - 48.3}$$

在MATLAB Simulink 下对系统进行仿真。

Reinovo Linear 1-Stage Pendulum PID Control Demo

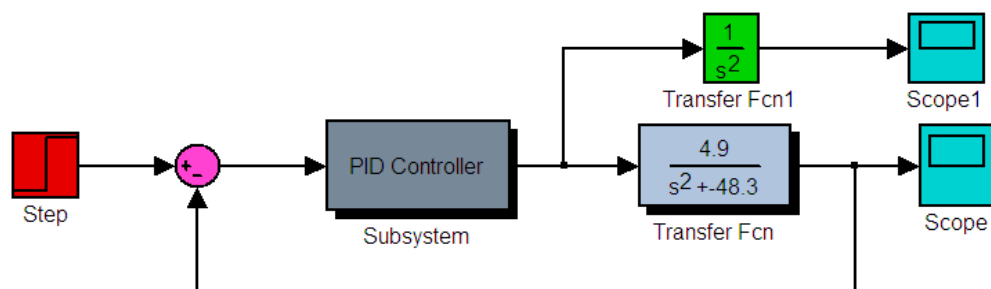


图3-38 直线一级倒立摆PID控制仿真模型

其中“PID Controller”为封装（Mask）后的PID控制器，如下图：

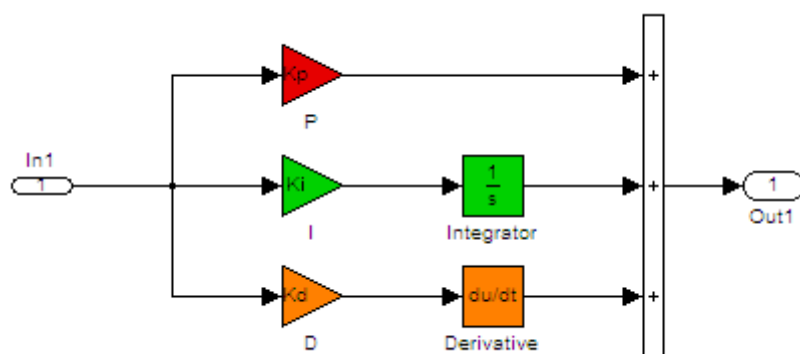


图3-39 PID控制器

双击可打开参数设置窗口：

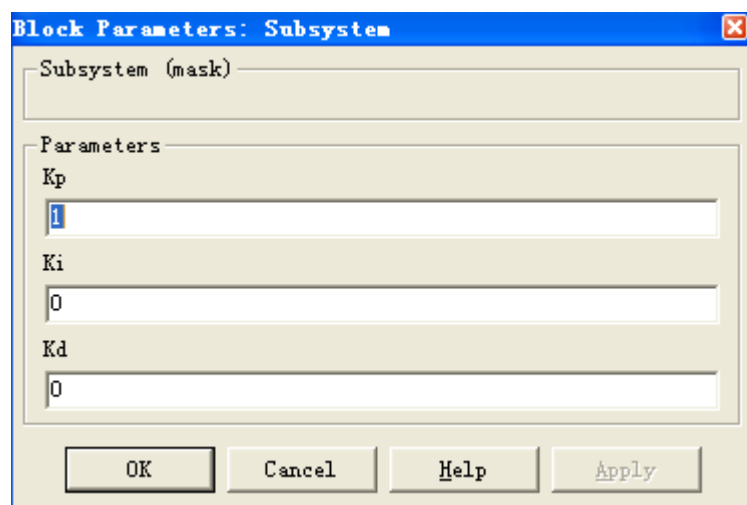


图3-40 PID控制器参数设置窗口

先设置PID控制器为P控制器，令 $K_p = 5, K_i = 0, K_d = 0$ ，得到以下仿真结果：

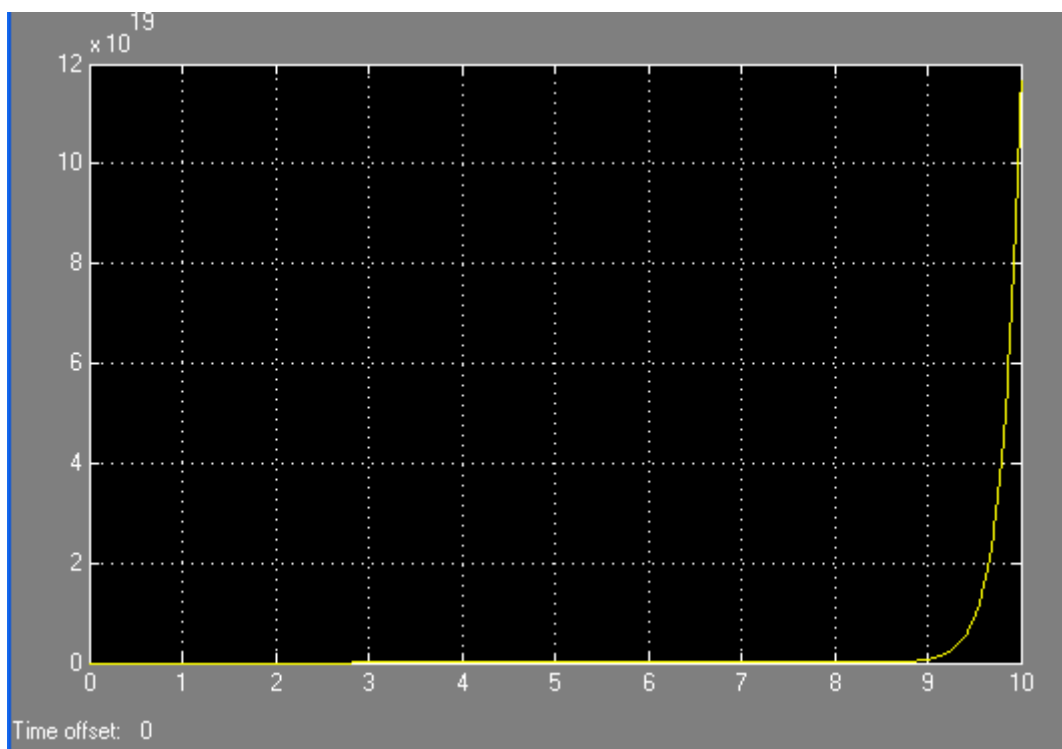


图3-41 摆杆角度响应曲线

从图 3-41 中可以看出，控制曲线不收敛，因此增大控制量， $K_p = 30, K_i = 0, K_d = 0$ ，得到以下仿真结果：

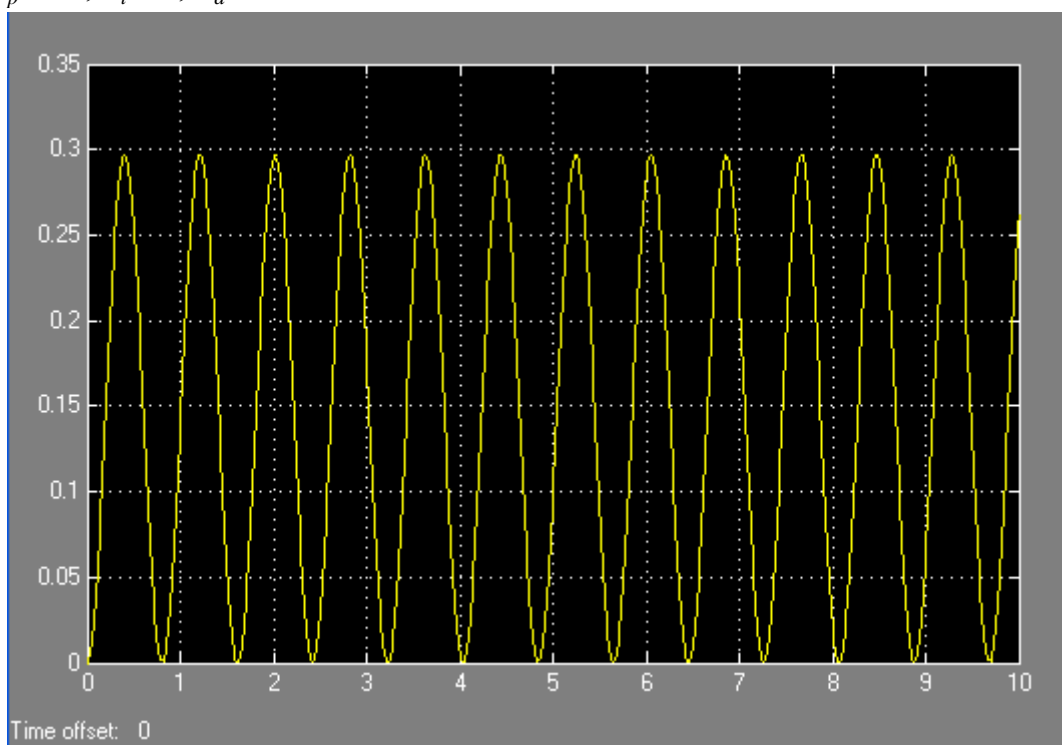


图3-42 改变控制量后摆杆角度响应曲线

从图中可以看出，闭环控制系统持续振荡，周期约为0.8s。为消除系统的振荡，增加微分控制参数 K_d ，令 $K_p = 30, K_i = 0, K_d = 2.5$ 。

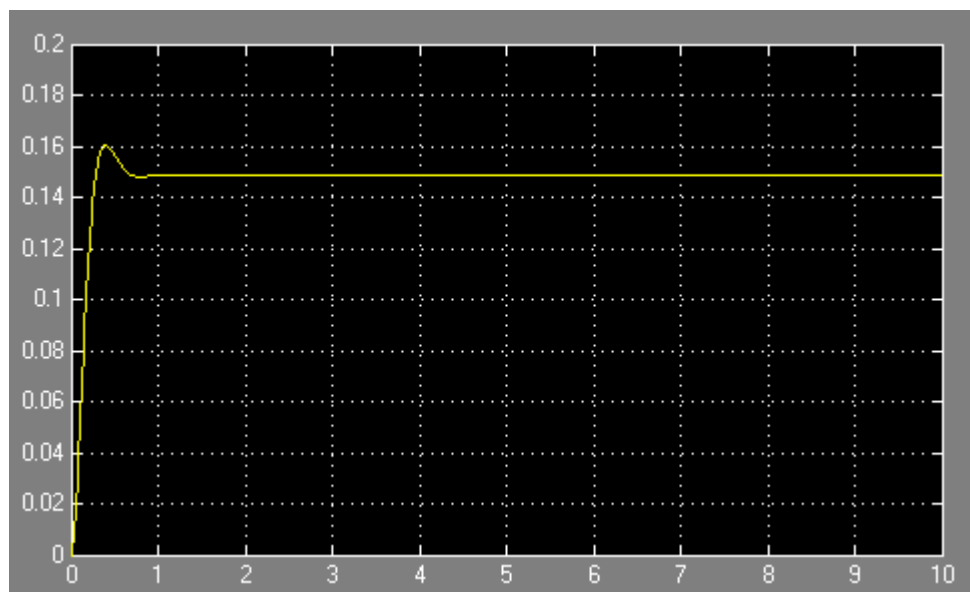


图3-43 增加微分控制参数后摆杆角度响应曲线

从上面仿真结果可以看出，系统在1秒内达到平衡，系统稳态误差也比较小，此时的控制参数仅供实验者参考，实验者可以在此基础上继续优化PID参数。

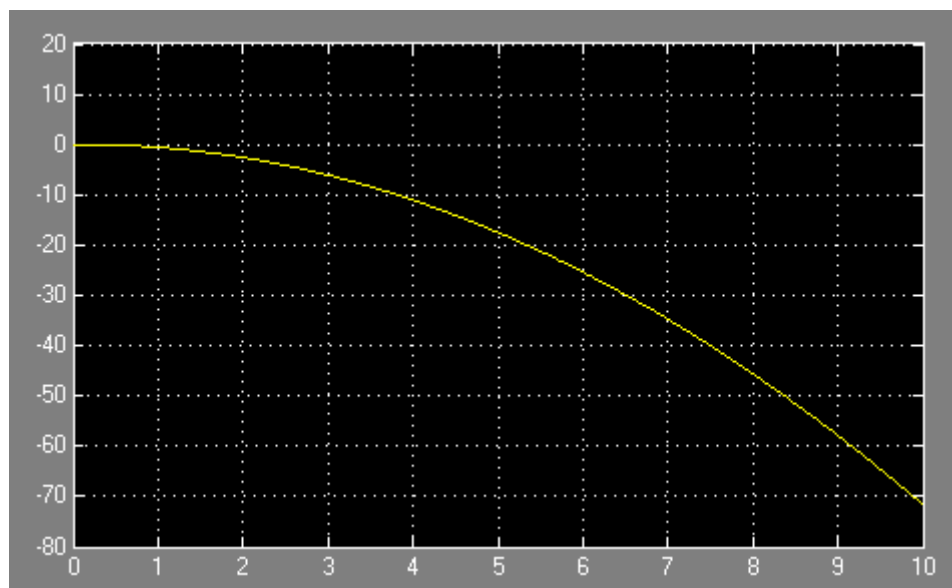


图3-44 施加PID控制后小车位置响应曲线

可以看出，由于PID控制器为单输入单输出系统，所以只能控制摆杆的角度，并不能控制小车的位置，所以小车会往一个方向运动，PID控制分析中的最后一段，若是想控制电机的位置，使得倒立摆系统稳定在固定位置附近，那么还需要设计位置PID闭环。

4.3 Simulink实时控制实验

鼠标双击主界面上的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号4，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现下图所示界面。

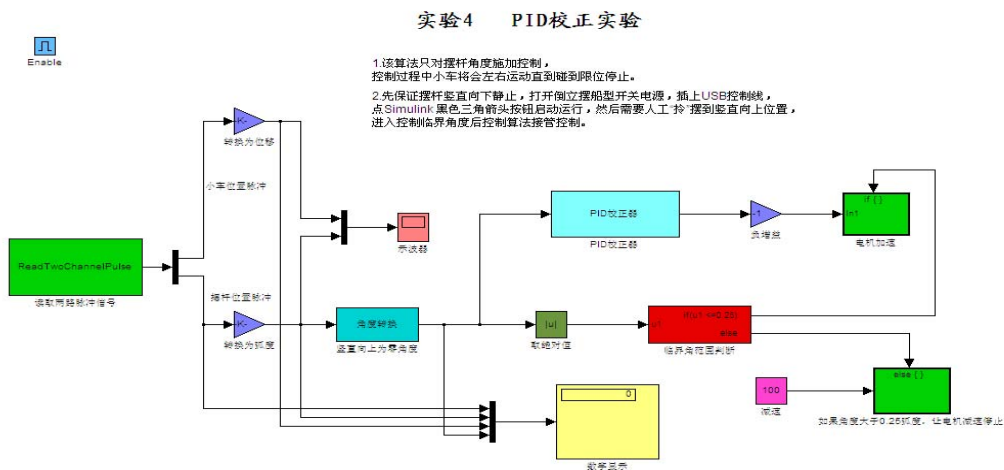


图3-45 实验4 PID校正实验

打开实验箱，将USB数据线和电源线取出，确定实验箱上的电源开关是关闭的，然后把数据线与电脑USB接口连接，电源插头插入插座。把小车推到导轨中间位置，打开实验箱上的电源开关，此时，小车就推不动了，因为电机已经上伺服了。

运行前查看是否为自己设计好的PID校正器，并确定保证摆杆此时竖直向下。不用编译链接，直接单击“▶”按钮，用手捏住摆杆顶端（不要抓住中部或下部），慢慢地提起，到接近竖直方向时放手，当摆杆与竖直向上的方向夹角小于0.25弧度时，进入稳摆范围，可以观察到，摆杆直立不倒，小车会向着一个方向运动直到撞到限位开关停下来，然后单击“■”停止实验。

注：由于系统采用近似线性模型，忽略了一些非线性及外界干扰的作用，所以实物控制与仿真有一定差别。

5 状态空间极点配置控制实验

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出的系统，控制器设计时一般需要有关被控对象的较精确模型，现代控制理论主要是依据现代数学工具，将经典控制理论的概念扩展到多输入多输出系统。极点配置法通过设计状态反馈控制器将多变量系统的闭环系统极点配置在期望的位置上，从而使系统满足瞬态和稳态性能指标。前面我们已经得到了倒立摆系统的比较精确的动力学模型，下面我们针对直线型一级倒立摆系统应用极点配置法设计控制器。

5.1 状态空间分析

对于控制系统

$$\dot{X} = AX + Bu$$

式中：

X —状态向量（ n 维）；

u —控制向量；

A — $n \times n$ 常数矩阵；

B — $n \times 1$ 常数矩阵；

选择控制信号为：

$$u = -KX$$

求解上式，得到：

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

方程的解为：

$$x(t) = e^{(A-BK)t} x(0)$$

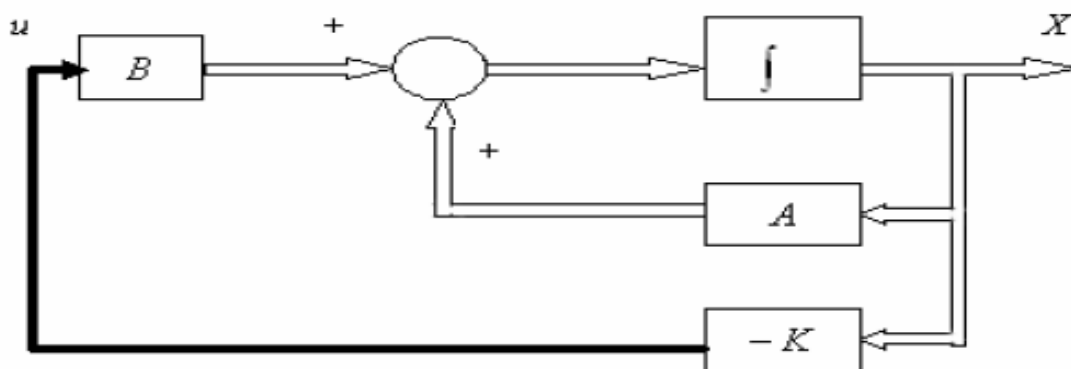


图3-46 状态反馈闭环控制原理图

可以看出，如果系统状态完全可控， K 选择适当，对于任意的初始状态，当 t 趋于无穷时，都可以使 $x(t)$ 趋于0。

极点配置设计步骤：

- 1、检验系统的可控性条件；
- 2、从矩阵 A 的特征多项式 $|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$ 来确定 a_1, a_2, \cdots, a_n 的值；
- 3、确定使状态方程变为可控标准型的变换矩阵 T ：

$$T = MW$$

其中 M 为可控性矩阵，

$$M = [B : AB : A^{n-1}B]$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 4、利用所期望的特征值，写出期望的多项式：

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

并确定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的值。

- 5、需要的状态反馈增益矩阵 K 由以下方程确定：

$$K = [\alpha_n - a_n : \alpha_{n-1} - a_{n-1} : \cdots : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1] T^{-1}$$

5.2 状态空间极点配置

前面我们已经得到了直线一级倒立摆的状态空间模型，以小车加速度作为输入的系统状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 48.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4.9 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

即：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 48.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4.9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于如上所述的系统，设计控制器，要求系统具有较短的调整时间（约3秒）和合适的阻尼（阻尼比 $\zeta=0.5$ ）。

下面采用极点配置的方法计算反馈矩阵。

1、检验系统可控性

由系统可控性分析可以得到，系统的状态完全可控性矩阵的秩等于系统的状态维数4，系统的输出完全可控性矩阵的秩等于系统输出向量的维数2，所以系统可控。

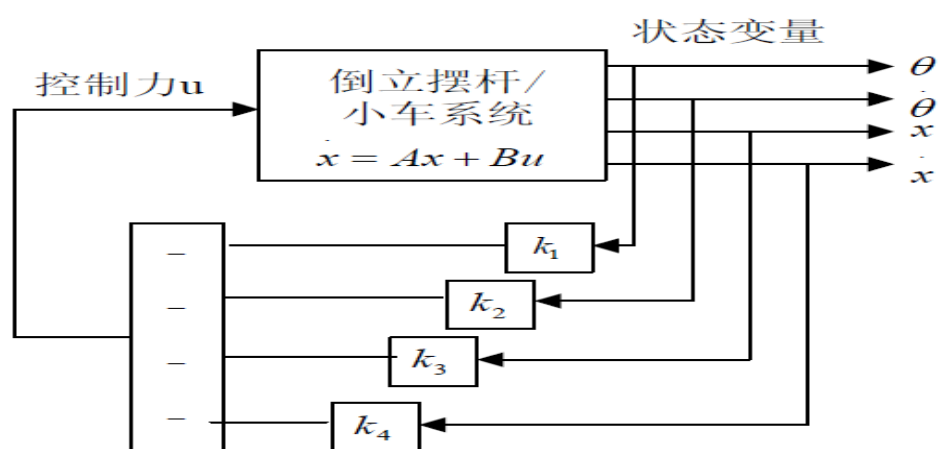


图3-47 倒立摆极点配置原理图

2、计算特征值

根据要求，并留有一定的裕量（设调整时间为2秒），我们选取期望的闭环极点 $s = \mu_i (i=1,2,3,4)$ 其中： $\mu_1 = -10, \mu_2 = -10, \mu_3 = -2 + j2\sqrt{3}, \mu_4 = -2 - j2\sqrt{3}$ 。 μ_3, μ_4 是一对具有 $\zeta = 0.5, \omega_n = 4$ 的主导闭环极点， μ_1, μ_2 位于主导闭环极点的左边，因此其影响较小，因此期望的特征方程为：

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) &= (s + 10)(s + 10)(s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3}) \\ &= s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600 \end{aligned}$$

因此可以得到：

$$\alpha_1 = 24, \alpha_2 = 196, \alpha_3 = 720, \alpha_4 = 1600$$

由系统的特征方程：

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & -48.3 & s \end{vmatrix} = s^4 - 48.3s^2$$

因此有 $a_1 = 0, a_2 = -48.3, a_3 = 0, a_4 = 0$ 。

系统的反馈增益矩阵为：

$$K = [\alpha_n - a_n : \alpha_{n-1} - a_{n-1} : \dots : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1] T^{-1}$$

3、确定使状态方程变为可控标准型的变换矩阵 T ：

$$T = MW$$

其中：

$$\begin{aligned} M &= [B : AB : A^2B : A^3B] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.9 & 0 & 236.67 \\ 4.9 & 0 & 236.67 & 0 \end{bmatrix} \\ W &= \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -48.3 & 0 & 1 \\ -48.3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以：

$$T = MW = \begin{bmatrix} -48.3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -48.3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.9 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0207 & 0 & 0.0042 & 0 \\ 0 & -0.0207 & 0 & 0.0042 \\ 0 & 0 & 0.2041 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2041 \end{bmatrix}$$

2、求状态反馈增益矩阵 K ：

$$\begin{aligned} K &= [\alpha_4 - a_4 : \alpha_3 - a_3 : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1] T^{-1} \\ &= [1600 \quad 720 \quad 196 + 48.3 \quad 24] \begin{bmatrix} -0.0207 & 0 & 0.0042 & 0 \\ 0 & -0.0207 & 0 & 0.0042 \\ 0 & 0 & 0.2041 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2041 \end{bmatrix} \\ &= [-33.1263 \quad -14.9068 \quad 56.6176 \quad 7.9402] \end{aligned}$$

得到控制量： $u = KX = -33.1263 x - 14.9068 \dot{x} + 56.6176 \theta + 7.9402 \dot{\theta}$

以上计算可以采用 MATLAB 编程计算, 计算程序如下：

```
>> clear;
A=[ 0 1 0 0;
    0 0 0 0;
    0 0 0 1;
    0 0 48.3 0];
B=[ 0 1 0 4.9]';
C=[ 1 0 0 0;
    0 0 1 0];
D=[ 0 0 ]';
J=[ -10 0 0 0;
    0 -10 0 0;
    0 0 -2-2*sqrt(3)*i 0;
    0 0 0 -2+2*sqrt(3)*i];
pa=poly(A);
pj=poly(J);
M=[B A*B A^2*B A^3*B];
W=[ pa(4) pa(3) pa(2) 1;
    pa(3) pa(2) 1 0;
    pa(2) 1 0 0;
    1 0 0 0];
T=M*W;
K=[pj(5)-pa(5) pj(4)-pa(4) pj(3)-pa(3) pj(2)-pa(2)]*inv(T)

K =

-33.1263 -14.9068 56.6176 7.9402
```


5.3 Simulink 仿真实验

在MATLAB Simulink下对系统进行仿真。

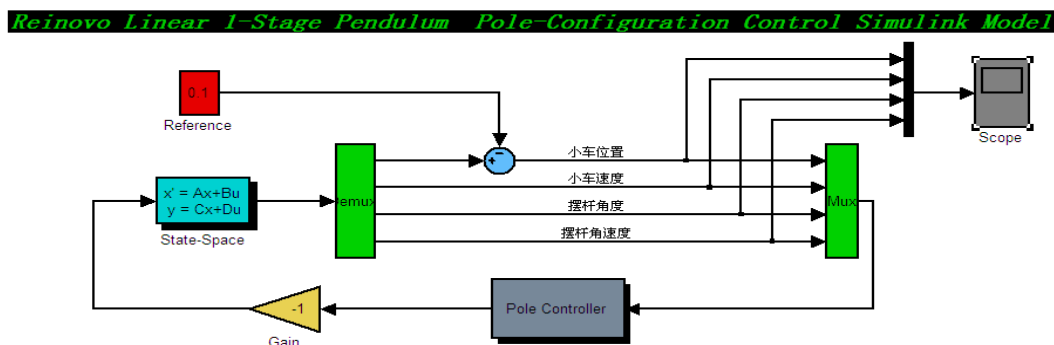


图3-48 直线一级倒立摆极点配置控制仿真模型

双击“State-Space”模块打开直线一级倒立摆的模型设置窗口如下:

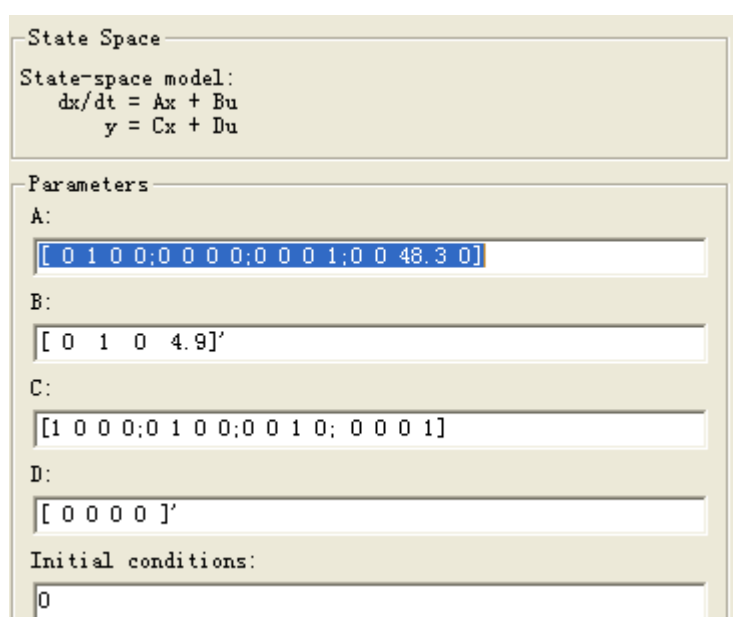


图3-49 系统状态空间模型设置窗口

把参数A, B, C, D 的值设置为实际系统模型的值。

双击“Pole Controller”模块打开极点配置控制器参数的设置窗口:

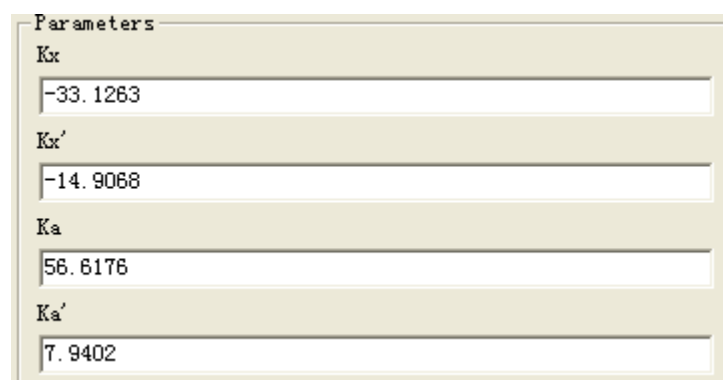


图3-50 反馈增益矩阵输入窗口

把上面计算得到的反馈增益矩阵K输入。

设置好各项参数后，点击“▶”运行仿真，得到仿真结果：

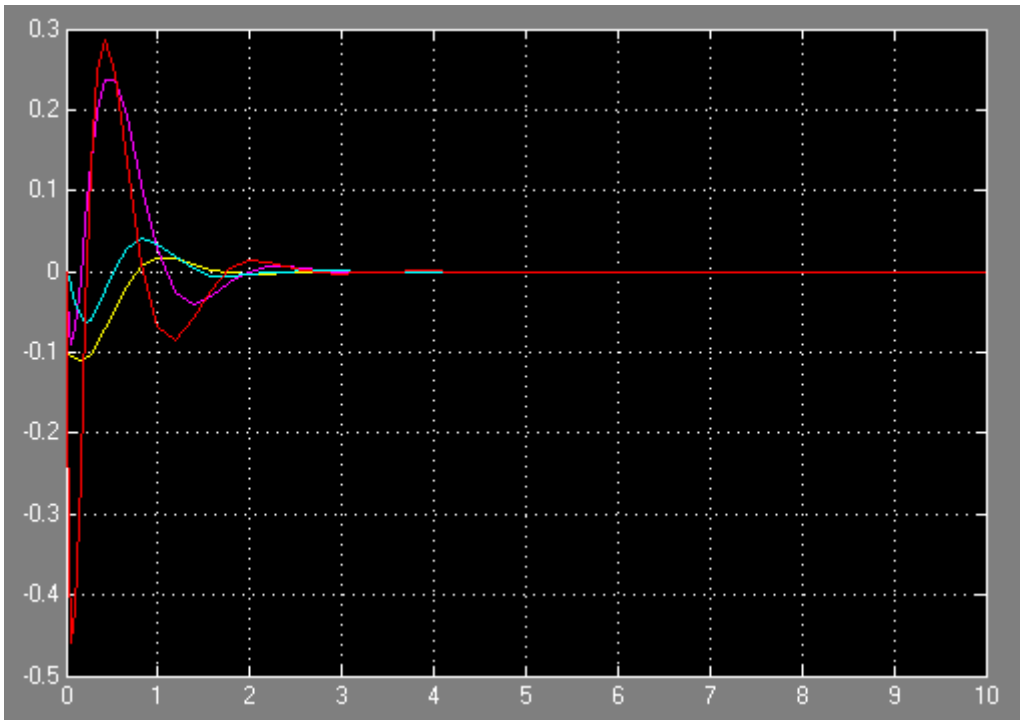


图3-51 直线一级倒立摆极点配置控制仿真图

从图3-51可以看出，在存在干扰的情况下，系统在3秒内基本上可以恢复到新的平衡位置，小车平衡在指定位置。实验者可以修改期望的性能指标，进行新的极点配置。

5.4 Simulink实时控制实验

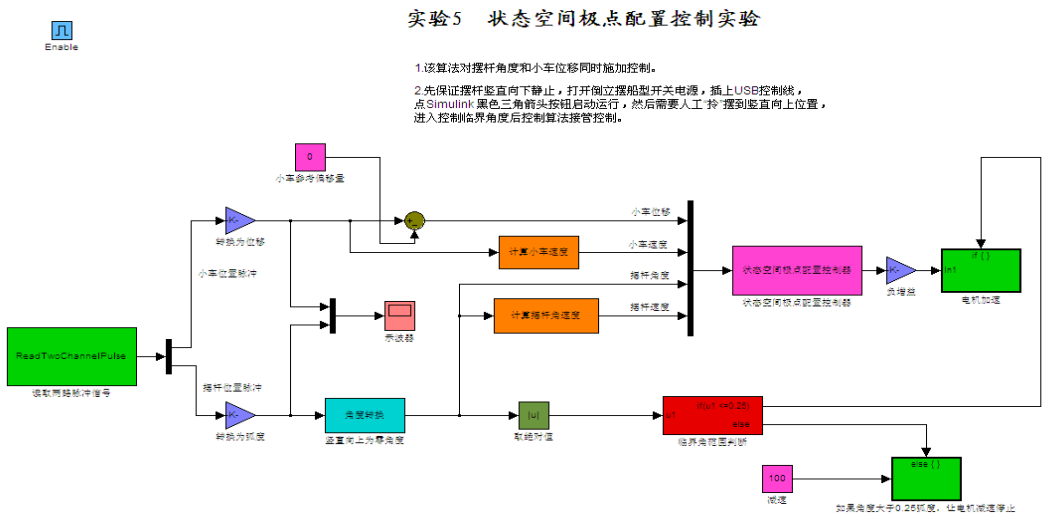


图 3-52 实验 5 状态空间极点配置控制实验

鼠标双击主界面上的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号5，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现上图所示界面。

运行前查看是否为自己设计好的极点配置控制器，并确定保证摆杆此时竖直向下。不用编译链接，直接单击“▶”按钮，用手捏住摆杆顶端（不要抓住中部或下部），慢慢地提起，到接近竖直方向时放手，当摆杆与竖直向上的方向夹角小于0.25弧度时，进入稳摆范围，可以观察到，摆杆直立不倒，小车稳摆在初始位置，然后单击“■”停止实验。

注：由于系统采用近似线性模型，忽略了一些非线性及外界干扰的作用，所以实物控制与仿真有一定差别。

6 LQR 控制实验

前面我们已经得到了直线一级倒立摆系统的比较精确的动力学模型，并对系统的稳定性与可控性进行了分析，下面我们针对直线一级倒立摆系统应用LQR法设计与调节控制器，控制摆杆保持竖直向上平衡的同时，跟踪小车的位置。

6.1 LQR控制分析

LQR控制器是应用线性二次型最优控制原理设计的控制器。它的任务在于，当系统状态由于任何原因偏离了平衡状态时，能在不消耗过多能量的情况下，保持系统状态各分量仍接近于平衡状态。线性二次型最优控制研究的系统是线性的或可线性化的，并且性能指标是状态变量和控制变量的二次型函数的积分。它的解很容易获得，并且可以达到非常好的控制效果，因此在工程上有广泛的应用。

先理解二次型性能指标（泛函）。

二次型性能指标一般形式如下：

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] + \frac{1}{2} x^T(t_f)Fx(t_f)$$

其中， Q — $n \times n$ 维半正定状态加权矩阵；

R — $r \times r$ 维正定控制加权矩阵；

F — $n \times n$ 维半正定终端加权矩阵；

在工程实际中， Q 和 R 是对称矩阵，常取对角阵。

最优控制的目标就是使 $J \rightarrow \min$ ，则其实质在于，用不大的控制来保持较小的误差，从而达到能量和误差综合最优的目的。

6.2 LQR控制器设计

系统状态方程为：

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du\end{aligned}\quad (1)$$

二次型性能指标函数：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [X^T Q X + U^T R U] dt \quad (2)$$

其中：加权矩阵Q和R是用来平衡状态变量和输入向量的权重，Q是半正定矩阵，R是正定矩阵。X是n维状态变量，U是r维输入变量，Y为m维输出向量，A，B，C，D 分别是 $n \times n$ ， $n \times r$ ， $m \times n$ ， $m \times r$ 维常数矩阵。如果该系统受到外界干扰而偏离零状态，应施加怎样的控制 U^* 才能使得系统回到零状态附近并同时满足J达到最小，那么这时的 U^* 就称之为最优控制。由最优控制理论可知，使式(2)取得最小值的最优控制律为：

$$U^* = R^{-1} B^T P X = -K X \quad (3)$$

式中，P就是Riccati方程的解，K是线性最优反馈增益矩阵。这时求解Riccati代数方程：

$$PA + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4)$$

就可获得P值以及最优反馈增益矩阵K值。

$$K = R^{-1} B^T P \quad (5)$$

前面我们已经得到了直线一级倒立摆系统的系统状态方程：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\dot{\phi}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 48.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4.9 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,\end{aligned}$$

可知：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 48.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4.9 \end{bmatrix}$$

四个状态量 $x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}$ 分别代表小车位移、小车速度、摆杆角度、摆杆角速度, 输出 $y = [x, \phi]'$ 包括小车位置和摆杆角度。

一般情况下: R 增加时, 控制力减小, 角度变化减小, 跟随速度变慢。矩阵 Q 中某元素相对增加, 其对应的状态变量的响应速度增加, 其他变量的响应速度相对减慢, 如: 若 Q 对应于角度的元素增加, 使得角度变化速度减小, 而位移的响应速度减慢; 若 Q 对应于位移的元素增加, 使得位移的跟踪速度变快, 而角度的变化幅度增大。

首先选取小车位置权重 $Q_{11}=500$, 摆杆角度权重 $Q_{33}=500$, 一般选取 $R=1$ 。下面通过 Matlab 中的 lqr 函数求解反馈矩阵 K 并对系统进行仿真。

Matlab 求反馈矩阵 K 的程序如下:

```
clear;
A=[ 0 1 0 0;
    0 0 0 0;
    0 0 0 1;
    0 0 48.3 0];
B=[ 0 1 0 4.9]';
C=[ 1 0 0 0;
    0 0 1 0];
D=[ 0 0 ]';
Q1=[500,0,500,0];
Q=diag(Q1);
R = 1;
K = lqr (A,B,Q,R)
Ac = [(A-B*K)]; Bc = [B]; Cc = [C]; Dc = [D];
T=0:0.005:5;
U=0.2*ones(size(T));
[Y,X]=lsim(Ac,Bc,Cc,Dc,U,T);
plot(T,X(:,1),'-');hold on;
plot(T,X(:,2),'-');hold on;
plot(T,X(:,3),'-');hold on;
plot(T,X(:,4),'-');hold on;
legend('CartPos','CartSpd','PendAng','PendSpd')

K =

-22.3607 -14.7524 57.8264 7.6733
```

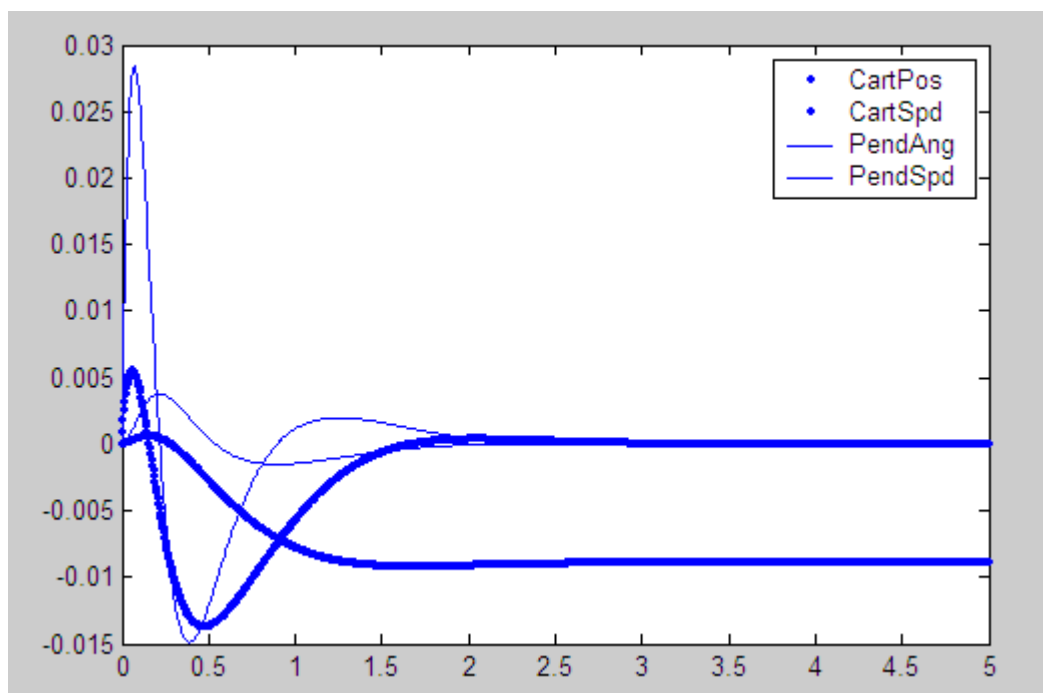


图3-53 系统阶跃响应曲线

从图中可以看出，响应的超调量很小，但稳定时间和上升时间偏大，实验者可以通过修改权重矩阵 Q (Q_{11} 和 Q_{33}) 的值 (Q 值越大，系统的抗干扰能力越强，调整时间越短，但是 Q 的值不能过大，因为对于实际离散控制系统，过大的控制量会引起系统震荡)，将修改 Q 值后的程序运行可以得到不同的反馈控制参数 K ，并分析此时的系统阶跃响应曲线以得到最优的控制参数。

6.3 Simulink 仿真实验

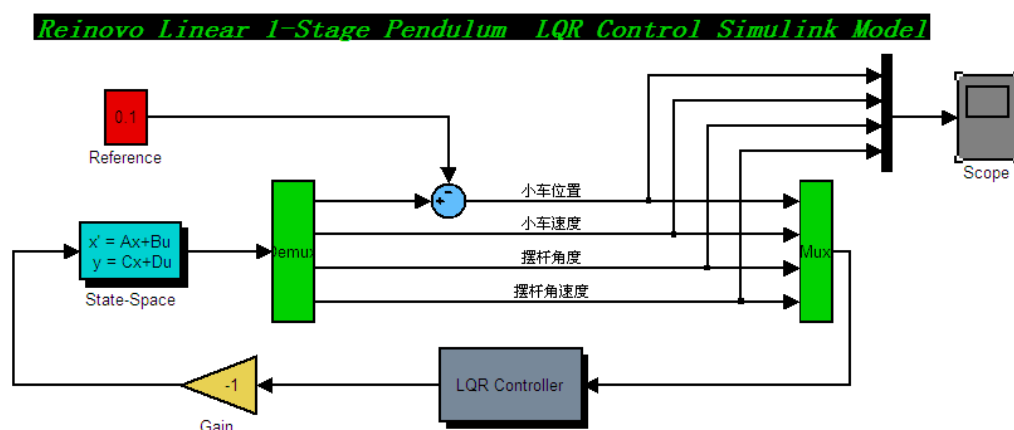


图3-54 直线一级倒立摆LQR控制仿真模型

双击“State-Space”模块打开直线一级倒立摆的模型设置窗口如下：

State Space

State-space model:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Parameters

A:

[0 1 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1; 0 0 48.3 0]

B:

[0 1 0 4.9]'

C:

[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]

D:

[0 0 0 0]'

Initial conditions:

0

图3-55 系统状态空间模型设置窗口

把参数A, B, C, D 的值设置为实际系统模型的值。

双击“LQR Controller”模块打开LQR控制器参数的设置窗口：

Subsystem (mask)

Parameters

Kx

-22.3607

Kx'

-14.7524

Ka

57.8264

Ka'

7.6733

图3-56 反馈增益矩阵输入窗口

把上面计算得到的反馈增益矩阵K输入。

设置好各项参数后，点击“▶”运行仿真，得到仿真结果：

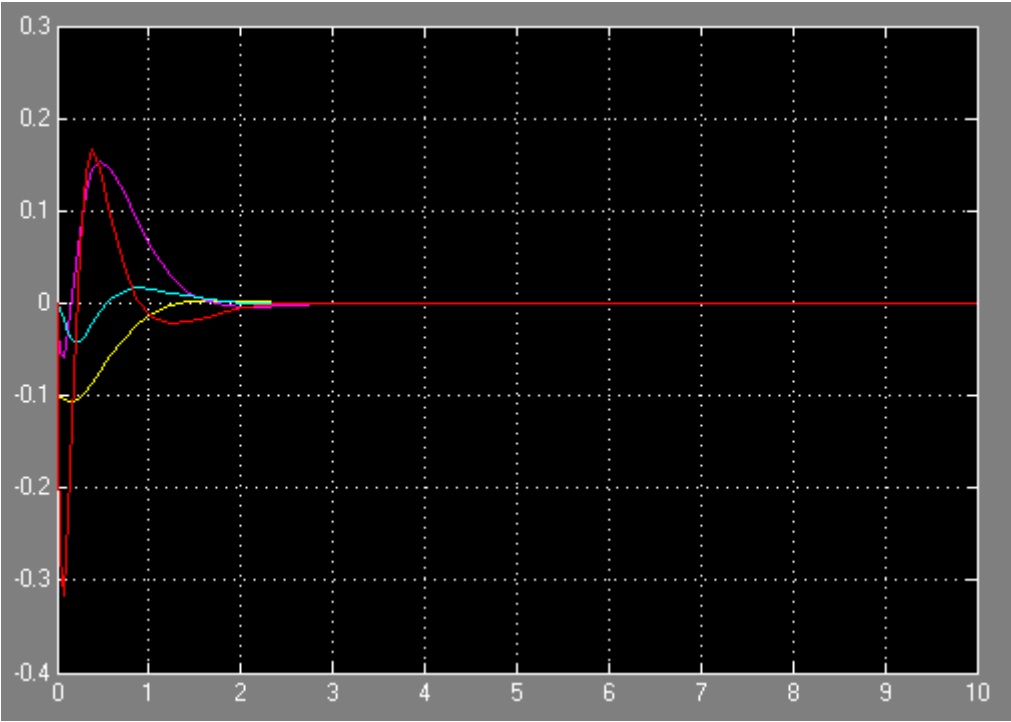


图3-57 直线一级倒立摆LQR控制仿真结果

从图3-57可以看出，在给定小车位置干扰后，系统在3秒内可以达到新的平衡，小车平衡到指定的位置，摆杆保持静止下垂的状态。实验者可以将得到的不同的反馈控制参数K输入到仿真模型中进行仿真，并观察仿真结果。

6.4 Simulink实时控制实验

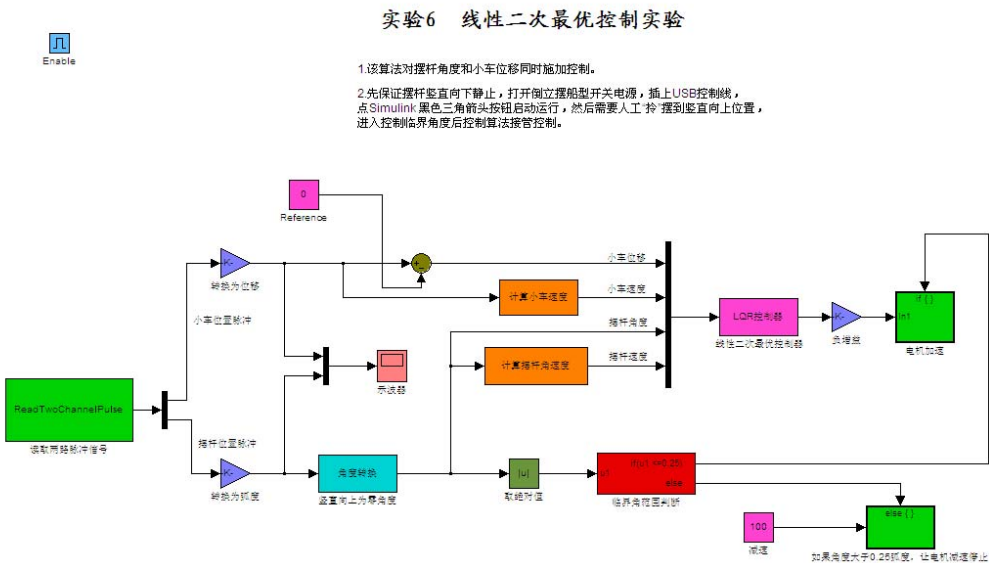


图3-58 实验6 LQR控制实验

鼠标双击主界面上的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号6，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现上图所示界面。

打开实验箱，将USB数据线和电源线取出，确定实验箱上的电源开关是关闭的，然后把数据线与电脑USB接口连接，电源插头插入插座。把小车推到导轨中间位置，打开实验箱上的电源开关，此时，小车就推不动了，因为电机已经上伺服了。

运行前查看是否为自己设计好的LQR控制器，并确定保证摆杆此时竖直向下。不用编译链接，直接单击“▶”按钮，用手捏住摆杆顶端（不要抓住中部或下部），慢慢地提起，到接近竖直方向时放手，当摆杆与竖直向上的方向夹角小于0.25弧度时，进入稳摆范围，可以观察到，摆杆直立不倒，小车稳摆在初始位置，然后单击“■”停止实验。

注：由于系统采用近似线性模型，忽略了一些非线性及外界干扰的作用，所以实物控制与仿真有一定差别。

7 LQR 控制(Bang-Bang 自摆起)实验

倒立摆系统自摆起控制目标:通过控制小车运动,将摆杆从自由下垂状态摆到倒置平衡位置,并使系统能保持摆杆倒置状态,具有一定的抗干扰能力,同时还要控制小车回到初始零位附近,使整个系统处于动态平衡状态。该过程分为两个阶段:摆起控制与稳摆控制。两者模型的差异性决定了两个过程中控制方法的不同,要使倒立摆的整体性能好,两者之间的切换控制尤为重要。

7.1 基于Bang-Bang反馈的起摆算法

我们可将起摆分为以下四个阶段（定义摆杆自然下垂位置 $\phi=0$,以逆时针方向为正，箭头代表摆杆运动方向）。

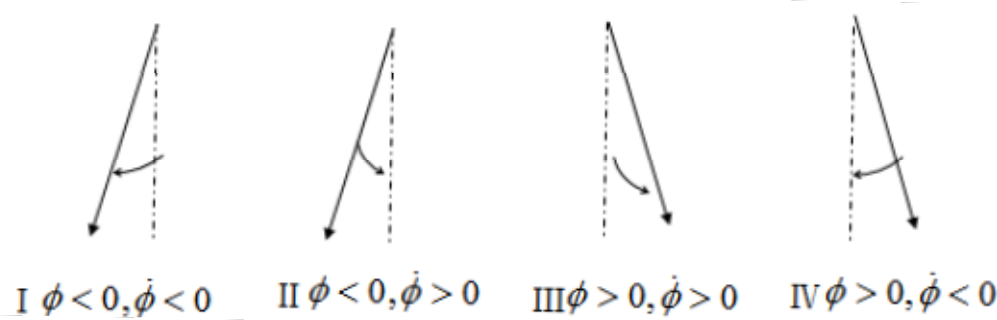


图 3-59 倒立摆能量起摆过程

在初始时刻，小车位于导轨中心，摆杆自然下垂。当进行起摆实验时，先向负方向给小车一个较大的力（小车有加速度），使摆杆运动，随后紧接着令小车停止，摆杆会在惯性的作用下，继续沿着与小车连接处的转轴向上运动（I），达到最高点后，摆杆速度为零，在重力的作用下沿摆杆的轴心自动下落（II），这时给小车施加一个相反的作用力，小车反向运动的同时通过连接轴给摆杆一个反向的力。当再次到达初始点（ $\phi=0$ ）时，令小车制动，摆杆此时的速度不为零，在惯性的作用下继续运动，此时 $\phi<0$ （III）。当 $\phi<0, \dot{\phi}=0$ 时，即摆杆达到负方向的最高点，在重力的作用下，摆杆回落，继续给小车施加负方向的力，直到 $\phi=0$ 下车制动（IV）。

反复以上动作，摆杆在小车驱动力的作用下，抛起的高度会不断增加，直到进入稳摆区域，切换到稳摆控制算法。

对以上的四种情况进行分析，可转化成控制算法：

- (1) $\phi=0, \dot{\phi}=0$, 控制量 $u=-nv$, 初始时刻

$$(2) \quad \phi \times \dot{\phi} < 0 \begin{cases} \phi > 0 & u = -nv \\ \phi < 0 & u = nv \end{cases}$$

$$(3) \quad \phi \times \dot{\phi} > 0 \quad u = 0$$

7.2 Simulink仿真实验

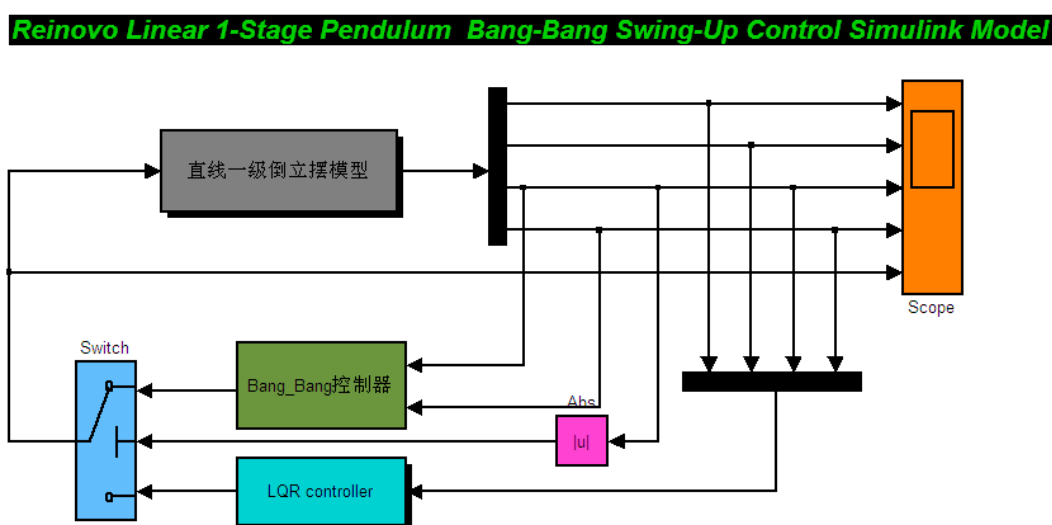


图3-60 直线一级倒立摆Bang-Bang自摆起仿真模型

其中“Bang-Bang控制器”为封装（Mask）后的Bang-Bang起摆控制器，如下图：

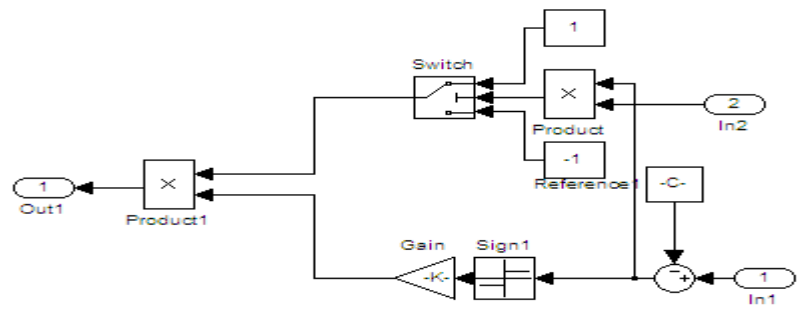


图3-61 Bang-Bang起摆控制器

“LQR Controller”为封装后的LQR控制器，双击该模块可以进行LQR参数设置：

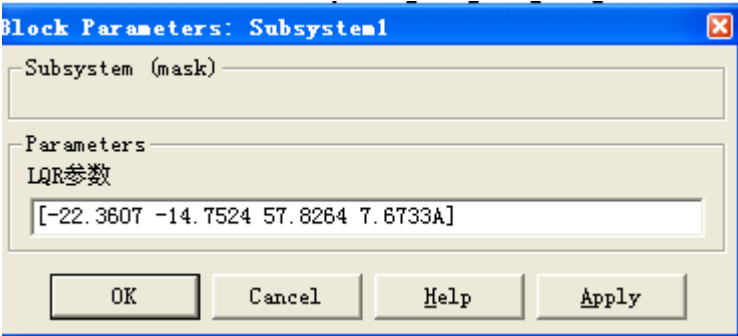


图3-62 LQR稳摆控制器

设置好各项参数后，点击“▶”运行仿真，得到仿真结果：

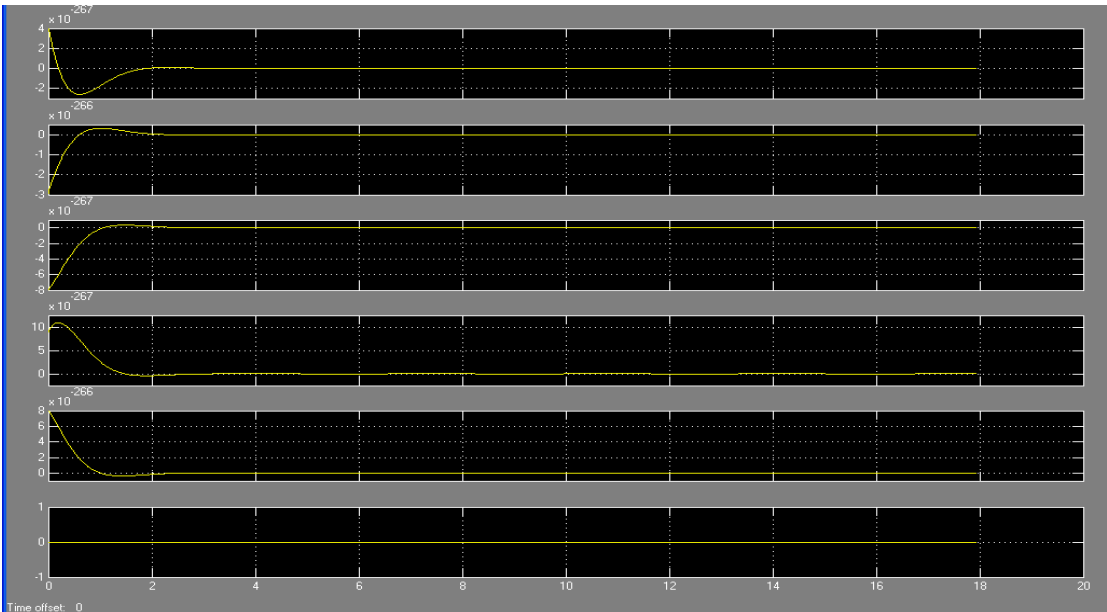


图3-63 Bang-Bang自摆起仿真结果

根据仿真结果我们可以看出，系统在2秒内起摆成功，2秒后由稳摆算法接管控制，系统可以很好的稳定，稳态误差较小。但在实物控制实验中系统是不可能在这这么短的时间内起摆成功的，仿真只是在理想状态下进行的，比如仿真时并不考虑导轨的长度，实物控制实验时还必须考虑安全问题，摆杆摆起的速度必须加以限制，所以仿真实验只是为了让实验者熟悉起摆算法，在此仅供参考。

7.3 Simulink实时控制实验

鼠标双击主界面上的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号7，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现下图所示界面。

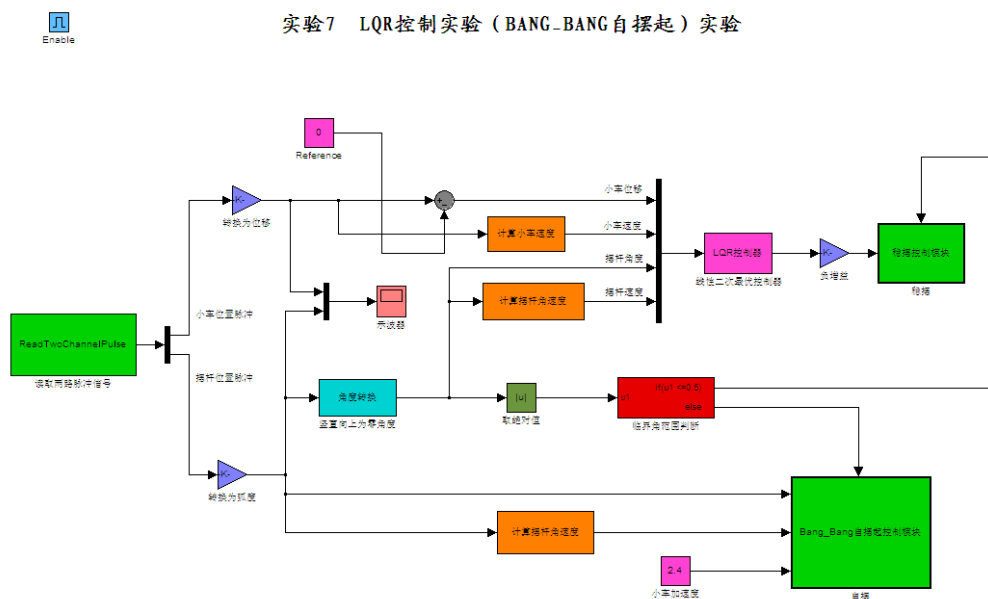


图3-64 实验7 LQR控制 (Bang-Bang自摆起) 实验

确定摆杆此时竖直向下。不用编译连接，直接单击“▶”按钮，倒立摆运行自摆起，当摆杆与竖直向上的方向夹角小于 0.5 弧度时（因为 Bang_Bang 控制要求导轨要长一些，而基于便携，我们设计的导轨要短，所以要在一个相对大的角度进度稳摆范围，来抵消掉对导轨长度的要求）进入稳摆范围，稳摆采用 LQR 控制算法。如果不能正常摆起，用户可根据实际情况修改小车加速度值直到正常摆起，可以观察到，摆杆直立不倒，小车会稳定在初始位置，一段时间后单击“■”停止仿真。双击打开“示波器”模块，观察得到的曲线图（上面为小车位移，下面为摆杆角度），分析原因，得到相应结论。

8 LQR 控制(能量自摆起)实验

8.1 基于能量反馈的起摆算法

取倒立摆自然静止状态为初始状态，摆杆从最低位置到最高位置，且速度减少到零，所需要的摆动能量为 $2mgl$ 。当倒立摆的摆杆稳定在倒立位置时，认为此时摆杆的能量为 $E_{\max} = 0$ ，当摆杆悬垂时， $E_0 = -2mgl$ 。

所谓的能量控制起摆就是在起摆过程中，保证摆杆的能量不断增加，从 E_0 增加到零，而且需要保证没有能量损失。当摆杆具有能量为零时，根据机械能守恒定律，摆杆在稳摆角度范围内，然后切换到稳摆控制程序，就完成了整个自摆起过程。

当摆杆自由转动（不受外力）时，摆杆本身的能量计算为：

$$E = mgl(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}(J + ml^2)\dot{\theta}^2 \quad (\text{逆时针方向为正})$$

摆杆本身的能量变化为：

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= mgl\dot{\theta} - (J + ml^2)\dot{\theta}\ddot{\theta} \\ \frac{dE}{dt} &= -ml\ddot{x}\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

为了保证在起摆过程中摆杆的能量不断增加，假设李亚普诺夫函数为 $V = E^2$ ，由于初始状态时摆杆的能量为 $E_0 = -2mgl$ ，而平衡时能量为零，所以要求：

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &< 0 \\ \frac{dV}{dt} &= 2E\frac{dE}{dt} = -2Eml\ddot{x}\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

取控制量 $u = kE\dot{\theta}\cos\theta$ 。其中 k 为比例常数。

为了保证系统的能量不断增加，则对于小车所受外力的方向应该由小车摆动到某一位置的角度 θ 和角速度 $\dot{\theta}$ 共同决定。同时，对小车所受力施加影响的还有 E ，由于小车所具有的能量由 E_0 增加到零，也即是能量大小的绝对值是在不断减小，并由于所受外力的大小也在不断减小，所以当摆杆甩到允许角度范围内时，摆杆的角速度 $\dot{\theta}$ 和小车的速度 \dot{x} 都不会太大，从而使得整个起摆过程比较平稳。

8.2 Simulink实验

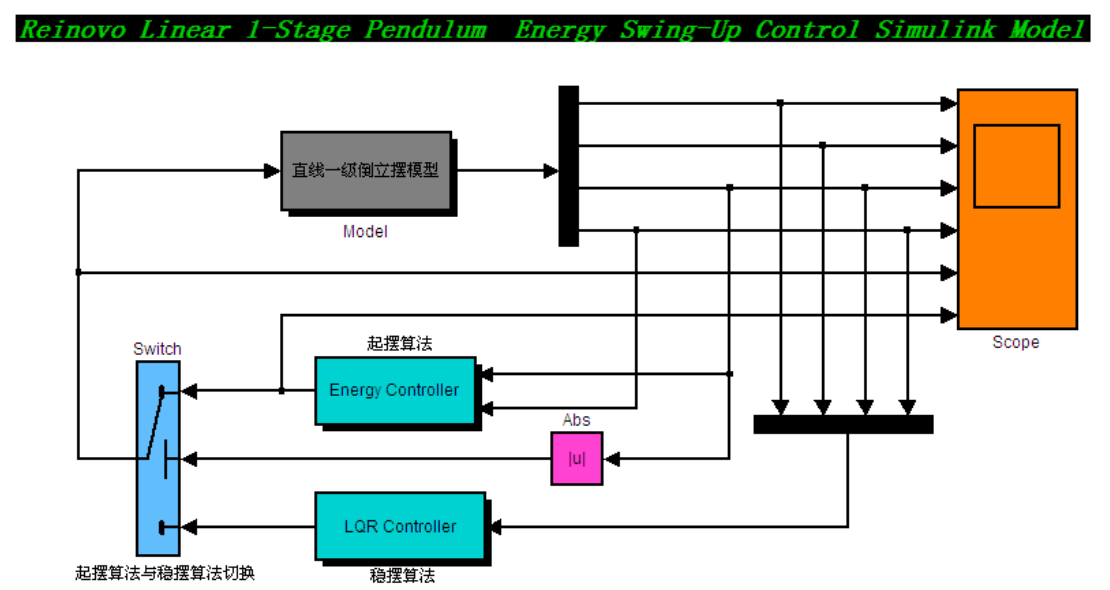


图3-65 直线一级倒立摆能量自摆起仿真模型

其中“Energy Controller”为封装（Mask）后的能量起摆控制器，如下图：

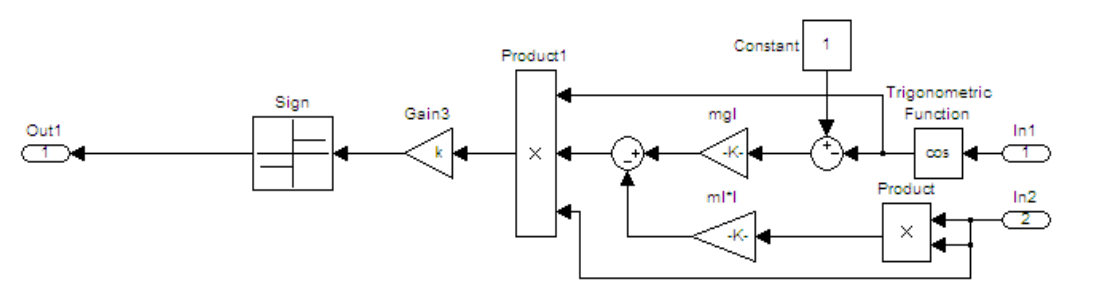


图3-66 能量起摆控制器

“LQR Controller”为封装后的LQR控制器，双击该模块可以进行LQR参数设置：

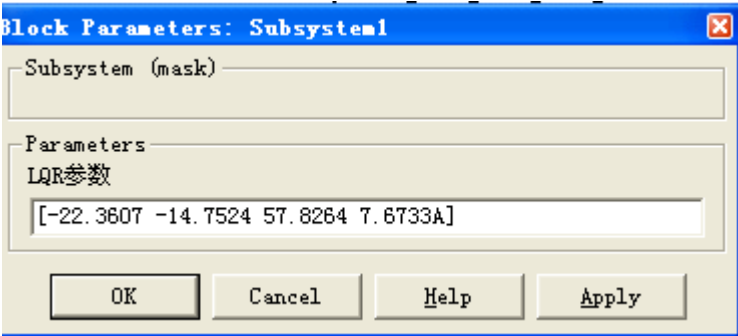


图3-67 LQR稳摆控制器

实验者根据实验7的步骤自行完成该仿真实验，并观察仿真效果。

鼠标双击主界面上的Select Experiment模块，在弹出的对话框中选择实验编号8，然后单击右侧对应的Enabled Subsystem模块后出现下图所示界面。

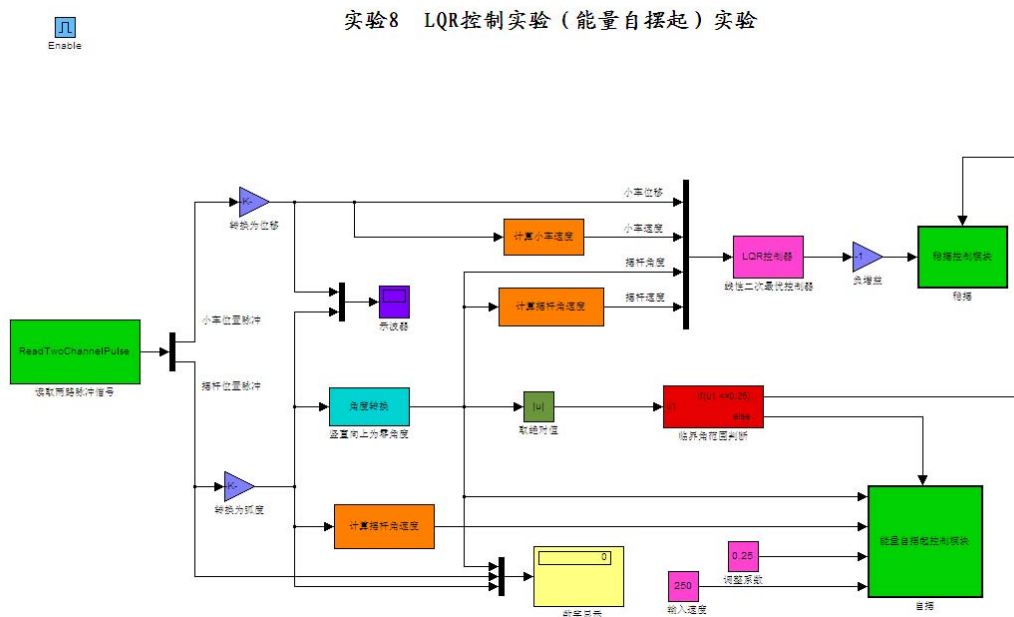


图3-68 实验8 LQR控制（能量自摆起）实验

同实验7的Bang_Bang自摆起实验步骤一样，在此就不再赘述。

注1：打开开关前，把小车尽量放在导轨靠左侧一些（因为设计的起摆往复运动次数较少，所以需要导轨稍长）。

注2：上图中右下角两个红色模块分别为下发的调整系数和电机的初始速度（单位R/min），使用者也可以自行设计自摆起控制器进行自摆起的控制。