分而治之篇：次序选择问题

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

问题背景：最小值查找

- 给定数组$A[1..16]$，寻找其中最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

问题背景：最小值查找

- 给定数组$A[1..16]$，寻找其中最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

- 依次扫描，记录最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

扫描

问题背景：最小值查找

- 给定数组$A[1..16]$，寻找其中最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

- 依次扫描，记录最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

扫描

问题：如何求得数组中第k小的元素？

问题定义

- 形式化定义

次序选择问题

Selection Problem

输入

- 包含n个不同元素的数组$A[1..n]$
- 整数$k(1 \le k \le n)$

问题定义

- 形式化定义

次序选择问题

Selection Problem

输入

- 包含n个不同元素的数组$A[1..n]$
- 整数$k(1 \leq k \leq n)$

输出

- 数组$A[1..n]$中第k小的元素$(1 \leq k \leq n)$

排序求解

- 数组排序
  - 求得所有元素的次序
  - 时间复杂度：$O(n\log n)$

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

排序

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	37	40	42	47	48	52

排序求解

- 数组排序
  - 求得所有元素的次序
  - 时间复杂度：$O(n\log n)$
- 选择元素
  - 求得**第8小**的元素
  - 时间复杂度：$O(1)$

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

排序

查找第8小元素

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	37	40	42	47	48	52

问题分析

- 数组排序
  - 求得所有元素的次序
  - 时间复杂度：$O(n\log n)$

第6小元素　第8小元素　第15小元素

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	37	40	42	47	48	52

问题分析

- 数组排序
  - 求得所有元素的次序
  - 时间复杂度：$O(n\log n)$

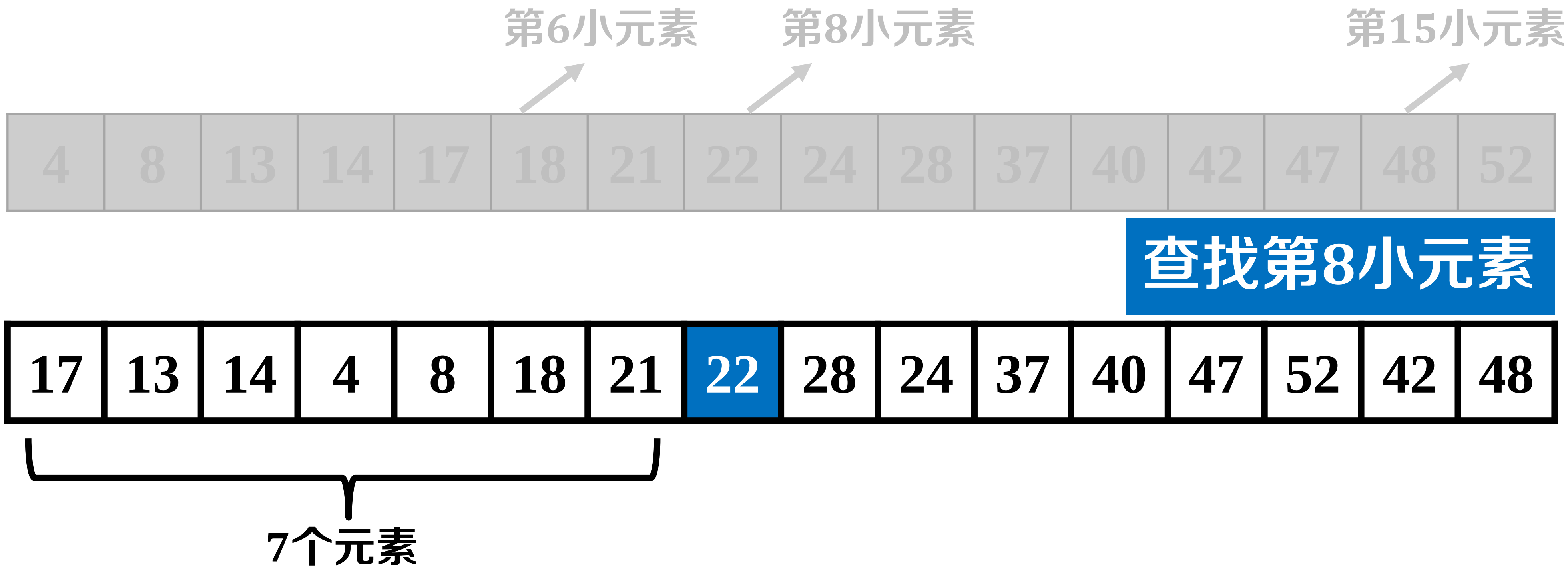
第6小元素　第8小元素　第15小元素

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	37	40	42	47	48	52

问题：是否有必要求得所有元素的次序？

问题分析

- 次序选择
  - 不必求得所有元素次序
  - 时间复杂度：$O(?)$



问题分析

- 次序选择
  - 不必求得所有元素次序
  - 时间复杂度：$O(?)$

第6小元素　第8小元素　第15小元素

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	37	40	42	47	48	52

查找第8小元素

17	13	14	4	8	18	21	22	28	24	37	40	47	52	42	48

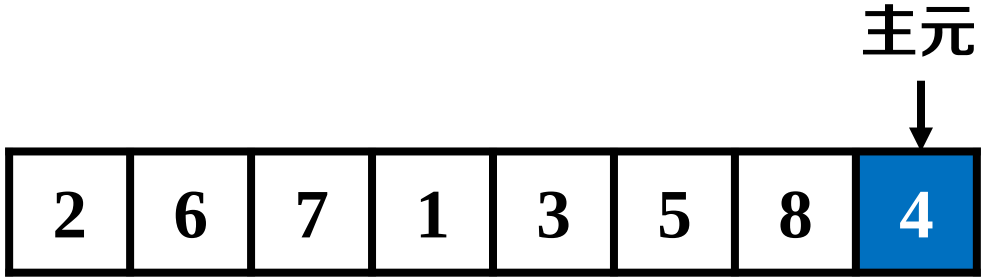
受启发于快速排序的数组划分

回顾与启发

2	6	7	1	3	5	8	4

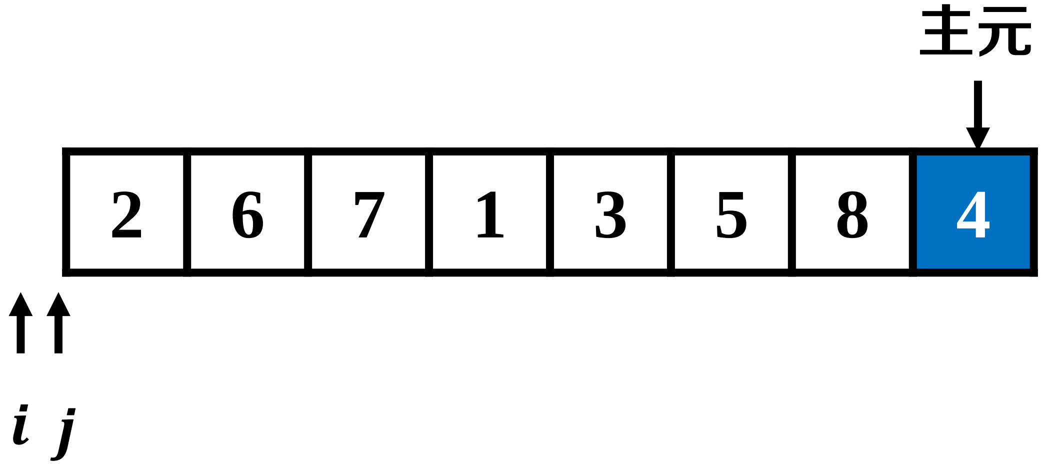
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）



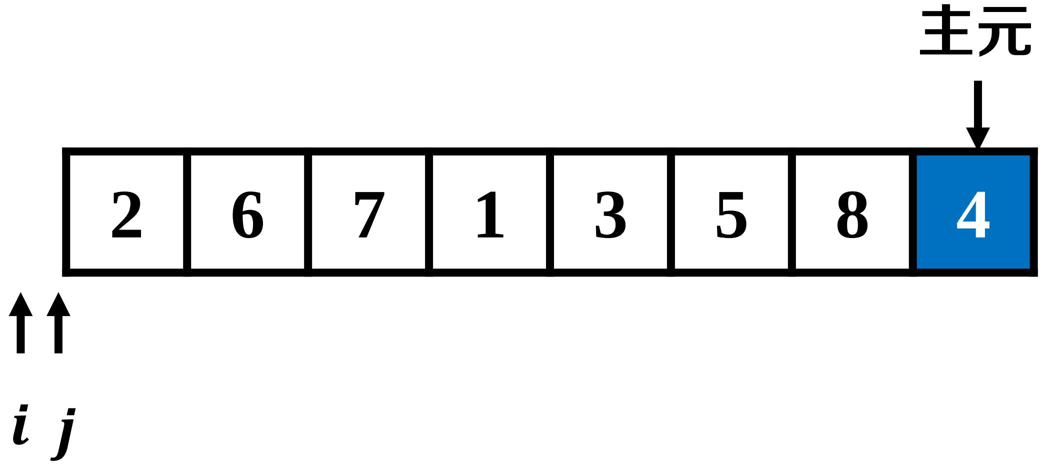
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i,j



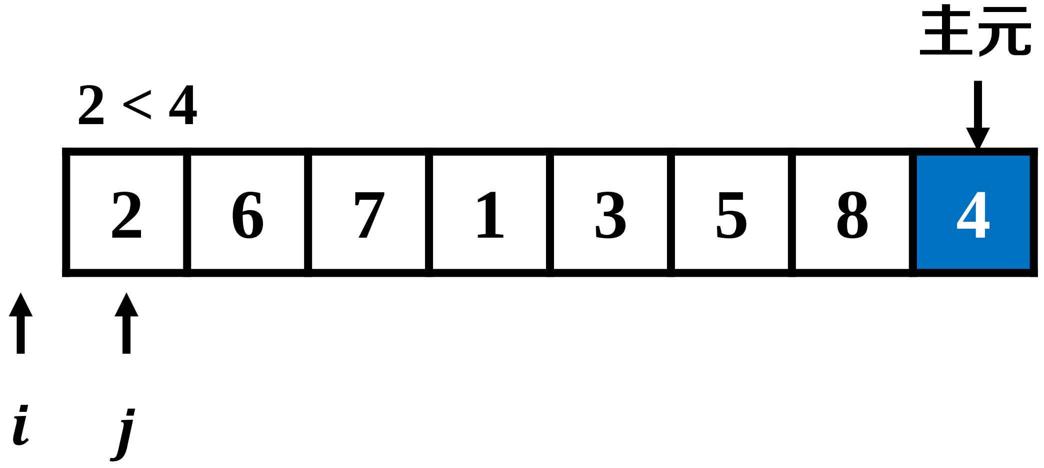
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



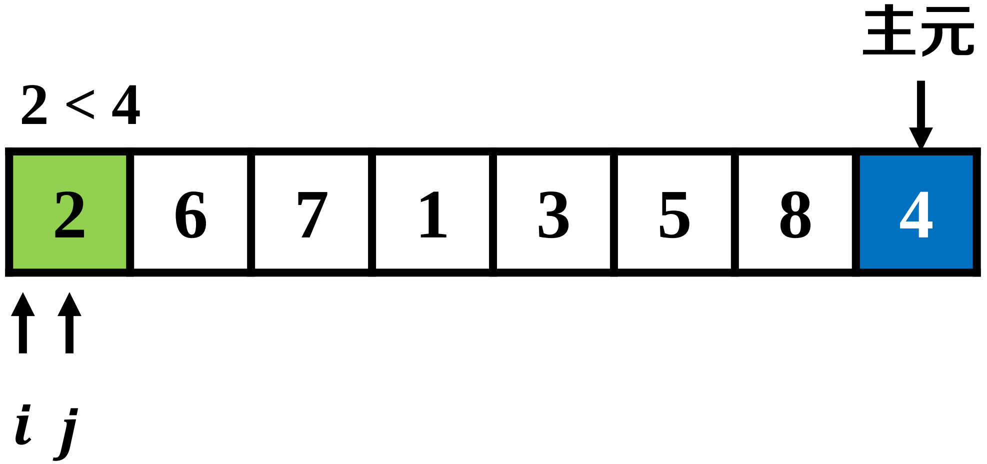
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



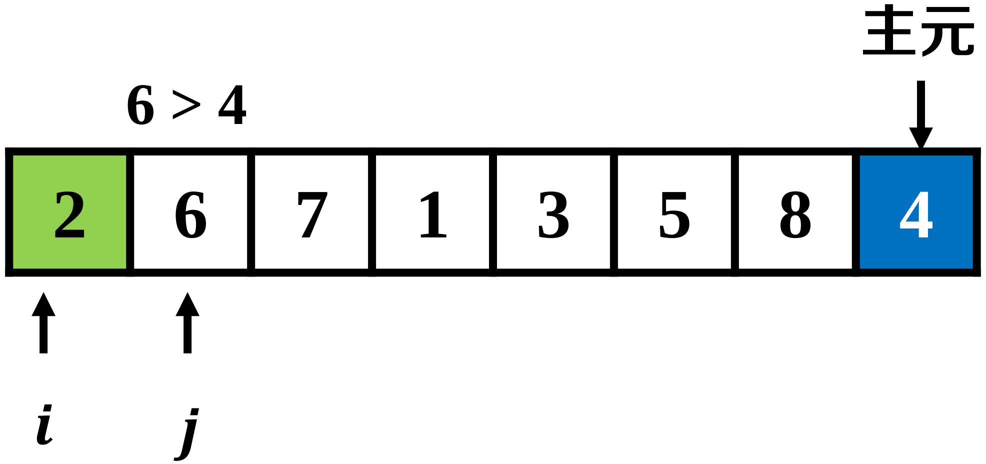
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



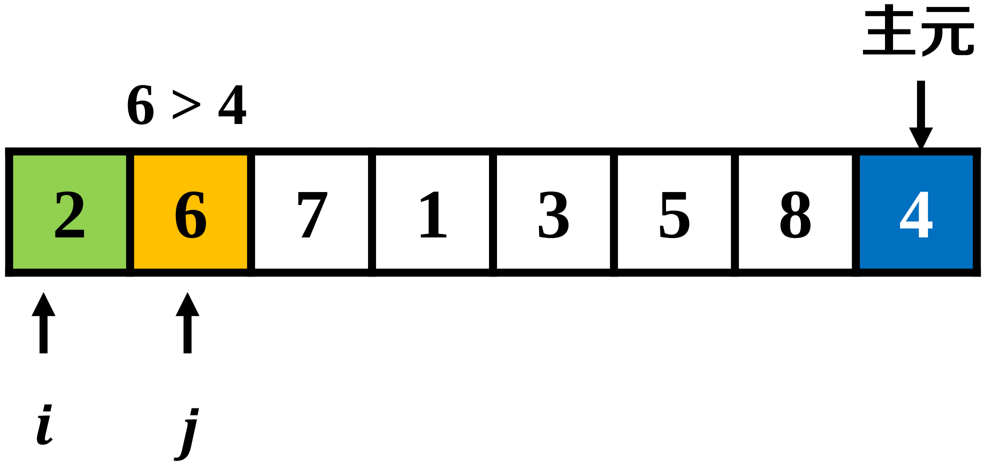
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



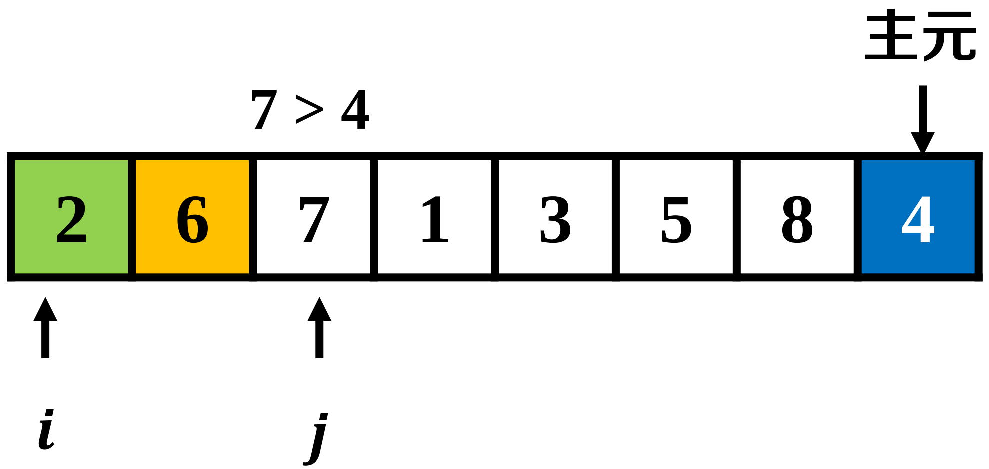
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



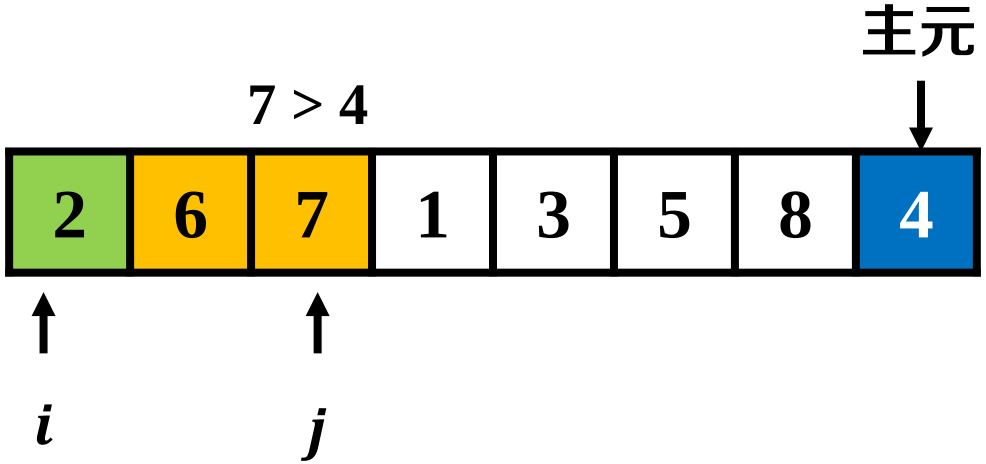
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



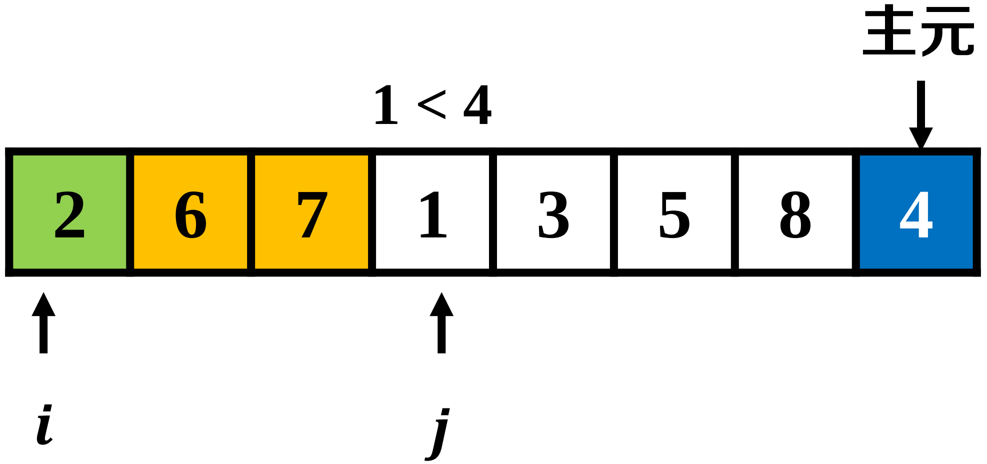
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



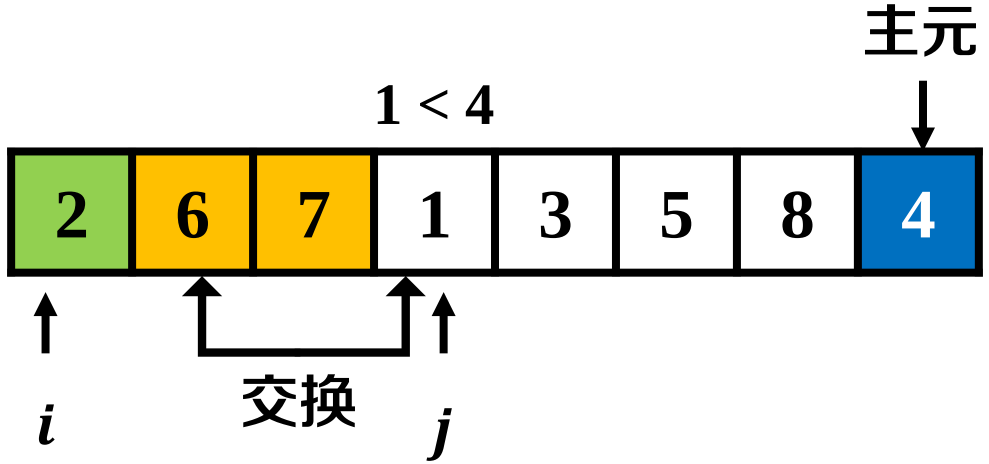
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



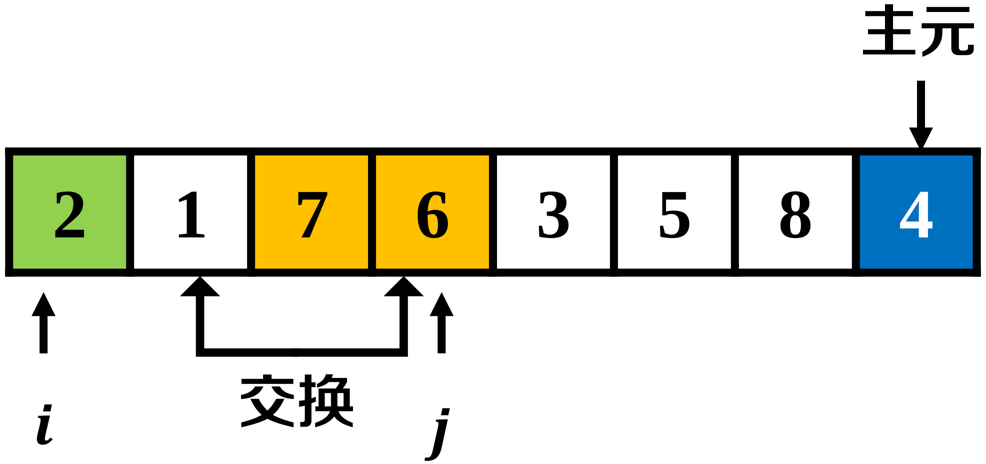
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



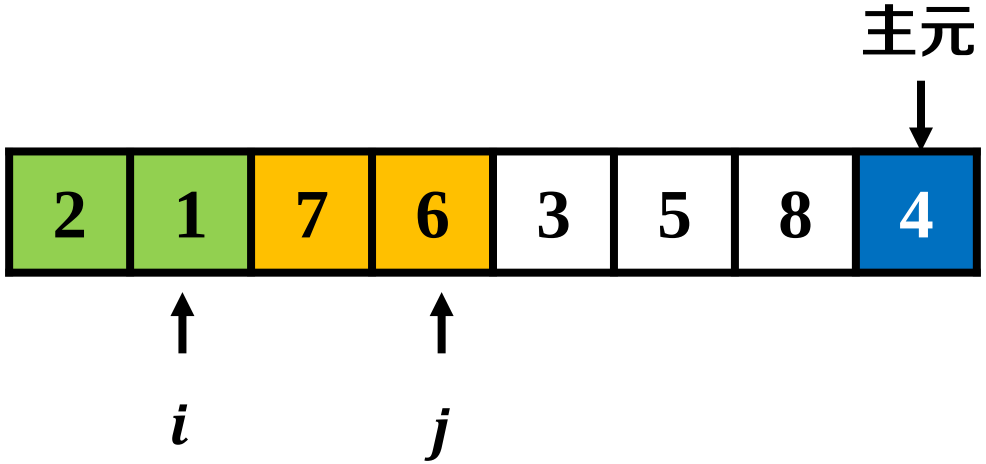
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



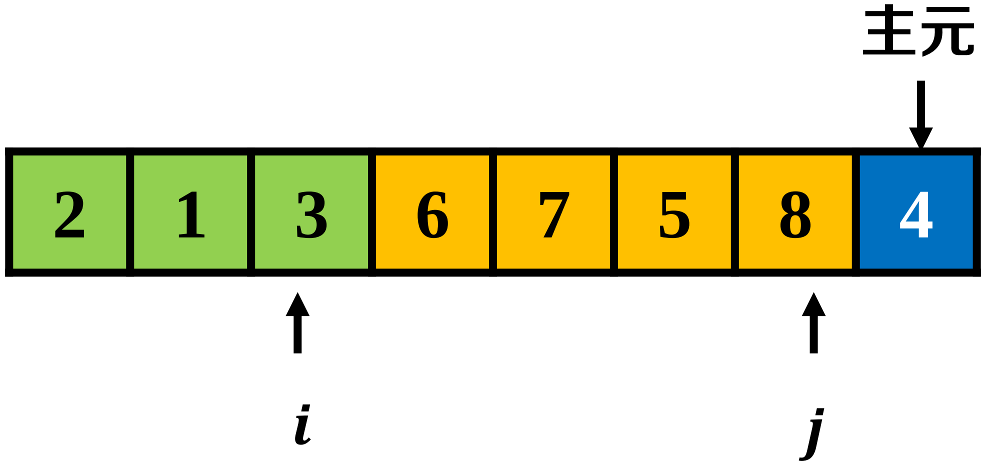
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



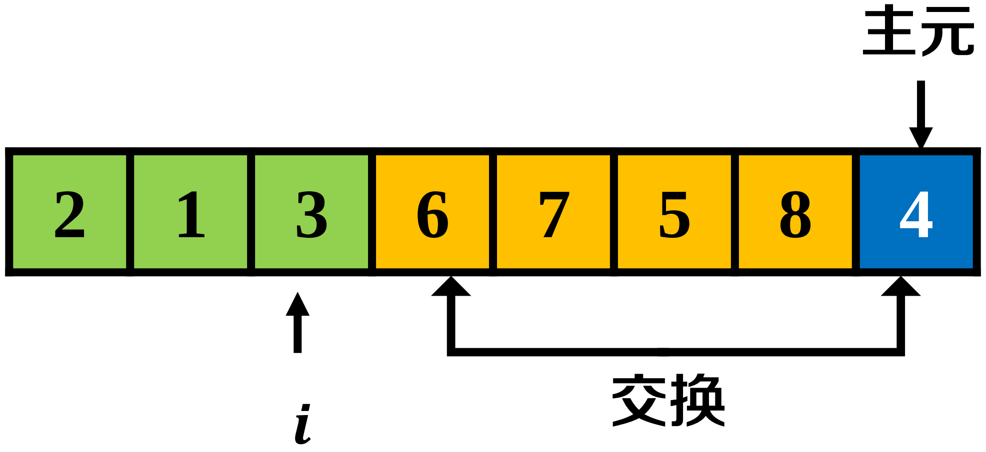
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



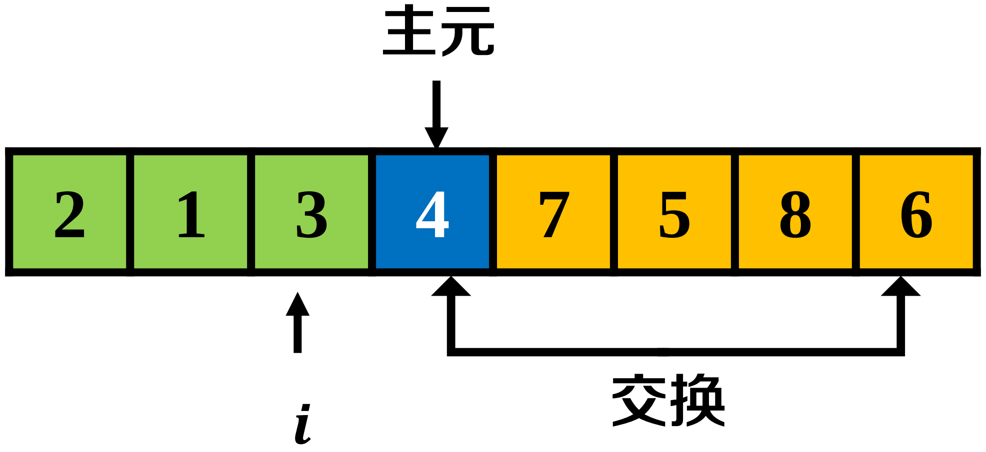
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



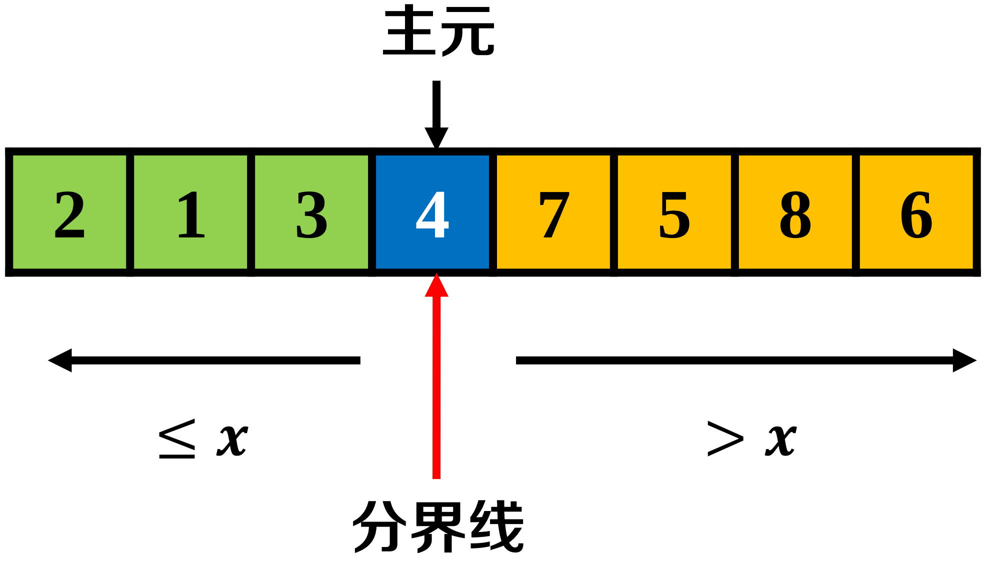
回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



回顾与启发

- 选取固定位置主元x（如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量i, j
- 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
  - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i与j右移
  - 若$A[j] > x$，则j右移



固定位置划分求解

- **选取固定位置主元**

p r

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

主元

固定位置划分求解

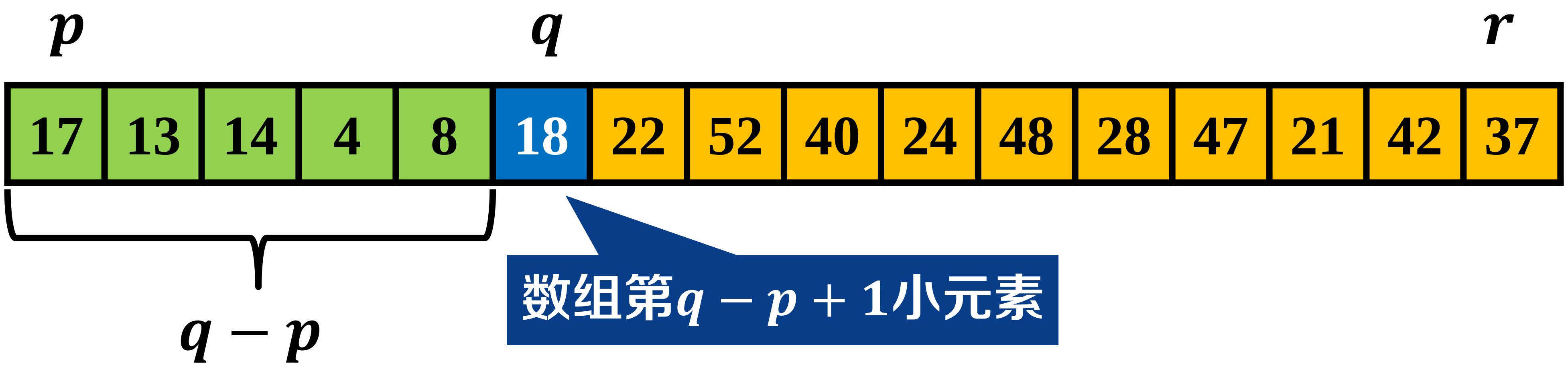
- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数$q - p$

p					q										r
17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$$\underbrace{17\quad 13\quad 14\quad 4\quad 8}_{q-p}$$

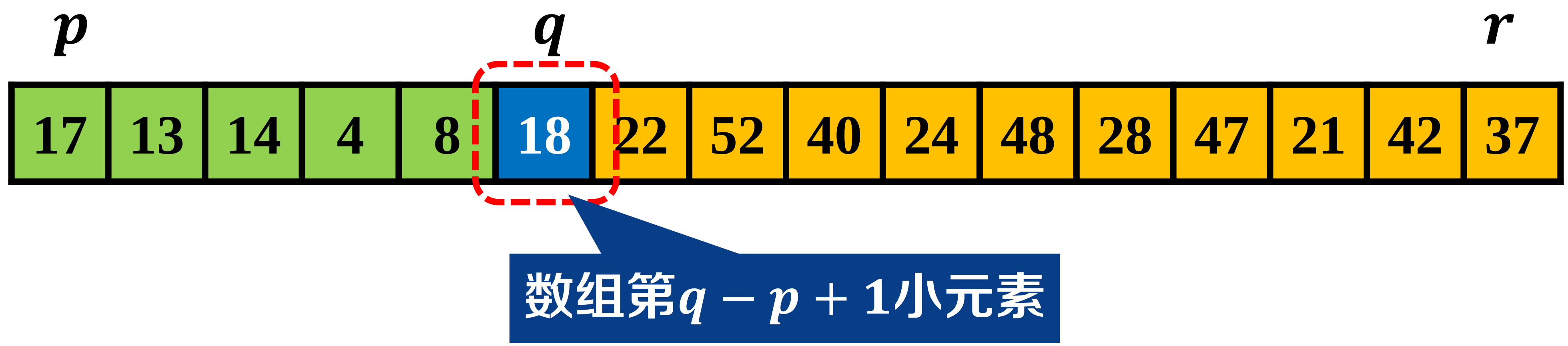
固定位置划分求解

- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数$q-p$



固定位置划分求解

- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数$q-p$
  - 情况1：$k=q-p+1$，$A[q]$为数组第k小元素



固定位置划分求解

- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数$q-p$
  - 情况1：$k=q-p+1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k<q-p+1$，数组第k小元素在$A[p..q-1]$中

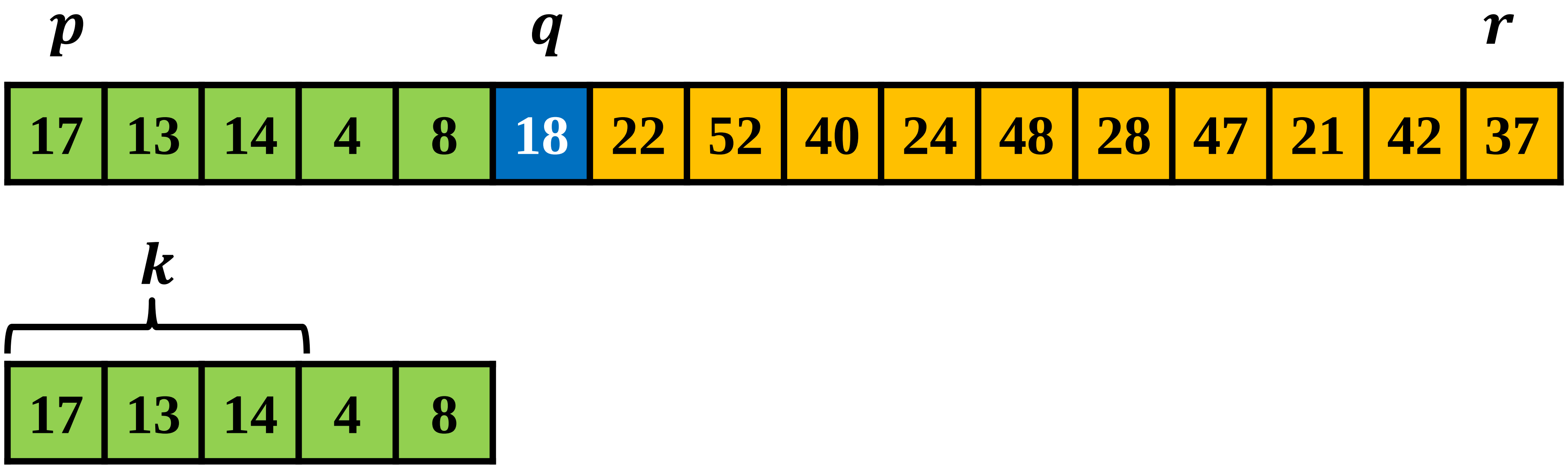
p					q										r
17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$q-p$

17	13	14	4	8

固定位置划分求解

- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数$q-p$
  - 情况1：$k=q-p+1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k<q-p+1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素



固定位置划分求解

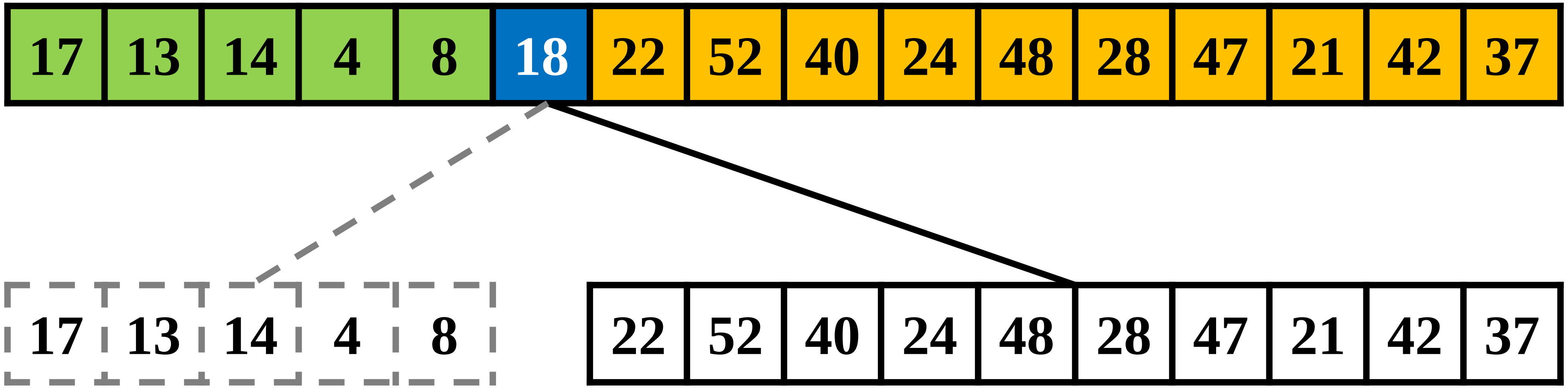
- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数$q-p$
  - 情况1：$k=q-p+1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k<q-p+1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k>q-p+1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

p					q										r
17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$$\overbrace{17\quad 13\quad 14\quad 4\quad 8\quad 18}^{q-p+1}\quad\overbrace{22\quad 52\quad 40\quad 24\quad 48}^{k-(q-p+1)}\quad 28\quad 47\quad 21\quad 42\quad 37$$

固定位置划分求解

原问题解在某个子问题中



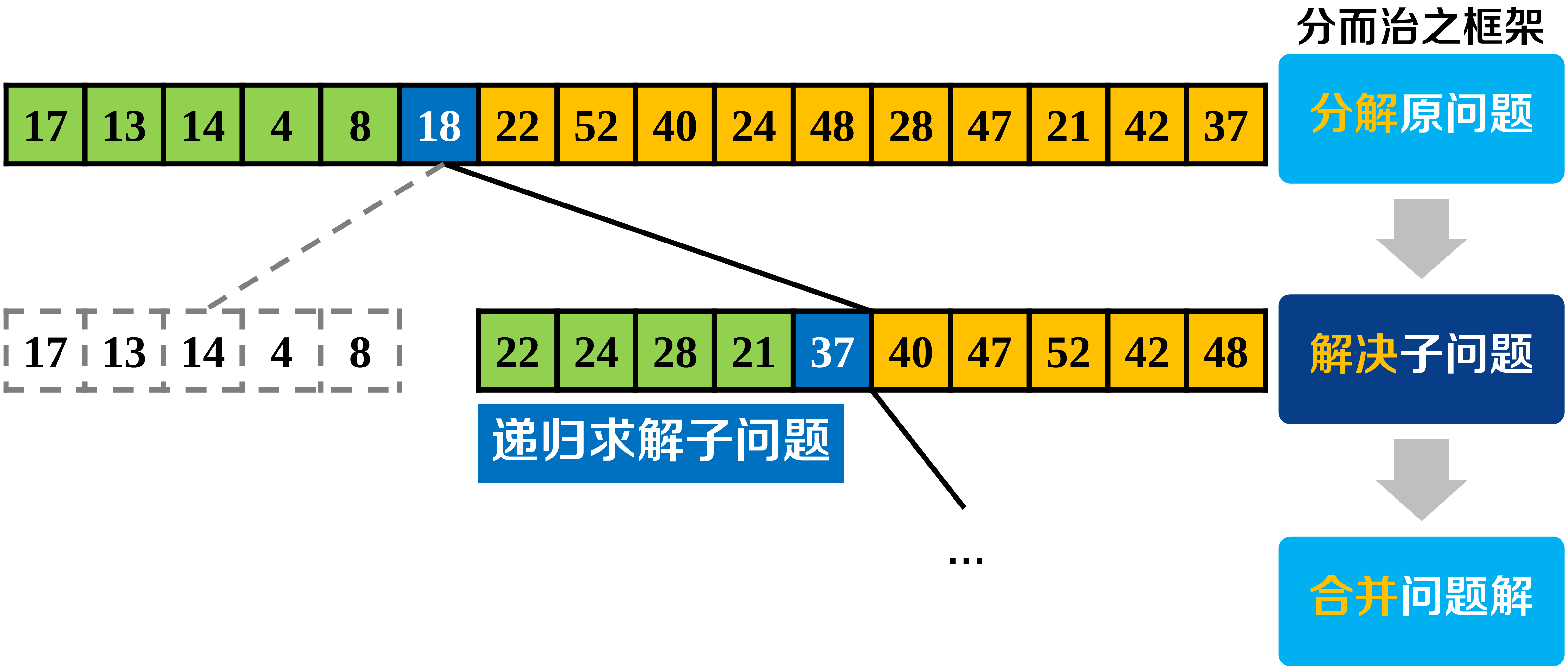
分而治之框架

分解原问题

解决子问题

合并问题解

固定位置划分求解



分而治之框架
17 13 14 4 8 18 22 52 40 24 48 28 47 21 42 37
分解原问题
17 13 14 4 8
22 24 28 21 37 40 47 52 42 48
解决子问题
递归求解子问题
…
合并问题解

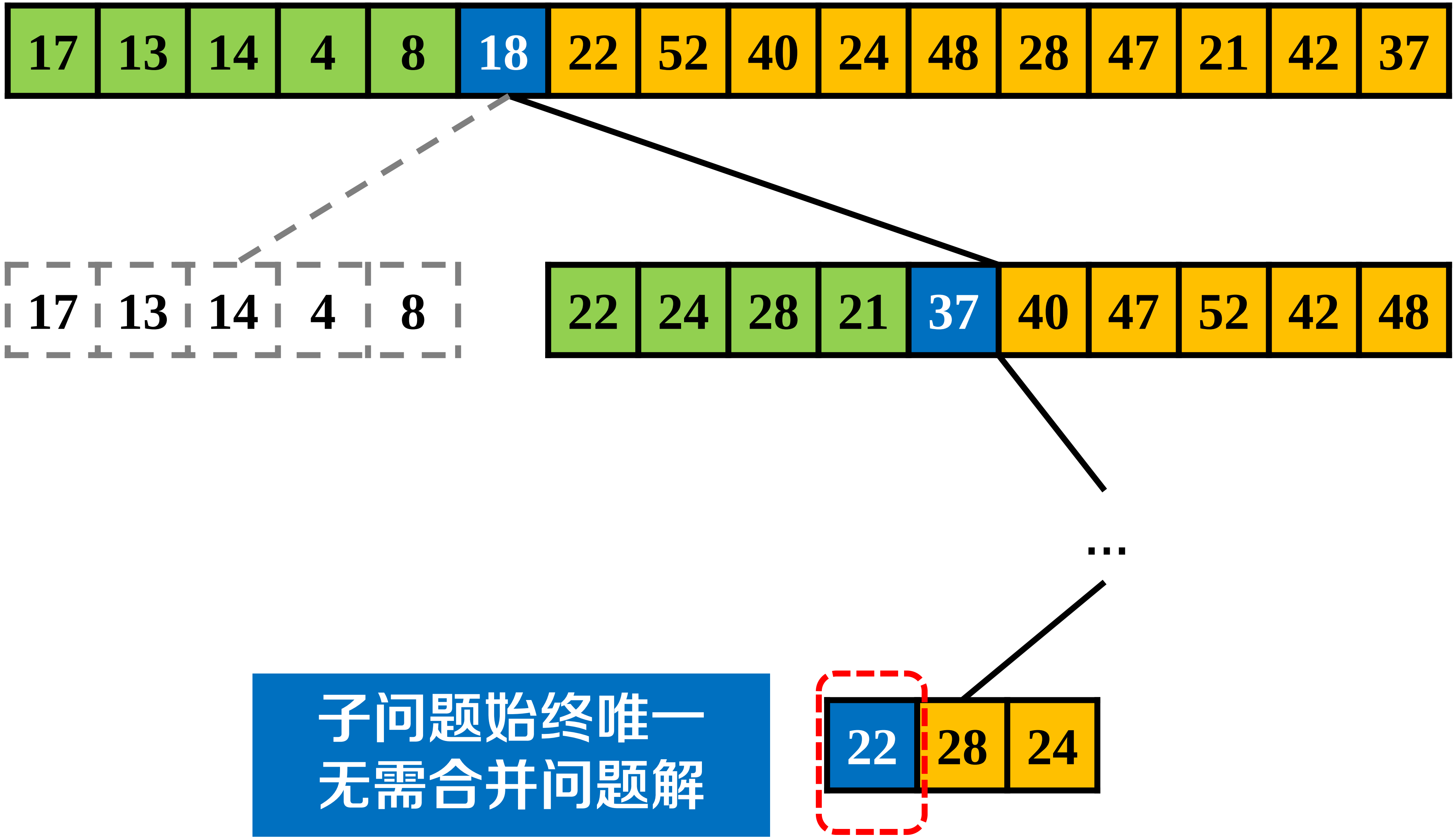
固定位置划分求解

分而治之框架

分解原问题

解决子问题

合并问题解



算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

$p = 1$

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

$r = 16$

查找第8小元素

算法实例

- **选取固定位置主元**
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

$p = 1$

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18

$r = 16$

主元

查找第8小元素

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

$p = 1$

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$r = 16$

主元

查找第8小元素

$q = 6$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

$p = 1$

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$r = 16$

主元

查找第8小元素 $q = 6$

$q - p + 1 = 6 - 1 + 1 = 6$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k=q-p+1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k<q-p+1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k>q-p+1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

$p=1$

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$r=16$

主元

查找第8小元素 $q=6$

$q-p+1=6-1+1=6$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$p = 7$

22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$r = 16$

查找第2小元素

算法实例

- **选取固定位置主元**
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$p = 7$

22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$r = 16$

查找第2小元素

主元

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$p = 7$

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48

$r = 16$

查找第2小元素

主元

$q = 11$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$p = 7$

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48

$r = 16$

主元

$q = 11$

查找第2小元素

$q - p + 1 = 11 - 7 + 1 = 5$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

$p = 7$

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48

$r = 16$

主元

$q = 11$

查找第2小元素

$q - p + 1 = 11 - 7 + 1 = 5$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48

$p = 7$

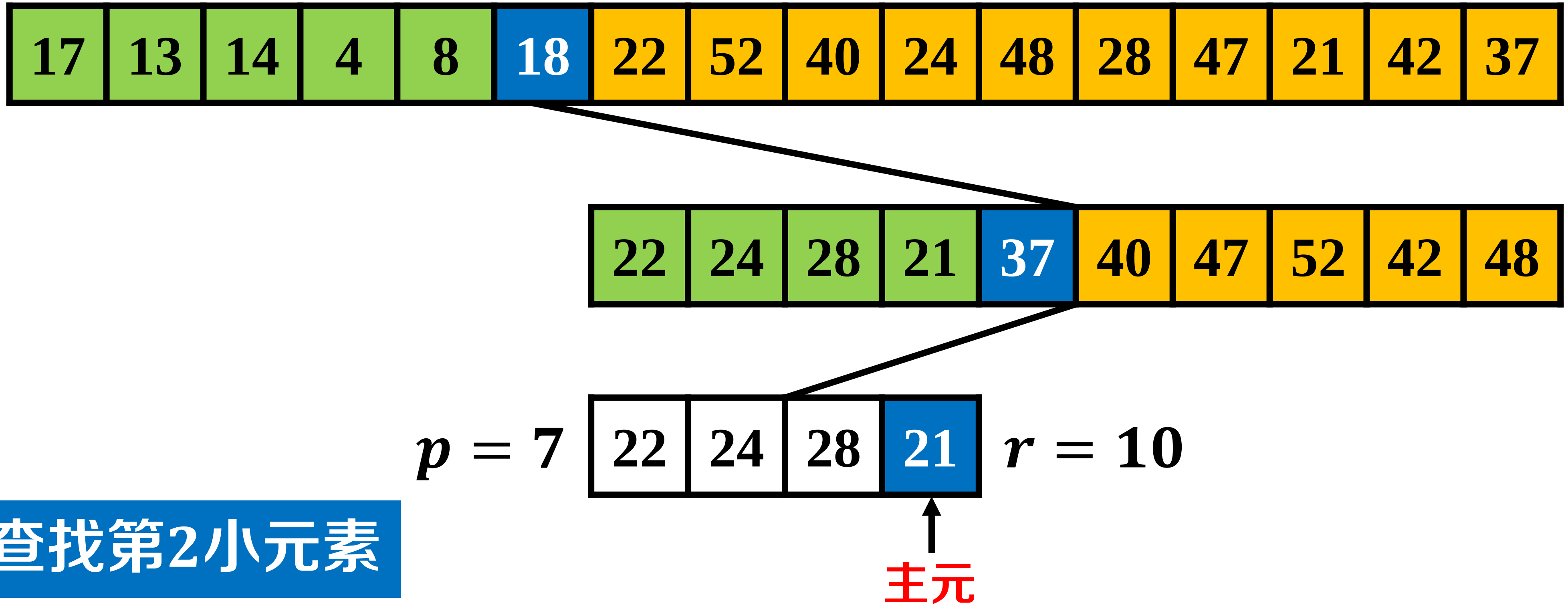
22	24	28	21

$r = 10$

查找第2小元素

算法实例

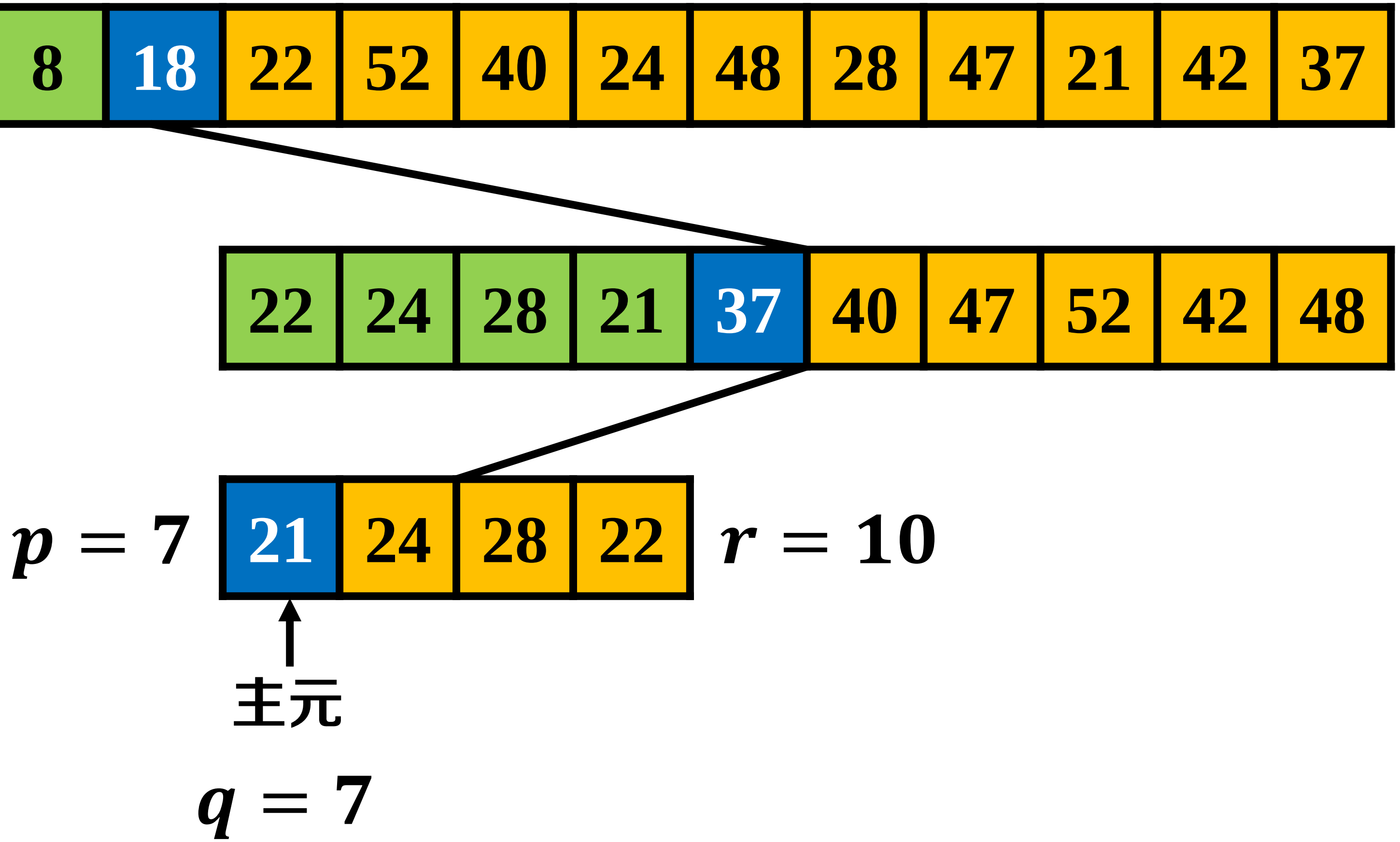
- **选取固定位置主元**
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素



查找第2小元素

算法实例

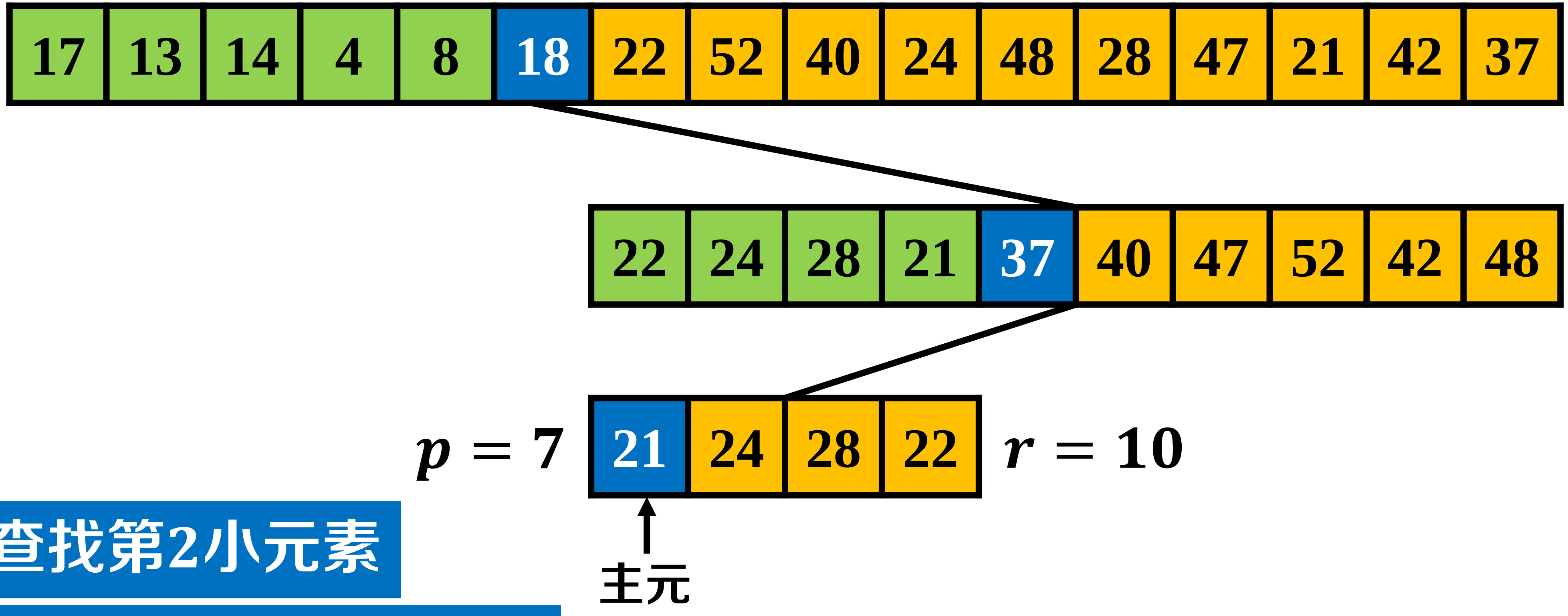
- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素



查找第2小元素

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素



查找第2小元素

$q - p + 1 = 7 - 7 + 1 = 1$ $q = 7$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48

$p = 7$

21	24	28	22

$r = 10$

主元

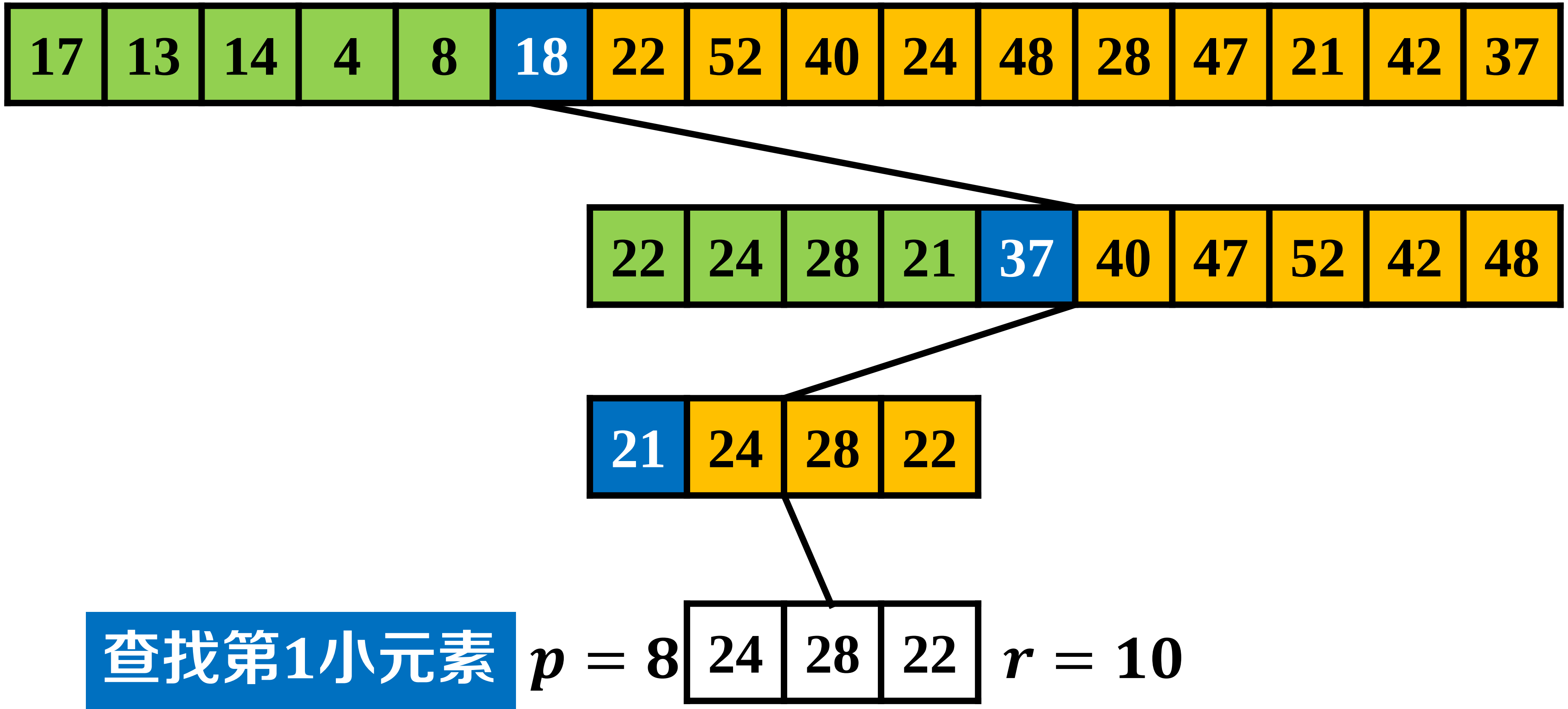
查找第2小元素

$q - p + 1 = 7 - 7 + 1 = 1$

$q = 7$

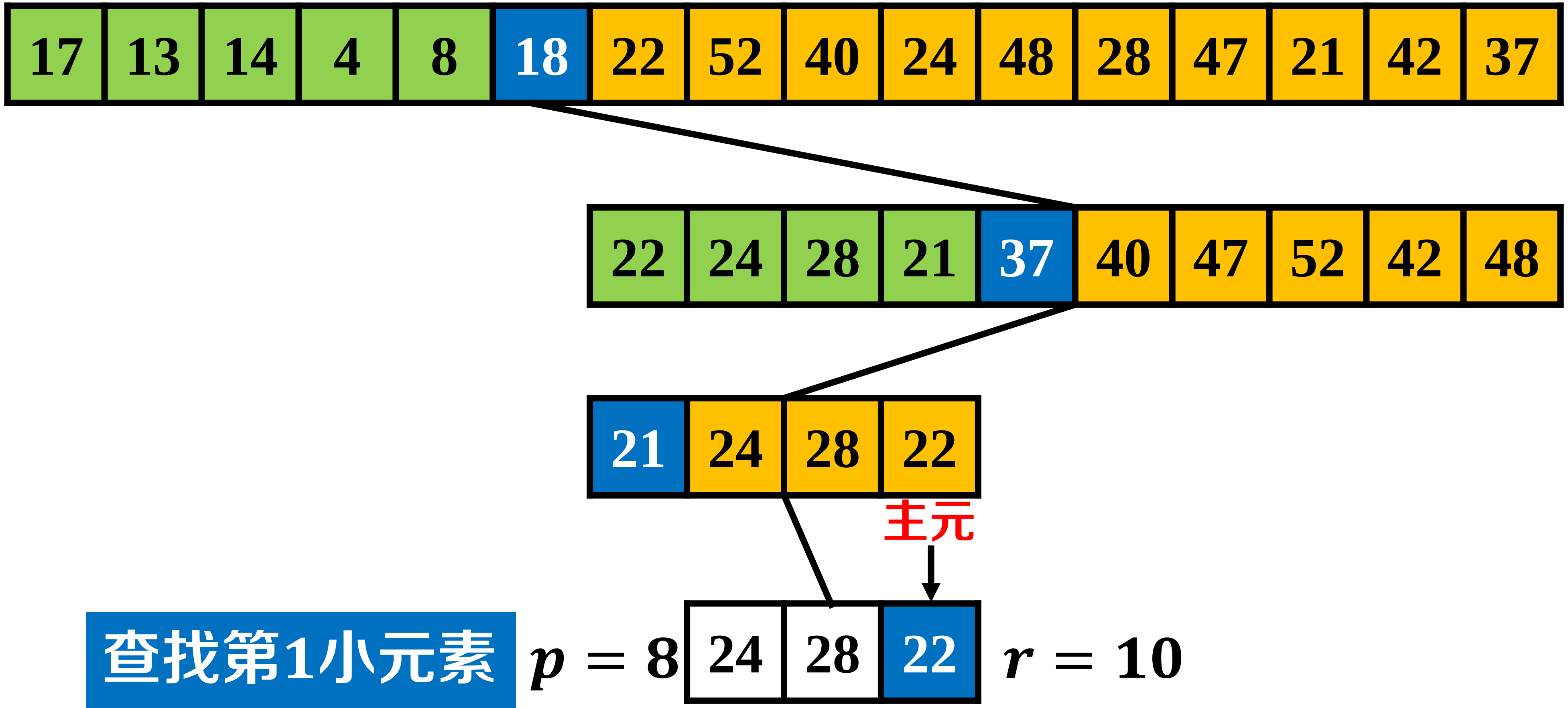
算法实例

- **选取固定位置主元**
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素



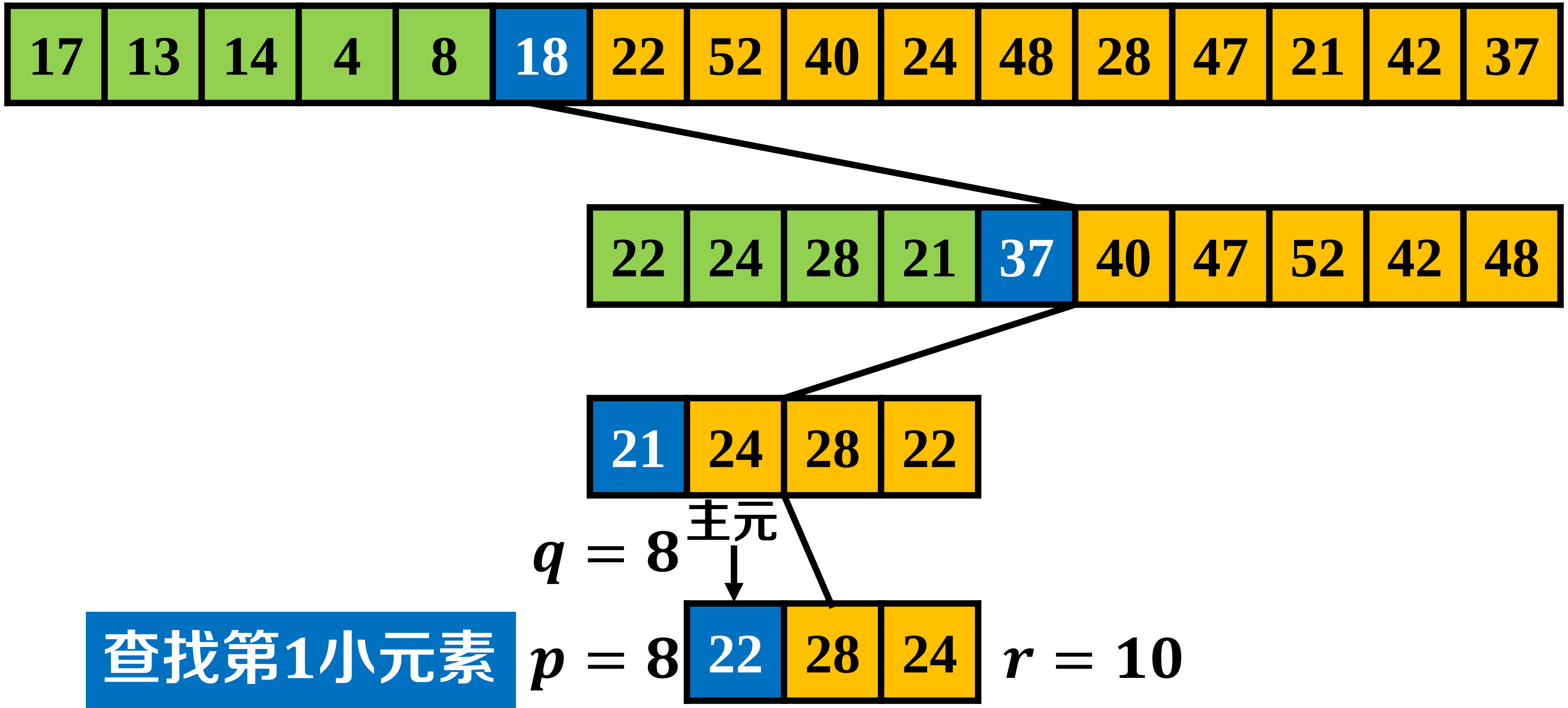
算法实例

- **选取固定位置主元**
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k - (q - p + 1)$小元素



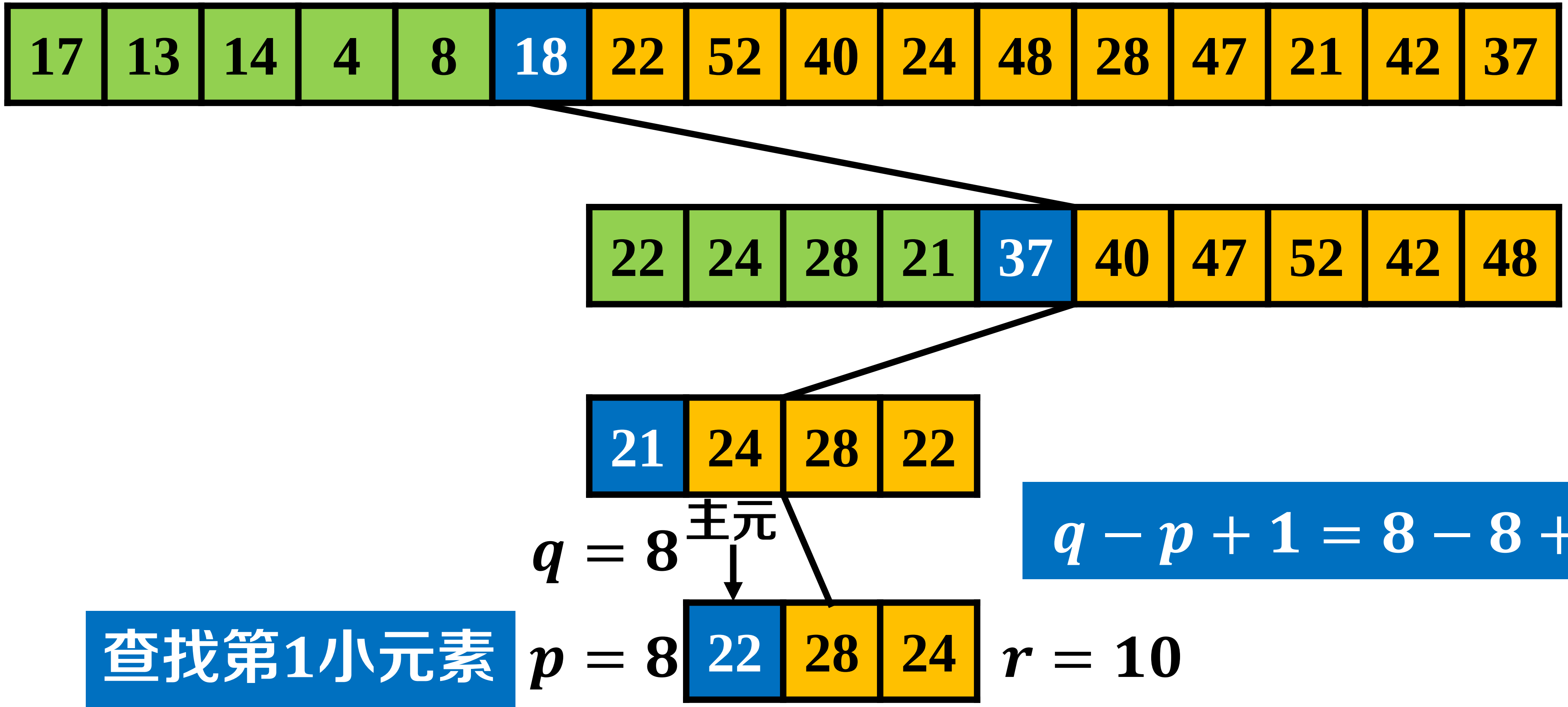
算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素



算法实例

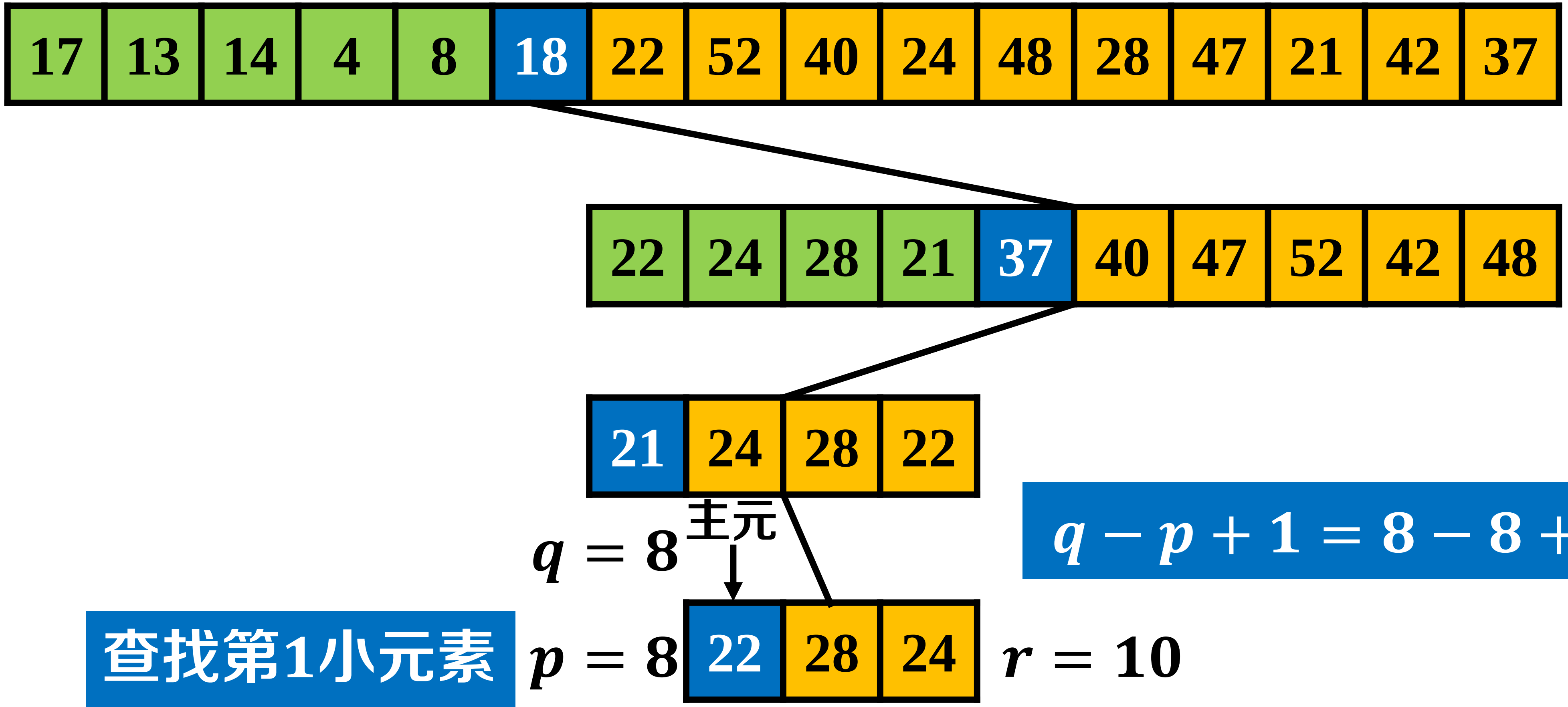
- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k - (q - p + 1)$小元素



$q - p + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

算法实例

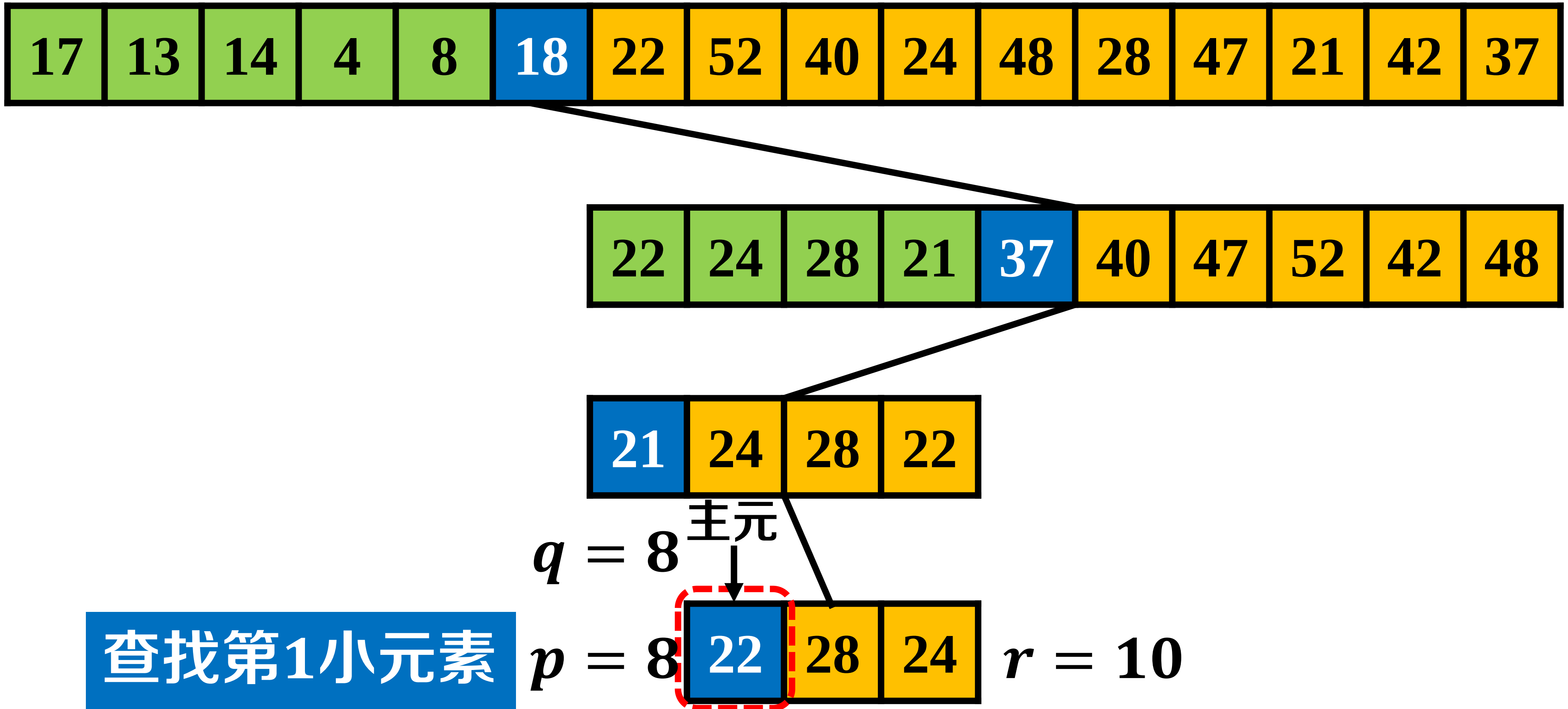
- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k-(q-p+1)$小元素



$q - p + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$k = q - p + 1$，$A[q]$为数组第k小元素
  - 情况2：$k < q - p + 1$，在$A[p..q-1]$中寻找第k小元素
  - 情况3：$k > q - p + 1$，在$A[q+1..r]$中寻找第$k - (q - p + 1)$小元素



固定位置划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**

输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q

$x \leftarrow A[r]$ 　　　　**选取主元**

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ *to* $r - 1$ **do**

　　if $A[j] \leq x$ **then**

　　　　exchange $A[i+1]$ with $A[j]$

　　　　$i \leftarrow i + 1$

　　end

end

exchange $A[i+1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

固定位置划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**

输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q

$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ *to* $r - 1$ **do**
  if $A[j] \leq x$ **then**
    exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
    $i \leftarrow i + 1$
  end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return q

初始化下标

固定位置划分：伪代码

- Partition(A, p, r)

输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q

$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ *to* $r - 1$ **do**
  if $A[j] \leq x$ **then**
    exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
    $i \leftarrow i + 1$
  end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return q

依次扫描

固定位置划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**

输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q

$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ *to* $r - 1$ **do**
    if $A[j] \leq x$ **then**
        exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
        $i \leftarrow i + 1$
    end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return q

比主元小的元素交换到前面

固定位置划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**

输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q

$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ *to* $r - 1$ **do**
    if $A[j] \leq x$ **then**
        exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
        $i \leftarrow i + 1$
    end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return q

主元作分界线

固定位置划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**

输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q

$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ *to* $r - 1$ **do**
  if $A[j] \leq x$ **then**
    exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
    $i \leftarrow i + 1$
  end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return q

返回划分位置

固定位置次序选择：伪代码

- **Selection(A, p, r, k)**

输入: 数组A,起始位置p,终止位置r,元素次序k
输出: 第k小元素x

$q \leftarrow \text{Partition(A, p, r)}$

if $k = (q - p + 1)$ **then**
  $x \leftarrow A[q]$
end
if $k < (q - p + 1)$ **then**
  $x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q - 1, k)$
end
if $k > (q - p + 1)$ **then**
  $x \leftarrow \text{Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$
end
return x

划分数组

固定位置次序选择：伪代码

- **Selection(A, p, r, k)**

输入: 数组A,起始位置p,终止位置r,元素次序k
输出: 第k小元素x

$q \leftarrow \text{Partition(A, p, r)}$
if $k = (q-p+1)$ **then**
  $x \leftarrow A[q]$
end
if $k < (q-p+1)$ **then**
  $x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q-1, k)$
end
if $k > (q-p+1)$ **then**
  $x \leftarrow \text{Selection}(A, q+1, r, k-(q-p+1))$
end
return x

主元为第k小元素

固定位置次序选择：伪代码

- **Selection(A, p, r, k)**

输入: 数组A,起始位置p,终止位置r,元素次序k
输出: 第k小元素x

$q \leftarrow \text{Partition(A, p, r)}$
if $k = (q - p + 1)$ **then**
| $x \leftarrow A[q]$
end
if $k < (q - p + 1)$ **then**
| $x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q - 1, k)$
end
if $k > (q - p + 1)$ **then**
| $x \leftarrow \text{Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$
end
return x

第k小元素在$A[p..q-1]$中

固定位置次序选择：伪代码

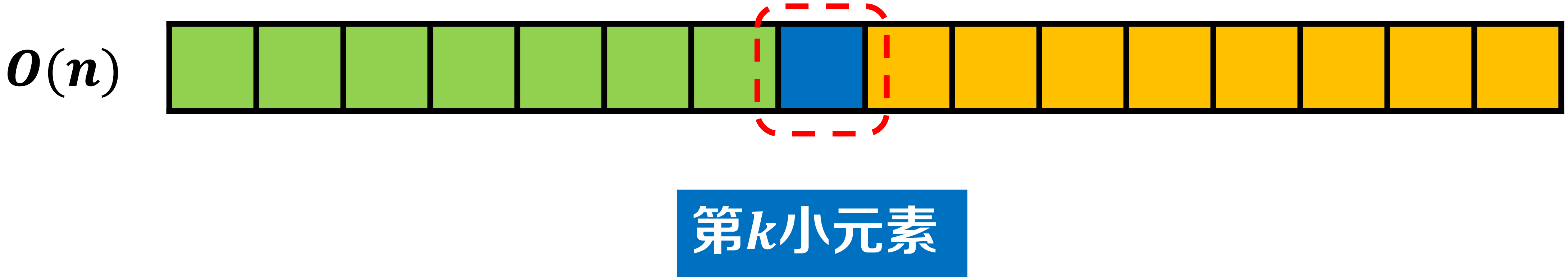
- **Selection(A, p, r, k)**

输入: 数组A,起始位置p,终止位置r,元素次序k
输出: 第k小元素x

$q \leftarrow \text{Partition(A, p, r)}$
if $k = (q - p + 1)$ **then**
| $x \leftarrow A[q]$
end
if $k < (q - p + 1)$ **then**
| $x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q - 1, k)$
end
if $k > (q - p + 1)$ **then**
| $x \leftarrow \text{Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$
end
return x

第k小元素在$A[q + 1..r]$中

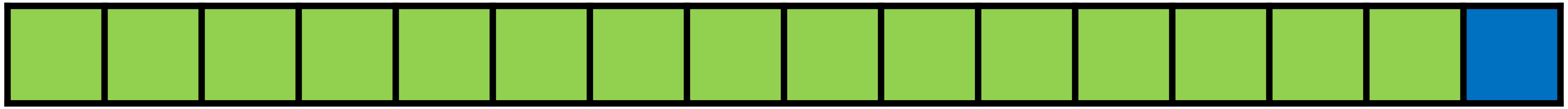
复杂度分析：最好情况



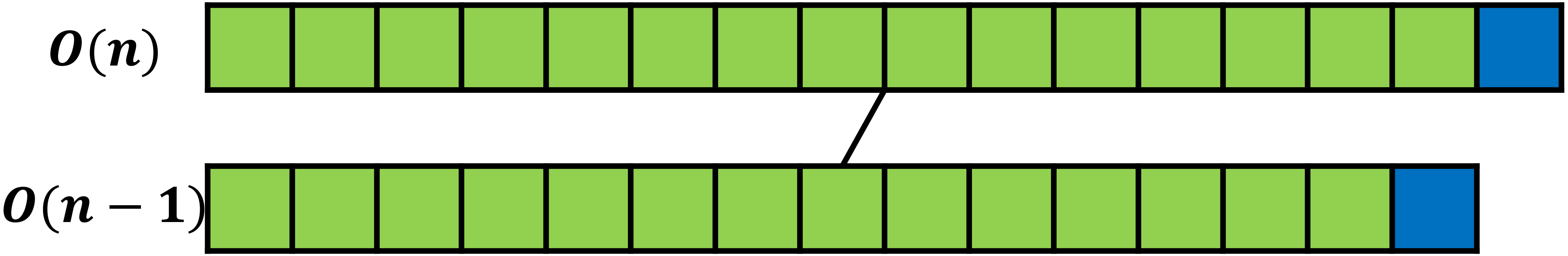
- 时间复杂度：$T(n) = O(n)$

复杂度分析：最坏情况

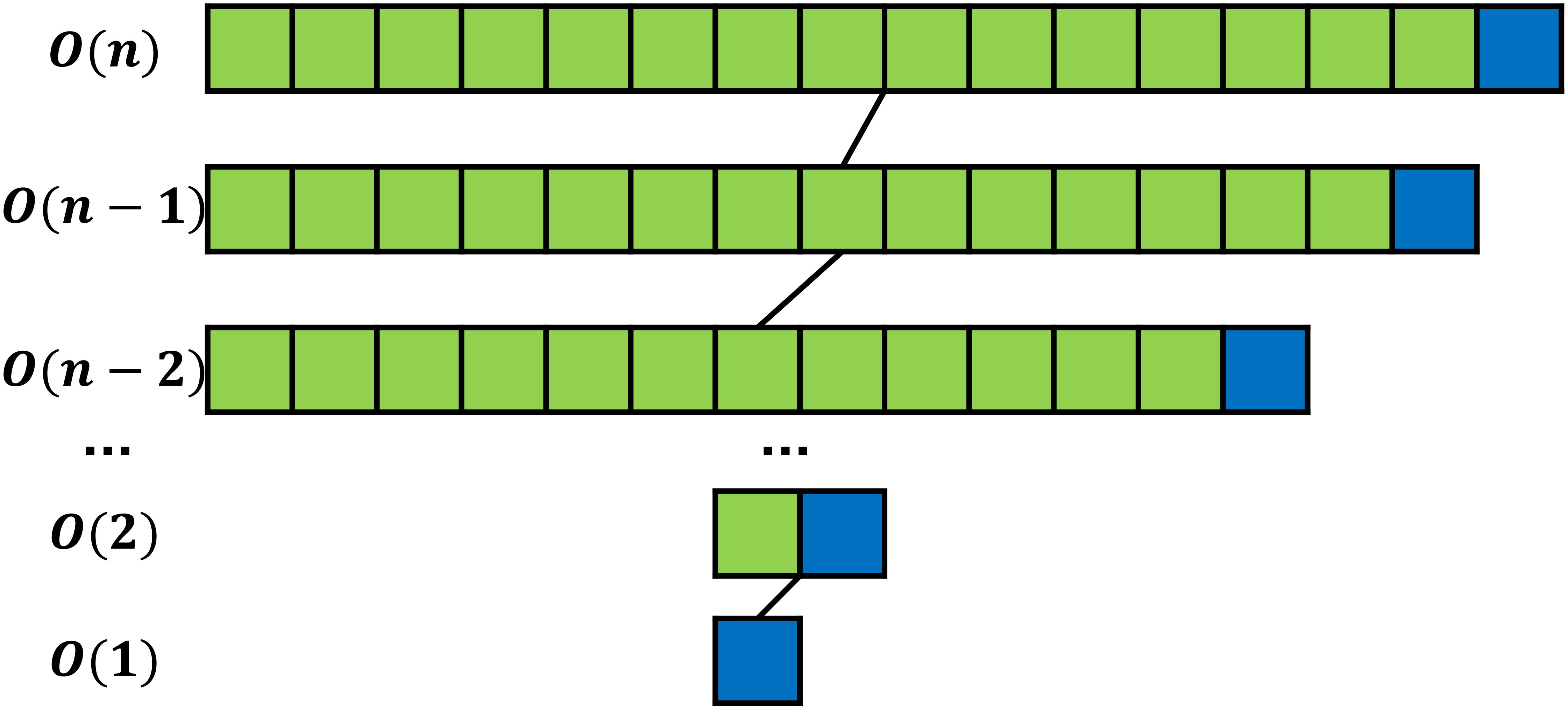
$\boldsymbol{O(n)}$



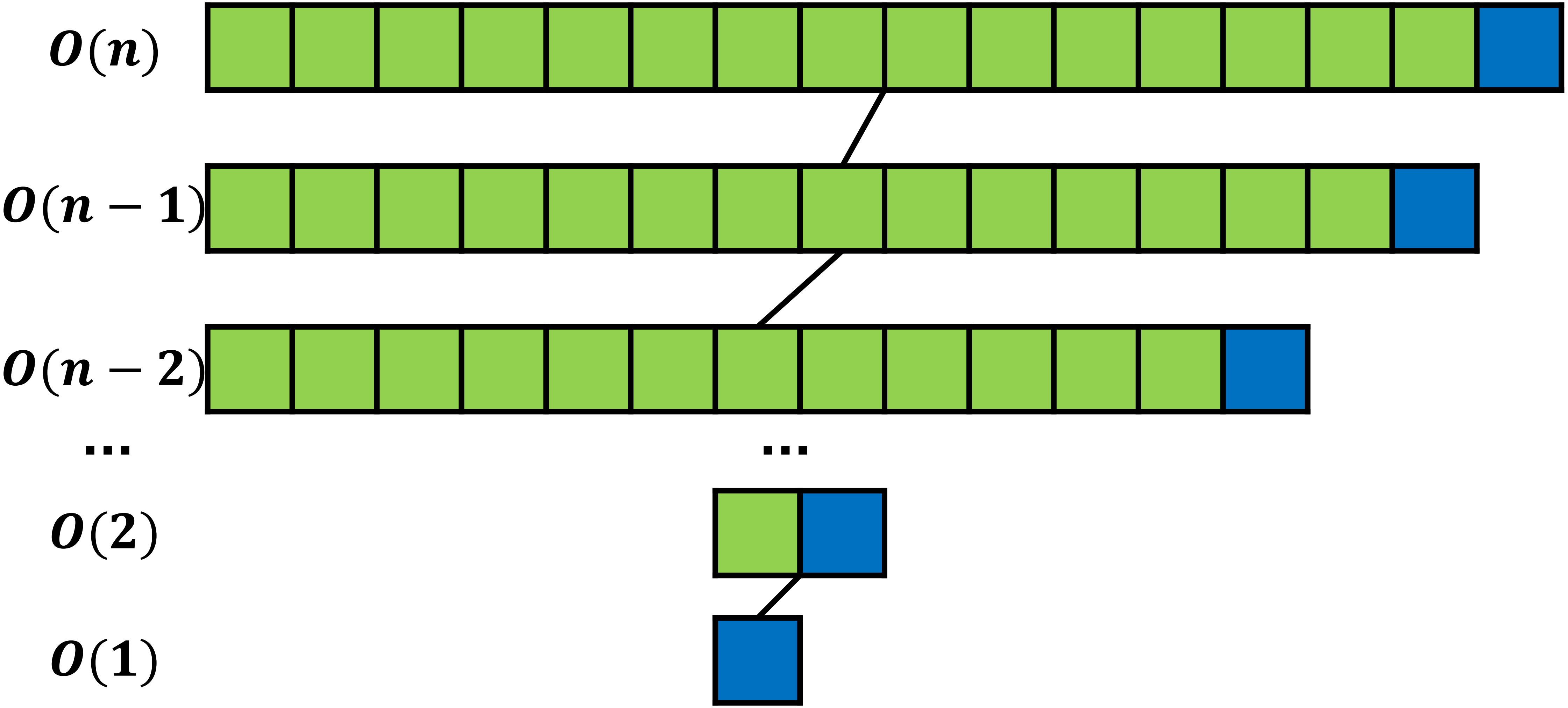
复杂度分析：最坏情况



复杂度分析：最坏情况



复杂度分析：最坏情况

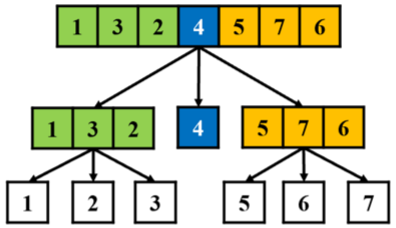


- 时间复杂度：$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i \le n^2 = O(n^2)$

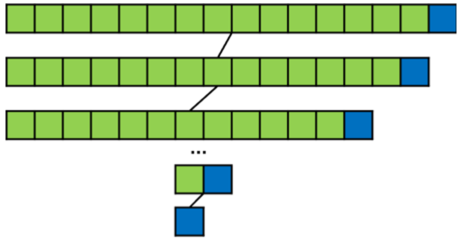
复杂度比较

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择		

快速排序



最好情况：$O(n\log n)$

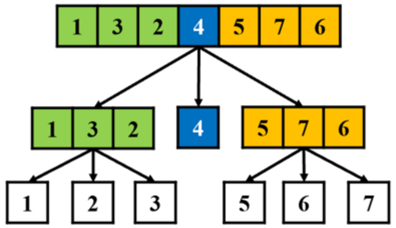


最坏情况：$O(n^2)$

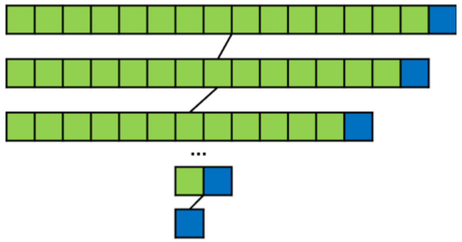
复杂度比较

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

快速排序



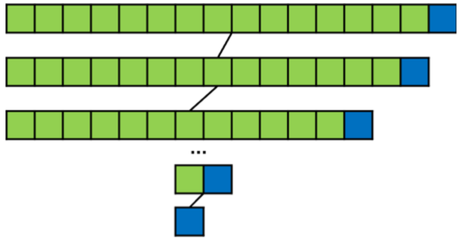
最好情况：$O(n\log n)$



最坏情况：$O(n^2)$

次序选择

最好情况：$O(n)$



最坏情况：$O(n^2)$

复杂度比较

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

复杂度比较

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

问题：如何摆脱最坏情况的困境?

复杂度比较

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

问题：如何摆脱最坏情况的困境?

使用**随机位置**划分

随机位置划分：伪代码

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$
exchange $A[s]$ with $A[r]$
$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
return q

随机选择主元

随机位置次序选择：伪代码

- **Randomized-Selection(A, p, r, k)**

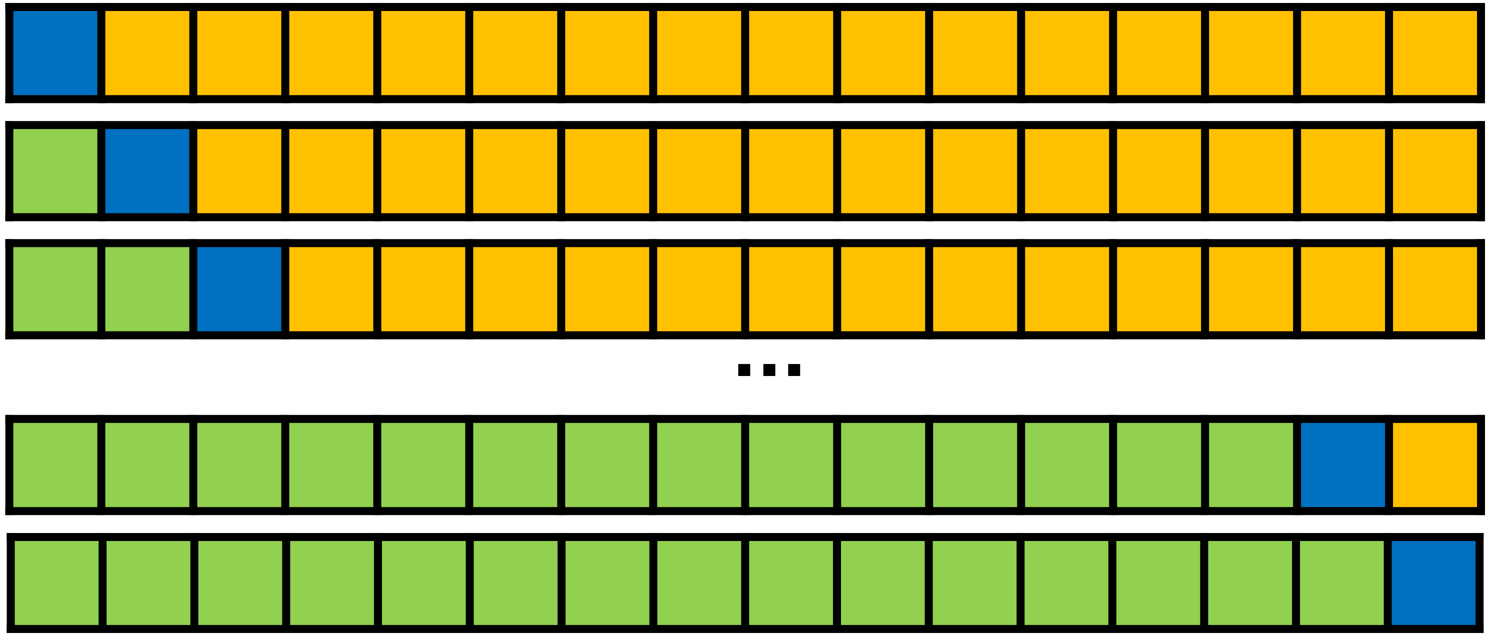
输入: 数组A,起始位置p,终止位置r,元素次序k
输出: 第k小元素x

$q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$
if $k = (q - p + 1)$ **then**
  $x \leftarrow A[q]$
end
if $k < (q - p + 1)$ **then**
  $x \leftarrow \text{Randomized-Selection}(A, p, q - 1, k)$
end
if $k > (q - p + 1)$ **then**
  $x \leftarrow \text{Randomized-Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$
end
return x

随机划分数组

复杂度分析：期望情况

- 随机选择主元，共n种情况



0： $n-1$

1： $n-2$

2： $n-3$

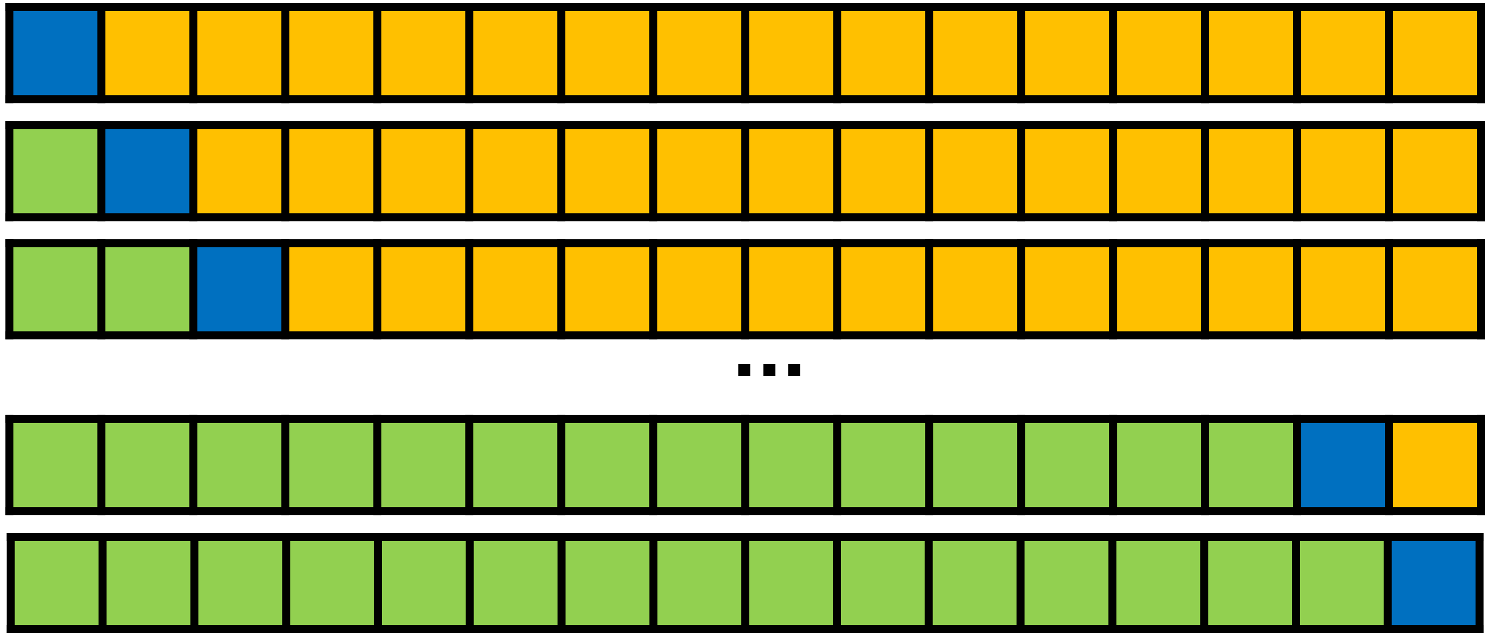
⋯

$n-2$： 1

$n-1$： 0

复杂度分析：期望情况

- 随机选择主元，共n种情况



0：$n-1$

1：$n-2$

2：$n-3$

…

$n-2$：1

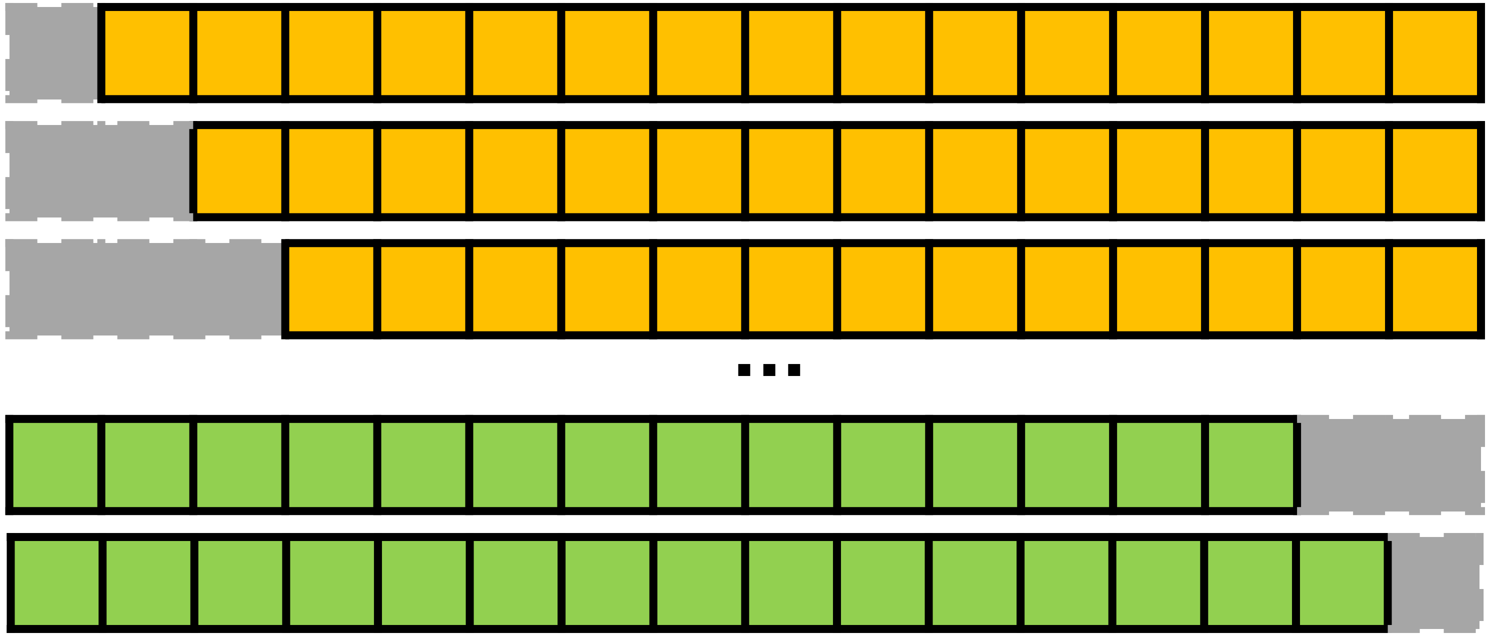
$n-1$：0

- $$T(n) \le \begin{cases} \max\{T(0), T(n-1)\} + O(n) \\ \max\{T(1), T(n-2)\} + O(n) \\ \max\{T(2), T(n-3)\} + O(n) \\ \cdots \\ \max\{T(n-1), T(0)\} + O(n) \end{cases}$$

取较长的一段进行分析

复杂度分析：期望情况

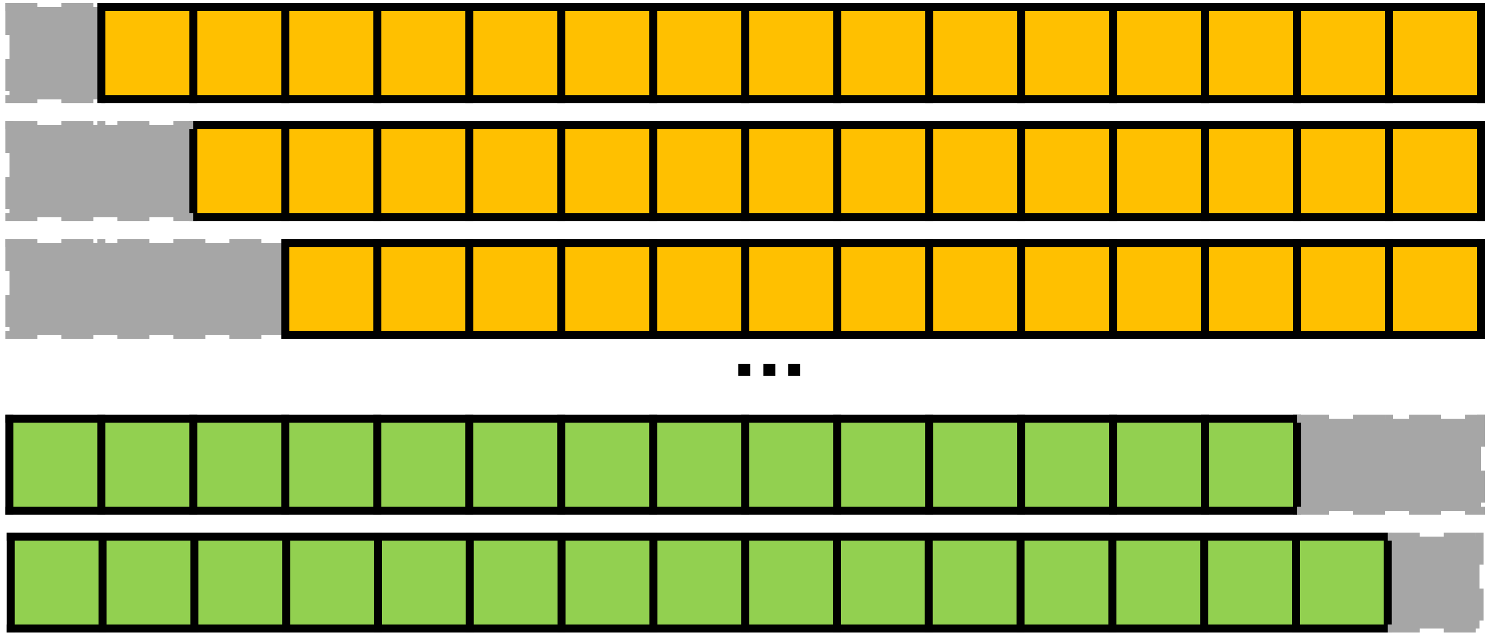
- 随机选择主元，共n种情况



- $T(n) \le \begin{cases} T(n-1)+O(n) \\ T(n-2)+O(n) \\ T(n-3)+O(n) \\ \quad\quad\cdots \\ T(n-1)+O(n) \end{cases}$

复杂度分析：期望情况

- 随机选择主元，共n种情况



0： $n-1$

1： $n-2$

2： $n-3$

…

$n-2$： 1

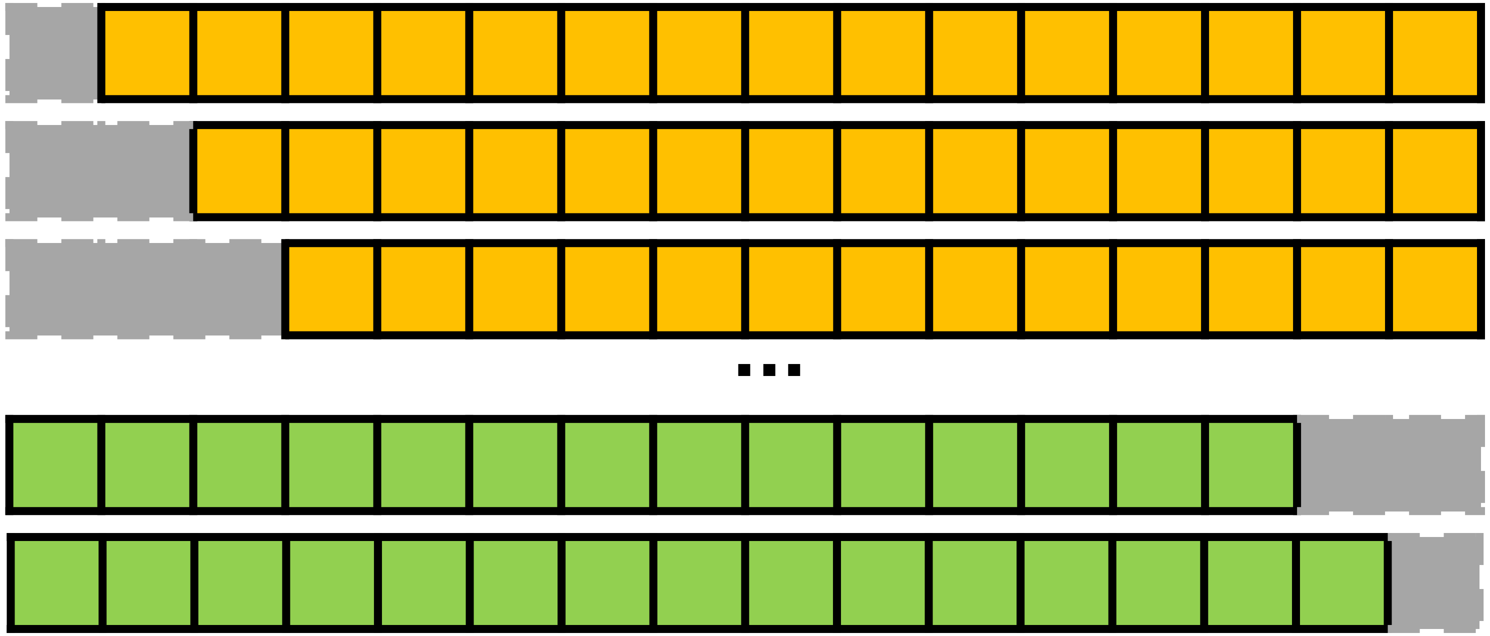
$n-1$： 0

- $$T(n) \le \left\{\begin{array}{l} T(n-1)+O(n) \\ T(n-2)+O(n) \\ T(n-3)+O(n) \\ \qquad\cdots \\ T(n-1)+O(n) \end{array}\right\}$$

n种情况概率均为$1/n$

复杂度分析：期望情况

- 随机选择主元，共n种情况



0： $n-1$

1： $n-2$

2： $n-3$

…

$n-2$： 1

$n-1$： 0

- $$T(n) \le \begin{cases} T(n-1)+O(n) \\ T(n-2)+O(n) \\ T(n-3)+O(n) \\ \dots \\ T(n-1)+O(n) \end{cases}$$

n种情况概率均为$1/n$

每个值$T(i)$出现2次，$i \ge \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

复杂度分析：期望情况

- **期望时间：**

$$E[T(n)] \le E[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \left(T(i) + O(n)\right)]$$

复杂度分析：期望情况

- **期望时间：**

$$E[T(n)] \leq E[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \left(T(i) + O(n)\right)]$$

每个值出现2次，概率均为$1/n$

复杂度分析：期望情况

- **期望时间：**

$$E[T(n)] \le E[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \left(T(i) + O(n)\right)]$$

- $T(n) \le \begin{cases} T(n-1) + O(n) \\ T(n-2) + O(n) \\ T(n-3) + O(n) \\ \cdots \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + O(n) \end{cases}$

复杂度分析：期望情况

- **期望时间：**

$$E[T(n)] \le E[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \left(T(i) + O(n)\right)]$$

$$\le \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[\left(T(i) + O(n)\right)]$$

期望的线性特性

复杂度分析：期望情况

- **期望时间：**

$$E[T(n)] \le E[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \left(T(i) + O(n)\right)]$$

$$\le \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + \frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n)$$

期望的线性特性

复杂度分析：期望情况

- **期望时间：**

$$E[T(n)] \le E[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \left(T(i) + O(n)\right)]$$

$$\le \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + \frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n)$$

$$\le \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + O(n)$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n) = O(n)$$

复杂度分析：期望情况

- **期望时间：**

$$E[T(n)] \le E[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \left(T(i) + O(n)\right)]$$

$$\le \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + \frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n)$$

$$\le \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + O(n)$$

问题：如何进一步求解该递归式？

复杂度分析：期望情况

算法名称	最好时间复杂度	最坏时间复杂度	期望时间复杂度
快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$	$O(n\log n)$
次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$	?

快速排序：期望时间复杂度=最好时间复杂度

复杂度分析：期望情况

算法名称	最好时间复杂度	最坏时间复杂度	期望时间复杂度
快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$	$O(n\log n)$
次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n)$

问题：次序选择期望时间复杂度是否为$O(n)$?

复杂度分析：期望情况

算法名称	最好时间复杂度	最坏时间复杂度	期望时间复杂度
快速排序	$O(n\log n)$	$O(n^2)$	$O(n\log n)$
次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n)$

问题：次序选择期望时间复杂度是否为$O(n)$?

使用代入法验证

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n) = O(n)$
- 假设：$\forall i < n,\ E[T(i)] \leq c \cdot i$

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n) = O(n)$
- 假设：$\forall i < n,\ E[T(i)] \le c \cdot i$

$$E[T(n)] \le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)]$$

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n) = O(n)$
- 假设：$\forall i < n,\ E[T(i)] \le c \cdot i$

$$E[T(n)] \le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)]$$

$$\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i$$

代入假设

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n) = O(n)$
- 假设：$\forall i < n,\ E[T(i)] \le c \cdot i$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\
&\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n-1} c \cdot i \\
&\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2
\end{aligned}
$$

使用不等式$\sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n-1} i \le \frac{3}{8} n^2$

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n) = O(n)$
- 假设：$\forall i < n,\ E[T(i)] \le c \cdot i$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\
&\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i \\
&\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \\
&= O(n) + c \cdot \frac{3}{4} n
\end{aligned}
$$

整理表达式

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n) = O(n)$
- 假设：$\forall i < n,\ E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\
&\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n-1} c \cdot i \\
&\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \\
&= c \cdot n - \left(\frac{1}{4} c \cdot n - O(n)\right)
\end{aligned}
$$

整理表达式

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n)=O(n)$
- 假设：$\forall i<n,\ E[T(i)]\le c\cdot i$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le O(n)+\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}^{n-1}E[T(i)]\\
&\le O(n)+\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}^{n-1}c\cdot i\\
&\le O(n)+\frac{2}{n}\cdot c\cdot\frac{3}{8}n^2\\
&= c\cdot n-\left(\frac{1}{4}c\cdot n-O(n)\right)\\
&\le c\cdot n
\end{aligned}
$$

选择足够大的常数c

$c\cdot\frac{n}{4}$ 渐近大于$O(n)$

代入法分析：期望情况

- 最好情况：$T(n) = O(n)$
- 假设：$\forall i < n,\ E[T(i)] \le c \cdot i$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\
&\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n-1} c \cdot i \\
&\le O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \\
&= c \cdot n - \left(\frac{1}{4} c \cdot n - O(n) \right) \\
&\le c \cdot n
\end{aligned}
$$

随机位置次序选择：期望时间复杂度为$O(n)$

小结

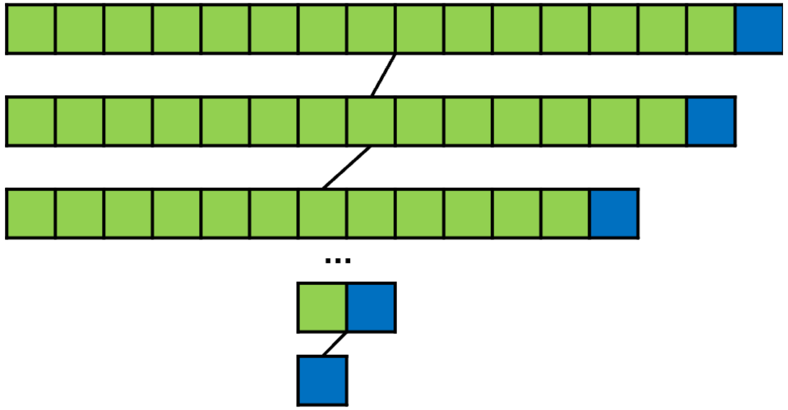
快速排序

次序选择

小结

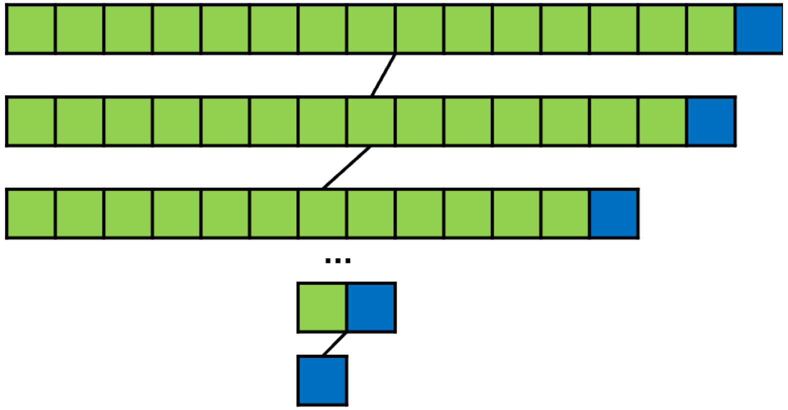
固定位置划分

快速排序



最坏情况：$O(n^2)$

次序选择



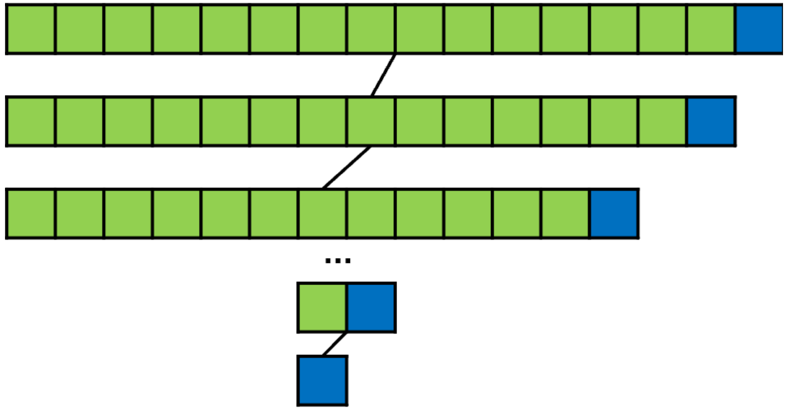
最坏情况：$O(n^2)$

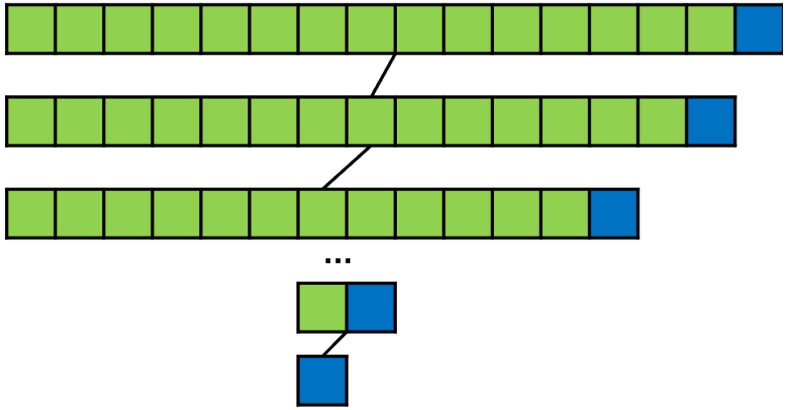
小结

快速排序

次序选择

固定位置划分





最坏情况：$O(n^2)$

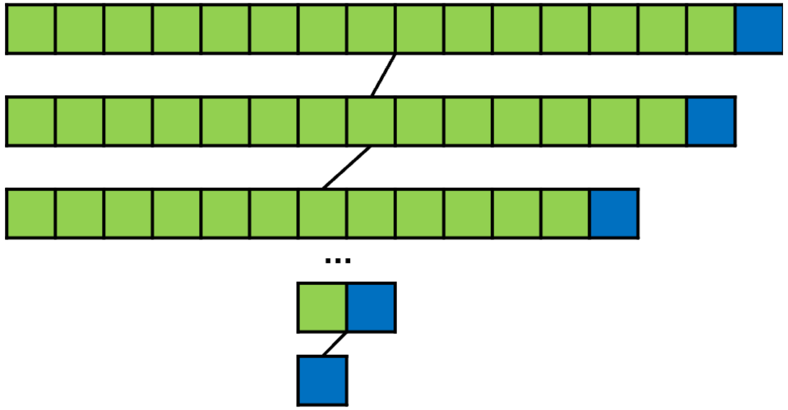
最坏情况：$O(n^2)$

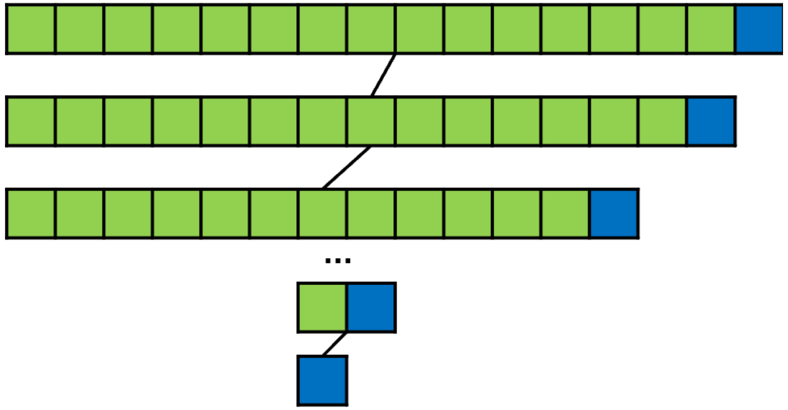
随机化

小结

快速排序　　　　次序选择

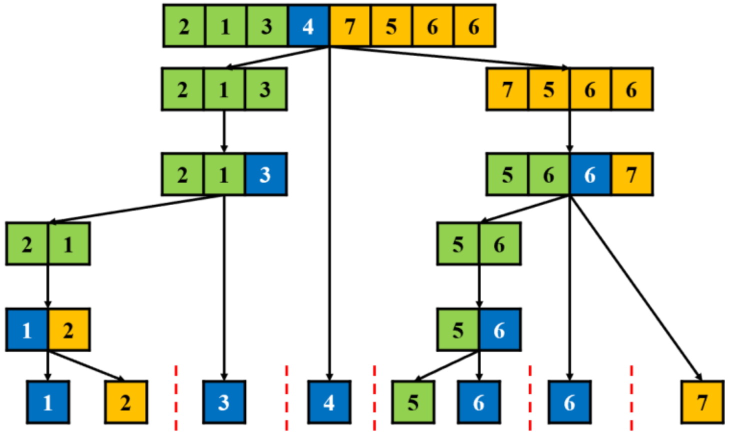
固定位置划分



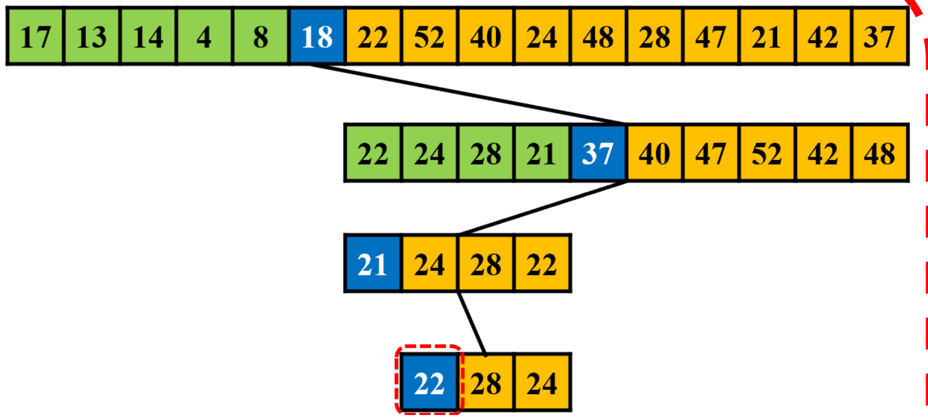


最坏情况：$O(n^2)$　　　　最坏情况：$O(n^2)$

随机位置划分



期望情况：$O(n\log n)$



期望情况：$O(n)$

总结

分而治之框架

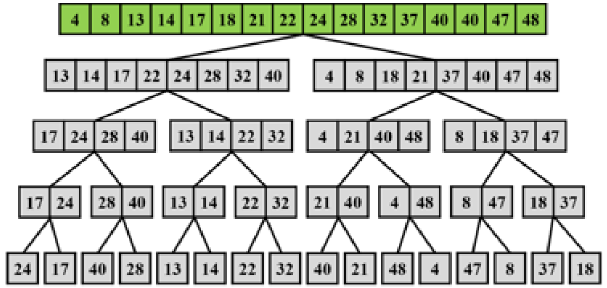
分解原问题

解决子问题

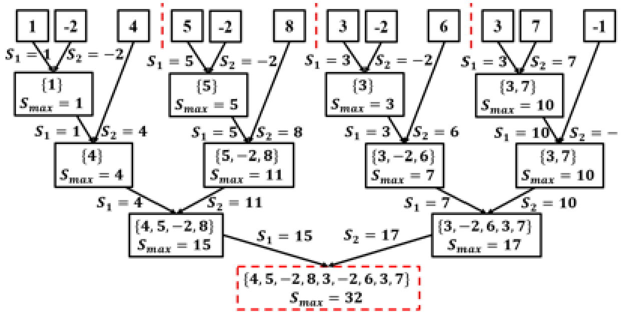
合并问题解

总结

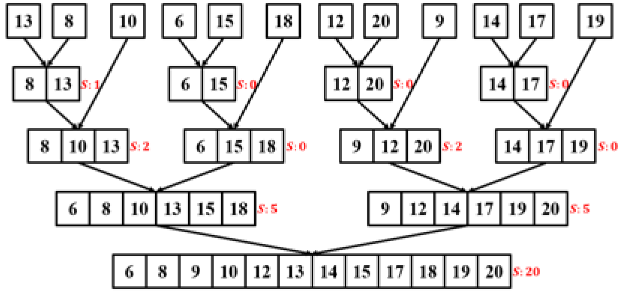
归并排序



最大子数组



逆序计数



分而治之框架

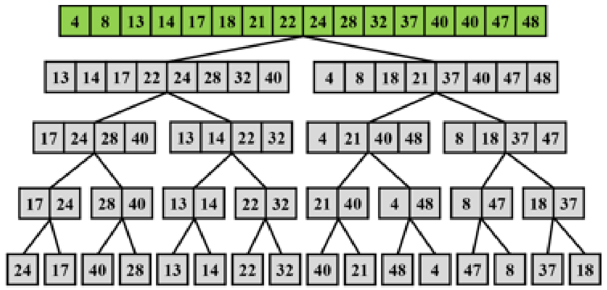
分解原问题

解决子问题

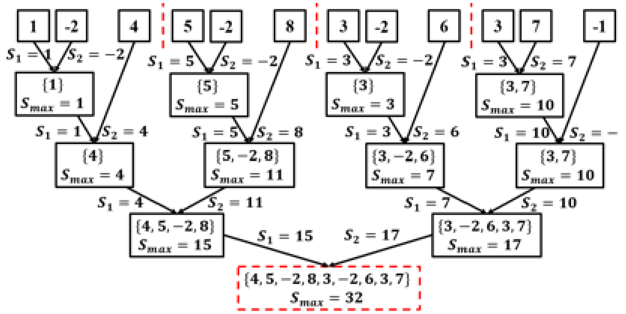
合并问题解

总结

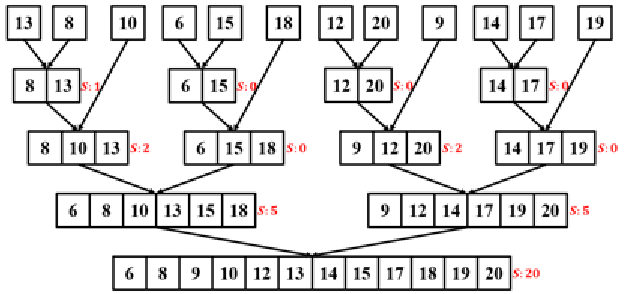
归并排序



最大子数组



逆序计数



分而治之框架

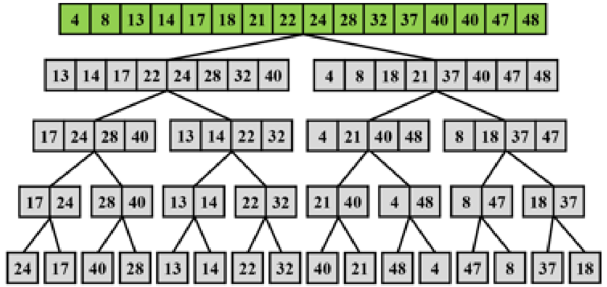
分解原问题

解决子问题

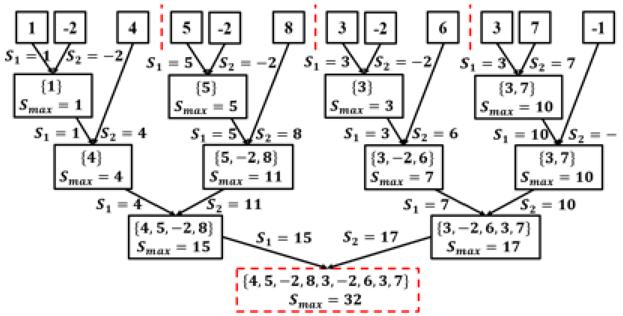
合并问题解

总结

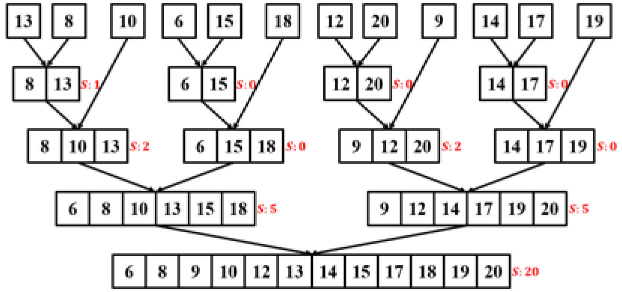
归并排序



最大子数组



逆序计数



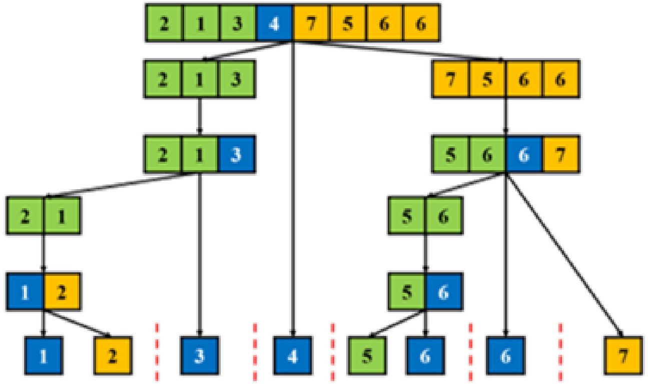
分而治之框架

分解原问题

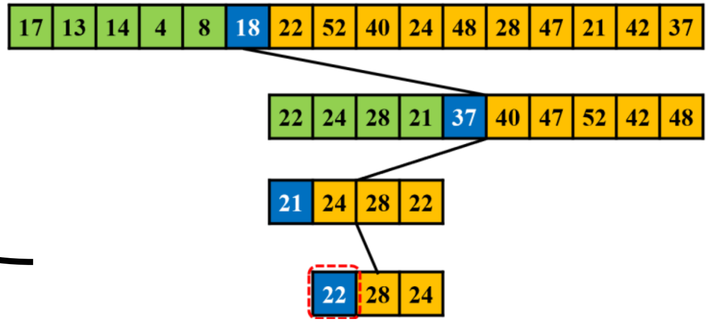
解决子问题

合并问题解

快速排序



次序选择



算法实例

- 选取固定位置主元
  - 情况1：$\boldsymbol{k = q - p + 1}$，$\boldsymbol{A[q]}$为数组第$\boldsymbol{k}$小元素
  - 情况2：$\boldsymbol{k < q - p + 1}$，在$\boldsymbol{A[p..q-1]}$中寻找第$\boldsymbol{k}$小元素
  - 情况3：$\boldsymbol{k > q - p + 1}$，在$\boldsymbol{A[q+1..r]}$中寻找第$\boldsymbol{k-(q-p+1)}$小元素