Лабораторная работа

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Постановка основной и тестовых задач. Основная задача имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\,u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0, 1)$$

$$k(x) \ge c_1 > 0,\ q(x) \ge 0,\ u(0) = \mu_1,\ u(1) = \mu_2 .$$

Коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ имеют разрыв в точке ξ, $\xi \in (0, 1)$, и заданы формулами вида

$$k(x) = k_1(x) \text{ при } x \in (0, \xi), \qquad k(x) = k_2(x) \text{ при } x \in (\xi, 1),$$

$$q(x) = q_1(x) \text{ при } x \in (0, \xi), \qquad q(x) = q_2(x) \text{ при } x \in (\xi, 1),$$

$$f(x) = f_1(x) \text{ при } x \in (0, \xi), \qquad f(x) = f_2(x) \text{ при } x \in (\xi, 1).$$

Коэффициенты $k_i(x)$, $q_i(x)$, $f_i(x)$, $i=1,2$, точка ξ и числа μ_1 и μ_2 по вариантам заданий указаны в табл. III-13.

Тестовая задача №1 имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(k^* \frac{du}{dx}\right) - q^*\, u(x) = -f^* \text{ при } x \in (0, 1)$$

$$k^* \ge c_1 > 0,\ q^* \ge 0,\ u(0) = \mu_1,\ u(1) = \mu_2,$$

В качестве решения задачи $u(x)$ выберите полином второй степени $P_2(x)$. Коэффициенты тестовой задачи №1 k^*, q^*, f^*, а также граничные условия μ_1 и μ_2 являются постоянными и *вычисляются* на основе выбранного вами полинома. Для решения тестовой задачи №1 постройте свою разностную схему (используя или же не используя метод баланса).

Таким образом, для тестовой задачи №1 известно точное решение, а ее численное решение имеет нулевую погрешность аппроксимации.

Тестовая задача №2 строится по основной и имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(k^*\frac{du}{dx}\right) - q^*\ u(x) = -f^*\ при\ x \in (0, 1)$$

$$k^* \geq c_1 > 0,\ q^* \geq 0,\ u(0) = \mu_1,\ u(1) = \mu_2,$$

Коэффициенты тестовой задачи $k^*(x), q^*(x), f^*(x)$ имеют разрыв в точке ξ и определяются по формулам вида

$k^*(x) = k_1^*(x)$ при $x \in (0, \xi)$, $k^*(x) = k_2^*(x)$ при $x \in (\xi, 1)$,

$q^*(x) = q_1^*(x)$ при $x \in (0, \xi)$, $q^*(x) = q_2^*(x)$ при $x \in (\xi, 1)$,

$f^*(x) = f_1^*(x)$ при $x \in (0, \xi)$, $f^*(x) = f_2^*(x)$ при $x \in (\xi, 1)$.

Функции $k_j^*(x), q_j^*(x), f_j^*(x),\ j = 1, 2$, определяются по коэффициентам основной задачи следующим образом:

$k_1^*(x) = \lim k(x)\ при\ x \to \xi\text{-}0$, $k_2^*(x) = \lim k(x)\ при\ x \to \xi+0$,

$q_1^*(x) = \lim q(x)\ при\ x \to \xi\text{-}0$, $q_2^*(x) = \lim q(x)\ при\ x \to \xi+0$,

$f_1^*(x) = \lim f(x)\ при\ x \to \xi\text{-}0$, $f_2^*(x) = \lim f(x)\ при\ x \to \xi+0$.

Числа ξ, μ_1 и μ_2 в тестовой задаче такие же, как в основной.

Так как коэффициенты тестовой задачи №2 являются кусочно-постоянными, тестовая задача №2 может быть решена аналитически с использованием условий сопряжения: решение тестовой задачи $u(x)$ и тепловой поток $w(x)$ должны быть непрерывными по x.

Задание. Найдите *численное решение тестовой задачи №1.* Сравните его с *точным решением тестовой задачи №1.*

Найдите *точное решение тестовой задачи №2.* Постройте методом баланса однородную консервативную разностную схему и найдите *численное решение тестовой задачи №2* с точностью $\boldsymbol{\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}}$:

$$\max|u(x_i) - v(x_i)| \leq \varepsilon$$

(здесь $u(x)$ – точное решение уравнения, $v(x)$ – приближенное). Для решения разностной схемы в обоих случаях воспользуйтесь методом прогонки.

С целью тестирования программы проверьте наличие *второго порядка сходимости* и заполните (от руки) табл. III-10, подтверждая второй порядок сходимости. Проведите серию расчетов и выясните, начиная с какого количества узлов накопление вычислительной погрешности приводит к замедлению сходимости. С этой целью заполните (от руки) первые два столбца табл. III-12 и постройте график зависимости *погрешности решения тестовых задач в зависимости от числа разбиений (шага сетки)*. ***Примечание.*** Табл. III-10 и III-12 отличаются способом выбора параметра n: в первом случае n нужно выбрать так, чтобы проверить порядок сходимости, во втором – так, чтобы получить представление о свойствах задачи в широком диапазоне изменения n.

Для решения основной задачи используйте аналогичную разностную схему. Найдите приближенное решение основной задачи на сетке с тем же шагом, что и для тестовой. Затем возьмите шаг в два раза меньше и еще раз найдите приближенное решение основной задачи. Сравните значения двух приближенных решений в общих узлах и найдите максимальный модуль разности двух приближенных решений по общим узлам.

Так же, как и для тестовой задачи, проверьте наличие *второго порядка сходимости* и заполните (от руки) табл. III-11, подтверждающий его наличие. Далее проведите серию расчетов и выясните поведение максимального различия двух приближенных решений по общим узлам при сгущении сетки в широком диапазоне изменения n. Заполните последний столбец табл. III-11 и постройте (от руки) график зависимости величины

$$max| v(x_i) - v2(x_i)|$$

от числа разбиений (шага сетки).

Вывод результатов. Для *тестовой* и *основной задачи* выводятся справки, таблицы и графики. Для тестовой задачи:

1) **справка** – текст вида «для решения тестовой задачи использована сетка с числом разбиений по x n = «___»; требуемая точность решения тестовой задачи $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$; тестовая задача решена с точностью ε_1 =«___»; максимальное отклонение точного и приближенного решений наблюдается в точке x=«___»»;

2) **точное решение** $u(x)$ и **численное решение** $v(x)$ на одном графике;

3) **разность точного и численного решения** (график)

4) **таблица** вида

Таблица III-8

№ узла	x_i	$u(x_i)$	$v(x_i)$	$u(x_i) - v(x_i)$
0				
…				
n				

Для основной задачи:

1) **справка** – текст вида «для решения основной задачи использована сетка с числом разбиений по x n = «___»; при пересчете задачи с половинным шагом максимальная разность приближенных решений составила ε_2 =«___»; и соответствует узлу x=«____»»;

2) **численное решение** $v(x)$ и **численное решение с половинным шагом** $v2(x)$ на одном графике;

3) **разность численных решений** в общих узлах (график).

4) **таблица** вида

Таблица III-9

№ узла	x_i	$v(x_i)$	$v2(x_i)$	$v(x_i) - v2(x_i)$
0				
…				
n				

По результатам проверки порядка сходимости должны быть заполнены табл. III-10 и табл. III-11. **По результатам исследования сходимости разностной схемы в широком диапазоне значений** n должна быть построена табл. III-12 и графики.

Таблица III-10

n	*Тестовая задача №2* $\max\lvert u(x_i) - v(x_i)\rvert$
n_1 n_2 ...	
Порядок сходимости	

Таблица III-11

n	*Основная задача* $\max\lvert v(x_i) - v2(x_i)\rvert$
n_1 n_2 ...	
Порядок сходимости	

Таблица III-12

n	*Тестовая задача№1* $\max\lvert u(x_i) - v(x_i)\rvert$	*Тестовая задача№2* $\max\lvert u(x_i) - v(x_i)\rvert$	*Основная задача* $\max\lvert v(x_i) - v2(x_i)\rvert$
2 4 ... 1000 ... 100 000			
Торможение сходимости			

Таблица III-13

Первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности. Варианты заданий

№	ξ	μ_1	μ_2	$k_1(x)$	$k_2(x)$	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	0.525	0	1	x^2+1	1	exp(– x)	x +1	1	x^3
2	0.525	0	1	exp(– x^2)	x+1	x^2 +1	x^2	sinx	cosx
3	0.125	1	0	x +1	x^2 +1	x^2 +1	x^2 +3	cosx	sinx
4	0.125	0	1	x +1	1	exp(– x)	exp(– x^2)	cosx	1
5	$1/\sqrt{2}$	1	0	x^2+0.5	x +1	1	exp(– x^2)	1	cosx
6	$1/\sqrt{2}$	0	1	exp(sinx)	1	2	x+3	exp(x)	exp(x)
7	$1/\sqrt{3}$	1	0	1	Exp(cosx)	x^2 +1	x^2	sinx	sinx
8	$1/\sqrt{3}$	2	1	exp(– x)	x^2+1	x^3 +1	x	x^2– 1	1
9	$1/\sqrt{5}$	1	2	$\sin^2$ (x) +1	1	x+1	x^3	1	x^2– 1
10	$1/\sqrt{10}$	1	0	2 + cos(x)	2 + sinx	1	x	2x	2
11	0.5	0	1	$(x+1)^2$	x^2 +1	$e^{-x}\sqrt{e}$	$e^{x}/\sqrt{e}$	cos(πx)	1
12	π/4	1	0	sin(x)+1	$\cos^2$(x)	1	2*x^2	sin(2x)	cos(x)
13	0.5	0	1	$e^{-x}\sqrt{e}$	1	2	Sin(πx)	cos(πx)	$e^{x}/\sqrt{e}$
14	π/4	1	0	$\sqrt{2}$ cos(x)	2	X+1	2 x^2	sin(2x)	sin(x)
15	$1/\sqrt{3}$	2	1	1	exp(x^2)	x^2+1	1+x^4	x^2– 1	1
16	1/3	1	2	x+1	1	x^2+1	2*x	1	x^2– 1