Eléments d’analyse vectorielle

Souleymane SANOGO, Ph.D

Eléments d’analyse vectorielle

- Champ scalaire - Champ vectoriel
- Gradient d’un champ scalaire
- Divergence d’un champ vectoriel
- Rotationnel d’un champ vectoriel
- Laplacien scalaire
- Laplacien vectoriel
- Opérateur nabla
- Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

Champ scalaire - Champ vectoriel

Soit M un point de l'espace, de coordonnées (*x, y, z) :*

- La fonction *f (x,y,z) est une fonction scalaire ou champ scalaire*

Exemple: la distance d=30m

- Le vecteur v(x,y,z) est une fonction vectorielle ou un champ vectoriel

Exemple: le vecteur poids P

Gradient d'un champ scalaire
Divergence d'un champ vectoriel
Rotationnel d'un champ vectoriel

Le gradient (noté $\overrightarrow{grad}$) est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, et $\vec{e}_z$ les dérivées partielles de $f(M)$ par rapport à x, y et z respectivement :

$$\overrightarrow{grad}\,(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

La divergence (notée div) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle $\vec{v}(M)$ de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div\,(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Le rotationnel noté ($\overrightarrow{rot}$) d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle de point définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{rot}\,(\vec{v}) = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\,\vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\,\vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\,\vec{e}_z$$

Laplacien scalaire
Laplacien vectoriel

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point (noté *lap* ou Δ) est par définition un champ scalaire défini par :

$$\Delta f = div\left[\overrightarrow{grad}\,(f)\right]$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le laplacien vectoriel (noté $\overrightarrow{lap}$ ou $\vec{\Delta}$) d'un champ vectoriel $\vec{v}$ est un champ vectoriel défini par :

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{grad}\,[div\,(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\,(\vec{v})\right] \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_x = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

Opérateur nabla

- Pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels précédemment définis, on introduit un vecteur symbolique appelé opérateur nabla et défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{grad}\ (f) \qquad div\left(\vec{v}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{v}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$$lap\left(f\right) = \Delta f = div\left[\overrightarrow{grad}\left(f\right)\right] = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2\left(f\right)$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \Delta \vec{v} = \overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{v}\right)\right] - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{v}\right)\right] = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v}\right) - \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{v}\right]$$

Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

- **Circulation d'un champ vectoriel**
- On définit la circulation d'un vecteur *v le long d'un contour* (*C*)*, par l'intégrale curviligne :*

$$\mathcal{C}_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{v}\right) = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- La circulation de long d´un contour fermé est notée :

$$\mathcal{C}\left(\vec{v}\right) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

- **Flux d'un champ vectoriel**
- On définit le flux d'un vecteur *v à travers une surface (S) par* l'intégrale double :

$$\phi_{/(S)}(\vec{v}) = \iint_{(S)} \vec{v}\cdot\vec{n}\; dS$$

- **Théorème de Stockes**
- La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (*C) limitant une surface (S)* est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$\mathcal{C}(\vec{v}) = \phi_{/(S)}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{v})\right)$$

$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}\; dS$$

- **Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)**
- Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (*S) est égal à l'intégrale de* sa divergence dans le volume (*τ) limité par la surface fermée (S) :*

$$\oiint_{(S)} \vec{v}\cdot\vec{n}\; dS = \iiint_{(\tau)} div(\vec{v})\; d\tau$$