Détection d'erreur de transmission

M. Combacau - combacau@laas.fr

Université Paul Sabatier
LAAS-CNRS

14 novembre 2024

Correction

Travaux dirigés sur
les codes détecteurs et correcteurs d'erreur

Exercices sur le bit de parité

Rappel $p = \bigoplus_{i=0}^{n-1} a_i$ (=1 ssi nbre impair de "1" dans A)

- **Parité paire** : bit de parité paire correspondant à

  1. $A = [0110110010110110]$ $\rightarrow$ 9 bits à "1" dans $A \Rightarrow p = 1$
  2. $A = [01101111]$ $\rightarrow$ 6 bits à "1" dans $A \Rightarrow p = 0$

Rappel $p = \overline{\bigoplus_{i=0}^{n-1} a_i}$ (=1 ssi nbre pair de "1" dans A)

- **Parité impaire** : bit de parité impaire correspondant à

  1. $A = [01101100]$ $\rightarrow$ 4 bits à "1" dans $A \Rightarrow p = 1$
  2. $A = [01110110011]$ $\rightarrow$ 7 bits à "1" dans $A \Rightarrow p = 0$

Exercices sur le bit de parité

- **Parité paire** : une erreur existe-t-elle dans ce mot ?

  1. [0110110110111] $\rightarrow$ 9 bits à "1" $\Rightarrow 2 \times k + 1$ erreur(s)
  2. [01111110]$\rightarrow$ 6 bits à "1"$\Rightarrow 2 \times k$ erreur(s) (0 le + probable)

- **Parité impaire** : une erreur existe-t-elle dans ce mot ?

  1. [011100] $\rightarrow$ 3 bits à "1" $\Rightarrow 2 \times k$ erreur(s) (0 le + probable)
  2. [011100111]$\rightarrow$ 6 bits à "1" $\Rightarrow 2 \times k + 1$ erreur(s)

Calcul de parité croisée (1)

Soit à transmettre des trames constituées de 4 mots $(D_3 \dots D_0)$ de 7 bits avec le protocole de parité croisée paire.
$D_3 = [0001101]$, $D_2 = [1010111]$, $D_1 = [1110001]$, $D_0 = [0101111]$

1. Combien de bits comporte la trame émise ?

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{4 mot de 7 bits} & = \text{28 bits} \\ \text{4 mots} & = \text{4 bits de parité bits} \\ \text{mot de 7 bits} & = \text{7 bits de parité croisée} \end{array} \right. \Rightarrow \quad 28 + 7 + 4 = \text{trame de 39 bits}$$

2. Calculer le mot de parité P et le mot de parité croisée

$$P = [1101] \quad \begin{array}{c|ccccccc l} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & (D_3) \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & (D_2) \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & (D_1) \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & (D_0) \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{array} \quad Pc = [0000100]$$

3. Donner la trame résultante en ordonnant les mots :$[D3 \dots D_0 \ P \ Pc]$

$$T = [000110110101111110001010111111010000100]$$

Correction par parité croisée (2)

La trame $[D_2\ D_1\ D_0\ P\ Pc] = [101001011101100111100010011]$ est reçue avec le protocole de parité croisée paire.

1. Calculer le contrôle de parité Cp et de parité croisée Cc et identifier le nombre d'éventuelles erreurs

   3 mot à n bits et 27 bits dans la trame. $3n + n + 3 = 27 \Rightarrow n = 6$

   $P = [100]$
   $Cp = [000]$

   $$\begin{array}{c|cccccccc}
   0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & (D_2) \\
   0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & (D_1) \\
   0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & (D_0) \\
    & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
   \hline
    & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
   \end{array}$$

   $Pc = [010011]$
   $Cc = [000000]$

2. Si nécessaire, corriger les mots de données

   $Cc = Cp = [0]$ pas d'erreur de transmission (ou 4 : très improbable)

Correction par parité croisée (3)

La trame
$[D_3\ D_2\ D_1\ D_0\ P\ Pc] = [10011010011010011001101110011]$ est reçue avec le protocole de parité croisée paire.

1. Calculer le contrôle de parité Cp et de parité croisée Cc et identifier le nombre d'éventuelles erreurs

   4 mot à n bits et 29 bits dans la trame. $4n + n + 4 = 29 \Rightarrow n = 5$

   $P = [1011]$, $Cp = [0010]$

0	1	1	0	0	1	1	(D_3)
0	0	0	1	0	0	1	(D_2)
1	1	1	0	1	0	0	(D_1)
0	1	1	1	0	0	1	(D_0)
		1	0	0	1	1	
		0	0	1	0	0	

   $Pc = [10011]$, $Cc = [00100]$

2. Si nécessaire, corriger les mots de données

   Un bit à un dans chacun des mots Cc et Cp. Il y a donc une erreur, désignée dans le mot D_1 et pour le bit b_2.

   D'où les données corrigées :

   D_3 inchangée, D_2 inchangée, $D_1 = [10000]$, D_0 inchangée

Correction par parité croisée (4)

La trame $[D_2\ D_1\ D_0\ P\ Pc] = [1000101010011110011010010100111]$ est reçue avec le protocole de parité croisée paire.

1. Calculer le contrôle de parité Cp et de parité croisée Cc et identifier le nombre d'éventuelles erreurs

   3 mot à n bits et 31 bits dans la trame. $3n + n + 3 = 31 \Rightarrow n = 7$

$$
\begin{array}{ll}
P & = [001] \\
Cp & = [101]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccccccc c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & (D_2) \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & (D_1) \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & (D_0) \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
Pc & = [0100111] \\
Cc & = [0001000]
\end{array}
$$

2. Si nécessaire, corriger les mots de données

   Deux situations différentes conduisant aux valeurs de Cc et Cp

   1. bits erronés : $d_{2,3}$ (bit de rang 3 du mot D_2) et p_0
   2. bits erronés : $d_{0,3}$ (bit de rang 3 du mot D_0) et p_2

   $\Rightarrow$ Impossibilité de corriger les erreurs

Correction par parité croisée (5)

La trame $[D_2\ D_1\ D_0\ P\ Pc] = [1101011010101000110010001111100]$ est reçue avec le protocole de parité croisée paire.

1. Calculer le contrôle de parité Cp et de parité croisée Cc et identifier le nombre d'éventuelles erreurs

   3 mot à n bits et 31 bits dans la trame. $3n + n + 3 = 31 \Rightarrow n = 7$

$P = [000]$
$Cp = [111]$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \quad (D_2) \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \quad (D_1) \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \quad (D_0) \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

$Pc = [1111100]$
$Cc = [0100100]$

2. Si nécessaire, corriger les mots de données

   Au moins, deux situations différentes conduisant aux valeurs de Cc et Cp

   1. bits erronés : $d_{2,2}$, $d_{0,5}$ et p_1
   2. bits erronés : $d_{2,5}$, $d_{1,2}$ et p_0

   $\Rightarrow$ Impossibilité de corriger les erreurs

Contrôle d'erreur par CRC

Le mot de données $D = [1101101]$ doit être émise avec un CRC correspondant au polynôme $x^2 + x + 1$

1. Calculer la valeur du CRC

Dans l'anneau des polynômes de F_2

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & x^8 & +x^7 & & +x^5 & +x^4 & & +x^2 & & \\
+ & x^8 & +x^7 & +x^6 & & & & & & \\
\hline
= & & & x^6 & +x^5 & +x^4 & & +x^2 & & \\
 & & + & x^6 & +x^5 & +x^4 & & & & \\
\hline
 & & = & & & & & x2 & & \\
 & & & & & & \oplus & x^2 & +x & +1 \\
\hline
 & & & & & & = & & x & +1
\end{array}
\quad \text{d'où CRC} = [11]
$$

Dans l'algèbre de Boole B_2

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\oplus & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\hline
= & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & \oplus & 1 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
 & & = & & & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \oplus & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & & & = & & 1 & 1
\end{array}
\quad \text{d'où CRC} = [11]
$$

d'où la trame émise $T_0 = [D, CRC] = [110110111]$

Contrôle d'erreur par CRC

La trame $T_1 = [110110111]$ est reçue avec un CRC correspondant au polynôme $x^2 + x + 1$

1. Cette trame contient-elle une ou plusieurs erreurs (ex. précédent) ?

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\oplus & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\cline{2-4}
= & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & \oplus & 1 & 1 & 1 & & & & \\
\cline{4-6}
 & & = & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & \oplus & 1 & 1 & 1 \\
\cline{8-10}
 & & & & & & = & & 0 & 0
\end{array}
$$

Le reste est nul, ce qui se produit quand il n'y a aucune erreur de transmission.

Heureusement ! car il s'agit de la trame T_0 calculée sur la diapo précédente !

Contrôle d'erreur par CRC

La trame $T_2 = [111111111]$ est reçue avec un CRC correspondant au polynôme $x^2 + x + 1$

1. Cette trame contient-elle une ou plusieurs erreurs (ex. précédent) ?

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\oplus & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & \oplus & 1 & 1 & 1 & & & \\
\cline{5-7}
 & & & = & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & \oplus & 1 & 1 & 1 \\
\cline{8-10}
 & & & & & & = & & 0 & 0
\end{array}
$$

Le reste est nul, ce qui se produit quand il n'y a aucune erreur de transmission.

Remarquons que la cette trame T_2 pourrait résulter de la transmission de la trame $T_1 = [110110111]$ entachée de deux erreurs (bits t_3 et t_6). Dans ce cas, (2 erreurs), le CRC n'assure pas la détection.

Contrôle d'erreur par CRC

La trame $T_3 = [100011111]$ est reçue avec un CRC correspondant au polynôme $x^2 + x + 1$

1. Cette trame contient-elle une ou plusieurs erreurs (ex. précédent) ?

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\oplus & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\hline
= & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\oplus & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
\hline
= & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\oplus & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
= & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
\oplus & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
= & & & & & & & & 0 & 0
\end{array}
$$

Le reste est nul, ce qui se produit quand il n'y a aucune erreur de transmission.

Remarquons, ici encore, que la cette trame T_3 pourrait résulter de la transmission de la trame $T_1 = [110110111]$ entachée de trois erreurs (bits t_3, t_5 et t_7). Dans ce cas, (3ˇ erreurs), le CRC n'assure pas la détection.

Contrôle d'erreur par CRC

1. Calculer $E_1 = T_1 \oplus T_2 = [110110111] \oplus [11111111] = [001001000]$
   et $E_2 = T_1 \oplus T_3 = [110110111] \oplus [100011111] = [010101000]$
   Remarque : E_1 et E_2 correspondent aux erreurs de transmission transformant respectivement T_1 en T_2 et T_1 en T_3
2. Vérifier que les polynômes $E_1(x)$ et $E_2(x)$ sont de la forme

$$\sum_{i=0}^{deg[P(x)]} b_i \times x^i \times (x^2 + x + 1) \quad (\text{avec } b_i \in F_2)$$

$$\begin{aligned}
E_1(x) \quad & = x^6 + x^3 = (x^6 + x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) = x^4 \times G(x) + x^3 \times G(x) && \mathit{ok} \\
E_2(x) \quad & = x^7 + x^5 + x^3 = (x^7 + x^6 + x^5) + (x^6 + x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) \\
& = x^5 \times G(x) + x^4 \times G(x) + x^3 \times G(x) && \mathit{ok}
\end{aligned}$$

3. Expliquer ce résultat analytiquement, puis le généraliser
   Dans F_2, $T_2(x) = T_1(x) + E_1(x)$. dans le cas général, $T_{recue} = T_{emise} + E(x)$
   On sait, par construction que $\frac{T_{emise}}{G(x)} \Rightarrow R(x) = 0$. Donc, le reste de $\frac{T_{recue}}{G(x)} = \frac{T_{emise}}{G(x)} + \frac{E(x)}{G(x)}$ est nul si et seulement si $\frac{E(x)}{G(x)} = 0$. La forme proposée $E(x) = \sum_{i=0}^{deg[P(x)]} b_i \times x^i \times (x^2 + x + 1)$ garantit que $\frac{E(x)}{G(x)} = 0$

Correction d'erreur par code de Hamming H(7,4)

Soit $D = [1000]$ à transmettre en H(7,4) avec bit de parité globale.

1. Calculer les bits de contrôle $c_2\ c_1\ c_0$

$$\begin{cases} c_2 & = d_3 \oplus d_2 \oplus d_1 & = 1 \oplus 0 \oplus 0 & = 1 \\ c_1 & = d_3 \oplus d_2 \oplus d_0 & = 1 \oplus 0 \oplus 0 & = 1 \\ c_0 & = d_3 \oplus d_1 \oplus d_0 & = 1 \oplus 0 \oplus 0 & = 1 \end{cases}$$

2. Calculer la trame qui sera transmise

   La trame est émise dans l'ordre $[d_3\ d_2\ d_1\ c_2\ d_0\ c_1\ c_0\ p]$

   Elle vaut donc [10010110]

   p = 0 pour avoir un nombre pair de "1" dans la trame

Correction d'erreur par code de Hamming H(7,4)

Calculer les codes des 16 valeurs de H(7,4)

d_3	d_2	d_1	d_0	c_2	c_1	c_0	p	trame émise [d_3 d_2 d_1 c_2 d_0 c_1 c_0 p]
0	0	0	0	0	0	0	0	00000000
0	0	0	1	0	1	1	1	00001111
0	0	1	0	1	0	1	1	00110011
0	0	1	1	1	1	0	0	00111100
0	1	0	0	1	1	0	1	01010101
0	1	0	1	1	0	1	0	01011010
0	1	1	0	0	1	1	0	01100110
0	1	1	1	0	0	0	1	01101001
1	0	0	0	1	1	1	0	10010110
1	0	0	1	1	0	0	1	10011001
1	0	1	0	0	1	0	1	10100101
1	0	1	1	0	0	1	0	10101010
1	1	0	0	0	0	1	1	11000011
1	1	0	1	0	1	0	0	11001100
1	1	1	0	1	0	0	0	11110000
1	1	1	1	1	1	1	1	11111111

Décodage de trame par le code de Hamming H(7,4)

[11000011] est reçue dans un transfert utilisant H(7,4)

1. Identifier le bit de parité p, le mot de contrôle C et le mot de données D

$$\begin{cases} p & = 1 \qquad \text{(valeur correcte : 4 bits à 1)} \\ C & = 001 \\ D & = 1100 \end{cases}$$

2. Quelle est la valeur du syndrome ?

$$\begin{cases} s_2 & = c_2 \oplus d_3 \oplus d_2 \oplus d_1 & = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 & = 0 \\ s_1 & = c_1 \oplus d_3 \oplus d_2 \oplus d_0 & = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 & = 0 \\ s_0 & = c_0 \oplus d_3 \oplus d_1 \oplus d_0 & = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{valeur de S=0}$$

3. Quelle était la valeur transmise par l'émetteur ?

Le bit de parité est correct et le syndrome est nul.
Situation la plus probable : pas d'erreur. D'où les données $D = [1100]$

Décodage de trame par le code de Hamming H(7,4)

[11001111] est reçue dans un transfert utilisant H(7,4)

1. Identifier le bit de parité p, le mot de contrôle C et le mot de données D

$$\begin{cases} p & = 1 \qquad \text{(valeur correcte : 6 bits à 1)} \\ C & = 011 \\ D & = 1101 \end{cases}$$

2. Quelle est la valeur du syndrome ?

$$\begin{cases} s_2 & = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 & = 0 \\ s_1 & = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 & = 0 \qquad \text{valeur de S=1} \\ s_0 & = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 & = 1 \end{cases}$$

3. Quelle était la valeur transmise par l'émetteur ?

Le bit de parité est correct et le syndrome est non nul.
Ceci traduit un nombre pair (non nul) d'erreurs $\Rightarrow$ correction impossible

Décodage de trame par le code de Hamming H(7,4)

[11000010] est reçue dans un transfert utilisant H(7,4)

1. Identifier le bit de parité p, le mot de contrôle C et le mot de données D

$$\begin{cases} p & = 0 \qquad \text{(valeur incorrecte : 3 bits à 1)} \\ C & = 001 \\ D & = 1100 \end{cases}$$

2. Quelle est la valeur du syndrome ?

$$\begin{cases} s_2 & = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 & = 0 \\ s_1 & = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 & = 0 \\ s_0 & = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{valeur de S=0 : pas d'erreur dans [DC]}$$

3. Quelle était la valeur transmise par l'émetteur ?

C'est le bit de parité qui est faux, ceci n'entraîne aucune correction.
Les bits de données sont $D = [1100]$

Décodage de trame par le code de Hamming H(7,4)

[11100011] est reçue dans un transfert utilisant H(7,4)

1. Identifier le bit de parité p, le mot de contrôle C et le mot de données D

$$\begin{cases} p & = 1 \qquad \text{(valeur incorrecte : 5 bits à 1)} \\ C & = 001 \\ D & = 1110 \end{cases}$$

2. Quelle est la valeur du syndrome ?

$$\begin{cases} s_2 & = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 & = 1 \\ s_1 & = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 & = 0 \\ s_0 & = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 & = 1 \end{cases} \qquad \text{valeur de S=5}$$

3. Quelle était la valeur transmise par l'émetteur ?

C'est le bit t_5 de la trame qui doit être corrigé.
La trame corrigée est [11000011] et les bits de données sont $D = [1100]$