Digital Data Processing

M. Combacau
combacau@laas.fr

November 6, 2024

Objectif

Simplification des fonctions logiques

Simplification des fonctions logiques

Qu'appelle-t-on simplification / optimisation ?

Simplifier ou optimiser fait référence à un critère d'optimisation

- Un trajet peut être optimisé vis à vis du coût global, de la distance à parcourir, du temps de voyage, du confort du voyageur, etc.
- L'optimum est atteint quand le critère est minimisé ou maximisé
- Pour une fonction logique, l'optimum est évalué en fonction d'un critère mesurant la difficulté de réalisation : nombre d'opérateurs + nombre de variales dans l'expression algébrique à réaliser
- Il s'agit de minimiser le critère dans notre cas
- L'optimisation (simplification) était utile quand les circuits étaient synthétisés "à la main". De nos jours, le compilateur VHDL effectue cette optimisation algorithmiquement

Il faut connaître les principes d'optimisation, l'utilisation des outils informatiques prend alors tout son sens

Simplification des fonctions logiques

Différentes méthodes de simplification

La méthode de simplification s'appuie sur une représentation.

- Représentation tabulaire : méthode de Karnaugh
- Représentation numérique : méthode de Quine& Mc Clusquey
- Représentation algébrique : méthode des consensus

Dans ce cours, nous nous limitons à la simplification par table de Karnaugh.

La méthode de Quine et Mc Clusquey est parfois qualifiée de méthode "tabulaire", mais elle repose sur une forme d'écriture numérique des points vrais et non spécifiés pour une fonction incomplètement spécifiée, le tableau n'intervenant pas pour la simplification, mais juste pour la présentation des calculs.

Simplification des fonctions logiques

Méthode de Karnaugh : complémentarité graphique (1)

La méthode de simplification de Karnaugh repose sur deux principes

1. La propriété d'absorption $(x + \overline{x} = 1)$
2. L'adjacence de deux combinaisons successives du code Gray

Deux cellules adjacentes (ayant un côté en commun) dans une table de Karnaugh ne diffèrent que par la valeur d'une variable (code Gray)
Ainsi les deux monômes associés à deux cellules adjacentes ne différant que par la variable x_i peuvent s'écrire :

$$m.x_i \quad \text{et} \quad m.\overline{x_i}$$

S'il s'agit de points vrais, la forme $\sum\prod$ formée des mintermes correspondant aux points vrais s'écrit donc

$$f = \ldots + m.x_i + m.\overline{x_i} + \ldots = \ldots + m.(x_i + \overline{x_i}) + \ldots = \ldots + m + \ldots$$

Simplification des fonctions logiques

Méthode de Karnaugh : complémentarité graphique (2)

Soit la partie de la table de Karnaugh correspondant à deux point vrais occupant des cellules adjacentes

	1	1	

$$m.x_i + m.\overline{x_i} = m(x_i + \overline{x_i}) = m$$

Pour simplifier algébriquement et graphiquement, on regroupe les quatre points vrais (méthode de Karnaugh $\equiv$ absoption de deux variables)

	1	1	
	1	1	

$$\begin{aligned}
& m.x_i.x_j + m.x_i.\overline{x_j} + m.\overline{x_i}.x_j + m.\overline{x_i}.\overline{x_j} \\
&= m.x_i.(x_j + \overline{x_j}) + m.(\overline{x_j}.x_j).\overline{x_i} \\
&= m.x_i + m.\overline{x_i} \\
&= m
\end{aligned}$$

- regroupement de quatre point vrais adjacents $\Rightarrow$ absoption de deux variables
- les variables absorbées sont celle qui changent de valeur d'un point à l'autre

Simplification des fonctions logiques

Méthode de Karnaugh : complémentarité (1)

Raisonnons sur une fonction à n variables $X = (x_{n-1}, \ldots, x_0)$

- Faire un regroupement de 2^k combinaisons permet d'éliminer k variables
  si et seulement si
  dans les k combinaisons regroupées $n-k$ variables ne changent pas de valeur.
- Le nombre de groupes de $n-k$ composantes (celles qui restent constantes dans le regroupement) parmi n composantes est donné par $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
- Enfin, pour chaque groupe de $n-k$ variables, il existe 2^{n-k} combinaisons (points)

Pour une fonction à n variables, il existe donc

$$\binom{n}{k} \times 2^{n-k} = C_k^n \times 2^{n-k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times 2^{n-k}$$

regroupements de 2^k points vrais de la fonction

Simplification des fonctions logiques

Méthode de Karnaugh : complémentarité (2)

Raisonnons sur une fonction à n variables, $X = (x_{n-1}, \ldots, x_0)$, pour des regroupements de 2^k points

n \ k	0	1	2	3	4
2	4	4	1	–	–
3	8	**12**	**6**	1	–
4	16	**32**	**24**	**8**	1
5	32	80	40	20	10

- “A la main”, l'utilisation des tables de Karnaugh se limite aux valeurs en gras
- Pour $n = 5$ ou $n = 6$ les nombre de regroupements possibles devient prohibitif, seules les méthodes algorithmiques sont viables avec exécution par un ordinateur.
- Le compilateur VHDL fait ce type de regroupement en vue de simplification.

Simplification des fonctions logiques

Méthode de Karnaugh : complémentarité graphique (3)

Application : recherche de regroupements de deux points

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	0
11	1	1	0	1
10	0	1	1	0

$$m_1 = x_3.\overline{x_1}.x_0$$
$$m_2 = \overline{x_3}.x_2.x_0$$
$$m_3 = \overline{x_2}.x_1.x_0$$
$$m_4 = x_3.x_2.\overline{x_0}$$

Il existe 32 regroupements différents...

Simplification des fonctions logiques

Méthode de Karnaugh : complémentarité graphique (4)

Application : recherche de regroupements de quatre points

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

$m_1 = \overline{x_2}.x_0$
$m_2 = x_2.x_0$
$m_3 = x_2.x_1$
$m_4 = \overline{x_2}.\overline{x_0}$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

$m_5 = \overline{x_1}.x_0$
$m_6 = \overline{x_3}.\overline{x_2}$

Il existe 24 regroupements différents...

Simplification des fonctions logiques

Méthode de Karnaugh : complémentarité graphique (5)

Application : recherche de regroupements de huit points

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$m_1 = \overline{x_2}$
$m_2 = \overline{x_3}$

$m_3 = x_0$

Il existe 8 regroupements différents...

Simplification des fonctions logiques

Implicant d'une Ea, monôme premier et application avec Karnaugh

Notons $m(X_i)$ la valeur du monôme m formé sur X pour la combinaison x_0

$$[m(X_i) \Rightarrow Ea(x_i)] \Leftrightarrow m \text{ est dit } \textbf{implicant} \text{ de } Ea$$

Un monôme m est dit **premier** si aucun de ses diviseurs n'est implicant pour Ea
Dans un tableau de karnaugh, un diviseur de m correspond à un regroupement contenant tous les points de m
Illustration

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$m = \overline{x_3}$
$m_1 = \overline{x_3}.\overline{x_1}.\overline{x_0}$
$m_2 = \overline{x_3}.x_0$
$m_4 = \overline{x_3}.x_2.x_1.\overline{x_0}$

Avec $m + m_i = m \quad \forall i \in [1..4]$

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh

Une fonction logique étant donnée sous une forme quelconque :

1. La ramener à une représentation dans une table de karnaugh
2. Faire tous les regroupements correspondants aux monômes premiers (regroupements non inclus dans un autre)
3. L'ensemble des monômes obtenus est appelé la **base première complète**

Remarque : la forme $\sum \prod$ constitué des monômes de la base première complète est parfois également appelée base première complète (abus de langage)

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh : exemples

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

On souhaite déterminer les bases mimimales des deux fonctions représentées dans ces deux tables de karnaugh.
Il faut effectuer tous les regroupements possibles de points vrais non inclus dans un autre regroupement

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh : exemples

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1

Table f_1

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

Table f_2

BPC(f_1) : $\{\overline{x_2}.\overline{x_1}, x_1, x_0, \overline{x_2}.x_0, x_2.x_1\}$

BPC(f_2) : $\{x_1.x_0, \overline{x_2}.\overline{x_0}, \overline{x_2}.x_1, x_3.x_2.x_0\}$

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh

Illustration du besoin (exemple précédent f_2)

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

BPC(f_2) : $\{x_1.x_0, \overline{x_2}.\overline{x_0}, \overline{x_2}.x_1, x_3.x_2.x_0\}$

La fonction est correctement représentée par tout ensemble de monômes premiers couvrant **tous** ses points vrais. Ici, seule une base permet de couvrir tous les points vrais.

- $b_1 = \{x_1.x_0, \overline{x_2}.\overline{x_0}, x_3.x_2.x_0\}$

Pas besoin de considérer le coût de cette solution puisqu'elle est unique...

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh

Illustration du besoin (exemple précédent f_1)

$x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1

$$BPC(f_1) = \{\overline{x_2}.\overline{x_1}, x_1, x_0, \overline{x_2}.x_0, x_2.x_1\}$$

La fonction est correctement représentée par tout ensemble de monômes premiers couvrant **tous** ses points vrais. Ici, deux bases permettent de couvrir tous les points vrais.

- $b_1 = \{\overline{x_2}.\overline{x_1}, \overline{x_2}.x_0, x_2.x_1\} \Rightarrow f = \overline{x_2}.\overline{x_1} + \overline{x_2}.x_0 + x_2.x_1$ coût $= 14$
- $b_2 = \{\overline{x_2}.\overline{x_1}, x_1.x_0, x_2.x_1\} \Rightarrow f = \overline{x_2}.\overline{x_1} + x_1.x_0 + x_2.x_1$ coût $= 13$

Le calcul des coûts des bases de cette fonction montre que l'optimum est la base b_2

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh : minimisation

Utilisation d'une table de choix (exemple générique)

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
m_3	●		●	●	●
m_2		●			
m_1	●	●	●		●

- Le point p_4 est dit essentiel (un seul monôme de couvre)
- Le monôme m_3 qui couvre le point essentiel p_4 est obligatoire : toute base de représentation de la fonction doit le contenir.
- Traitement itératif de la table : suppression des monômes obligatoires et des points qu'ils couvrent → nouvelle table à traiter.
- Ici suppression de m_3 et de p_1, p_3, p_4 et p_5. Le choix du monôme pour couvrir le point p_2 est fait en fonction du coût des monômes m_2 et m_1
- Fin de la minimisation quand tous les points sont couverts

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh : minimisation

Utilisation d'une table de choix (exemple de la fonction f_1)

	0	1	3	6	7	coût
$\overline{x_2}.\overline{x_1}$	●	●				5
$x_1.x_0$			●		●	4
$\overline{x_2}.x_0$		●	●			3
$x_2.x_1$				●	●	5

Les points 0 et 6 sont essentiels et rendent les monômes $\overline{x_2}.\overline{x_1}$ et $x_1.x_2$ obligatoires. La table est reconstruite après suppression de ces éléments

	3	coût
$x_1.x_0$	●	3
$\overline{x_2}.x_0$	●	4

Ce qui ramène bien aux deux solutions déjà évoquées intuitivement. Le choix optimal est celui du monôme de coût minimal. On retrouve la base b_2 déterminée intuitivement un peu plus tôt...

Simplification des fonctions logiques

Simplification par la méthode de Karnaugh : minimisation

Utilisation d'une table de choix (exemple de la fonction f_2)

	0	2	3	7	8	10	11	13	15	coût
$x_1.x_0$			●	●			●		●	3
$\overline{x_2}.x_0$	●	●			●	●				4
$\overline{x_2}.x_1$		●	●			●	●			4
$x_3.x_2.x_0$								●	●	5

Les points 0, 7, et 13 sont essentiels et rendent les monômes $x_1.x_0$ et $\overline{x_2}.x_0$ et $x_3.x_2.x_0$ obligatoires.

Ces trois monômes couvrent tous les points vrais de f_2 et il existe donc une seule base minimale

$$b_3 = \{x_1.x_0, \overline{x_2}.x_0, x_3.x_2.x_0\}$$

Simplification des fonctions logiques

Cas des fonctions incomplètement spécifiées

Couvrir les points vrais de la fonction f^*_{min} avec les implicants de la BPC de f^*_{max}

Exemple

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	1	*	0	1
1	0	0	*	1

$f^* = f^*_1\{0,2,6\}_{10} + f^*_*\{1,7\}_{10}$

$f^*_{min} = f^*_1\{0,2,6\}_{10}$

$f^*_{max} = f^*_1\{0,1,2,6,7\}_{10}$

$BPC(f^*_{max}) = \{\overline{x_2}.\overline{x_1}, \overline{x_2}.\overline{x_0}, x_2.x_1, x_1.\overline{x_0}\}$

	0	2	6	
$\overline{x_2}.\overline{x_1}$	●			coût=5
$\overline{x_2}.\overline{x_0}$	●	●		coût=5
$x_2.x_1$			●	coût=3
$x_1.\overline{x_0}$		●	●	coût=4

- solution 1 : $\{\overline{x_2}.\overline{x_1}, x_1.\overline{x_0}\}$ coût $=9$
- solution 2 : $\{\overline{x_2}.\overline{x_0}, x_2.x_1\}$ coût $=8$
- solution 3 : $\{\overline{x_2}.\overline{x_0}, x_1.\overline{x_0}\}$ coût $=9$

pas de point essentiel $\Rightarrow$ énumération des solutions et détection de la solution optimale