Digital Data Processing

M. Combacau
combacau@laas.fr

November 2, 2024

Objectif

Savoir passer d'une représentation à une autre

Changement de représentation

Pourquoi changer de représentation d'une fonction logique

Sur le plan académique, cela montre explicitement que les représentations sont équivalentes.
Nous ne parlerons pas de la représentation spatiale, non utilisée dans ce cours car elle est limitée aux fonctions à 3 variables

- Numérique
- Algébrique
- Table de vérité
- Table de karnaugh

Changement de représentation

Numérique $\longrightarrow$ Table de vérité

- La table de vérité fait apparaître une combinaison de X par ligne
- Les combinaisons sont rangées dans l'ordre binaire naturel
- $\Rightarrow$ Transcription immédiate des listes de point

Exemple

soit $f^* = f_1^*\{0,2,5\}_{10} + f_*^*\{1,3\}_{10}$
$\Rightarrow$ trois variables ($X = (x_2, x_1, x_0)$)

Changement de représentation

Numérique ⟶ Table de vérité

- La table de vérité fait apparaître une combinaison de X par ligne
- Les combinaisons sont rangées dans l'ordre binaire naturel
- $\Rightarrow$ Transcription immédiate des listes de point

Exemple

soit $f^* = f_1^*\{0,2,5\}_{10} + f_*^*\{1,3\}_{10}$
$\Rightarrow$ trois variables ($X = (x_2, x_1, x_0)$)

n	x_2	x_1	x_0	f^*
0	0	0	0	1
1	0	0	1	$*$
2	0	1	0	1
3	0	1	1	$*$
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Changement de représentation

Numérique $\longrightarrow$ Table de Karnaugh (1)

- la table de Karnaugh associe une combinaison de X à chaque cellule
- Les combinaisons sont rangées dans l'ordre binaire **réfléchi**
- $\Rightarrow$ Transcription immédiate des listes de point

Exemple

soit $f^* = f_1^*\{0, 2, 5, 9, 11\}_{10} + f_*^*\{1, 3\}_{10}$
$\Rightarrow$ quatre variables $(X = (x_3, x_2, x_1, x_0))$

Changement de représentation

Numérique $\longrightarrow$ Table de Karnaugh (2)

- la table de Karnaugh associe une combinaison de X à chaque cellule
- Les combinaisons sont rangées dans l'ordre binaire **réfléchi**
- $\Rightarrow$ Transcription immédiate des listes de point

Exemple

soit $f^* = f_1^*\{0,2,5,9,11\}_{10} + f_*^*\{1,3\}_{10}$
$\Rightarrow$ quatre variables $(X = (x_3, x_2, x_1, x_0))$

x_3, x_2 \ x_1, x_0	00	01	11	10
00	1	$*$	$*$	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

Changement de représentation

Numérique $\longrightarrow$ Algébrique (1)

- Une valeur numérique est associé à un point de X
- On construit un **monôme** ne prenant la valeur 1 qu'en ce point
  1. les 0 sont remplacés par la variable complémentée ($\overline{x_i}$)
  2. les 1 sont remplacés par la variable (x_i)
- Construction de la forme $\sum \prod$ des monômes construits sur les points vrais
- $\Rightarrow$ Transcription immédiate des listes de point

Exemple

soit $f^* = f_1^*\{0, 2, 5, 7\}_{10}$
$\Rightarrow$ trois variables ($X = (x_2, x_1, x_0)$)

n	combinaison	monôme
0	$(0, 0, 0)$	$\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}$
1	$(0, 0, 1)$	$\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$
2	$(0, 1, 0)$	$\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}$
3	$(0, 1, 1)$	$\overline{x_2}.x_1.x_0$
4	$(1, 0, 0)$	$x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}$
5	$(1, 0, 1)$	$x_2.\overline{x_1}.x_0$
6	$(1, 1, 0)$	$x_2.x_1.\overline{x_0}$
7	$(1, 1, 1)$	$x_2.x_1.x_0$

D'où $f = \overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0} + \overline{x_2}.x_1.\overline{x_0} + x_2.\overline{x_1}.x_0 + x_2.x_1.x_0$

Changement de représentation

Numérique ⟶ Algébrique (2)

- Il est possible de construire une forme $\prod\sum$
  1. construction de la forme $\sum\prod$ de $\overline{f}$
  2. complémentation pour retrouver f
  3. application du théorème de de Morgan

Exemple

soit $f^* = f_1^*\{0, 2, 5, 7\}_{10}$

$\Rightarrow$ trois variables $(X = (x_2, x_1, x_0))$

n	combinaison	monôme
1	$(0,0,1)$	$\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$
3	$(0,1,1)$	$\overline{x_2}.x_1.x_0$
4	$(1,0,0)$	$x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}$
6	$(1,1,0)$	$x_2.x_1.\overline{x_0}$

D'où $\overline{f} = \overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0 + \overline{x_2}.x_1.x_0 + x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0} + x_2.x_1.\overline{x_0}$

D'où $\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0 + \overline{x_2}.x_1.x_0 + x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0} + x_2.x_1.\overline{x_0}}$

$$f = (\overline{\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0}).(\overline{\overline{x_2}.x_1.x_0}).(\overline{x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}}).(\overline{x_2.x_1.\overline{x_0}})$$

$$f = (x_2 + x_1 + \overline{x_0}).(x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}).(\overline{x_2} + x_1 + x_0).(\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0)$$

On en tire une démarche générale d'obtention de la forme $\prod\sum$ d'une fonction f

Changement de représentation

Généralisation des changements de représentation

Nous avons montré qu'il existait un traitement algorithmique pour passer de la représentation numérique vers les trois autres représentations.
Si nous montrons qu'il est possible de passer de ces trois autres représentations à une représentaion numérique, nous montrons qu'il est possible, par deux transformations successives, de passer de n'importe quelle représentation à n'importe quelle autre.
Montrons donc comment passer de

1. Table de vérité $\longrightarrow$ Numérique
2. Table de karnaugh $\longrightarrow$ Numérique
3. Algébrique $\longrightarrow$ Numérique

Changement de représentation

Table de vérité $\longrightarrow$ numérique

La table de vérité liste les points du vecteur X sur lequel porte la fonction

1. Construire l'ensemble des points vrais par lecture de la table de vérité
2. Rechercher leur représentation numérique par $\sum_{i=0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i$ et créer $f_1(f)$
3. Construire l'ensemble des points non spécifiés par lecture de la table de vérité
4. Rechercher leur représentation numérique par $\sum_{i=0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i$ et créer $f_*(f)$

Exemple : soit f^* définie par la table de vérité

n	combinaison	monôme
0	$(0,0,0)$	0
1	$(0,0,1)$	1
2	$(0,1,0)$	1
3	$(0,1,1)$	$*$
4	$(1,0,0)$	1
5	$(1,0,1)$	0
6	$(1,1,0)$	0
7	$(1,1,1)$	$*$

d'où $f^* = f_1^*\{1,2,4\}_{10} + f_*^*\{3,7\}_{10}$

Changement de représentation

Table de Karnaugh $\longrightarrow$ numérique

La table de Karnaugh liste les points du vecteur X sur lequel porte la fonction

1. Construire l'ensemble des points vrais par lecture de la table de vérité
2. Rechercher leur représentation numérique par $\sum_{i=0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i$ et créer $f_1(f)$
3. Construire l'ensemble des points non spécifiés par lecture de la table de vérité
4. Rechercher leur représentation numérique par $\sum_{i=0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i$ et créer $f_*(f)$

Exemple : soit f^* définie par la table de Karnaugh

x_3, x_2 \ x_1, x_0	00	01	11	10
00	1	*	*	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

d'où $f^* = f_1^*\{0, 2, 5, 9, 11\}_{10} + f_*^*\{1, 3\}_{10}$

Changement de représentation

Algébrique $\longrightarrow$ numérique

A l'aide d'un tableau de correspondance entre les mintermes et leur valeur numérique, il est possible de transformer simplement une forme $\sum\prod$ ne contenant que des mintermes en représentation numérique.
Exemple : avec 3 variables

$$\text{Soit } f \text{ définie par } f = x_2.x_1.\overline{x_0} + \overline{x_2}.x_1.x_0 + \overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$$

Les trois monômes sont des mintermes, et il est possible de retrouver leur valeur numérique avec la formule $\sum_{i=0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i$

$$\text{On en déduit } f^* = f_1\{1, 3, 6, \}_{10}$$

Nota : pas de point non spécifié dans ce changement de représentation

Changement de représentation

Algébrique $\longrightarrow$ numérique

Si l'expression algébrique de la fonction n'est pas sous la forme d'une somme de mintermes, il faut la modifier pour obtenir une somme de mintermes. Trois étapes :

1. Développer si besoin l'Ea sous la forme $\sum\prod$
2. Pour chaque monôme de cette forme $\sum\prod$ ne comportant pas toutes les variables, faire le ET logique avec les éléments neutres $(x_i + \overline{x_i})$ construits avec les variables manquantes dans le monôme. Développer pour obtenir une somme de mintermes
3. Eliminer les doublons de cette forme $\sum\prod$

La forme $\sum\prod$ ainsi obtenu ne comporte que les mintermes correspondant aux points vrais

Changement de représentation

Algébrique $\longrightarrow$ numérique

Exemple : avec 3 variables

Soit f définie par $f = (x_0 + x_1).x_2 + x_0$

1. $(x_0 + x_1).x_2 + x_0 = x_0.x_2 + x_1.x_2 + x_0 = x_1.x_2 + x_0$
2. - $x_0 = (x_2 + \overline{x_2}).(x_1 + \overline{x_1}).x_0 = x_2.x_1.x_0 + \overline{x_2}.x_1.x_0 + x_2.\overline{x_1}.x_0 + \overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$
   - $x_1.x_2 = x_2.x_1.(x_0 + \overline{x_0}) = x_2.x_1.x_0 + x_2.x_1.\overline{x_0}$
3. supprimer les doublons s'il y en a
   $f = x_2.x_1.x_0 + \overline{x_2}.x_1.x_0 + x_2.\overline{x_1}.x_0 + \overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0 + \cancel{x_2.x_1.x_0} + x_2.x_1.\overline{x_0}$

On déduit à l'aide de la table de correspondance minterme/valeur :

$$f^* = f_1\{1, 3, 5, 6, 7\}_{10}$$