Digital Data Processing

M. Combacau
combacau@laas.fr

November 4, 2024

Objectif

Représentation des fonctions logiques

Représentation des fonctions logiques

Divers types de représentation

Depuis la création de l'algèbre de Boole, de nombreuses représentations des fonctions logiques ont été élaborées

- Représentation numérique (liste de points vrais/indéterminés/faux)
- Représentation graphique dans un repère à n dimensions (réaliste uniquement si $n \leq 3$)
- Représentations tabulaires
  - La table de vérité
  - La table de Karnaugh
- Représentation algébrique

Représentation des fonctions logiques

Représentation numérique (1)

Soit f^* : $f*(x_{n-1}\ldots x_0) \in B_2*$ (cas le plus général)

- Le principe : donner la liste des points vrais / indéterminés / faux sous forme de listes d'entiers naturels
- codage : combinaison X_a représentée par $k_a \in \mathbb{N}$ défini par

$$k_a = \sum_{0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i \quad \text{(codage binaire naturel)}$$

  avec
  - $N(x_i) \in \mathbb{N}$
  - $\begin{cases} x_i = 0 \Leftrightarrow N(x_i) = 0 \\ x_i = 1 \Leftrightarrow N(x_i) = 1 \end{cases}$
- Exemples : $X = (x_2, x_1, x_0)$

  $X_a = (1,1,0) \Leftrightarrow k_a = N(1) \times 2^2 + N(1) \times 2^1 + N(0) \times 2^0 = 2^2 + 2^1 = 6$

Représentation des fonctions logiques

Représentation numérique (2)

La forme générale d'une telle représentation est :

$$f = f_1\{k_a \ldots k_h\}_b + f_*\{k_h \ldots k_l\}_b[+f_0\{k_m \ldots k_t\}_b]$$

- pour f^* : deux listes nécessaires
- pour f : une liste nécessaire
- ne nécessite pas la connaissance de X

Exemples

- $f^* = f_1^*\{0,4,7\}_{10} + f_*^*\{1,2\}_{10}$
  (ou $f^* = f_1^*\{0,4,7\}_{10} + f_0^*\{3,5,6\}_{10}$)
- $f = f_1\{1,2,5,6\}_{10}$ (ou $f = f_0\{0,3,4,7\}_{10}$)

  $\rightarrow$ utilisée dans certaines méthodes de simplification

Représentation des fonctions logiques

Représentation graphique ou spatiale (1)

Les points sont sur les sommets d'un hypercube dans un espace de dimension n.
Limité au cas où $n \leq 3$ pour l'algèbre de Boole
Exemples

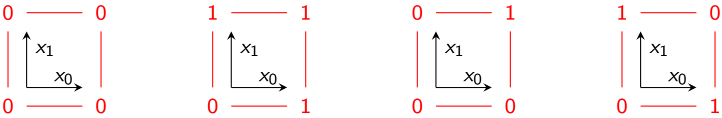
- cas $n = 1$

$\xrightarrow{x_0}$	$\xrightarrow{x_0}$	$\xrightarrow{x_0}$	$\xrightarrow{x_0}$
0 —— 0	0 —— 1	1 —— 0	1 —— 1
$f(x) = 0$	$f(x) = x$	$f(x) = \overline{x}$	$f(x) = 1$

Représentation des fonctions logiques

Représentation graphique ou spatiale (2)

- cas $n = 2$



$f = 0$ $\quad$ $f = x_1 + x_0$ $\quad$ $f = x_1 . x_0$ $\quad$ $f = XOR(x_1, x_0)$

- cas $n = 3$ (sur un cube !) pfff...
- cas $n = 4$ impossible sur un plan...

$\rightarrow$ utilisée pour les systèmes séquentiels (L3 EEA à Toulouse)

Représentation des fonctions logiques

Table de vérité

- Déjà rencontré (sans réelle définition)
- Tableau avec une combinaison de X par ligne
- Ordre binaire naturel des combinaisons
- Très utilisée, en particulier en VHDL (vu en Discrete Events Systems - juin 2024)

Exemples déjà rencontrés

n	x_1	x_0	ET
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

n	x_1	x_0	NOR
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	0

n	x_1	x_0	XOR
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

Rappel : ordre binaire naturel lié à la valeur associée à une combinaison X_a par

$$k_a = \sum_{0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i$$

$\Rightarrow$ c'est l'ordre des entiers dans $\mathbb{N}$ défini par la relation $<$

Représentation des fonctions logiques

Table de Karnaugh (1)

- Tableau à double entrée le plus proche possible du carré
- pour X à n composantes
  - entrée des lignes : combinaisons des composantes $n-1$ à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
  - entrée des colonnes : combinaisons des composantes $n-1$ à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$
- Une cellule correspond ainsi à une combinaison de X
- Ordre binaire réfléchi (code de Gray) pour les combinaisons

Code Gray

- 1 variable : 0,0
- 2 variables : 00,01,11,10
- 3 variables : 000,001,011,010,110,111,101,100

Propriétés : code cyclique à valeurs adjacentes

Représentation des fonctions logiques

Table de Karnaugh (2)

Exemples et valeurs des combinaisons $\left(k_a = \sum_{i=0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i\right)$

- 2 composantes $X = (x_1, x_0)$

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	1
1	2	3

- 3 composantes $X = (x_2, x_1, x_0)$

$x_2 \backslash x_1, x_0$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Représentation des fonctions logiques

Table de Karnaugh (3)

Correspondance table de Karnaugh et valeurs des combinaisons

$$k_a = \sum_{i=0}^{n-1} N(x_i) \times 2^i$$

- 4 composantes $X = (x_3, x_2, x_2, x_0)$

x_1, x_0 (colonnes) ; x_3, x_2 (lignes)

x_3, x_2 \ x_1, x_0	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Représentation des fonctions logiques

Table de Karnaugh (4)

Exemples)

- *OU*

x_1 \ x_0	0	1
0	0	1
1	1	1

- *XOR*

x_1 \ x_0	0	1
0	0	1
1	1	0

Représentation des fonctions logiques

Représentations algébriques (1)

- $f(X)$ est représentée par une expression algébrique Ea formée sur X telle que pour toute combinaison X_i de X
  - X_i est un point faux $\Leftrightarrow Ea(X_i) = 0$
  - X_i est un point vrai $\Leftrightarrow Ea(X_i) = 1$
- Une expression algébrique ne prend **jamais** la valeur * de B_2^*, il n'existe donc pas de représentation algébrique d'une fonction incomplètement spécifiée

Exemples

- la fonction OR est représentée par l'Ea : $x_1 + x_0$
- la fonction NAND est représentée par l'Ea : $\overline{x_1 . x_0}$

Représentation des fonctions logiques

Représentations algébriques (2)

- Une fonction f admettant pour représentation algébrique Ea_0, admet aussi pour représentation algébrique toute Ea_i telle que $Ea_i = Ea_0$
- Exemple, OU est représentée par :
  - $x_1 + x_0$
  - $x_1.\overline{x_0} + x_0$
  - $x_1.\overline{x_0} + \overline{x_1}.x_0 + x_1.x_0$
  - ...

Représentation des fonctions logiques

Représentations algébriques (3)

Relation d'ordre dans les fonctions

Convenons de noter $P_1(f^*)$ (resp. $P_*(f^*)$) les ensembles de point vrais (respectivement points non spécifiés) de f^* fonction incomplètement spécifiée

Une relation d'ordre peut être définie dans l'ensemble des fonction de X par

$$f_1 \geq f^* \Leftrightarrow P_1(f^*) \subset P_1(f_1) \subset (P_1(f^*) \cup P_*(f^*))$$

Exemple soit $f^* = f_1\{0,4,7\}_{10} + f_*\{1,2\}_{10}$

- $f^a = f_1^a\{0,1,4,7\}_{10} + f_*^a\{2\}_{10}$ est telle que $f^a \geq f^*$
- $f^b = f_1^b\{4,7\}_{10} + f_*^b\{0,1,2\}_{10}$ et telle que $f^* \geq f^b$

Représentation des fonctions logiques

Représentations algébriques (4)

Encadrement d'une fonction incomplètement spécifiée

- Notons f^*_{max} la fonction definie par
  $$P_1(f^*_{max}) = (P_1(f^*) \cup P_*(f^*)) \text{ et } P_0(f^*_{max}) = P_0(f^*)$$
  f^*_{max} n' a pas de point non spécifé
- Notons f^*_{min} la fonction definie par
  $$P_1(f^*_{min}) = P_1(f^*) \text{ et } P_0(f^*_{min}) = (P_0(f^*) \cup P_*(f^*))$$
  f^*_{min} n' a pas de point non spécifé
- on peut écrire
  $$f^*_{max} \geq f^* \geq f^*_{min}$$

Toute fonction f entièrement spécifiée et telle que

$$f^*_{max} \geq f \geq f^*_{min}$$

est une représentation correcte de la fonction f^*

Représentation des fonctions logiques

Représentations algébriques (5)

Représentation algébrique d'une fonction incomplètement spécifiée
Du résultat précédent, on peut définir la représentation algébrique d'une fonction incomplètement spécifié f^* comme la représentation algébrique d'une fonction complètement spécifiée f telle que

$$f^*_{max} \geq f \geq f^*_{min}$$

Exemples : soit $f* = f_1^*\{0\}_{10} + f_*^*\{1,2\}_{10}$

- $f^*_{max} = f_1^*\{0,1,2\}_{10}$ $(\overline{x_1.x_0})$ est une représentation de f^*
- $f^*_{min} = f_1^*\{0\}_{10}$ $(\overline{x_1 + x_0})$ est une représentation de f^*
- $f_a = f_1^a\{0,1\}_{10}$ $(\overline{x_1})$ est une représentation de f^*
- $f_b = f_1^b\{0,2\}_{10}$ $(\overline{x_0})$ est une représentation de f^*