1 Algèbre de Boole

1. Pourquoi peut-on construire un algèbre de Boole à partir de l'ensemble $A_2 = \{a, b\}$?

Car l'algèbre de Boole nécessite sur un ensemble à 2 éléments. Dans tout ce qui suit, on peut reprendre les définitions données avec B^2 en remplaçant 0 par a et 1 par b

2. Donner la définition de l'opérateur complément

sous la forme d'une table de vérité :

x_1	NON
a	b
b	a

3. Donner la définition de l'opérateur ET

sous la forme d'une table de vérité :

x_1	x_2	ET
a	a	a
a	b	a
b	a	a
b	b	b

4. Donner la définition de l'opérateur OU

sous la forme d'une table de vérité :

x_1	x_2	OU
a	a	a
a	b	b
b	a	b
b	b	b

2 Propriétés de l'algèbre de boole

1. Démontrer la version $\prod\sum$ de la distributivité de OU sur ET

La démonstration de cette égalité ($x + y.z = (x + y).(x + z)$) peut être faite de plusieurs manières. Deux démarches systématiques existent.

(a) en se ramenant de chaque coté de l'égalité à une somme de mintermes (monôme comportant toutes les composantes du vecteur X sur lequel est formée l'Ea)

(b) par induction, à l'aide d'une table de vérité

Pour ce premier exemple nous développerons les deux méthodes

(a) par recherche de la liste des mintermes. Il suffit de faire le produit du monôme ne constituant pas un minterme par les éléments neutres construits à partir des variables n'apparaissant pas dans ce monôme

$$\begin{array}{rcl}
x + y.z & = & (x + y).(x + z) \\
x.(\overline{y} + y).(\overline{z} + z) + (\overline{x} + x).y.z & = & x.x + x.z + x.y + y.z \quad \text{(retour à une forme } \sum\prod) \\
x.\overline{y}.\overline{z} + x\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + x.y.z + \overline{x}.y.z + \cancel{x.y.z} & = & x.(\overline{y} + y).(\overline{z} + z) + x.(\overline{y} + y).z + x.y.(\overline{z} + z) + (\overline{x} + x).y.z \\
x.\overline{y}.\overline{z} + x\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + x.y.z + \overline{x}.y.z & = & x.\overline{y}.\overline{z} + x\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + x.y.z \\
 & & \cancel{x.\overline{y}.z} + \cancel{x.y.z} + \\
 & & \cancel{x.y.\overline{z}} + \cancel{x.y.z} + \\
 & & \overline{x}.y.z + \cancel{x.y.z} \\
x.\overline{y}.\overline{z} + x\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + x.y.z + \overline{x}.y.z & = & x.\overline{y}.\overline{z} + x\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + x.y.z + \overline{x}.y.z
\end{array}$$

Les deux listes de mintermes sont identiques des deux cotés de l'égalité □

(b) avec une table de vérité

x	y	z	$x + y.z$	$(x + y).(x + z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Il apparaît que les deux expressions algébriques ont même valeur pour toute combinaison de (x, y, z) □

---

2. Démontrer la règle du consensus version $\prod\sum$

Utilisons la méthode des transformations algébriques

$$\begin{array}{rcl}
(x + y).(\overline{x} + z) & = & (x + y).(\overline{x} + z).(y + z) \\
\cancel{x.\overline{x}} + x.z + \overline{x}.y + yz & = & \cancel{x.\overline{x}.y} + \cancel{x.\overline{x}.z} + x.z.y + x.z.\cancel{z} + y.\overline{x}.\cancel{y} + y.\overline{x}.z + y.z.\cancel{y} + y.z.\cancel{z} \\
x.z + \overline{x}.y + yz & = & x.z.y + x.z + y.\overline{x} + y.\overline{x}.z + y.z + \cancel{y.z} \\
x.z + \overline{x}.y + yz & = & \cancel{x.z.y} + x.z + y.\overline{x} + \cancel{y.\overline{x}.z} + y.z \\
x.z + \overline{x}.y + yz & = & x.z + y.\overline{x} + y.z
\end{array}$$

A ce niveau du développement, l'égalité est prouvée sans avoir besoin de développer les expressions jusqu'aux mintermes □

---

3. Démontrer que l'opérateur XOR applique à un vecteur de dimension quelconque donne la valeur "vrai" pour tout monôme comportant un nombre impair de variables non complémentées.

La proposition devant être vraie pour une nombre quelconque de variables, seul le raisonnement par récurrence peut permet d'obtenir ce résultat.

Définissons d'abord par récurrence $XOR((x_{n-1}, \ldots, x_0)) = XOR(x_{n-1}, (x_{n-2}, \ldots, x_0))$

- pour $X_2 = (x_1, x_0)$
  $XOR(X_2) = \overline{x_1}.x_0 + x_1.\overline{x0}$
  La proposition est vérifiée car une et une seule variable non complémentée apparaît dans chaque monôme. Notons également que les deux point vrais sont représentés individuellement par leur minterme.
- pour $X_n = (x_{n-1}, \ldots, x_0)$ supposons que cette proposition est vraie. Tous les monômes formés sur X_n sont des points vrais de cette fonction, et tous les autres monômes sont des points faux.
  Nous en concluons que dans l'écriture de $XOR(X_n)$ apparaissent tous monômes (mintermes) comportant un nombre impair de variables non complémentées à l'exclusion de tout autre monôme.
- pour $X_{n+1} = (x_n, \ldots, x_0)$ on peut écrire que

$$XOR(X_{n+1}) = XOR(x_n, XOR(X_n) = \overline{x_n}.XOR(X_n) + x_n.\overline{XOR(X_N})$$

(a) $XOR(X_n)$ ne contient que des monômes (mintermes) comportant un nombre impair de variables non complémentées, ainsi en ramenant l'expression algébrique $\overline{x_n}.XOR(X_n)$ sous la forme $\sum\prod$ elle ne peut contenir que des monômes (mintermes) comportant un nombre impair de variables non complémentées

(b) B_2^n contient deux types de monômes :
- ceux qui comportent un nombre impair de variables non complémentées
- ceux qui comportent un nombre pair de variables non complémentées

Ainsi l'expression algébrique $\overline{XOR(X_N)}$ contient nécessairement tous le monômes (mintermes) comportant un nombre pair de variables non complémentées. Par conséquent, l'expression algébrique $x_n.\overline{XOR(X_N)}$ ramenée à une forme $\sum\prod$ comporte nécessairement tous les monômes (mintermes) comportant une nombre impair de variables non complémentées.

De (a) et (b), on conclut que la proposition est bien valide (correcte/vérifiée) pour tout $n \geq 2$ $\square$

---

4. Démontrer que l'opérateur NOR est un opérateur complet

Il suffit (c'est la définition d'un opérateur complet) que l'on puisse exprimer les trois opérateurs NON, ET et OU avec uniquement l'opérateur NOR pour prouver qu'il est complet

NON $\overline{x} = \overline{x + x} = NOR(x, x)$ $\square$

OU $x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{NOR(x, y)} = NOR(NOR(x, y), NOR(x, y))$ $\square$

ET $x.y = \overline{\overline{x.y}} = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = NOR(NOR(x, x), NOR(y, y))$ $\square$

NOR est donc bien un opérateur complet

---

3 Egalité d'expressions algébriques

1. Démontrer que

$$\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}+x_1.\overline{x_0}+x_2.x_0=\overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.(x_1+x_0)$$

$$\begin{array}{rcl}
\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}+x_1.\overline{x_0}+x_2.x_0 & = & \overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.(x_1+x_0) \\
\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}+(\overline{x_2}+x_2).x_1.\overline{x_0}+x_2.(\overline{x_1}+x_1).x_0 & = & \overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.x_1+x_2.x_0 \\
\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}+\cancel{\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}}+x_2.x_1.\overline{x_0}+x_2.\overline{x_1}.x_0+x_2.x_1.x_0 & = & \overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.x_1+x_2.x_0 \\
\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}+x_2.x_1.\overline{x_0}+x_2.x_1.x_0+x_2.\overline{x_1}.x_0+x_2.x_1.x_0 & = & \overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.x_1+x_2.x_0 \\
\overline{x_2}.\overline{x_0}.\cancel{(\overline{x_1}+x_1)}+x_2.x_1.\cancel{(\overline{x_0}+x_0)}+x_2.x_0.\cancel{(\overline{x_1}+x_1)} & = & \overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.x_1+x_2.x_0 \\
\overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.x_1.+x_2.x_0 & = & \overline{x_2}.\overline{x_0}+x_2.x_1+x_2.x_0
\end{array}$$

Pour cet exercice également, il n'est pas nécessaire de revenir jusqu'aux mintermes pour démontrer que l'égalité est vérifiée □

---

2. Démontrer que

$$\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_0}+x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_0}=\overline{x_3}.\overline{x_1}+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_0}+\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$$

$$(1) \qquad = \qquad (2)$$

$$\begin{array}{rcl}
(1) & = & \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}+x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_0} \\
 & = & \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.(\overline{x_0}+x_0)+x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.(\overline{x_1}+x_1).\overline{x_0} \\
 & = & \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.x_2.x_1.\overline{x_0}+x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\cancel{\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}}+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.x_0 \\
 & = & \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.x_2.x_1.\overline{x_0}+x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.x_0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(2) & = & \overline{x_3}.\overline{x_1}+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_0}+\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0 \\
 & = & \overline{x_3}.(\overline{x_2}+x_2).\overline{x_1}.(\overline{x_0}+x_0)+\overline{x_3}.x_2.(\overline{x_1}+x_1)\overline{x_0}+(\overline{x_3}+x_3).\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0 \\
 & = & \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.x_0+ \\
 & & \cancel{\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}}+\overline{x_3}.x_2.x_1.\overline{x_0}+\cancel{\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0}+x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0 \\
 & = & \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}+\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.x_0+\overline{x_3}.x_2.x_1.\overline{x_0}+x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0
\end{array}$$

La comparaison des deux listes de mintermes montre que l'égalité initiale est vérifiée □

---

3. Démontrer par transformation algébrique la version $\sum\prod$ de la règle du consensus.

La règle du consensus ($\sum\prod$) s'écrit

$$x.y+\overline{x}.z=x.y+\overline{x}.z+yz$$

$$\begin{array}{rcl}
x.y+\overline{x}.z & = & x.y+\overline{x}.z+yz \\
x.y.(\overline{z}+z)+\overline{x}.(\overline{y}+y).z & = & x.y.(\overline{z}+z)+\overline{x}.(\overline{y}+y).z+(\overline{x}+x).yz \\
x.y.\overline{z}+x.y.z+\overline{x}.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z & = & x.y.\overline{z}+x.y.z+\overline{x}.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z+\cancel{\overline{x}.y.z}+\cancel{x.y.z} \\
x.y.\overline{z}+x.y.z+\overline{x}.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z & = & x.y.\overline{z}+x.y.z+\overline{x}.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z
\end{array}$$

Règle du consensus ($\sum\prod$) démontrée □

---

4. Démontrer par transformation algébrique que $x_1+\overline{x_1}.x_0=x_1+x_0$

$$\begin{array}{rcl}
x_1+\overline{x_1}.x_0 & = & x_1.(\overline{x_0}+x_0)+\overline{x_1}.x_0=x_1.\overline{x_0}+x_1.x_0+\overline{x_1}.x_0 \\
 & = & x_1.\overline{x_0}+x_1.x_0+x_1.x_0+\overline{x_1}.x_0=x_1.(\overline{x_0}+x_0)+x_0.(\overline{x_1}+x_1)=x_0+x_1
\end{array}$$

Relation de simplification démontrée □

---

4 Expressions algébriques remarquables

1. Soit $X = (x_1, x_0)$, donner l'ensemble des monômes pouvant être construits à partir de X

Les monôme sont des produits (ET) de littéraux et un littéral est constitué par une variable ou son complément (x ou $\overline{x}$)

- monômes à 2 littéraux : $\overline{x_1}.\overline{x_0}$, $\overline{x_1}.x_0$, $x_1.\overline{x_0}$, $x_1.x_0$
- monômes à 1 littéral : $\overline{x_1}$, $\overline{x_0}$, x_1, x_0

---

2. Soit $X = (x_2, x_1, x_0)$, donner l'ensemble des monals pouvant être construits à partir de X

Les monals sont des sommes (OU) de littéraux et un littéral est constitué par une variable ou son complément (x ou $\overline{x}$)

- monals à 3 littéraux :
$(\overline{x_2}+\overline{x_1}+\overline{x_0})$, $(\overline{x_2}+\overline{x_1}+x_0)$, $(\overline{x_2}+x_1+\overline{x_0})$, $(\overline{x_2}+x_1+x_0)$,
$(x_2+\overline{x_1}+\overline{x_0})$, $(x_2+\overline{x_1}+x_0)$, $(x_2+x_1+\overline{x_0})$, $(x_2+x_1+x_0)$
- monal à 2 littéraux :
$(\overline{x_1}+\overline{x_0})$, $(\overline{x_1}+x_0)$, $(x_1+\overline{x_0})$, (x_1+x_0)
$(\overline{x_2}+\overline{x_0})$, $(\overline{x_2}+x_0)$, $(x_2+\overline{x_0})$, (x_2+x_0)
$(\overline{x_2}+\overline{x_0})$, $(\overline{x_2}+x_0)$, $(x_2+\overline{x_0})$, (x_2+x_0)
- monals à 1 littéral :
$\overline{x_2}$, $\overline{x_1}$, $\overline{x_0}$, x_2, x_1, x_0

Remarque sur le dénombrement des monômes (ou des monals). Pour un vecteur X à n composantes, il existe des monômes (monals) à n variables, n-1 variables... 1 variable. Le nombre total de monômes (monals) est donc la somme du nombre de monômes (monals) à n variables, à $n-1$ variables ...1 variable.

Pour créer des monômes (monals) à p variables pour un vecteur X à n composantes, il faut sélectionner p parmi les n. Il existe $\binom{n}{p}$ choix possibles de p variable parmi n.

Pour un choix donné de p variable, il existe 2^p combinaisons.

Globalement, le nombre de monômes (monals) pour X de dimension n est donc

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n!}{i! \times (n-i)!} \times 2^i\right)$$

$n = 2 \longrightarrow 8$ monômes (monals)

$n = 3 \longrightarrow 26$ monômes (monals)

$n = 4 \longrightarrow 80$ monômes (monals)

---

3. Donner l'ensemble des mintermes pouvant être construits à partir de $X = (x_1, x_0)$

Un minterme est un monôme comportant toutes les composantes de X. Pour un vecteur X à n composantes, il y aura donc 2^n mintermes.

$X = (x_1, x_0) \Rightarrow 2^2$ mintermes : $\overline{x_1}.\overline{x_0}$, $\overline{x_1}.x_0$, $x_1.\overline{x_0}$, $x_1.x_0$

---

4. Donner l'ensemble des maxtermes pouvant être construits à partir de $X = (x_1, x_0)$

Un maxterme est un monal comportant toutes les composantes de X. Pour un vecteur X à n composantes, il y aura donc 2^n maxtermes.

$X = (x_1, x_0) \Rightarrow 2^2$ maxtermes : $(\overline{x_1} + \overline{x_0})$, $(\overline{x_1} + x_0)$, $(x_1 + \overline{x_0})$, $(x_1 + x_0)$

---

5. Donner l'ensemble des diviseurs de $\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$

Un diviseur du monôme m est un monôme obtenu en supprimant un ou plusieurs littéraux de m.

Pour $\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$:

- suppression d'un littéral : $\overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$ $\overline{x_3}.\overline{x_1}.x_0$ $\overline{x_3}.\overline{x_2}.x_0$ $\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}$
- suppression de 2 littéraux : $\overline{x_3}.\overline{x_2}$, $\overline{x_3}.\overline{x_1}$, $\overline{x_3}.x_0$, $\overline{x_2}.\overline{x_1}$, $\overline{x_2}.x_0$, $\overline{x_1}.x_0$
- suppression de 3 littéraux : $\overline{x_3}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_1}$, x_0

Par un raisonnement similaire à celui fait pour le dénombrement de monômes, on peut trouver que le nombre de diviseurs d'un monôme à n littéraux est donné par

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n!}{i! \times (n-i)!} \right)$$

qui est la somme du nombre de combinaison à p littéraux parmi n quand p varie de 1 à n

$n = 2 \longrightarrow 2$ diviseurs

$n = 3 \longrightarrow 6$ diviseurs

$n = 4 \longrightarrow 14$ diviseurs)

---

5 Fonctions logiques simples

1. Donner un exemple de fonction logique comportant 5 points vrais

---

Analyse de la question :

(a) Combien de composante dans le vecteur X de l'ensemble de départ de la fonction ? Pour qu'il puisse exister k points dans la fonction, on choisit p composantes pour X de manière à ce que la relation $k \leq 2^p$ soit satisfaite. En général, on choisit le plus petit p satisfaisant à

$$2^{p-1} < k \leq 2^p$$

(b) Quelle représentation choisir ?
Il est logique de choisir au plus simple. Mais toutes les représentations sont utilisables.

Ici, il doit pouvoir exister 5 points nous choisirons donc un vecteur X à 3 composantes (x_2, x_1, x_0) Par souci de simplification, nous pouvons donner la représentation numérique.

$$f = f_1\{0, 1, 2, 3, 4\}_{10}$$

---

2. Donner un exemple de fonction logique simple comportant 7 points vrais et 5 point faux

---

Il doit exister 12 points dans l'ensemble de départ de cette fonction. Nous allons donc choisir un vecteur X à 4 composantes (x_3, x_2, x_1, x_0)

Par souci de simplification, nous pouvons choisir la représentation numérique.

$$f = f_1\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}_{10} + f_*\{7, 8, 9, 10, 11\}_{10}$$

---

3. Combien de points vrais comporte la fonction $XOR(x_2, x_1, x_0)$

Nous avons démontré à la question 1.3 que pour un vecteur X à n composantes, tous les points vrais de la fonctions comportaient un nombre impair de variables non complémentées.

Les 2^n combinaisons, parcourues dans l'ordre binaire réfléchi (une seule variable change de valeur d'une combinaison à l'autre), vont de la combinaison $(0, \ldots, 0)$ (nombre pair de variables non complémentées) à la combinaison $(1, 0, \ldots, 0)$ (nombre impair de variables complémentées). D'une combinaison à l'autre, seule une variable change de valeur, la suite des combinaisons aterne donc pair -impair pour le nombre de variables non complémentées.

En conclusion il y a autant de points comportant un nombre impair de variables complémentées que de point comportant un nombre pair de variables complémentées.

Résultat : pour X à n composantes, il existe 2^n points dont la moitié (2^{n-1}) comportent un nombre impair de variables non complémentées.

Et finalement, le XOR sur X à n composantes comporte 2^{n-1} points vrais $\square$

Pour $n = 3$, il y a donc 4 points vrais

---

6 Représentation des fonctions logiques simples

Soit f^* une fonction logique comportant trois point vrais $(0,0,0),(0,1,1),(1,1,1)$ et deux points non spécifiés $(0,0,1),(1,1,0)$

1. Donner trois représentations numériques de cette fonction f^*

Une fonction incomplètement spécifiée f^*possède trois ensembles de points : vrais, faux et non spécifiés. La connaissance deux d'entre eux suffit à définir la fonction f^*. On peut ainsi imaginer de représenter f^* par

- les ensembles de point vrais et non spécifiés
- les ensembles de point vrais et faux
- les ensembles de point non spécifiés et faux
- les ensembles de point vrais, non spécifiés et faux

Sous la forme numérique ceci donne pour cette question (les quatre représentations):

- $f^* = f_1^*\{0,3,7\}_{10} + f_*^*\{1,6\}_{10}$
- $f^* = f_1^*\{0,3,7\}_{10} + f_0^*\{2,4,5\}_{10}$
- $f^* = f_*^*\{1,6\}_{10} + f_0^*\{2,4,5\}_{10}$
- $f^* = f_1^*\{0,3,7\}_{10} + f_*^*\{1,6\}_{10} + f_0^*\{2,4,5\}_{10}$

□

---

2. Donner la table de vérité de cette fonction f^*

La représentation numérique étant connue, nous appliquons simplement la démarche vue en cours pour passer de numérique à tabulaire. Trois composantes pour X sont requises

n	x_2	x_1	x_0	f^*
0	0	0	0	1
1	0	0	1	$*$
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	$*$
7	1	1	1	1

□

---

3. Donner la table de Karnaugh de cette fonction f^*

La représentation numérique étant connue, nous appliquons simplement la démarche vue en cours pour passer de numérique à tabulaire. Trois composantes pour X sont requises

x_2 \ x_1, x_0	00	01	11	10
0	1	$*$	1	0
1	0	0	1	$*$

□

---

4. Donner les fonctions f^*_{min} et f^*_{max} de cette fonction f^*

La fonction f^*_{min} est complétement spécifiée et a comme ensemble de points vrais l'ensemble des points vrais de f^*. En représentation numérique (la plus simple) cela donne.

$$f^*_{min} = f^*_1\{0, 3, 7\}_{10}$$

La fonction f^*_{max} est complètement spécifiée et a comme ensemble de points vrais l'union de l'ensemble des points vrais de f^* et de l'ensemble des points non spécifiés de f^*. En représentation numérique (la plus simple) cela donne.

$$f^*_{max} = f^*_1\{0, 1, 3, 6, 7\}_{10}$$

□

5. Combien de représentations numériques existe-t-il pour cette fonction f^*. Les donner exhaustivement.

La réponse à cette question est impossible à donner, toutefois des éléments de réponse peuvent être avancés.

Tout d'abord combien de fonctions complètement spécifiées peuvent-elles représenter correctement f^* ?

f^* comporte 2 points non spécifiés. Pour obtenir une fonction complètement spécifiée représentant correctement f^* cela revient à transformer les points non spécifiés en point vrais ou points faux. Il y a donc 2^2 fonctions pouvant représenter correctement f^*. Voici leur représentation tabulaire.

n	x_2	x_1	x_0	f^*	f^*_{min}	f^*_a	f^*_b	f^*_{max}
0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	$*$	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	1	1	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	$*$	0	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1

Concernant le nombre de représentations algébriques d'une fonction, même si celle-ci est une fonction constante, il est infini !

En effet, si nous imaginons que Ea est une représentation algébrique de f, alors $Eb = Ea.(x_0 + \overline{x_0})$, $Ea + Eb$, $Ea.Eb$ ... sont aussi des expressions algébriques de f. En fait, toute expression algébrique Ex telle que $Ex = Ea$ est aussi une représentation de f.

Cette question n'appelle donc pas de réponse... □

7 Changement de représentation d'une fonction logique

Soit $f^* = f^*_1\{0, 1, 2, 10\}_{10} + f^*_0\{5, 6, 7, 14\}_{10}$

1. Combien de composantes dans le vecteur X sur laquelle est formée cette fonction f^*?

La valeur numérique la plus grande est 14. On choisit n composantes de sorte quelconque

$$2^{n-1} < 14 \leq 2^n \quad \text{(ici la valeur de n est 4)}$$

2. Donner la table de vérité de cette fonction f^*

Aucune difficulté, les combinaisons sont rangées dans l'ordre binaire naturel.

n	x_2	x_1	x_0	f^*
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	*
4	1	0	0	*
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0
8	0	0	0	*
9	0	0	1	*
10	0	1	0	1
11	0	1	1	*
12	1	0	0	*
13	1	0	1	*
14	1	1	0	0
15	1	1	1	*

3. Donner la table de Karnaugh de cette fonction f^* Aucune difficulté à partir d'une deux représentations précédentes

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	1	*	1
01	*	0	0	0
11	*	*	*	0
10	*	*	*	1

4. Donner les fonctions f^*_{min} et f^*_{max} de cette fonction f^*

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	1

$f^*_{min} = \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1} + \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_0} + \overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	1

$f^*_{max} = \overline{x_2} + \overline{x_1}.\overline{x_0} + x_2.\overline{x_1} + x_2.x_0$

5. Donner une représentation algébrique correcte de cette fonction f^*

Toutes les fonctions f telle que $f^*_{min} \leq f \leq f^*_{max}$ sont des représentations correctes de la fonction f^*.

La représentation algébrique de f^*_{max} est donc (par exemple) une représentation algébrique correcte de f^*

On peut donc écrire :

$$f^* = \overline{x_2} + \overline{x_1}.\overline{x_0} + x_2.\overline{x_1} + x_2.x_0$$

6. Combien de fonctions peuvent-elles représenter correctement cette fonction f^*?

Pour passer de la fonction f^* à une fonction complètement spécifiée f qui la représente correctement, chaque point non spécifié doit être remplacé par un point vrai ou un point faux.

Quand la fonction f^* comporte k points non spécifiés, il existe donc 2^k fonctions complétement spécifiées qui la représentent correctement.

Ici, $k = 8$, il existe donc $2^8 = 256$ fonctions représentant correctement f^*

8 Tableaux de Karnaugh

1. Soit la fonction logique f définie par la table suivante

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

   Donner une représentation algébrique de cette fonction f

---

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

$$f = \overline{x_1}.x_0 + x_3.\overline{x_2} + x_3.x_0 + x_3.x_1 + \overline{x_2}.x_0$$

---

2. Soit la fonction logique f^* définie par la table suivante

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	*	*	0	0
11	0	1	1	*
10	*	1	1	0

   (a) Donner la représentation algébrique de f^*_{max}

Tous les points non spécifiés deviennent des points vrais

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	0	0
11	0	1	1	1
10	1	1	1	0

$$f^*_{max} = \overline{x_1}.x_0 + x_3.x_0 + \overline{x_2}.x_0 + \overline{x_3}.x_2.\overline{x_1} + x_3.x_2.x_1 + x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}$$

(b) Donner la représentation algébrique de f^*_{min}

Tous les points non spécifiés deviennent des points faux

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$$f^*_{min} = x_3.x_0 + \overline{x_2}.x_0 +$$

(c) Donner une représentation algébrique de cette fonction f^*

Plutôt que donner une représentation algébrique quelconque de cette fonction f^*, nous allons rechercher la représentation minimale de cette fonction.

Comme il s'agit d'un fonction incomplètement spécifié, nous allons utiliser les implicants premier de f^*_{max} pour couvrir les points vrais de f^*_{min}

- implicants premiers de f^*_{max} : $\{\overline{x_1}.x_0, x_3.x_0, \overline{x_2}.x_0, \overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}, x_3.x_2.x_1, x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}\}$
- points vrais de de f^*_{min} : $\{1, 3, 9, 11, 13, 15\}$

d'où la table de choix pour minimiser le critère du nombre d'opérateurs

	1	3	9	11	13	15	
$x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}$			●				coût=7
$x_3.x_2.x_1$						●	coût=5
$\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}$							coût=7
$\overline{x_2}.x_0$	●	●	●	●			coût=4
$x_3.x_0$			●	●	●	●	coût=3
$\overline{x_1}.x_0$	●		●		●		coût=4

L'analyse de la table montre :

i. l'implicant $\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}$ ne couvre aucun point vrai de f^*_{min}
ii. le point 3 est essentiel et rend l'implicant $\overline{x_2}.x_0$ obligatoire

Reconstruisons la table en supprimant

i. l'implicant $\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}$ qui ne couvre aucun point vrai de f^*_{min}
ii. l'implicant $\overline{x_2}.x_0$ qui est obligatoire
iii. les points 1, 3, 9 et 11 qui sont couverts par le monôme obligatoire $\overline{x_2}.x_0$

	13	15	
$x_3.\overline{x_2}.\overline{x_1}$			coût=7
$x_3.x_2.x_1$		●	coût=5
$x_3.x_0$	●	●	coût=3
$\overline{x_1}.x_0$	●		coût=4

L'analyse de cette table montre qu'il existe quatre solutions pour couvrir les deux points 13 et 15.

i. $\{x_3.x_0\}$ coût $= 3$
ii. $\{x_3.x_0, \overline{x_1}.x_0\}$ coût $= 7$
iii. $\{x_3.x_0, x_3.x_2.x_1\}$ coût $= 8$
iv. $\{\overline{x_1}.x_0, x_3.x_2.x_1\}$ coût $= 9$

Il existe donc une solution minimale unique pour le choix de couverture des points 13 et 15 dans cette table :

$$x_3.x_0$$

Ainsi, finalement, la base minimale de la fonction est unique :

$$f^* = \overline{x_2}.x_0 + x_3.x_0 \quad (\text{de coût} = 7)$$