

# 波尔共振及混沌摆实验

## 【实验目的】

1. 研究实验系统的自由振动——测量自由振动周期。
2. 研究实验系统的阻尼振动，测量系统阻尼系数。
3. 研究实验系统的受迫振动，观测共振现象，测量受迫振动的幅频特性和相频特性曲线。
4. 观察、研究受迫振动中的“拍”现象及混沌摆对初始条件的敏感性。

## 【实验背景】

受迫振动所导致的共振现象具有相当的重要性和普遍性，许多仪器和装置都是利用共振原理设计制作的。在利用共振现象的同时，也要防止共振现象引起的破坏，如共振引起建筑物的垮塌、电器元件的烧毁等。本实验采用波尔共振仪来定量研究物体在周期外力作用下作受迫振动的幅频特性和相频特性，可观察实验过程中的时序图和相位图。通过在摆轮上增加位置可调的偏心配重块，还可实现稳定的混沌摆动，结合数据实时采集，可方便研究不同频率、不同阻尼等情况下的混沌演化。

## 【实验原理】

### 一、波尔共振

波尔共振实验仪的主体部分是由纯铜圆形摆轮和涡卷弹簧组成的扭摆。摆轮在摆动过程中受到与角位移  $\theta$  成正比、方向指向平衡位置的弹性恢复力矩的作用；与角速度  $d\theta/dt$  成正比、方向与摆轮运动方向相反的阻尼力矩的作用；以及按简谐规律变化的外力矩  $M_0 \cos \omega t$  的作用。根据转动规律，可列出摆轮的运动方程：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - b \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos \omega t \quad (1)$$

(1) 式中， $J$  为摆轮的转动惯量， $-k\theta$  为弹性力矩， $k$  为弹性力矩系数， $b$  为阻尼力矩系数， $M_0$  为驱动力矩的幅值， $\omega$  为驱动力矩的圆频率。令  $\omega_0^2 = k/J$ 、 $2\beta = b/J$ 、 $m = M_0/J$ ，则 (1) 式变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos \omega t \quad (2)$$

当驱动力为零，即 (2) 式等号右边为零，方程 (2) 就变为了二阶常系数线性齐次微分方程，根据微分方程的相关理论，当  $\omega_0$  远大于  $\beta$  时，其解为

$$\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \alpha) \quad (3)$$

此时摆轮作阻尼振动，振幅随时间衰减，振动圆频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (4)$$

(4) 式中， $\omega_0$  称为系统的固有圆频率， $\beta$  为阻尼系数。当  $\beta$  也为零时，只有恢复力矩的作用，摆轮为自由振动，以圆频率  $\omega_0$  作简谐振动。

当驱动力不为零时，(2) 式为二阶常系数线性非齐次微分方程，其解为：

$$\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \theta_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

式中，第一部分表示阻尼振动，经过一段时间后衰减消失；第二部分为稳态解。如果外力是按简谐振动规律变化，那么物体在稳定状态时的运动也是与驱动力同频率的简谐振动，具有稳定的振幅  $\theta_2$ ，并与驱动力之间有一个确定的相位差  $\varphi$ （此处定义相位差为受迫振动相位减去驱动力相位）。如果  $\omega$  和  $\omega_1$  很接近，两部分振幅将会叠加产生拍现象。

要使方程在任何时间  $t$  恒成立， $\theta_2$  与  $\varphi$  需满足一定的条件，将  $\theta = \theta_2 \cos(\omega t + \varphi)$  带入方程(2)，由此解得稳定受迫振动的幅频特性及相频特性表达式为：

$$\theta_2 = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (6)$$

$$\varphi = \arctan \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7)$$

由 (6) 式和 (7) 式可以看出，在稳定状态时振幅和相位差保持恒定，振幅  $\theta_2$  与相位差  $\varphi$  的数值取决于  $\beta$ 、 $\omega_0$ 、 $m$  和  $\omega$ ，而与振动的起始状态无关。当驱动力的圆频率  $\omega$  与系统的固有圆频率  $\omega_0$  相同时，相位差为  $-90^\circ$ 。

由于受到阻尼力的作用，受迫振动的相位总是滞后于驱动力的相位，即 (7) 式中的  $\varphi$  应为负值，而反正切函数的取值范围为  $(-90^\circ, 90^\circ)$ ，当由 (7) 式计算得出的角度数值为正时，应减去  $180^\circ$  将其换算成负值。

由 (6) 式，将  $\theta_2$  对  $\omega$  求极值可得出共振时的圆频率和振幅  $\omega_r$ 、 $\theta_r$  为：

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (8)$$

$$\theta_r = \frac{m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (9)$$

将 (8) 式代入 (7) 式，得到共振时的相位差为

$$\varphi_r = \arctan \frac{-\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \quad (10)$$

(8)、(9)、(10) 式表明，阻尼系数  $\beta$  越小，共振时的圆频率  $\omega_r$  越接近系统的固有频率  $\omega_0$ ，振幅  $\theta_r$  越大，共振时的相位差越接近  $-90^\circ$ 。

图 1(a)、(b) 分别表示在不同  $\beta$  时稳定受迫振动的幅频特性和相频特性。

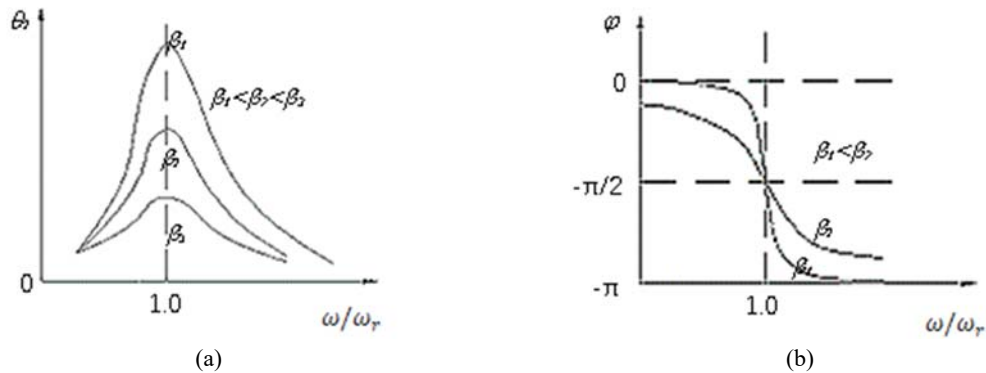


图 1 受迫振动的幅频特性和相频特性

由图 1(b) 可见， $\beta$  越小， $\theta_r$  越大， $\theta_2$  随  $\omega$  偏离  $\omega_0$  而衰减得越快，幅频特性曲线越陡峭。在峰值附近， $\omega \approx \omega_0$ 、 $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ ，(6) 式可近似表达为

$$\theta_2 \approx \frac{m}{2\omega_0 \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} \quad (11)$$

由上式可见, 当  $|\omega_0 - \omega| = \beta$  时, 振幅降为峰值的  $1/\sqrt{2}$ , 根据幅频特性曲线的相应点可确定  $\beta$  的值。

## 二、混沌摆

当在摆轮上添加偏心配重  $m_p$  后, 摆轮将额外受到一个偏心力矩  $M_p$  的作用。

$$M_p = m_p g R_p \sin\theta \quad (12)$$

式中  $R_p$  为偏心配重距转轴的距离,  $m_p$  为偏心配重的质量。可得混沌摆的动力学方程为:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta - b \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos\omega t + m_p g R_p \sin\theta \quad (13)$$

根据方程 (13), 在一定的初始条件下, 将演化出混沌现象。图 2 为在混沌状态下的  $\theta$  随时间演化图形以及  $\omega \sim \theta$  相图, 图中可见双吸引子现象。

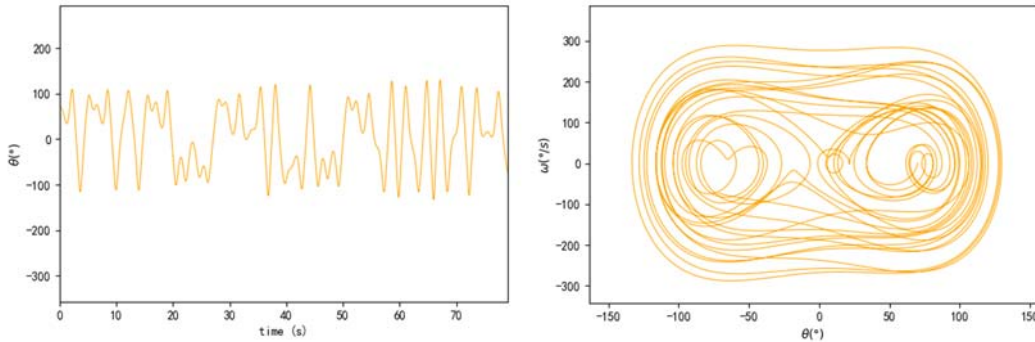


图 2 混沌演化结果 (左: 时序图, 右: 相图)

## 【实验仪器】

ZKY-PME0300 波尔共振及混沌摆综合实验仪

主要由波尔振动装置、数据采集器、阻尼电源等组成。配套有安装有专用数据采集与处理软件的计算机。

### 波尔振动装置

振动装置部分如图 3 所示, 铜质圆形摆轮安装在机架转轴上, 可绕转轴转动。涡卷弹簧的一端与摆轮相联, 另一端与摇杆相联。自由振动时, 摇杆不动, 涡卷弹簧对摆轮施加与角位移成正比的弹性恢复力矩。在摆轮下方装有阻尼线圈, 电流通过线圈会产生磁场, 铜质摆轮在磁场中运动, 会在摆轮中形成局部的涡电流, 涡电流磁场与线圈磁场相互作用, 形成与运动速度成正比的电磁阻尼力矩。受迫振动时, 电动机带动偏心轮及传动连杆使摇杆摆动, 通过涡卷弹簧传递给摆轮, 产生驱动力矩, 摆轮作受迫振动。

在摆轮的圆周上有一个角度指针和两个 90 度刻线, 其中角度指针用于指示当前摆轮振幅角度。摆轮外侧有一个读数盘, 可以读取摆轮的大致位置。摆轮轴心位置的另一侧安装有霍尔角度传感器, 用来测量摆轮转动角度。

电动机轴上装有固定的角度盘和随电机一起转动的有机玻璃角度指针盘。通过软件可设置采集器产生的电机驱动信号频率, 使电机转速在实验范围 (0.1875 ~ 0.9375 转/秒) 内连续可调, 根据驱动信号频率可精确获得电机的转速。电机转动频率与采集器驱动频率关系为

$$f_{\text{电机转动}} = 3.125 \times 10^{-4} f_{\text{驱动信号}}$$

受迫振动时，摆轮与外力矩的相位差是利用小型闪光灯来测量的。置于角度盘一侧的闪光灯受角度传感器控制，每当角度传感器经过零位时，将触发闪光灯，引起闪光，这一现象称为频闪现象。在受迫振动达到稳定状态时，在闪光灯的照射下可以看到角度指针好像一直“停在”某一刻度处（实际上，角度指针一直在匀速转动）。所以，从角度盘上直接读出摇杆相位超前于摆轮相位的数值，其负值为相位差  $\varphi$ 。

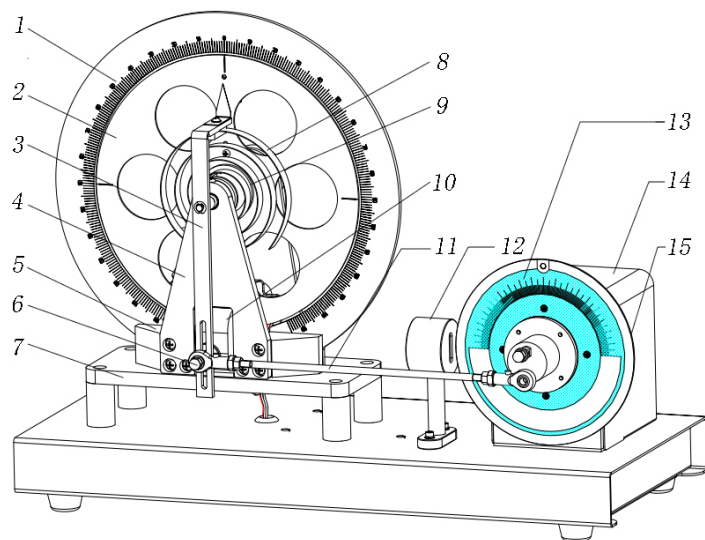


图 3 波尔振动装置

1.辅助刻度盘；2.铜质摆轮；3.摇杆；4.支承架；5.电磁铁固定装置；6.摇杆调节螺丝；7.底座；8.涡卷弹簧；9.角度传感器；10.阻尼线圈；11.传动连杆；12.闪光灯；13.角度盘；14.电机；15.有机玻璃转盘（驱动轮）。

## 数据采集器

数据采集器用于将振动仪的角度传感器的模拟电压信号转换为数字信号，并上传给计算机。同时计算机通过软件控制采集器进行数字信号输出，控制振动装置上的闪光灯和电机转速。

## 实验电源

实验电源的主要功能为振动装置中的阻尼线圈提供电源，该电源包含多路电源输出，实验中使用其中的“30V/1000mA”输出。



图 4 数据采集器



图 5 实验电源

## 数据采集软件

波耳共振及混沌摆综合实验仪

### 【实验内容】

#### 一、实验准备

检查波尔共振仪的角度传感器、电机控制及闪光灯控制口已连接采集器的输入、输出通道。阻尼线圈正负接口与实验电源正负相接。采集器 USB 接口与计算机相连。

打开采集器背后的电源开关。

轻按计算机显示屏右下角背面的电源开关，启动计算机。单击桌面上的快捷方式“波耳共振及混沌摆综合实验仪”图标，启动专用软件。打开共振仪底座右侧的电机开关，单击软件界面上的“连接”按钮，电机应开始转动，并带动铜轮开始做扭摆运动，软件界面上左侧的两个波形图开始绘制，表明仪器工作正常。

单击“开始记录”按钮，过几秒后再次单击此按钮，系统会记录两次单击之间测量到的数据。单击菜单：文件->导出，选择一个文件夹后，系统会保存 3 个数据文件到磁盘。注意，每次导出的文件名是固定的，为防止覆盖前次的文件，可预先建好多个文件夹或保存后手动改文件名。

导出的 3 个文件均为 CSV 格式的文件，可以用记事本或 EXCEL 软件打开查看。

再次单击“连接”按钮，软件可停止采集数据及驱动电机。

在文件菜单下有子菜单可打开帮助文件查看，进一步熟悉使用方法。

#### 二、传感器角度校正

实验中摆轮的转动角度数据是由角度传感器获取的，摆轮外侧的辅助刻度盘读数只做参考。由于角度传感器的测量结果对其供给电压及安装位置非常敏感。因此在开始实验时，需要对角度传感器进行校正。

校正必须在软件界面中的“连接”灯亮的状态下进行，单击界面上的“连接”按钮可切换连接状态。

关闭电机开关，使摆轮处于静止状态。手动调节驱动轮，使其刻线指零，此时摆轮指针也应当基本指零，点击“零点校正”按钮，可将采集到的角度传感器电压值置为零度，以辅助刻度盘为标准，手动使摆轮转动 90 度（正反均可），点击“范围校正”，完成校正。此时软件采集到的角度将会被置为 90 度或-90 度（这里的正号代表正对摆轮时零刻线右边，负号代表零刻线左边），电压角度系数即为传感器转动后相对零点电压的变化值除以 90。

注意，软件重启后校正数据会清除，需要重新校正。

#### 三、自由振动——测量摆轮自由振动周期 $T$

当电机开关关闭、阻尼电流为零时，摆轮摆动过程中受到的阻力矩较小，可近似认为处于自由振动状态。

将采样率调至 100 Hz 或更高，将驱动轮位置调为 0°。软件界面中单击“连接”按钮。将摆轮拨至一定角度（推荐 145°左右），然后再释放摆轮。摆轮在摆动过程中，可以在时序图中观察振幅的变化情况，振幅应缓慢衰减。等到摆轮的振幅在 120°左右时，单击“开始记录”按钮，20 秒左右后，停止记录，在菜单栏中选择导出数据，保存数据文件。

计算机上安装有辅助数据处理软件，使用该软件读入保存的数据文件，能以波形图的方式显示数据，并获取振幅、周期等参数。参照表 1 记录摆轮的振幅、周期。

同样方法测量摆轮振幅在 100°、80°左右时的自由振动周期。

也可自行选择其他方式完成对数据文件的处理，获取振幅、周期值。

表 1 摆轮振幅与自由振荡周期的对应关系

振幅 $\theta(^{\circ})$	周期 $T(s)$	振幅 $\theta(^{\circ})$	周期 $T(s)$	振幅 $\theta(^{\circ})$	周期 $T(s)$

#### 四、测定阻尼系数 $\beta$ 与电流的关系

电机开关保持关闭，采样率 100 Hz。打开实验电源开关，使用电源面板上的按钮，将电源设置为：恒流、30V/1000mA，调节阻尼电流为 300mA。

参照内容三的方法获取角度-时间数据，由于施加了阻尼，摆动过程中，摆轮的振幅是在快速衰减的。使用辅助软件或其他方法，读取连续 10 个周期的振幅及周期值，填入表 2。

调节阻尼电流为 600mA，重复以上测量，参照表 2 记录数据。

表 2 阻尼系数  $\beta$  与电流的关系

阻尼电流\_\_\_\_\_mA

序号	振幅 $\theta_n(^{\circ})$	序号	振幅 $\theta_n(^{\circ})$	$\ln(\theta_i/\theta_{i+5})$
1		6		
2		7		
3		8		
4		9		
5		10		
$\ln(\theta_i/\theta_{i+5})$ 平均值				
周期平均值 $\bar{T}$ (s)				

由公式：  $\ln \frac{\theta_i}{\theta_{i+n}} = \ln \frac{\theta_1 e^{-\beta t}}{\theta_1 e^{-\beta(t+nT)}} = n\beta\bar{T}$ ，可求出  $\beta$  值。

式中  $n$  为阻尼振动的周期次数， $\theta_i$  为第  $i$  次振动时的振幅， $\bar{T}$  为阻尼振动周期的平均值。

$$\text{当 } n=5 \text{ 时, } \beta = \frac{1}{5\bar{T}} \ln \frac{\theta_i}{\theta_{i+5}}$$

对表 2 数据按逐差法处理，可求出不同阻尼电流下的  $\beta$  值。

#### 五、测定受迫振动的幅频特性和相频特性曲线

调节阻尼电流为 600 mA，采样率 100 Hz。

根据内容四测量得到的 600mA 阻尼电流时的振动周期数据，计算出与这个周期相符的电机驱动信号频率。按计算结果设置软件界面上的电机驱动频率，即使得驱动力矩频率与系统共振频率接近。

电机转动频率与驱动信号频率关系：  $f_{\text{电机转动}} = 3.125 \times 10^{-4} f_{\text{驱动信号}}$

手动调节驱动轮（电机角度盘）到 0°位置，单击“连接”按钮，然后打开电机开关，可观察到摆轮在电机驱动下开始摆动。等待摆动稳定，摆轮和电机周期相同，振幅基本不变后，单击“开始记录”按钮，开始记录摆角数据。同时在软件界面中打开闪光灯开关，在驱动轮盘上读取相位差，如果每次闪光时刻线角度有细微夹角，可取其中间值作为相位差读数。闪光灯会在 60 s 后自动关闭。

记录了 10 个周期以上的数据后可停止记录。

从导出的数据中读取振幅、周期，参照表 3 记录数据。

改变电机驱动信号频率，然后重复以上步骤，记录数据。

电机驱动频率的选取，首先应找到共振频率，以共振频率为中心点，在其左右两侧各取 7 点以上。注意在共振频率附近，频率间隔选取要密集一点。

由测量数据绘出受迫振动的幅频特性和相频特性曲线，分析实验结果。

表 3 幅频特性和相频特性测量数据记录表

阻尼电流\_\_\_\_\_mA

次数	电机驱动频率 (Hz)	摆轮周期 $T$ (S)	摆轮频率 $f$ (Hz)	振幅 $\alpha(^{\circ})$	相位差 $\varphi(^{\circ})$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

## 六、(选做) 观察振动过程中的拍现象

调节采样率为 100 Hz，调节驱动信号频率在 2020 Hz 附近(驱动力频率略微偏离摆轮固有频率)，阻尼电流调至 100 mA。打开电机开关，摆轮开始振动，在趋向受迫振动稳定状态的过程中观察摆动角度随时间的变化关系，可由该曲线的包络线观察到“拍”的现象。

调节不同阻尼电流，观察不同的拍现象，分析拍现象的产生条件，以及消失条件。

使用软件的仿真功能，模拟完全无阻尼（无电磁阻尼和空气阻尼）情况下的拍现象，推测阻尼在拍现象消失过程中所起的作用。

## 七、(选做) 观察混沌现象对初始条件的敏感性

给摆轮在 0 度位置安装上偏心配重，位置调到最远离转轴中心。调节阻尼电流约为 600 mA（如果实验中发现摆轮只在某一侧摆动，则可适当调低阻尼电流），将转轮调节至某一角度保持不动。

调节采样率为 100 Hz，先开始记录，再打开电机开关，调节驱动信号频率在 1050 Hz 附近（根据弹簧特性不同，可在 900 ~ 1400 Hz 范围尝试调节），保持电机开关打开。

释放摆轮的同时开始记录，可以在时序图以及相图上观察到混沌现象。

保存数据后，轻微改变初始角度，按以上步骤重复实验，保存多次实验数据，用软件作图，观察几次混沌现象的差异性。

可以尝试改变偏心配重的位置和驱动频率等其他初始条件，观察其对混沌现象的影响。

注：由于混沌实验的“混沌”特性，在混沌实验中，作定量分析非常困难，对初始条件敏感性的研究，主要以观察不同初始条件下的相图和时序图是否重合为主。

### 【数据处理】

1. 求出摆轮在不同振幅时的自由振动周期，分析周期与振幅的关系。
2. 计算不同阻尼电流条件下的阻尼系数，分析阻尼电流与阻尼系数、振动周期的关系。
3. 绘出受迫振动的幅频特性和相频特性曲线，分析实验结果。

### 【注意事项】

1. 为保证使用安全，三芯电源线须可靠接地。
2. 注意用电安全。
3. 当采集器和计算机断开通信时，采集器会保存断开前的状态。因此在不关闭采集器电源的情况下关闭软件时需要确认闪光灯开关处于关闭状态。关闭采集器电源，采集器状态将会重置。

### 【思考题】

1. 实验中采用什么方法来改变阻尼力矩？它利用了什麼原理？
2. 采样率的设置对实验结果有什么影响？
3. 频闪法测相位差的原理是什么？两次频闪测量结果如稍有差异，可能是什么原因？
4. 利用软件编程对 (13) 式进行模拟仿真，分析混沌现象以及对初始条件的敏感性。