微积分典型题

（极限与连续、一元微分学、不定积分）

华中科技大学化学与化工学院

赵淦

2023 年 12 月

1. （5 分） 证明：$n! < \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$.

2. （5 分） 证明数列 $\{\sin n\}$ 发散.

3. （5 分） 证明 $f(x) = \sin(x^2)$ 不是周期函数.

4. （10 分） 已知对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_{n+1} = \dfrac{1}{m+1-ma_m}$，其中$m \in \mathbb{N}$. 讨论$\{a_n\}$的敛散性.

5. （10 分） 设 $a_1 > 0$，且对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$. 求$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(na_n-2)}{\ln n}$.

6. （15 分） 已知 $b_n > 0$，$a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots \sqrt[p]{b_n}}}$（$p > 1, n \in \mathbb{N}$）. 证明 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\left\{\dfrac{\ln b_n}{p^n}\right\}$ 有上界.

7. （10 分） 设 $f(x)$在$(a, +\infty)$ 内连续有界，证明：对任意 T，存在无穷大量 x_n 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n+T) - f(x_n)] = 0$.

8. （15 分） 函数 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续有界，满足：

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$

$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

以及 $f(0)=1, g(0)=0$. 求 $f(x)$ 及 $g(x)$.

9. （10 分） 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且变号，则存在 $a<b<c$ 使得 $a+c=2b$ 以及 $f(a)+f(b)+f(c)=0$.

10. （15 分） 已知 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导.

（1） $\lim\limits_{x\to a^+} = \infty$，则是否一定有 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$？

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 是否必定存在？

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在且有限，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

11. （10 分） 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是实系数多项式，$n\geq 2$ 且 $a_n\neq 0$. 存在唯一的 $k\in\{1,2,\cdots n-1\}$ 使得 $a_k=0$. 证明：若 $f(x)$ 有 n 个相异实根，则 $a_{k-1}\cdot a_{k+1}<0$.

12. （10 分） 证明 $\sin 1$ 是无理数.

13. （10 分） 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上任意阶可导，且在 $x=0$ 处的任意阶导数不为 0. 设：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^(n-1)(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^(n)(\theta x)}{n!}x^n$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

14. （5 分） 计算 Poisson 积分：

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x\,(-1<r<1)$$

15. （5 分） 计算 $\int \ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x$