概率论与数理统计

分数分布：不同的老师出题都不一样，第一章约**15**分，第五章**3-10**分，第六章**3-10**分；其余每章**15-25**分。平时**20-30**分，依考试情况由课题组统一定。考试时不带计算器，要用到的表值会给出。

(为确保公平公正，惩戒自私自利，对要求照顾加分者倒扣**10**分)

通 知

1 教材不考内容： § **4.3**, § **4.4.3**, § **4.5**, § **6.2.5**, § **7.4.4**及后面章节；一般 § **5.1**不考。

2 答疑：考前晚上**7.30-9.30QQ**群。

3 复习材料：教材、课件、练习册和浙大教材；复习技巧：先系统复习再做以前的统考题，注重客观题。

总 复 习

第一章 事件的概率

1. 古典概率—乘法原理、排列组合；几何概率—均匀分布

2. 概率的定义：①非负性；②规范性；③可列可加性。

3. 概率的性质：①$P(\overline{A})=1-P(A)$；$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i})$；

②$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，$P(AB)=P(A)P(B/A)$.

4. 两个概念（矛盾）：

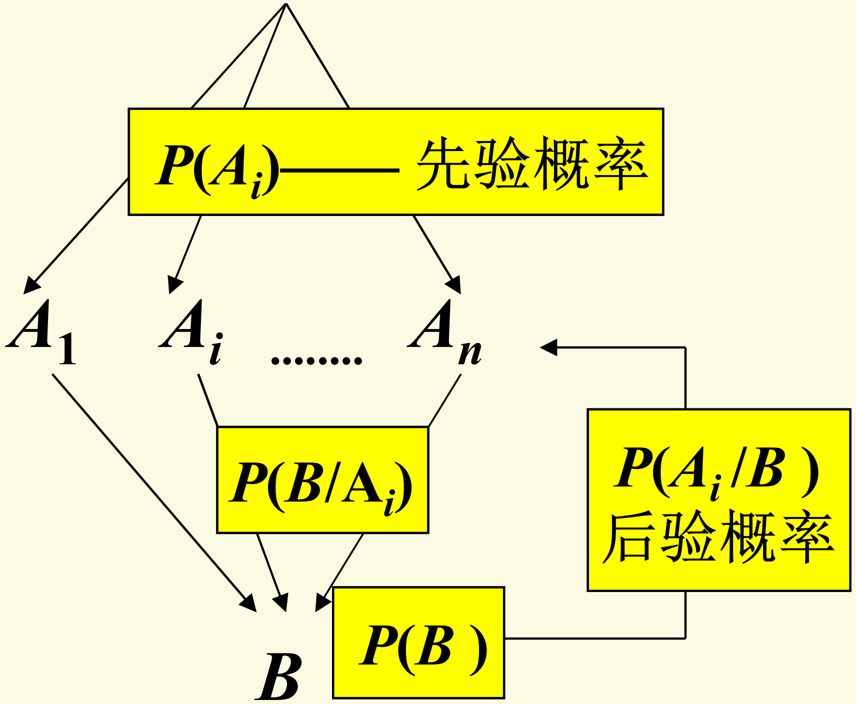
A与B互不相容$\longleftrightarrow$ $AB=\varphi$ $\rightarrow$ $P(AB)=0$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

A与B独立$\longleftrightarrow$$P(AB)=P(A)P(B)$$\rightarrow$$P(A)\neq 0$时，$P(B/A)=P(B)$

5. 两个公式

③ $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$，$P(A_i/B)=\dfrac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$

例1　设甲、乙、丙三人的命中率分别为0. 3，0. 2，0. 1。现三人独立地向目标各射击一次，结果有两次命中目标，试求丙没有命中目标的概率。



解　记A、B、C分别为甲、乙、丙命中目标，D 为目标被命中两次。法一 用条件概率直接求。

$$P(D)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$$

$$=0.3\times0.2\times0.9+0.3\times0.8\times0.1+0.7\times0.2\times0.1=\mathbf{0.092}$$

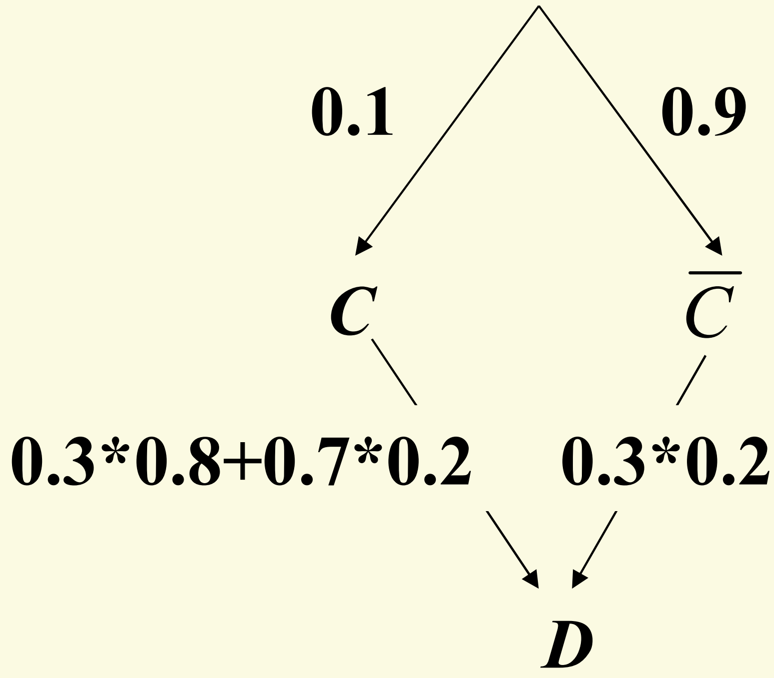
$$P(\overline{C}/D)=\frac{P(\overline{C}D)}{P(D)}=\frac{P(AB\overline{C})}{P(D)}=\frac{0.3\times0.2\times0.9}{0.092}=0.587$$

法二 用**Bayes**公式：

$\boldsymbol{P(C) = 0.1}$, $P(\overline{C}) = 0.9$;

$\boldsymbol{P(D/C) = 0.3*0.8+0.7*0.2}$,

$P(D/\overline{C}) = 0.3*0.2.$



于是有

$$P(\overline{C}/D) = \frac{P(\overline{C})\cdot P(D/\overline{C})}{P(C)\cdot P(D/C) + P(\overline{C})\cdot P(D/\overline{C})}$$

$$= \frac{0.9*0.3*0.2}{0.1*(0.3*0.8+0.7*0.2)+0.9*0.3*0.2}$$

$$= 0.587.$$

例2 填空(可作图帮助分析)

(1) 设$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则$P(\overline{AB})$ **=**__0.6__

$$\because P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3, \therefore P(AB)=0.7-0.3=0.4$$

（2）若A 与B 独立，且A 与B 互不相容，则

$\min\{P(A), P(B)\}=$__0__。 $\because P(A)P(B)=P(AB)=P(\phi)=0$

(3) 已知$P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$。则当A与B相互独立时，有$P(A\cup B)=$__0.65__**；当A与B不相容时，有$P(B-A)=$**__0.5__**；当$P(A/B)=0.4$时，**有 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$ __0.4__ .

$$\because P(AB)=P(B)P(A/B)=0.5\times 0.4=0.2$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.2=0.6$$

$$\therefore P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.4$$

第二、三章　随机变量及其分布

1. 常用分布　　$B(n,p)$，$P(\lambda)$，$U[a,b]$，$E(\lambda)$，$N(\mu,\sigma^2)$；

二维均匀、二维正态

2. 联合分布和边缘分布　$p_{i\bullet}=\sum_j p_{ij},\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

3. 概率的计算（一维或二维C.R.V.：一重或二重积分）

4. 随机变量函数的分布　**作图、定限再计算、验证**

① 分布函数法(C.R.V.)：

$$F_Z(z)=P\{g(X)\le z\}\ \Rightarrow\ f_Z(z)=F_Z'(z)$$

$$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}$$ （注意分段）

$$=\iint_{\{g(x,y)\le z\}\cap G} f(x,y)dxdy\ \Rightarrow\ f_Z(z)=F_Z'(z)$$

② 公式法：

独立时

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

独立同分布时，$Z_1=\mathrm{Min}\,(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 和$Z_2=\mathrm{Max}\,(X_1,X_2,\ldots,X_n)$：

$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)]^n$，$F_{\max}(z)=F_X^n(z)$，$\to f_{\min}(z),f_{\max}(z)\to$ 期望、方差

5 随机变量的独立性(含义、定义与判别)

•正态分布的线性组合性质(含正态分布可加性)

(二项、泊松及χ^2分布独立时也有可加性)

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1,2,\ldots n$, 相互独立，则对任何实数$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 有

$$aX_1+b\sim N(a\mu_1+b,\ a^2\sigma_1^2),\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\sim N(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i+b,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2)$$

6 条件分布

$$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)},\ j=\cdots$$

在$Y=y$的条件下X的条件概率密度为

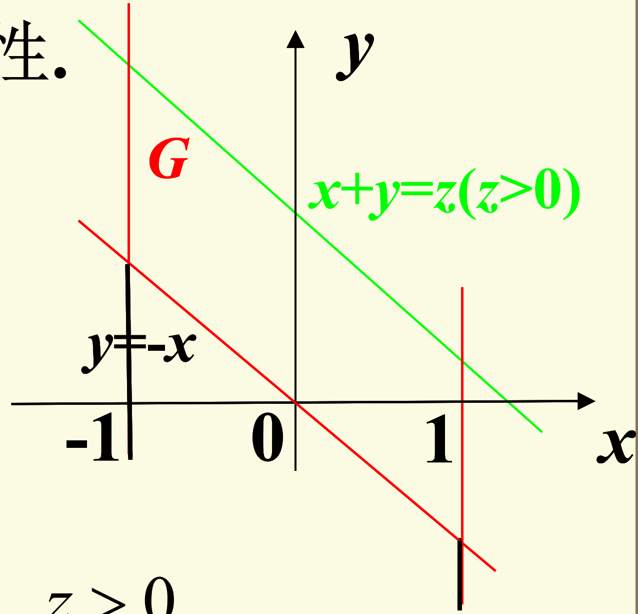
$$f(x \mid y)=f(x,y)/f_Y(y) \Leftrightarrow f(x,y)=f_Y(y)\cdot f(x \mid y)$$

注 可反求联合分布列或联合密度 见课件几慕课例题

例3 设二维R.V.(X,Y)的联合密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-(x+y)}, & -1<x<1, y>-x\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$；判断独立性.



解 (1) 法一(分布函数法)：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

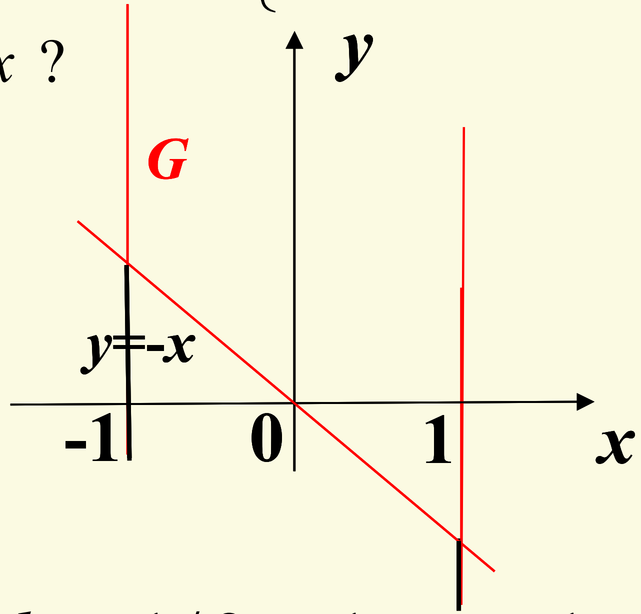
$$=\iint\limits_{(x+y\le z)\cap G} f(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases}\int_{-1}^{1}dx\int_{-x}^{z-x}e^{-(x+y)}/2dy=1-e^{-z}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=e^{-z}, z>0, \quad f_Z(z)=0, z\le 0$$

(1) 法二 (公式法)：注意到被积函数的非零区域G’为：$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ z - x > -x \end{cases}$

能否用 $f_Z(z) \cancel{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$?



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx$$

$$= \begin{cases} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{-(x+z-x)} dx = e^{-z}, \; z > 0 \\ 0, \quad z \le 0 \end{cases}$$

(2) 边缘密度：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-x}^{+\infty} e^{-(x+y)} / 2dy = 1/2, -1 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_{-y}^{1} e^{-(x+y)} / 2dx = (1 - e^{-y-1}) / 2, -1 < y < 1 \\ \int_{-1}^{1} e^{-(x+y)} / 2dx = (e - e^{-1}) e^{-y} / 2, \; y \ge 1 \end{cases}$$

因 $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y), (x,y) \in G$，故不独立。

第四章 数字特征小结(定义、含义、计算和性质)

1. 计算（附表一：六大分布）

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum\limits_i g(x_i)p_i & D.R.V\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx & C.R.V\end{cases}$$

已知一维分布

$$\boxed{\begin{matrix}\mathbf{E}(X),\ \mathbf{E}(Y),\ \mathbf{E}(XY)\\ \mathbf{E}(X^2),\ \mathbf{E}(Y^2),\ \text{矩}\end{matrix}}$$

$$E(g(X,Y))=\iint\limits_{R^2} g(x,y)f(x,y)dxdy,\ C.R.V.$$

已知二维分布

$$\boxed{\begin{matrix}D(X)=E(X^2)-E^2(X),\ Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY\\ \rho_{XY}=Cov(X,Y)/\sqrt{D(X)D(Y)},\ \text{分布未知时用性质求}\end{matrix}}$$

2. 性质 **(1)** $E(aX+b)=aE(X)+b$， $D(aX+b)=a^2D(X)$

(2) $E(\sum_i \lambda_i X_i)=\sum_i \lambda_i E(X_i)$， $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$

(3) 切比雪夫不等式 (4) 协方差的双线性性、相关系数性质

(5) $\mathrm{D}(\lambda_1 X\pm\lambda_2 Y)=\lambda_1^2\mathrm{D}(X)+\lambda_2^2\mathrm{D}(Y)\pm 2\lambda_1\lambda_2\mathrm{Cov}(X,Y)$

(6) 独立必不相关，反之则不一定

例4　设C.R.V.(X, Y)在三角形区域G: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$上服从均匀分布，求Cov (X, Y)和ρ_{XY}.

解 $$S_G=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy=\frac{1}{2}\qquad f(x,y)=\begin{cases}1/S=2,(x,y)\in G\\ 0, \qquad (x,y)\notin G\end{cases}$$

$$EX=\iint_{R^2}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}2xdy=\frac{1}{3}\quad (\text{Th4.2})$$

同理 $E(X^2)=1/6$, $E(XY)=1/12$. 从而$DX=E(X^2)-(EX)^2=1/18$

由对称性有 $E(Y)=E(X)=1/3$, $DY=DX=1/18$. 于是

Cov $(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1/12-(1/3)^2=-1/36$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{36}/(\sqrt{\frac{1}{18}}\cdot\sqrt{\frac{1}{18}})=-\frac{1}{2}$$

练习　设 X, Y独立同服从$B(1,p)$，求$(XY, X+Y)$的联合分布列；Cov $(XY, X+Y)$. 提示：列表法。

例5　设Θ~U(0, 2π), X=cosΘ, Y = cos(Θ+a), 其中0≤a <2π为常数，试求ρ_{XY}并由此讨论X与Y之间的关系。

解 用定理**4.1.**

$$f_\Theta(\theta)=\begin{cases}1/(2\pi), 0<\theta<2\pi \\ 0 \quad , \quad 其它\end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\theta\, f_\Theta(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\theta+a)f_\Theta(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\theta+a)\,d\theta=0$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta+a)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\frac{1}{2}$$

$$E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\cos(\theta+a)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos a+\cos(2\theta+a)}{2}d\theta=\frac{\cos a}{2}$$

于是 $$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/2=DY$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{\cos a}{2}$$

$$\rho_{XY}=COV(X,Y)/\sqrt{D(X)D(Y)}=\cos a$$

(Θ~U(0, 2π), X=cosΘ, Y = cos(Θ+a), 0≤a <2π)

当 $a=0$，$\rho_{XY}=1$，　这时 $Y=X$；当 $a=\pi$，$\rho_{XY}=-1$，

这时 $Y=-X$。两种情况下 X 和 Y 都呈线性关系。

当 $a=\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，因 $\rho_{XY}=0$，故 X 和 Y 不相关。

但却有 $X^2+Y^2=1$，表明 X 和 Y 不独立。

例6　求　$\rho_{X,aX+b}$

$$\rho_{X,aX+b}=\begin{cases}1, a>0\\ \text{不存在}, a=0\\ -1, a<0\end{cases}$$

(X和g(X)不独立，隐函数之间也不独立.
X为连续型时X和g(X)无联合密度)

例7 设随机变量X_1， $X_2, \ldots$， X_n相互独立，且期望和方差分别为 μ，$\sigma^2 \neq 0$， 记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 求$X_i-\overline{X}$和$X_j-\overline{X}$的相关系数。

解 $Cov(X_i-\overline{X}, X_j-\overline{X})$

$$=Cov(X_i, X_j)-Cov(X_i, \overline{X})-Cov(\overline{X}, X_j)+Cov(\overline{X}, \overline{X})$$

$$=\begin{cases} 0-2Cov(X_i, \dfrac{X_i}{n})+Cov(\overline{X}, \overline{X}), & i \neq j \\ \sigma^2-2Cov(X_i, \dfrac{X_i}{n})+Cov(\overline{X}, \overline{X}), & i=j \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0-\dfrac{2}{n}D(X_i)+D(\overline{X})=-\sigma^2/n, & i \neq j \\ \sigma^2-\dfrac{2}{n}D(X_i)+D(\overline{X})=(n-1)\sigma^2/n, & i=j \end{cases} \qquad (D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\rho_{X_i-\overline{X}, X_j-\overline{X}}=\frac{Cov(X_i-\overline{X}, X_j-\overline{X})}{\sqrt{D(X_i-\overline{X}) D(X_j-\overline{X})}}=\begin{cases} 1, & i=j(\text{性质}) \\ -\dfrac{1}{n-1}, & i \neq j(\text{代入}) \end{cases}$$

例8 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 可以推出哪些结论？(边缘分布、数字特征、独立与不相关等)

解 (1) 边缘分布 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(2) 数字特征 $EX=\mu_1, DX=\sigma_1^2, E(X^2)=DX+E^2(X)$;

$\rho_{XY}=\rho, Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2, E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)$;

$$E(aX+bY+c)=aEX+bEY+c$$

$$D(aX+bY+c)=a^2DX+b^2DY+2abCov(X,Y)$$

$$E(aX+bY+c)^2=D(aX+bY+c)+E^2(aX+bY+c).$$

(3) 对二维正态，X与Y独立$\Longleftrightarrow\rho=0\Longleftrightarrow X$与$Y$不相关

此时 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$$aX+bY+c\sim N(E(aX+bY+c),D(aX+bY+c)).$$

第5章： 中心极限定理: 极限正态分布: $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\cdot}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$

例9 设考试有100道选择题(四选一). 求某生用蒙的方法考及格的概率.

解 该生能答对的题数即为得分X, 显然$X \sim B(100, 1/4)$, 用精确分布, 得其考及格的概率为

$$P(X \geq 60) = \sum_{k=60}^{100} C_{100}^{k} 0.25^k (1-0.25)^{100-k} \approx 0$$

用中心极限定理知, X近似$\sim N(100*1/4, 100*1/4*3/4)$,得其考及格的概率为

$$P(X \geq 60) = 1 - F(60)$$

$$\approx 1 - \Phi(\frac{60-25}{\sqrt{100*(1/4)*(3/4)}}) = 1 - \Phi(\frac{14}{\sqrt{3}}) \approx 0.$$ (简单)

第6、7章：抽样分布, 正态总体的抽样分布；矩估计、极大似然估计；无偏性；区间估计(单正态总体, 双单侧)

矩(极大似然)估计的函数是参数函数$g(\theta)$的矩(极大似然)估计；无偏性则不成立。

§ 7.4 区间估计小结

求解双侧置信区间的步骤如下：

1 寻找分布已知的随机变量 $g(\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n),\theta)$;

(枢轴变量)

2 构造概率为**1－*α***的事件，使

$$P(a<g(\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n),\theta)<b)=1-\alpha$$

3 根据上式等价事件，解置信区间

$$P(\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n))=1-\alpha$$

一、$N(\mu,\sigma^2)$中 μ 的双侧置信区间

1、 σ^2已知　　　　　**(单侧置信区间？)**

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1),\qquad P\left(\frac{\left|\bar{X}-\mu\right|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

2、σ^2 未知

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1),\qquad P(\left|T\right|<t_{\alpha/2}(n-1))=1-\alpha$$

二、 $N(\mu,\sigma^2)$中σ^2的双侧置信区间

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\ P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha$$

例10 判断均匀分布U[*a*, *b*]参数极大似然估计的无偏性。

解 对X～U[*a*, *b*]，参数极大似然估计量为

$$\hat{a}=\min_{1\le i\le n}(X_i),\ \hat{b}=\max_{1\le i\le n}(X_i).$$

二者的分布函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n,\ F_{\max}(x)=[F(x)]^n.$$

二者的密度函数为

$$f_{\min}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x),\ f_{\max}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x).$$

$$E(\hat{a})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\min}(x)dx=\int_a^b xf_{\min}(x)dx$$

$$=\int_a^b\frac{nx}{b-a}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}dx=\frac{n}{n+1}a+\frac{1}{n+1}b\neq a$$

$$E(\hat{b})=\int_a^b xf_{\max}(x)dx=\frac{1}{n+1}a+\frac{n}{n+1}b\neq b$$

显然都是有偏估计，但是渐近无偏的。

例**11** 从一批产品中任取***n***件，发现有***m***件废品，试求这批产品废品率***p***的矩法和极大似然估计。并判断这两种估计量的无偏性。

解

$$令 X = \begin{cases} 1, & 若取到的产品为废品 \\ 0, & 若取到的产品非废品 \end{cases}$$

则总体**X~B(1, *p*)**，其中***p***为废品率。

1）矩法 $EX = p, p = EX, \hat{p} = \hat{E}X = \overline{X}; \hat{p} = \bar{x} = m/n$

2）极大似然法

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$令 \frac{d\ln L(p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{p} - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot \frac{1}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{p} = \bar{x} = m/n; \quad \hat{p} = \overline{X}$$

3）无偏性 $E\hat{p} = E\overline{X} = p$ 成立。

例 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自总体 X 的一个样本，求θ的极大似然估计.

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{否}\end{cases} \qquad \text{其中}\theta>0$$

解

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \qquad (0<x_i<1)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0 \qquad \hat{\theta}=-n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

矩估计：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\theta/(\theta+1)$

$$\theta=EX/(1-EX)，\quad \hat{\theta}=\bar{X}/(1-\bar{X}).$$

Exer1. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$为来自正态总体的样本,

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}, C\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i-1}-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\mu)^2} \sim F(n-1,n), C = \frac{n}{n-1}$$

Exer2. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,

μ已知，求σ^2的极大似然估计并判断无偏性。

解 易推 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \neq \tilde{S}^2$.其无偏性成立，因

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i-\mu)^2 = DX = \sigma^2.$$ 或

$$n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)/\sigma]^2 \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2.$$

注：因 $\bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$, 故 $P(\bar{X}=\mu)=0$ 练习十七

Exer3. 求双参数指数分布参数的矩、极大似然估计,判断无偏性

Exer4. 推导正态总体参数的双、单侧置信区间。