考试方式 闭卷 考试时间 2024年4月13日上午 考试时长 150 分钟

院（系）：______ 专业班级：______

学 号：______ 姓 名：______

题号	一	二						总分	总分人	核对人
分值	60	40						100		
得分										

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

一、基本计算题（每小题6分，共60分）

1. 已知 $a\times(b\times a)=b-2a$，且 $|a|=1,|b|=4$，求 $|b+a|$.

解：由题意知，$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a}))=\vec{a}\cdot(\vec{b}-2\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}-2$

另一方面 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a}))=0$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$.

由于 $|\vec{b}+\vec{a}|^2=(\vec{b}+\vec{a})(\vec{b}+\vec{a})=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=16+1+4=21$，

故 $|\vec{b}+\vec{a}|=\sqrt{21}$.

2. 已知单位矢量 $\overline{OA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 与 y 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，且在 z 轴上的坐标是负的，$\overline{OB}=\{1,-\sqrt{2},-1\}$，求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

解：由题设知 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，故 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$.

又 $\vec{OA}$ 在 z 轴上的坐标为负的，故 $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$.

则 $\vec{OA}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

因为菱形的对角线即为角平分线，又 $\vec{OB^\circ}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\vec{OA}+\vec{OB^\circ}=(1,0,-1)$

所以 $\frac{\vec{OA}+\vec{OB^\circ}}{|\vec{OA}+\vec{OB^\circ}|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 即所求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

另解：由于 $\begin{vmatrix} 4y & -2z \\ 2y & -1 \end{vmatrix}_P = 4 \neq 0$，故方程组 $\begin{cases} 2x^2+2y^2-z^2=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$．方程组 $\begin{cases} 2x^2+2y^2-z^2=0 \\ z=x^2+y^2=0 \end{cases}$ 两边对 x 求导，

$$\begin{cases} 4x+4y\dfrac{dy}{dx}-2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{dz}{dx}=2x+2y\dfrac{dy}{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_P=-1 \\ \left.\dfrac{dz}{dx}\right|_P=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 切线的方向向量为 $(1,-1,0)$．$\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{切线方程：} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0} \\ \text{法平面方程：} (x-1)+(-1)(y-1)+0(z-2)=0 \end{cases}$ 即 $x-y=0$.

3. 求圆锥面 $2x^2+2y^2-z^2=0$ 与旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在 $P(1,1,2)$ 处的切线与法平面方程.

解：令 $F(x,y,z)=2x^2+2y^2-z^2$，$G(x,y,z)=x^2+y^2-z$．则 $\operatorname{grad}F=(4x,4y,-2z)$，$\operatorname{grad}G=(2x,2y,-1)$

则取两个曲面的法矢量分别为 $\vec{n}_F=(2x,2y,-z)_P=(2,2,-2)=2(1,1,-1)$

$\vec{n}_G=(2x,2y,-1)_P=(2,2,-1)$

$$\Rightarrow \vec{n}_F\times\vec{n}_G=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(2,-2,0)$$

取切矢量 $\vec{\tau}=(1,-1,0)$．则曲线在该点的切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$

法平面方程为：$1\cdot(x-1)-(y-1)+0\cdot(z-2)=0$ 即 $x-y=0$.

4. 设 $u=f(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，$z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数，其中 $5z^2-4xz+3y\neq0$，又 $f_1'(0,0,1)=2, f_2'(0,0,1)=4, f_3'(0,0,1)=1$，求 $du|_{(0,0)}$.

解：$x=0$，$y=0$ 时，$z=1$.

对方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 两边求微分，得 $5z^4dz-z^4dx-4xz^3dz+z^3dy+3yz^2dz=0$.

即 $dz=\dfrac{z^2}{5z^2-4xz+3y}dx-\dfrac{z}{5z^2-4xz+3y}dy$.

又 $du=f_1'dx+f_2'dy+f_3'dz=\left(f_1'+f_3'\cdot\dfrac{z^2}{5z^2-4xz+3y}\right)dx+\left(f_2'-f_3'\cdot\dfrac{z}{5z^2-4xz+3y}\right)dy$

故 $du|_{(0,0)}=\left(2+\dfrac{1}{5}\right)dx+\left(4-\dfrac{1}{5}\right)dy=\dfrac{11}{5}dx+\dfrac{19}{5}dy$.

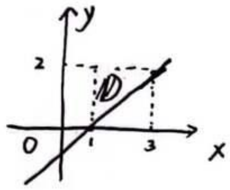
5. 设 $z=yf(x^2-y^2)$，其中 f 可导，求 $\dfrac{1}{x}z_x+\dfrac{1}{y}z_y$.

解：$z_x=yf'(x^2-y^2)\cdot2x=2xyf'(x^2-y^2)$

$z_y=f(x^2-y^2)+yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y)=f(x^2-y^2)-2y^2f'(x^2-y^2)$

故 $\dfrac{1}{x}z_x+\dfrac{1}{y}z_y=2yf'(x^2-y^2)+\dfrac{1}{y}f(x^2-y^2)-2yf'(x^2-y^2)=\dfrac{1}{y}f(x^2-y^2)$.

6. 求积分 $I=\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$.



解: $I=\int_0^2 dy\int_1^{y+1}\sin y^2 dx$

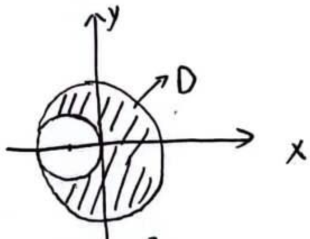
$=\int_0^2 y\sin y^2 dy$

$=-\frac{1}{2}\cos y^2\Big|_0^2$

$=\frac{1-\cos 4}{2}$

7. 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,-2x\le x^2+y^2\le 4\}$, 求二重积分

$$I=\iint_D (y\cos x+\sqrt{x^2+y^2})dxdy.$$



解: ① $\iint_D y\cos x\,dxdy \xrightarrow{\text{对称}} = 0$

② $D_1 := \{(x,y)\,|\,-2x\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$

$\frac{r^3}{3}\Big|_{-2\cos\theta}^{2}$

$I=2\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r^2dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_{-2\cos\theta}^{2}r^2dr\right)$

$=\frac{8\pi}{3}+\frac{16}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos^3\theta)d\theta$

$=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}=\frac{16(3\pi-2)}{9}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3\theta d\theta$

$=\int(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$

$=\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

8. 设有直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0,\\ x-z+4=0\end{cases}$, 平面 $\pi: x-4y-8z+12=0$, 求直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程.

解: 设过L的平面束方程

$\lambda(x+5y+z)+\mu(x-z+4)=0$.

$(\lambda+\mu)x+5\lambda y+(\lambda-\mu)z+4\mu=0$.

$\begin{array}{ccc}\Uparrow & \Uparrow & \Uparrow\\ 1 & -4 & -8\end{array} = 0.$

$\therefore \mu=3\lambda$

$4x+5y-2z+12=0$.

故方程 $\begin{cases}x-4y-8z+12=0\\ 4x+5y-2z+12=0\end{cases}$

解: 设过L平面束方程:

$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$

$\Rightarrow (1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$

$\because \perp \quad \therefore \begin{array}{ccc}\Uparrow & \Uparrow & \Uparrow\\ 1 & -4 & -8\end{array}$

$(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)=0$

$\Rightarrow \lambda=3$.

$\begin{cases}4x+5y-2z+12=0\\ x-4y-8z+12=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ or $\frac{x+\frac{28}{9}}{16}=\frac{y-\frac{4}{9}}{-10}=\frac{z-\frac{8}{9}}{7}$

或 $\begin{cases} x=t \\ y=\pm\sqrt{2t(1-t)} \\ z=1-t \end{cases}$ $(0\le t\le 1)$

9. 将空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 化为参数方程.. (未标取值范围扣1分)

解: $x+z=1 \Rightarrow z=1-x$.

代入 $x^2+y^2+z^2=1$

$\Downarrow$

$2x^2-2x+y^2=0$, $\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$

令 $x-\frac{1}{2}=\dfrac{\cos\theta}{2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

即 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$, $y=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$

$z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta$

故 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ z=\frac{1}{2}-\dfrac{\cos\theta}{2} \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

10. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} e^{1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围的四面体.

解: $I=\int_0^1 e^{1-z}dz\iint_{D_z}dxdy$

$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2e^{1-z}dz$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 z^2e^z dz=\frac{1}{2}\left[z^2\cdot e^z\Big|_0^1-\int_0^1 2ze^z dz\right]$

$=\frac{1}{2}\left(e-2z\cdot e^z\Big|_0^1+2e^z\Big|_0^1\right)=\frac{1}{2}(e-2e+2e-2)=\frac{1}{2}(e-2)$

Ω: $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1-x \\ 0\le z\le 1-x-y \end{cases}$

$I=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}e^{1-z}dz$

$\overset{令t=1-z}{=}-\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_1^{x+y}e^t dt$

$=-\int_0^1dx\int_0^{1-x}(e^{x+y}-e)dy$

$=-\int_0^1dx\int_0^{1-x}e^{x+y}dy+\int_0^1dx\int_0^{1-x}e\,dy$

$\overset{m=x+y}{=}-\int_0^1dx\int_x^1e^m dm+\int_0^1e(1-x)dx$

$=-\int_0^1(e-e^x)dx+\int_0^1e(1-x)dx$

$=\frac{1}{2}e-1$

②

得 分	
评卷人	

二、综合题(每小题 8 分, 共 40 分)

1. 若函数 $u=az^4-bxz+x^2+y^2$ 在点 $P(1,1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=\{2,1,2\}$ 的方向导数最大，求 a,b 的值，并求出最大方向导数.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-bz+2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=4az^3-bx$

$\mathrm{grad}\,u|_P=\{-bz+2x,2y,4az^3-bx\}|_P=\{-b+2,2,4a-b\}$

由沿梯度方向,方向导数最大,则 $\dfrac{-b+2}{2}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{4a-b}{2}$

得 $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \end{cases}$

最大方向导数 $=|\mathrm{grad}\,u|_P|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6$

4

2. 已知函数 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+2$，D 是由 $x+y=3, x=0, y=0$ 所围成的平面区域，求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

法一 ① 求D内驻点

令 $\begin{cases} f_x = 3x^2-2(x+y)=0 \\ f_y = 3y^2-2(x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 为D内唯一驻点

$f(\frac{4}{3},\frac{4}{3}) = -\frac{10}{27}$

② 求 f 在边界上的最值

在 $x=0\,(0\le y\le 3)$ 上, $z=f(0,y)=y^3-y^2+2$

在 $y=0\,(0\le x\le 3)$ 上, $z=f(x,0)=x^3-x^2+2$

在 $x+y=3\,(0\le x\le 3)$ 上, $z=x^3+(3-x)^3-7$

$(x^3-x^2+2)'=0 \Rightarrow x=0$ 或 $\frac{2}{3}$

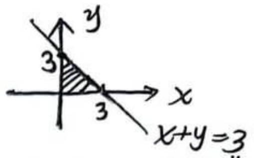
$f(0,0)=2$, $f(\frac{2}{3},0)=\frac{50}{27}$

$(x^3+(3-x)^3-7)'=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$, $f(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=-\frac{1}{4}$

$f(0,3)=f(3,0)=20$

③ 比较, 得 最大值为20, 最小值为 $-\frac{10}{27}$

区域D如右图所示:



法二 ① 令 $\begin{cases} f_x = 3x^2-2(x+y)=0 \\ f_y = 3y^2-2(x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow (\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 为D内部唯一驻点, $f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=-\frac{10}{27}$

② 构造 Lagrange 函数

$L = x^3+y^3-(x+y)^2+2+\lambda x+\mu y+\gamma(x+y-3)$

$\begin{cases} L_x = 3x^2-2(x+y)+1+\lambda+\gamma=0 \\ L_y = 3y^2-2(x+y)+1+\mu+\gamma=0 \\ L_\lambda = x=0 \\ L_\mu = y=0 \\ L_\gamma = x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$

$f(0,3)=f(3,0)=20$

③ 比较, 得最大值为20, 最小值为 $-\frac{10}{27}$

3. 设 $z(x,y)=x^y+\int_0^x xe^{-(y+t)^2}\,dt$, 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}$.

法一: 令 $u=y+t$, 则 $z(x,y)=x^y+\int_y^{x+y} xe^{-u^2}\,du$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}+\int_y^{x+y} e^{-t^2}dt + xe^{-(y+x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x + e^{-(y+x)^2} - e^{-y^2} - 2x(y+x)e^{-(y+x)^2}$$

$$= x^{y-1}(1+y\ln x) - e^{-y^2} + (1-2x(y+x))e^{-(y+x)^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)} = -\frac{1}{e}$$

法二: $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}+\int_0^x e^{-(y+t)^2}dt + xe^{-(y+x)^2}$

$x=1$ 代入, 得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1} = y+\int_0^1 e^{-(y+t)^2}dt + e^{-(y+1)^2}$

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1} = 1-2\int_0^1 e^{-(y+t)^2}(y+t)dt - 2(y+1)e^{-(y+1)^2}$

$y=0$ 代入, 得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)} = 1-2\int_0^1 e^{-t^2}\cdot t\,dt - 2e^{-1} = -\frac{1}{e}$

法三: $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x - 2x\int_0^x e^{-(y+t)^2}\cdot(y+t)\,dt$

$y=0$ 代入, 得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=0} = \ln x - 2x\int_0^x e^{-t^2}\cdot t\,dt = \ln x + xe^{-x^2} - x$

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{y=0} = \frac{1}{x} + e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 1$

$x=1$ 代入, 得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)} = -\frac{1}{e}$

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0,\\ 0, & x^4+y^2=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的连续性、偏导数存在性及可微性.

解：(1) $0\le\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right|=\left|\dfrac{x\cdot x^2y}{x^4+y^2}\right|\le|x|\cdot\dfrac{1}{x^4+y^2}\cdot\dfrac{x^4+y^2}{2}=\dfrac{|x|}{2}\to 0\ (x\to 0)$

$\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}=0\ (\text{夹逼准则})\\ f(0,0)=0\end{cases}\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$, $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 关于 x,y 的偏导均存在

(3) $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}$ $\quad\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

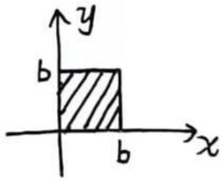
$=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(\Delta x)^3\Delta y}{[(\Delta x)^4+(\Delta y)^2]\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\xlongequal{\text{令}\Delta y=(\Delta x)^2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{(\Delta x)^2+1}}$

这样，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}f(x,y)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}f(x,y)=-\dfrac{1}{2}$，则此极限不存在.

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微

5. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续且单调增加，其中 $b>0$，用**二重积分**证明：

$$b\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\mathrm{d}x.$$



证：令 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le b,\ 0\le y\le b\}$

令 $I=b\int_0^b f(x)g(x)\,dx-\int_0^b f(x)\,dx\int_0^b g(x)\,dx$

则 $I=\int_0^b dy\int_0^b f(x)g(x)\,dx-\int_0^b f(x)\,dx\int_0^b g(y)\,dy$

$=\iint\limits_D f(x)g(x)\,dxdy-\iint\limits_D f(x)g(y)\,dxdy$

$\xlongequal{\text{轮换对称性}}\dfrac{1}{2}\left[\iint\limits_D\big(f(x)g(x)+f(y)g(y)\big)dxdy+\iint\limits_D\big(f(x)g(y)+f(y)g(x)\big)dxdy\right]$

$=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\,dxdy$

由 $f(x),g(x)$ 在 $[0,b]\uparrow$

则 $\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\ge 0$

则 $I\ge 0$，即不等式得证.