大学物理上学期复习

祝晓松

zhuxiaosong@hust.edu.cn

2024春

本学期课程内容：

第一篇 力学

（第1章 --- 第5章）

第二篇 热学

（第6章 --- 第7章）

第三篇 电磁学

（第8章 --- 静电场

第9章 --- 稳恒磁场

第10章 --- 电磁感应）

第四篇 振动与波动

（第11章 ）

……

内容
绪论+第1章 质点运动学 质点、参考系、位置矢量、位移、速度、加速度、相对运动
第2章 牛顿运动定律 牛顿运动三定律及其应用、基本相互作用力、惯性力、科里奥利力(傅科摆、落体偏东) 动量定理、动量守恒定律、角动量、角动量守恒定律、功、动能定理、保守力、势能、功能原理、机械能守恒 定律、能量守恒和转换定律

内容
第3章 刚体的定轴转动 平动和转动、质心、质心运动定理、定轴转动定律、转动惯量、角动量定理、角动量守恒定律、定轴转动的功能原理、 进动（Ω与ω的关系，惯性导航）
第4章 流体运动简介 理想流体的运动、黏性流体的运动
第5章 狭义相对论 伽利略相对性原理、伽利略变换、狭义相对论基本原理、洛仑兹变换、相对论时空观、相对论质量、动量和能量

内容
第6章 气体动理论 热力学第零定律、温度和温标、理想气体状态方程、理想气体微观模型、压强和温度的统计意义、能量均分定理、麦克斯韦速率分布率、偏离平衡态、玻耳兹曼分布率
第7章 热力学基础 功和热量、准静态过程、热力学第一定律、热容、绝热过程、多方过程、循环、卡诺循环、热力学第二定律、熵、熵增原理

内容
第8章 静电场 电荷、库仑定律、电力叠加原理、电场强度、高斯定理及应用、环路定理、电势、电势梯度、静电势能
静电场中的导体和电介质 静电平衡、静电屏蔽、电容和电容器、电介质的极化、极化强度、极化电荷、电位移矢量、介质中的高斯定理和环路定理
第9章 恒定磁场 磁性和磁场、磁感应强度、毕奥—萨伐尔定律、磁高斯定理、安培环路定理

作业：

跟着上课进度完成，每周二交。（记得写上学号！）

注意：按照学校的明文规定，缺作业达三分之一及以上者，综合成绩按零分计！

第三十四条 无故缺课累计超过课程教学时数的1/3，缺交作业或实验报告累计超过课程教学要求的1/3者，不得参加课程的考核，登记成绩时，注明“缺平时成绩”字样，该课程成绩以零分计。

《华中科技大学普通本科生学籍管理细则》(校本〔2021〕3号)

- 随堂演示实验

本学期必做演示实验：

必须跟随授课进度在课堂上完成《必做演示实验目录》中所列的演示实验。
期末卷面占6分，2个小题。
课堂演示纳入课堂调查内容。

不在目录中的实验可以选做

一. 力学
锥体上滚
直升机模型
离心节速器
对比式转动定律演示仪
进动仪（车轮）
伯努利原理(电吹风+乒乓球)

二. 热学
伽尔顿板
麦克斯韦速率分布

三. 电磁学
电荷曲率分布
静电滚筒
避雷针尖端放电
富兰克林轮
静电植绒

部分网络资源的网址

中国教育部爱课程网：
http://www.icourses.cn/home/

中国MOOC课程平台：
http://www.icourses.cn/imooc/

清华大学学堂在线
http://www.xuetangx.com/

东西部高校课程联盟共享
http://www.wemooc.edu.cn

上海高校课程中心
http://www.ucc.sh.edu.cn/

国际MOOC课程平台：

Udacity
https://www.udacity.com/

Coursera
https://www.coursera.org/

edX
https://www.edx.org/

网易公开课：
http://open.163.com/

新浪公开课：
http://open.sina.com.cn/

我校《大学物理》资源共享课网址(爱课网)：
http://www.icourses.cn/coursestatic/course_6180.html

物理英文网站：
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html

部分网络资源的网址

《The Feynman Lectures on Physics》

http://www.feynmanlectures.caltech.edu/

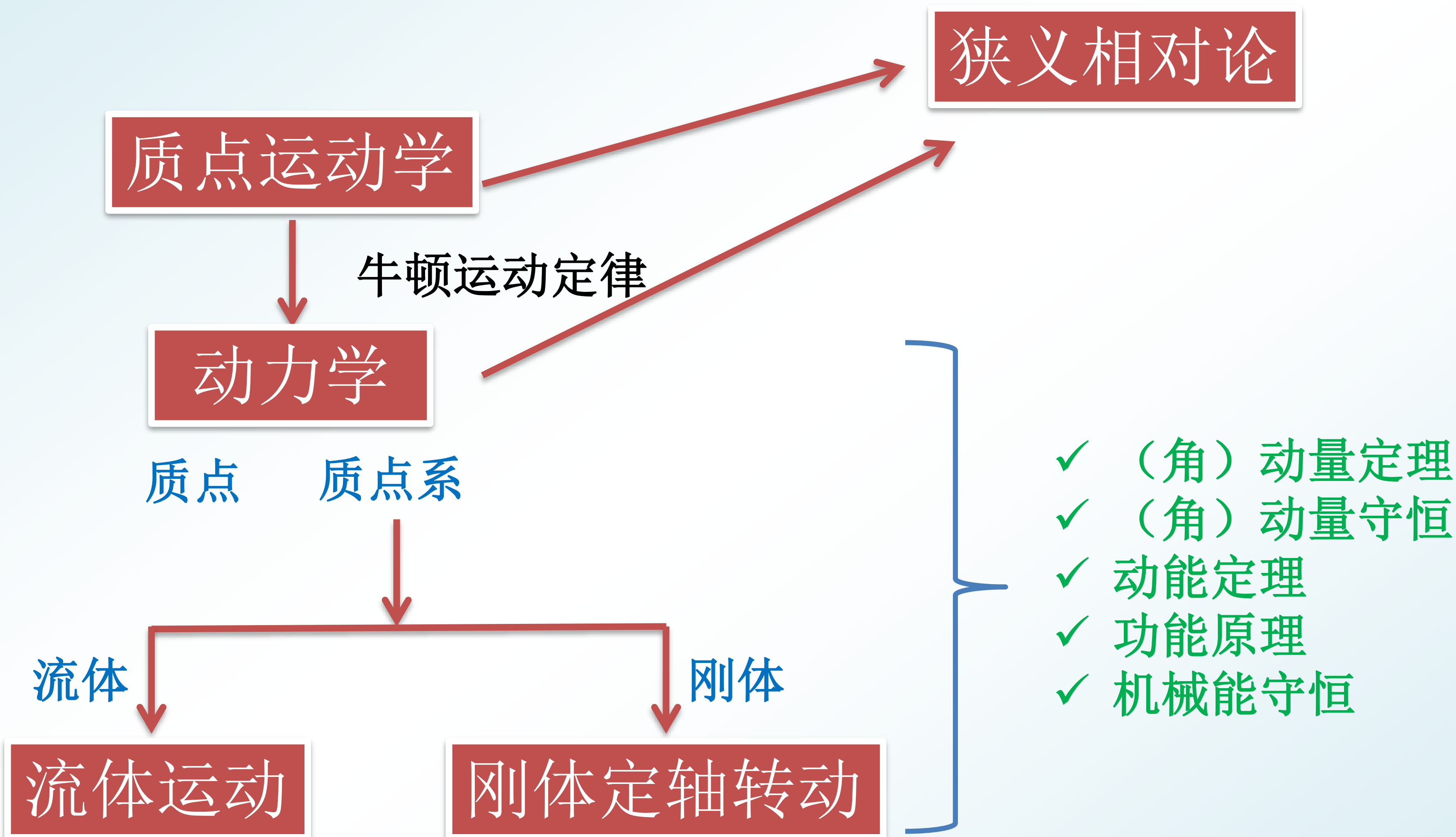
科普中国

http://news.xinhuanet.com/science/

北京科技视频网_分享科学的快乐

https://www.bjscivid.org/

力学篇


狭义相对论
质点运动学
牛顿运动定律
动力学
质点
质点系
流体
刚体
流体运动
刚体定轴转动
✓ （角）动量定理
✓ （角）动量守恒
✓ 动能定理
✓ 功能原理
✓ 机械能守恒

第一章 质点运动学

质点

坐标系，参照系

直角坐标系

自然坐标系

✓ 切向加速度改变运动的快慢；

✓ 法向加速度改变运动的方向。

矢量：位移、（瞬时）速度、（瞬时）加速度

标量：路程、速率

$\vec{a}$，a，a_τ

$\frac{d\vec{v}}{dt}$，$\frac{ds}{dt}$

$\Delta\vec{r}$，Δs，Δr，$|\Delta\vec{r}|$

角速度、角加速度

运动方程、参数方程、轨迹方程

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

相对运动

绝对量

相对量

牵连量

伽利略变换

绝对时空观

位移，路程

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\boxed{|\vec{r}| = r}$$

位移: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$

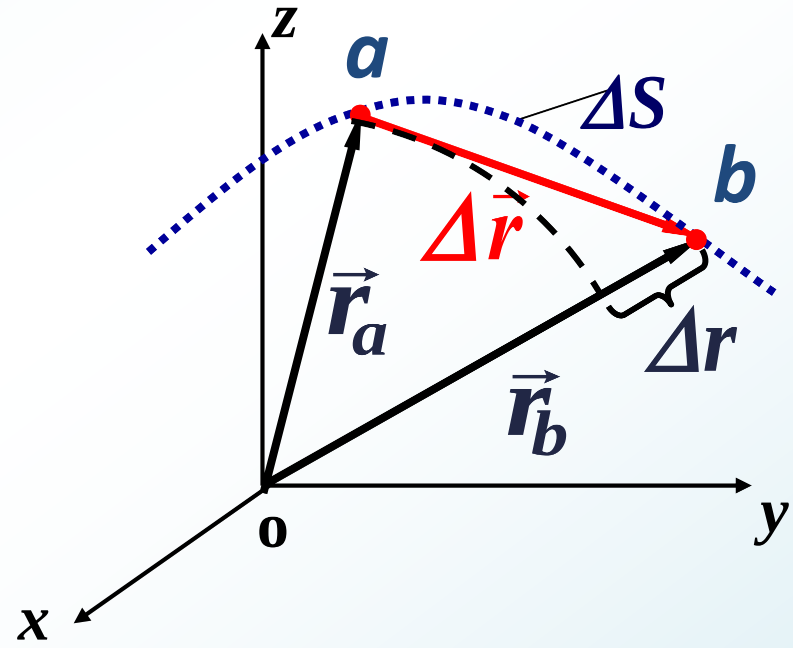
1º位移 $\Delta\vec{r} \to$ 矢量

$\Delta\vec{r}$ 方向 $\vec{r}_b - \vec{r}_a$

大小 $|\Delta\vec{r}| \overset{?}{=} \Delta r$

通常 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r$

$|\mathrm{d}\vec{r}| \cancel{\neq} \mathrm{d}r$

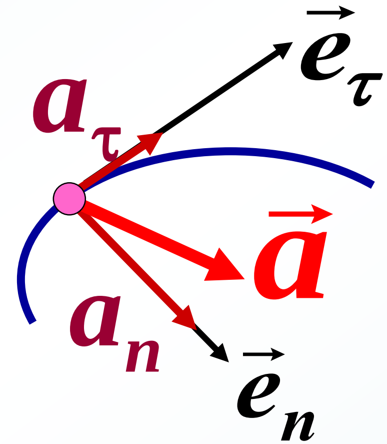


2º 通常 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta S$ 但 $\begin{cases} \Delta t \to 0 \\ |\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}S \end{cases}$

自然坐标系

法向加速度

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

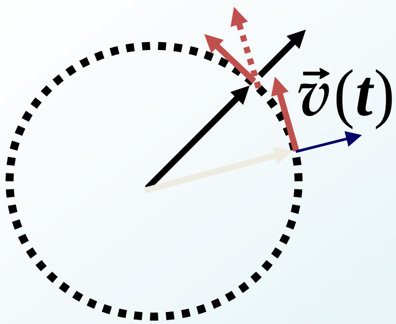


$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}(v\vec{e}_\tau)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t}$$

沿切线方向速率的变化率

——切向加速度

大小 $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$



圆周运动

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_n$$

✓ 切向加速度改变运动的快慢；

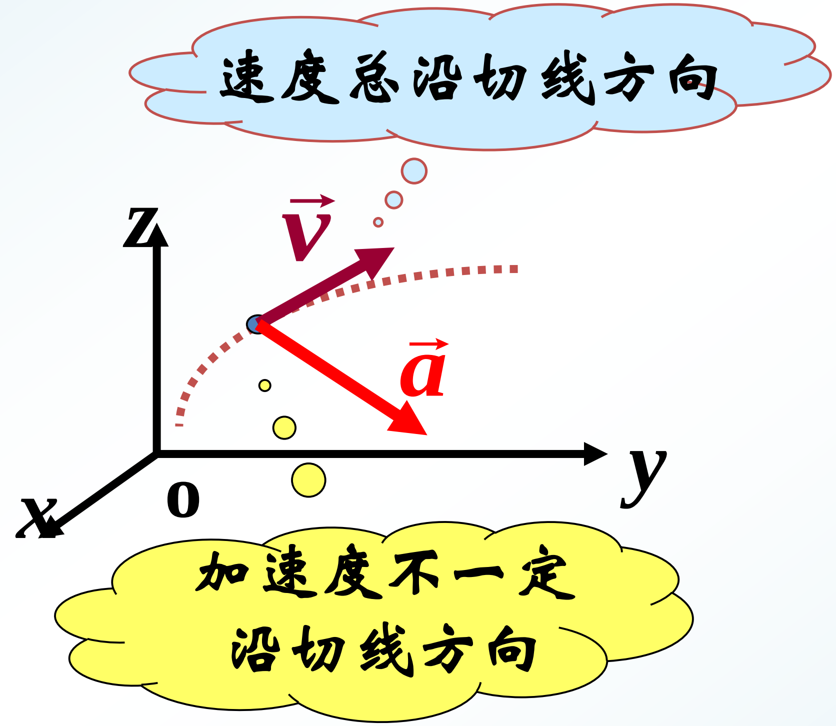
✓ 法向加速度改变运动的方向。

注意！！

(1) $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

(2) $\vec{a}$的方向永远指向曲线凹的一方



[ ]2、质点作曲线运动，$\vec{r}$表示位置矢量，s表示路程，$\vec{v}$表示速度，$\vec{a}$表示加速度，a_t表示切向加速度，下列表达式

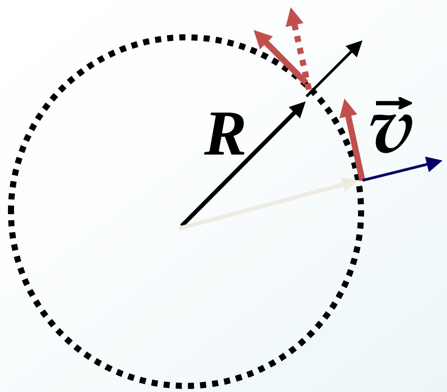
(1) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$ (2) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v$ (3) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ (4) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = a_t$

(A) 只有(1)、(2)是对的； (B) 只有(2)、(4)是对的；

(C) 只有(2)是对的； (D) 只有(3)是对的。

运动方程 $$\vec{r}=\cos(\omega t)\vec{i}+\sin(\omega t)\vec{j}$$

参数方程 $$\begin{cases} x=\cos(\omega t) \\ y=\sin(\omega t) \end{cases}$$



轨迹方程 $$x^2+y^2=1$$

直线运动	转动
位移 $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$	角位移 $\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta(t_1)$
速度 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	角加速度 $\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
匀速直线运动 $s = vt$	匀角速定轴转动 $\theta = \omega t$
匀变速直线运动	匀变角速定轴转动
$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\theta$

在计算中的常用方法:

$$a = f(t) \to f(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}v$$ 两边积分

$$a = f(v) \to f(v) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{f(v)}$$

$$a = f(x) \to f(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \underline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}$$

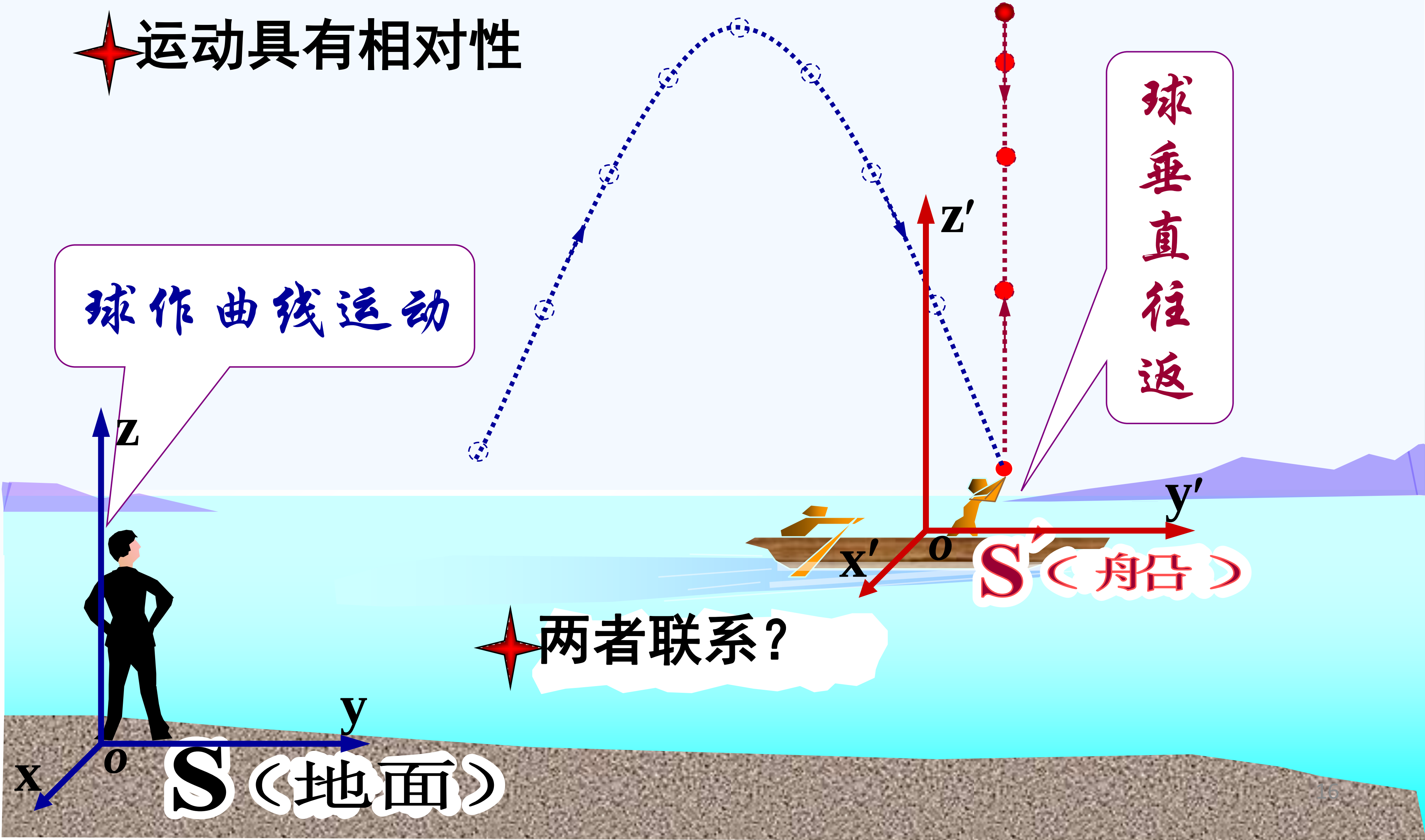
$$f(x)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}v$$

对于其他物理量也是如此

S系、S′系的“习惯性约定”

相对运动

- 运动具有相对性



- 两者联系？

一般约定:

相对地面不动参考系（静系S）所测的量 ——— 绝对量

相对地面运动参考系（动系S'）所测的量——— 相对量

动系相对静系的量 ——— 牵连量

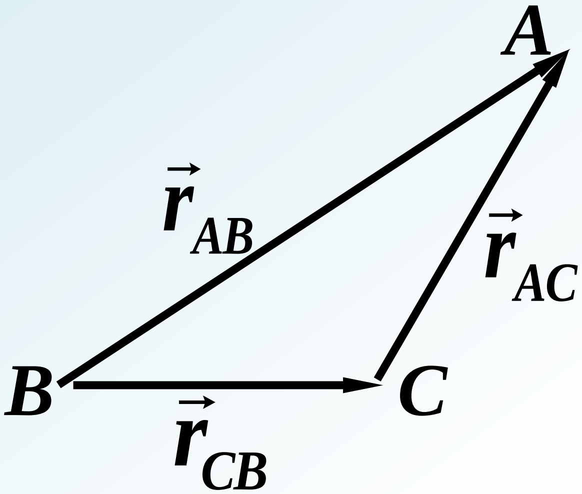
$$\vec{r}_{绝} = \vec{r}_{相} + \vec{r}_{牵} \qquad \vec{v}_{绝} = \vec{v}_{相} + \vec{v}_{牵} \qquad \vec{a}_{绝} = \vec{a}_{相} + \vec{a}_{牵}$$

伽利略变换

一物体相对两个匀速直线运动参照系的加速度相等，即 $\vec{a}_{绝} = \vec{a}_{相}$

伽利略相对性原理

$\vec{r}_{AB}$ ： **A相对B的位矢**



$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{AC} + \vec{r}_{CB}$$

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \Delta\vec{r}_{AC} + \Delta\vec{r}_{CB}$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CB}$$

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AC} + \vec{a}_{CB}$$

推广：

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{AC} + \vec{r}_{CD} + \vec{r}_{DB}$$

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \Delta\vec{r}_{AC} + \Delta\vec{r}_{CD} + \Delta\vec{r}_{DB}$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CD} + \vec{v}_{DB}$$

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AC} + \vec{a}_{CD} + \vec{a}_{DB}$$

$$\cdots$$

第二章 牛顿运动定律

牛顿第二定律

非惯性系

惯性力

加速平动非惯性系

匀速转动非惯性系

✓ 惯性离心力

✓ 科里奥利力

惯性系

伽利略相对性原理

功，功率

空间累积

时间累积

力矩

动能，动能定理

动量，冲量

保守力

角动量

势能，机械能，功能原理

动量定理

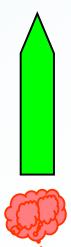
角动量定理

机械能守恒

动量守恒

角动量守恒

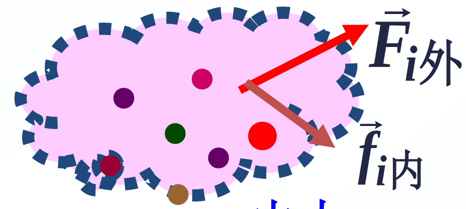
在定轴转动转专门讨论



牛顿第二定律

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

m为常量时 $\vec{F}=m\vec{a}$



外力　内力

$$\vec{F}_i+\vec{f}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{P}_i}{\mathrm{d}t}$$

对于质点系

$$\sum_i\vec{F}_i+\cancel{\sum_i\vec{f}_i}=\sum_i\frac{\mathrm{d}\vec{P}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sum_i\vec{P}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i\vec{f}_i=0,\ 记\vec{F}=\sum_i\vec{F}_i,\ \vec{P}=\sum_i\vec{P}_i$$

质点系所受的合外力　质点系的总动量

则 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$

若每一质点速度相等，

$$\vec{v}_i=\vec{v}$$

$$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i m_i\vec{v}$$

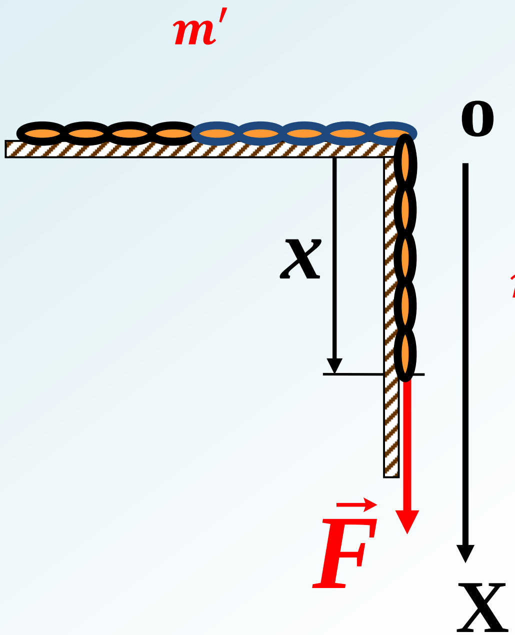
$$=\vec{v}\sum_i m_i=M\vec{v}$$

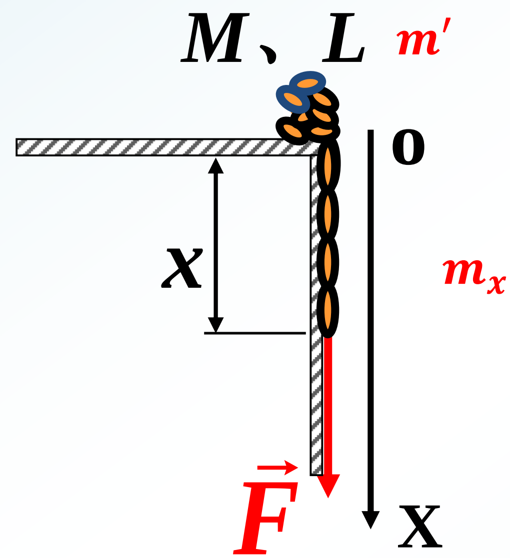
$v<<c$时有

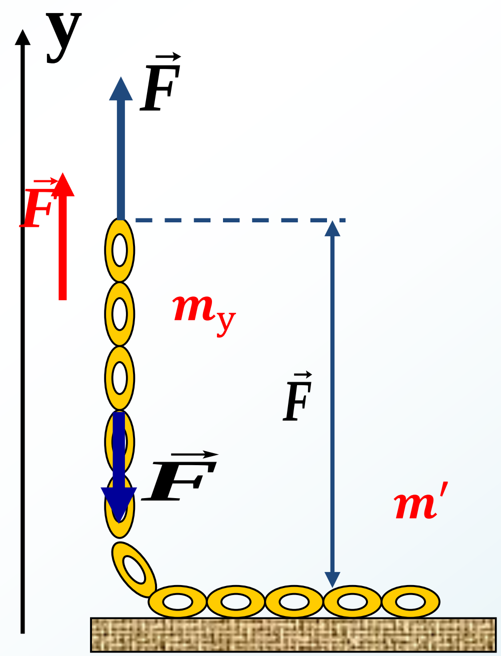
$$\vec{F}=M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=M\vec{a}$$

质点系的总质量

研究对象是整个链条！！







$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(m_x\cdot v+m'\cdot v)}{dt}=\frac{d(m_{总}v)}{dt}=m_{总}\frac{dv}{dt}$$

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(m_x\cdot v+m'\cdot 0)}{dt}=\frac{d(m_x v)}{dt}$$

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(m_y\cdot v+m'\cdot 0)}{dt}=\frac{d(m_y v)}{dt}$$

定义：

牛顿定律成立的参照系～惯性系

相对惯性系作匀速直线运动的参照系

～惯性系

相对惯性系作加速运动的参照系

～非惯性系

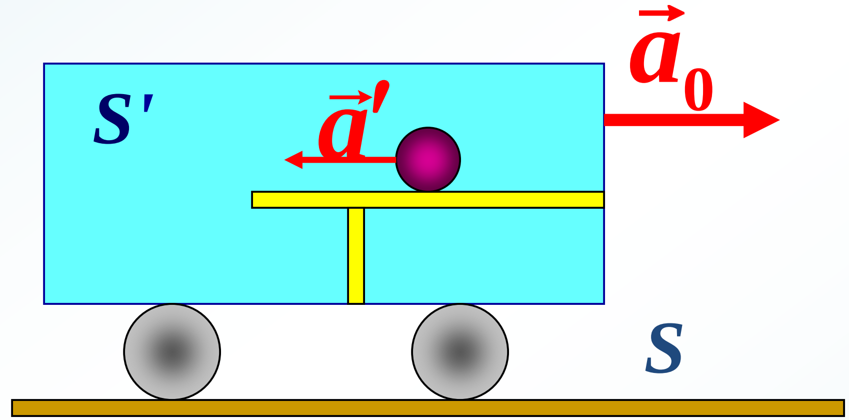
伽利略相对性原理：

一切惯性系中力学规律相同

- **相对某惯性系作匀速直线运动的另一个参考系而言，其内部所发生的一切力学物理过程，都不受系统作为整个的匀速直线运动的影响。**
- **不可能在惯性系内部进行任何力学物理实验来确定该系统作匀速直线运动的速度。**
- **惯性系的绝对速度不可测量。**
- **力学规律而言，一切惯性系等价。**

惯性力

(a) 加速平动的非惯性系S'

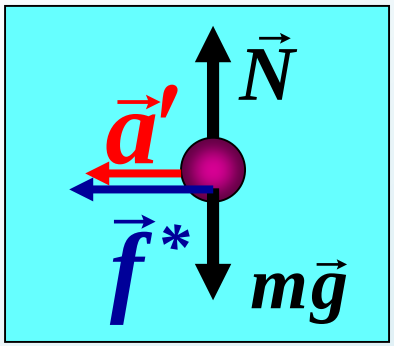


S系 $\vec{F}=m\vec{a}$

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0}$$

S'系 $\vec{F}=m(\vec{a}'+\vec{a}_0)$

$$=m\vec{a}'+\underline{m\vec{a}_0}$$



假想质点还受到另外一个力$-m\vec{a}_0$的作用，而质点所受合外力等于$m\vec{a}'$

$$\vec{F}-m\vec{a}_0=m\vec{a}'$$

真实力

$\vec{f}^*=(-m\vec{a}_0)$

惯性力

相对于参照系（非惯性系）

非惯性系的牛顿第二定律：

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F}_{真实力} + \vec{f}^*_{惯性力}$$

表观力

$$\begin{cases} \vec{F}_{真实力} = m\vec{a} \\ \vec{f}^*_{惯性力} = -m\vec{a}_0 \end{cases}$$

物体间的相互作用

物体的惯性在非惯性系中的表现

虚拟力

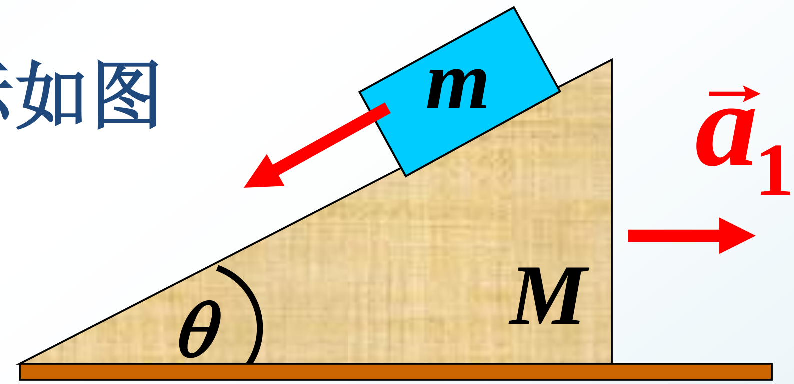
无施力者

例. 一光滑的劈,质量为M, 斜面倾角为θ, 并位于光滑的水平面上, 另一质量为m 的小块物体, 沿劈的斜面无摩擦地滑下， 求两物对地的加速度。

解：研究对象：m 、M

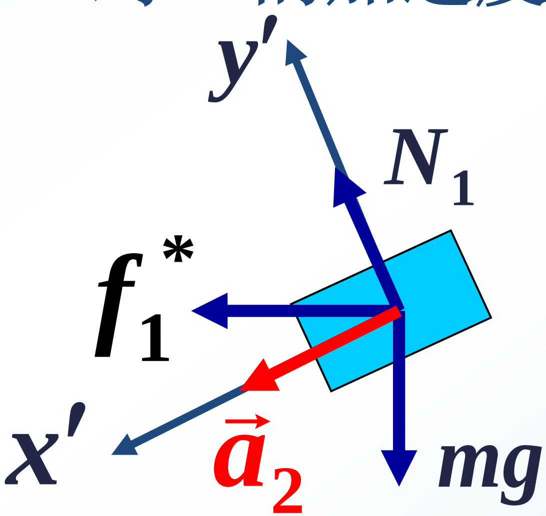
以劈为参照系，建立坐标如图

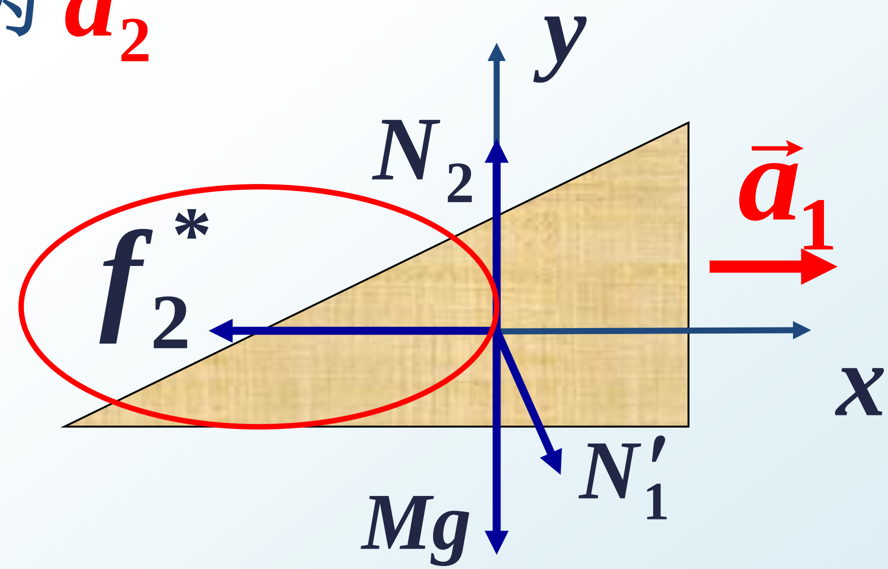
受力分析

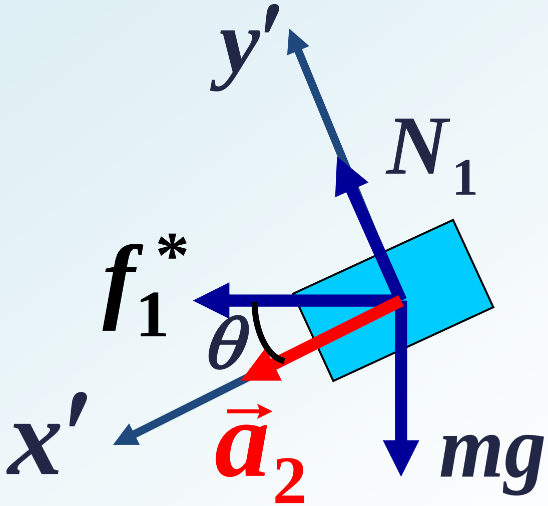


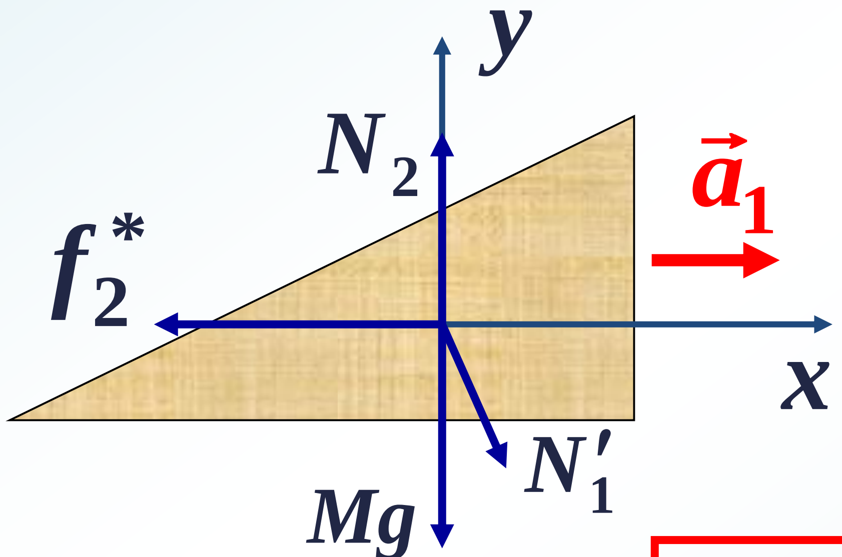
设M 对地的加速度为 $\vec{a}_1$

m 对M 的加速度为 $\vec{a}_2$









列方程（以劈为参照系）

m对M

对m
$$\begin{cases} x': \quad mg\sin\theta + f_1^{*}\cos\theta = ma_2 & \cdots(1) \\ y': -mg\cos\theta + N_1 + f_1^{*}\sin\theta = 0 & \cdots(2) \end{cases}$$

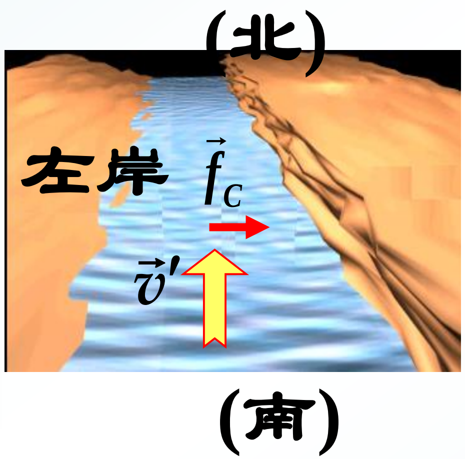
对M
$$\begin{cases} x: N_1'\sin\theta - f_2^{*} = \cancel{Ma_1} = 0 & \cdots(3) \\ y: \quad N_2 - N_1'\cos\theta - Mg = 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

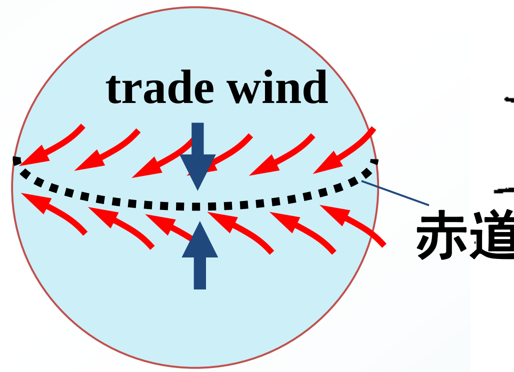
M 对M

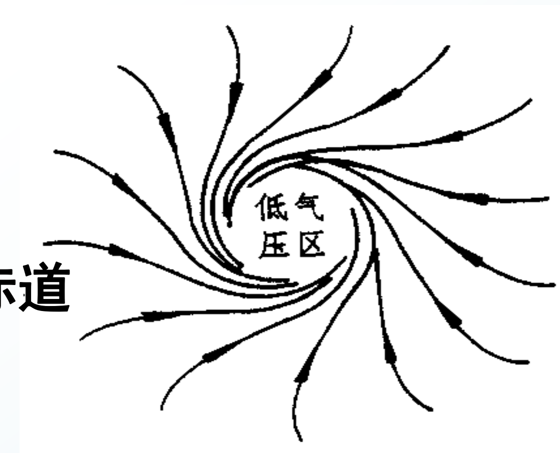
惯性力 $\begin{cases} \text{加速平动的}S'\text{系} & \vec{f}^{\,*}_{惯} = -m\vec{a}_{牵} \\ \text{匀速转动的}S'\text{系} & \vec{f}^{\,*}_{惯} = \begin{cases} -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) & \text{离心力} \\ 2m\vec{v}'\times\vec{\omega} & \text{科氏力} \end{cases} \end{cases}$

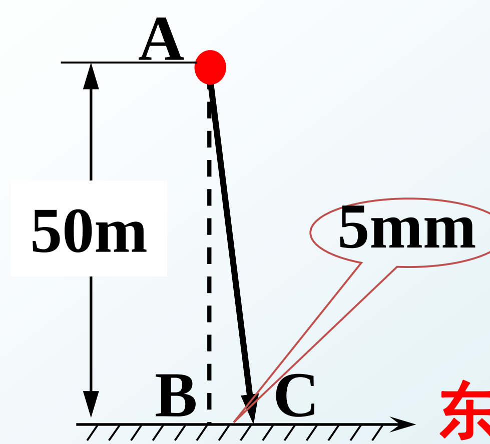
科里奥利力的现象

傅科摆









落体偏东

冲量与动量定理（力的时间累积效应）

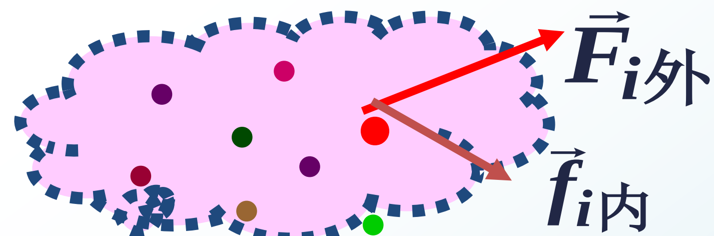
对质点有：（适用范围：惯性系）

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P} \quad \text{或} \quad \boxed{\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_t-\vec{P}_0}$$

冲量 $\vec{I}=\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t$

对质点系：

设N个质点构成的质点系



$$(\vec{F}_{外1}+\vec{f}_{内1})\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}_1$$

$$(\vec{F}_{外2}+\vec{f}_{内2})\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}_2$$

$$\vdots$$

$$(\vec{F}_{外N}+\vec{f}_{内N})\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}_N$$

$\vec{F}_{合外}=\vec{F}$ $\qquad \vec{P}$

$$(\sum\vec{F}_{外i}+\cancelto{0}{\sum\vec{f}_{内i}})\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boxed{\sum\vec{P}_i}$$

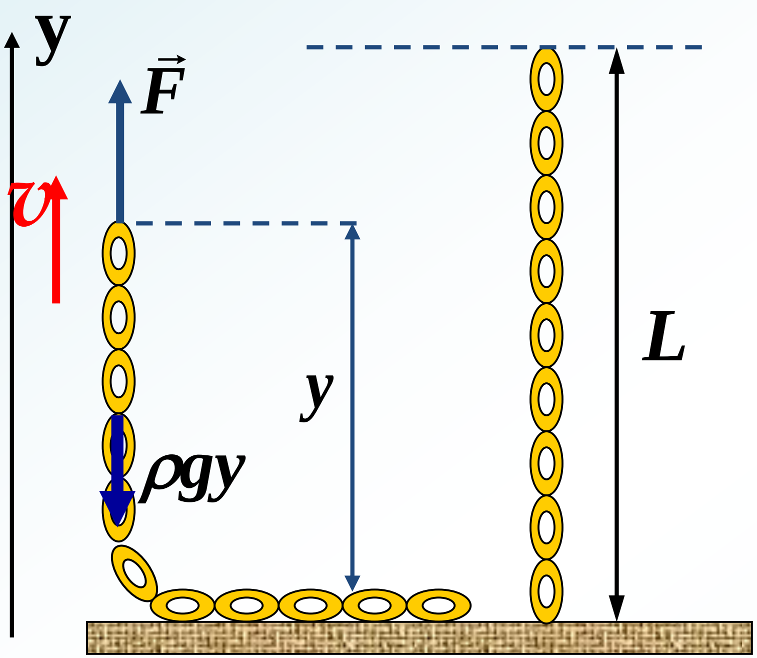
$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}$$

$$\boxed{\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_t-\vec{P}_0}$$

内力对质点系的动量改变没有贡献！

例. 一根长L均质铁链平放桌上，质量线密度为ρ。今用手提起链的一端使之以匀速v 铅直上升。

求: 从一端离地到全链离地，手的拉力的冲量?



解: 由牛顿第二定律

$$F-\rho g y=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\rho y v)}{\mathrm{d}t}$$

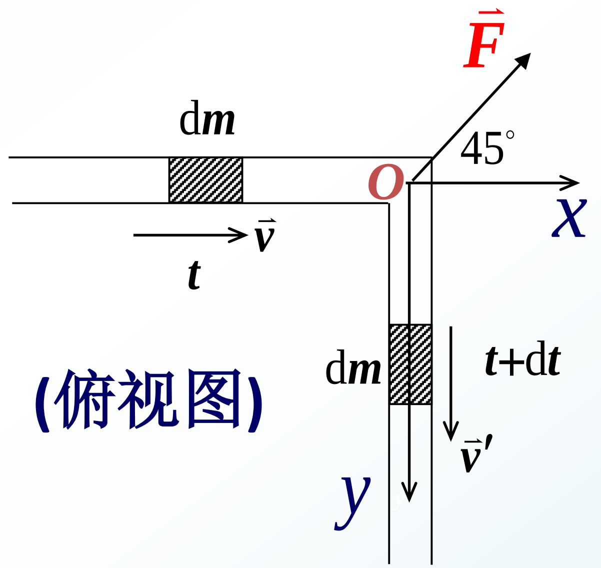
$$=\rho v^2+\rho y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad 0$$

$$\therefore \text{有 } F=\rho g y+\rho v^2$$

1. 从受力的角度分析，为什么F>mg?
   - 还有下面链条的拉力。
2. 为什么这里没有考虑链条间的拉力T?
   - 对于研究对象（链条）而言，T是内力。

例: 水管有一段弯曲成90°。已知管中水的流量为3×10³kg/s，流速为10m/s。求水流对此弯管的压力之大小和方向。

解: 如图所示，考虑质量为dm的一小段水柱临通过直角弯曲处和刚通过直角弯曲处这两个状态。设时间间隔为dt，水管对dm的力为 $\vec{f}$



(水在水平面内流)

则 $\vec{v}=v\vec{i}$　$\vec{v}'=v\vec{j}$　$v=10\text{m/s}$

由动量定理得 $\vec{f}\mathrm{d}t=\mathrm{d}m\cdot(\vec{v}'-\vec{v})$

依牛顿第三定律，水对水管的作用力为 $\vec{F}$

$\boxed{\vec{F}_{合}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}}$

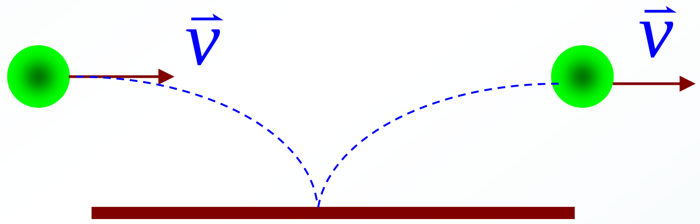
$$\vec{F}=-\vec{f}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v}-\vec{v}')=3\times10^{3}(10\vec{i}-10\vec{j})=3\times10^{4}(\vec{i}-\vec{j})(N)$$

所以，$\vec{F}$ 的大小为 $3\sqrt{2}\times10^{4}N$ ，方向沿直角的平分线指向右上方。

记得回答方向。注意弄清楚问的是谁的力、谁的冲量。

例: t=0时刻水平抛出一小球，经过Δt后由地面弹回原高度，且恢复原速度。求地面给小球的冲量的大小。

解: 总冲量 $\vec{I}=\Delta\vec{P}=0$



设地面给小球的作用力为 $\vec{f}$，

则由定义有

$$\vec{I}=\int_0^{\Delta t}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}(m\vec{g}+\vec{f})\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}m\vec{g}\mathrm{d}t+\int_0^{\Delta t}\vec{f}\mathrm{d}t$$

$$=\vec{I}_g+\vec{I}_{地}=0$$

$$\therefore\vec{I}_{地}=-\vec{I}_g=-m\vec{g}\cdot\Delta t$$

$$\therefore I_{地}=mg\cdot\Delta t$$

变质量问题 —— 整个研究体系质量未变，是划分的一部分m变了 （不同于相对论效应）

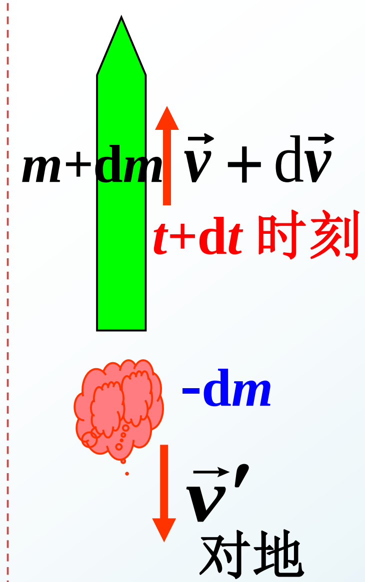
$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}$$

设t时刻箭体质量为m，取为研究的质点系。

t时刻动量：$\vec{P}_1 = m\vec{v}$

$t+\mathrm{d}t$时刻动量：$\vec{P}_2 = (m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}m)\vec{v}'$

火箭受外力为：$\vec{F}$　　　　(此处$\mathrm{d}m<0$)



由动量定理得：$\vec{F}\mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

$$= (m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}m)\vec{v}' - m\vec{v}$$

化简得：$\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} - \vec{v}'\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$

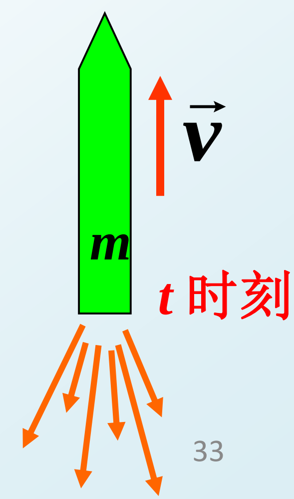
(略去二阶无穷小)

——密歇尔斯基方程

或：$\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$　　$(\vec{u}=\vec{v}'-\vec{v})$

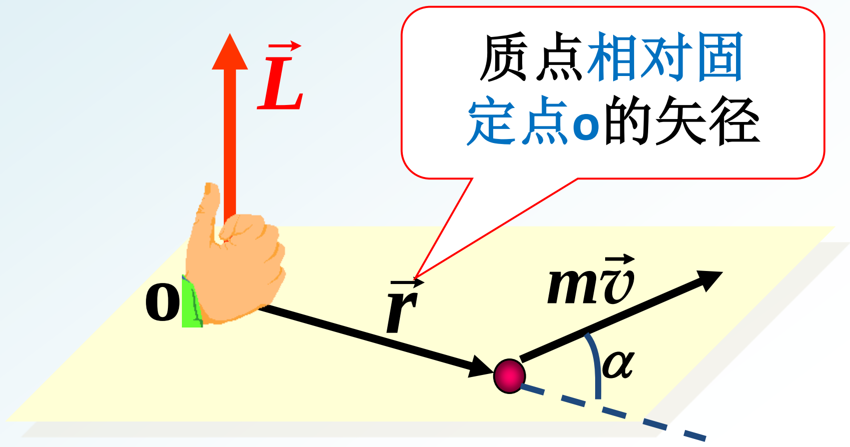
喷出的气体相对箭体的速度

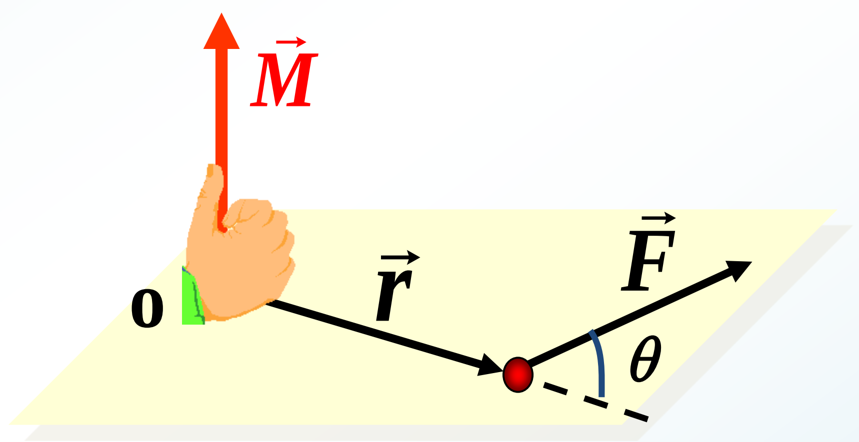
气地　地箭



角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$

力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$





角动量定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$

$$\int_0^t \vec{M}dt=\vec{L}_t-\vec{L}_0$$

角动量守恒定律

若 $\vec{M}=0$ 则 $\vec{L}_t=\vec{L}_0$ 或 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=$恒矢量

类比

牛顿第二定律 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$

冲量定理 $\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_t-\vec{P}_0$

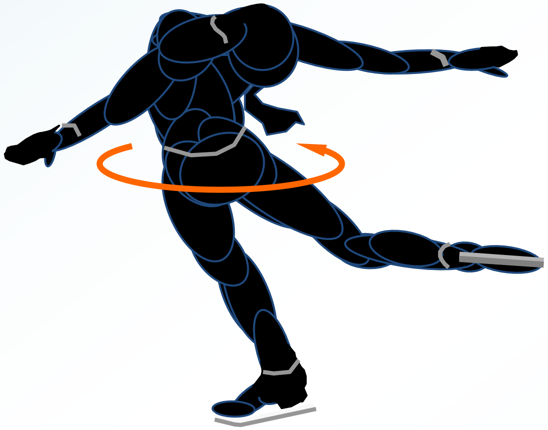
动量守恒定律 当 $\vec{F}=0$ 时 $\vec{P}_t=\vec{P}_0$

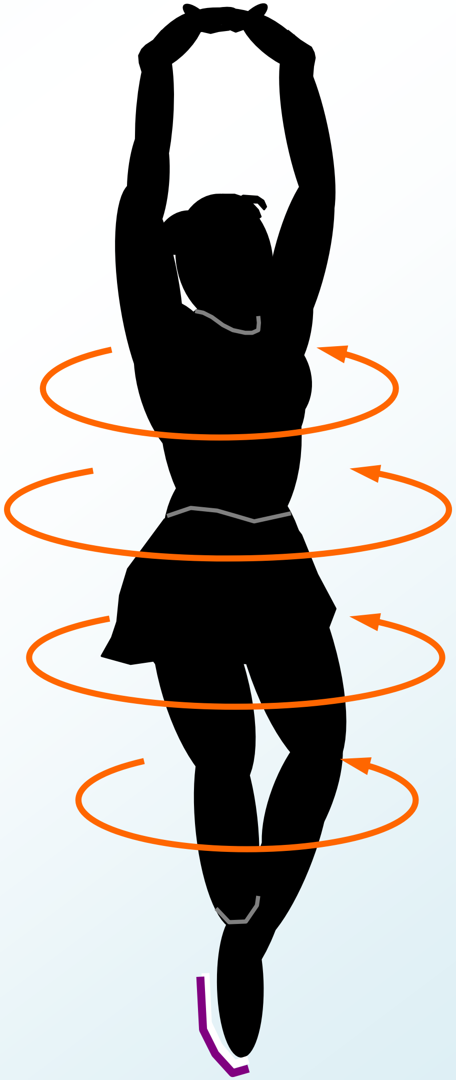
角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$ 力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

角动量定理 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}$ $\int_0^t \vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_t-\vec{L}_0$

角动量守恒定律 若 $\vec{M}=0$ 则 $\vec{L}_t=\vec{L}_0$

角动量守恒的现象



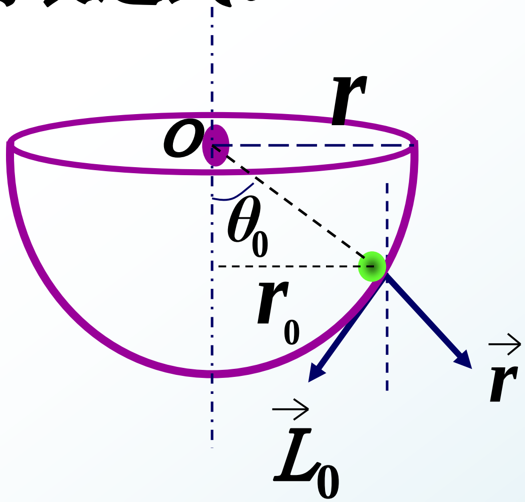


陀螺仪

离心节速器

力矩和角动量都是矢量，可以单独考察某个分量

例: 将一个质点沿一个半径为r的光滑半球形碗的内表面水平地投射，碗保持静止。设v_0是质点恰好能达到碗口所需要的初速度。试求出v_0作为θ_0的函数的表达式。



解：取球心o为参考点，并设开始时质点在黑板面内，且速度垂直向外。

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ 垂直黑板向内，故垂直于y轴。

所以沿y轴方向的力矩 $M_y=0$

故角动量在y方向上的分量L_y守恒：

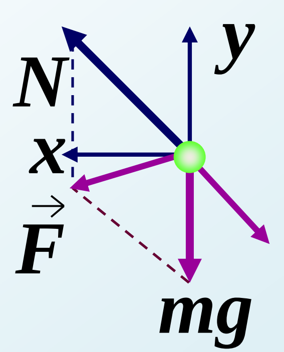
$$L_{0y} = L_y$$

$$L_0 = rmv_0 \sin 90^\circ = rmv_0$$

$$L_{0y} = L_0 \sin\theta_0 = rmv_0 \sin\theta_0 = mv_0 r_0$$

则：$mv_0 r_0 = mvr \quad (L_y = L)$

受力分析：



同时复习对轴的角动量、力矩

$$M_z = (M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k})\cdot\vec{k} = \vec{M}\cdot\vec{k}$$

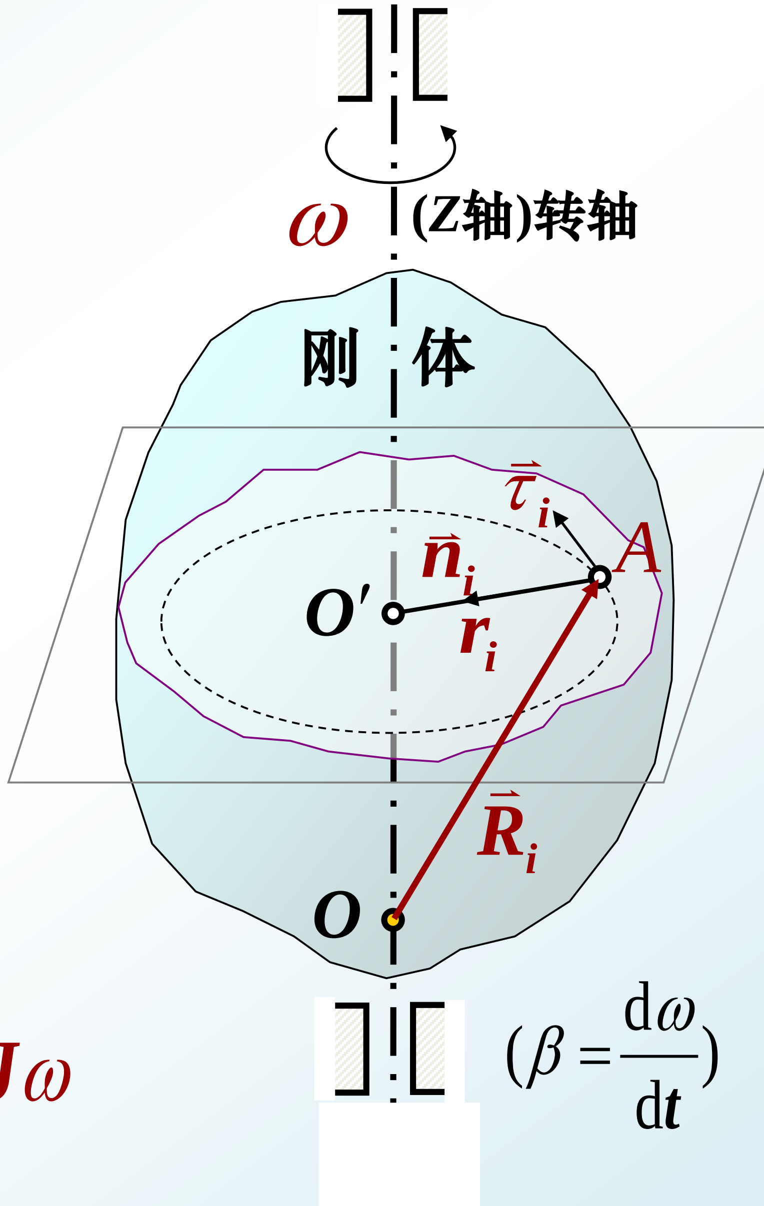
对轴上任选一参考点O，任一质元A对O的角动量为

$$\vec{L}_i = \vec{R}_i \times m_i\vec{v}_i = m_i(z_i\vec{k} - r_i\vec{n}_i)\times r_i\,\omega\,\vec{\tau}_i$$

$$= m_i\,\omega\,r_i(z_i\vec{k}\times\vec{\tau}_i + r_i\vec{k})$$

其z分量与O点选取无关

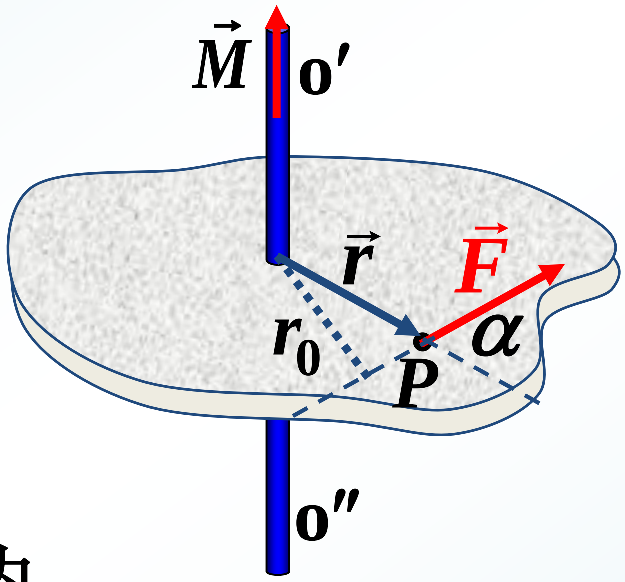
$$L_z = \sum \vec{L}_i\cdot\vec{k} = \sum m_i\,\omega\,r_i(z_i\vec{k}\times\vec{\tau}_i + r_i\vec{k})\cdot\vec{k} = J\omega$$



$$(\beta = \frac{d\omega}{dt})$$

力矩（P61）

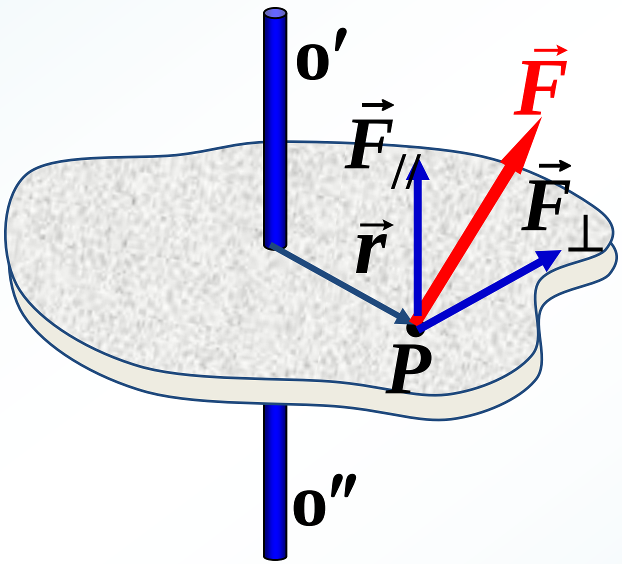
定义：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$



（1）$\vec{F}$ 在垂直o′o″ 的平面内

$$M=rF\sin\alpha=r_0F$$

（2）$\vec{F}$ 不在垂直o′o″ 的平面内



$\vec{F}$ 总可分解成两个分量

$$\vec{F}=\vec{F}_{\perp}+\vec{F}_{//}$$

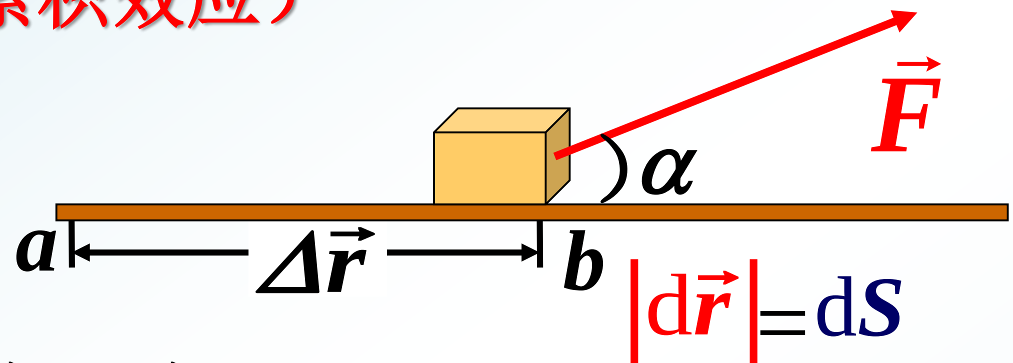
对刚体绕o′o″轴转动无贡献

$\therefore$ 计算$\vec{M}$时

只需考虑 $\vec{F}_{\perp}$的力矩

功（力在空间上的累积效应）

功 ——**过程量**

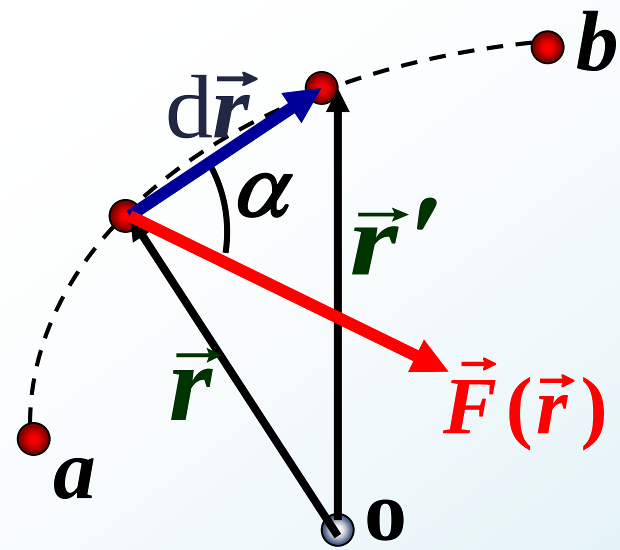


$$\mathrm{d}A = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

所作的总功:

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F(r)\,|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha$$

$$= \int_a^b F(r)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$



✓ **一般力对质点所作的功,不仅与始、末位置有关,而且与路径有关。**

✓ **功是能量交换或变化的一种量度。**

动能定理

单个质点的动能定理 $\boxed{A_{外}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k}$

质点系的动能定理：以两个质点为例

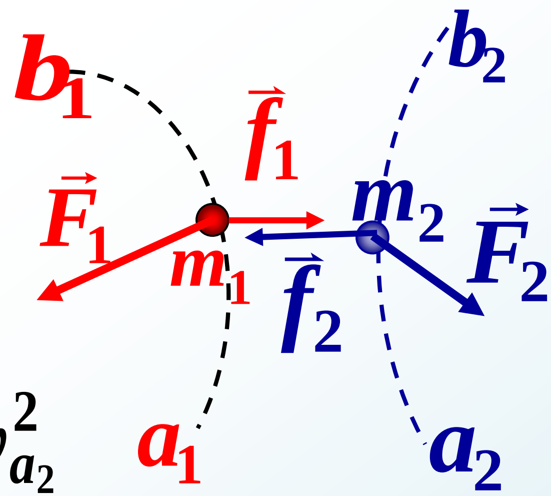
$A_{外}$　　　　$A_{内}\neq 0$?

对m_1

$$\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_{a_1}^{b_1}\vec{f}_1\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}m_1v_{b_1}^2-\frac{1}{2}m_1v_{a_1}^2$$

对m_2

$$\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}+\int_{a_2}^{b_2}\vec{f}_2\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}m_2v_{b_2}^2-\frac{1}{2}m_2v_{a_2}^2$$



两式相加 $\boxed{A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k}$

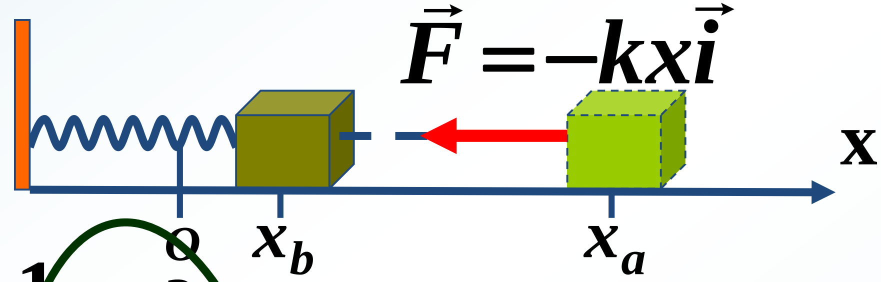
结论

内力可以改变系统的总动能，

但不改变其总动量。

保守力 势能

$$\vec{F}=-kx\vec{i}$$



弹性力做功 $A_{ab}=\int_{x_a}^{x_b}F\mathrm{d}x$

$$=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)$$

作功只与始末位置有关的力 ——保守 内力

重力的功 $A_{ab}=-(mgy_b-mgy_a)$

引力的功 $A_{ab}=-[(-\frac{GMm}{r_b})-(-\frac{GMm}{r_a})]$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p=mgy$$

$$E_p=-\frac{GMm}{r}$$

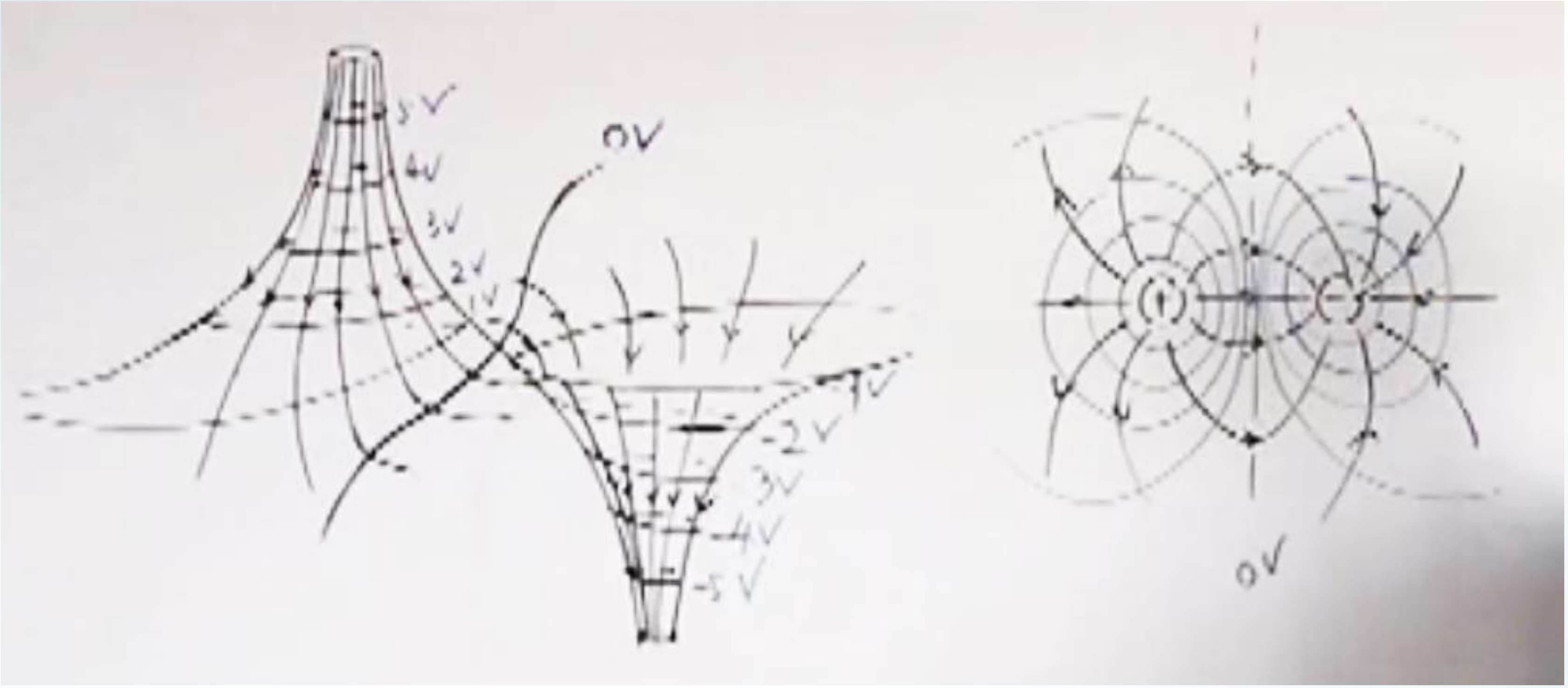
$$A_{ab}=-(E_{pb}-E_{pa})=-\Delta E_p$$

势能

状态量

结论

保守力作功，以势能减少为代价！



电场力作功 ＝ 静电势能的减少

$$A_{ab}=\int_a^b q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q(V_a-V_b)=\boxed{qV_a}-\boxed{qV_b}$$

功能原理 机械能守恒定律

机械能

定义： $E = E_k + E_p$——机械能

则 $A_{外} + A_{内保} + A_{内非保} = E_{kb} - E_{ka}$

$$A_{内保} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

$$\boxed{A_{外} + A_{内非保} = (E_{kb} + E_{pb}) - (E_{ka} + E_{pa}) = \Delta E}$$

——功能原理

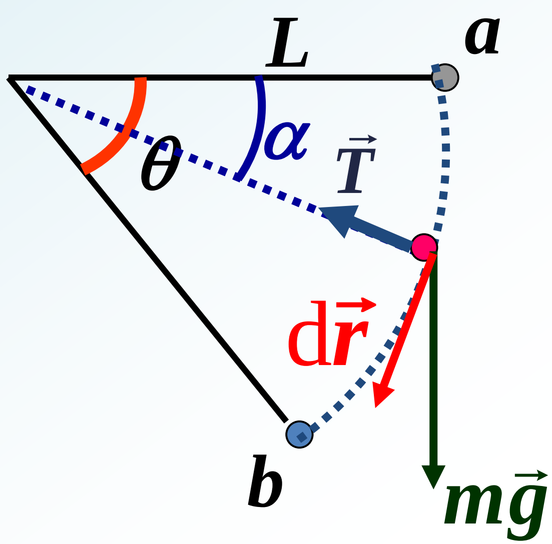
机械能守恒定律

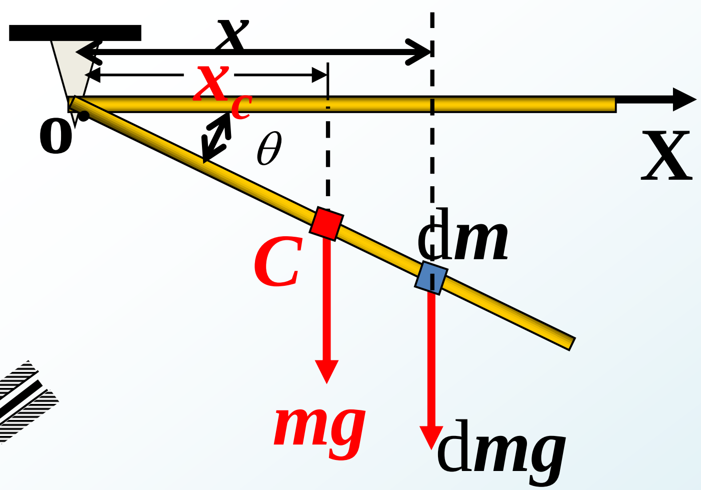
由上式 $\begin{cases} \text{若 } A_{外} + A_{内非保} = 0 \quad \Delta E = 0 \\ E_b = E_a = \text{恒量} \end{cases}$

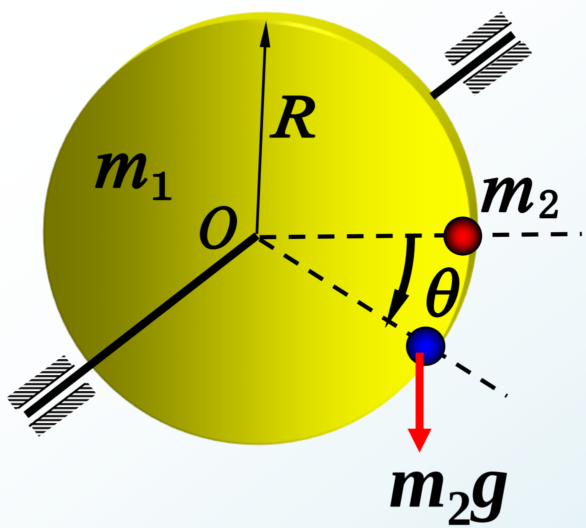
只有保守内力作功，
系统的总机械能保持不变。

下摆的一类问题：

- ✓ 动力学方程，积分；
- ✓ 动能定理
- ✓ 机械能守恒







本章归纳

时间累积效应

角动量

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

$\vec{M}=0$

$\vec{L}_1=\vec{L}_2$ 角动量守恒

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

$\vec{F}=0$

$\vec{P}_1=\vec{P}_2$ 动量守恒

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

解决问题的思路可按此顺序倒过来！

$$\int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{r}=E_{k_2}-E_{k_1}$$

$$\int_1^2\vec{F}_{外}\cdot d\vec{r}+\int_1^2\vec{f}_{内非}\cdot d\vec{r}=E_2-E_1$$

$A_{外}=0$　$A_{内非}=0$

$E_1=E_2$ 机械能守恒

空间累积效应

牛顿第二定律 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$

冲量定理 $\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_t-\vec{P}_0$

动量守恒定律 当 $\vec{F}=0$ 时，$\vec{P}_t=\vec{P}_0$

角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$ 力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

角动量定理 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}$ $\int_0^t \vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_t-\vec{L}_0$

角动量守恒定律 若 $\vec{M}=0$ 则 $\vec{L}_t=\vec{L}_0$

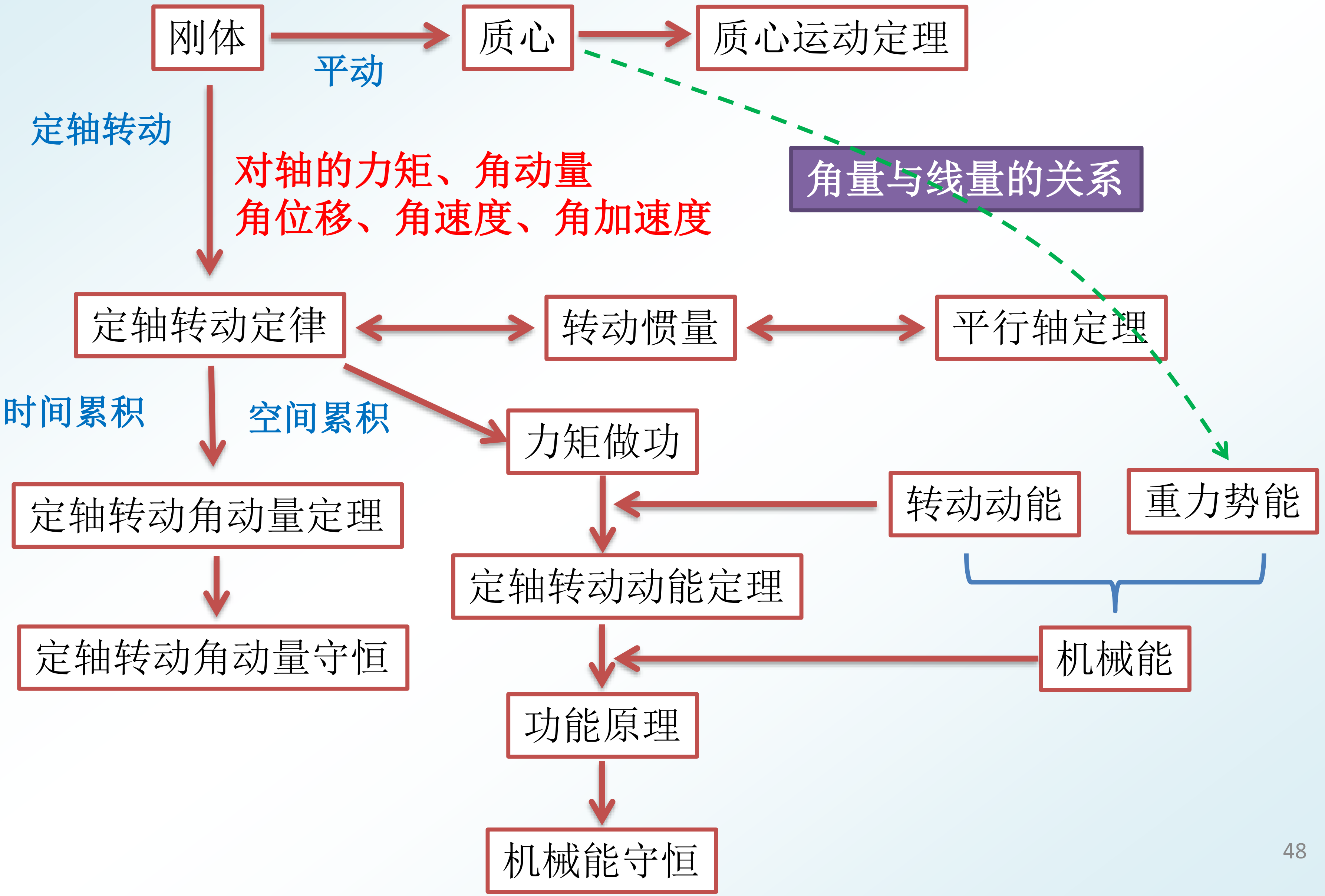
功 $A_{ab}=\int_a^b \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

功率 $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta A}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

动能定理 $A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k$

功能原理（机械能守恒） $A_{外}+A_{内非保}=(E_{kb}+E_{pb})-(E_{ka}+E_{pa})=\Delta E$

第三章 刚体定轴转动

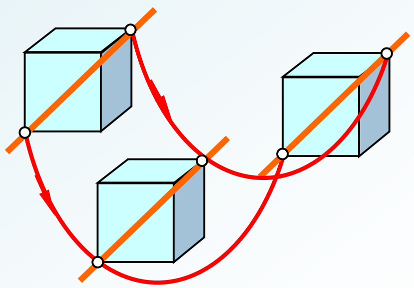


刚体
平动
质心
质心运动定理
定轴转动
对轴的力矩、角动量
角位移、角速度、角加速度
角量与线量的关系
定轴转动定律
转动惯量
平行轴定理
时间累积
空间累积
力矩做功
转动动能
重力势能
定轴转动角动量定理
定轴转动动能定理
定轴转动角动量守恒
机械能
功能原理
机械能守恒

在外力作用下，物体的形状和大小保持不变

—— 刚体

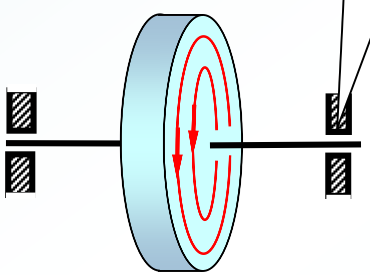
平动



各点$\Delta\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$相同

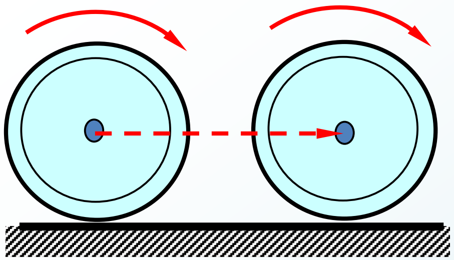
转动

定轴转动



相同角速度圆周运动

滚动



平动+转动

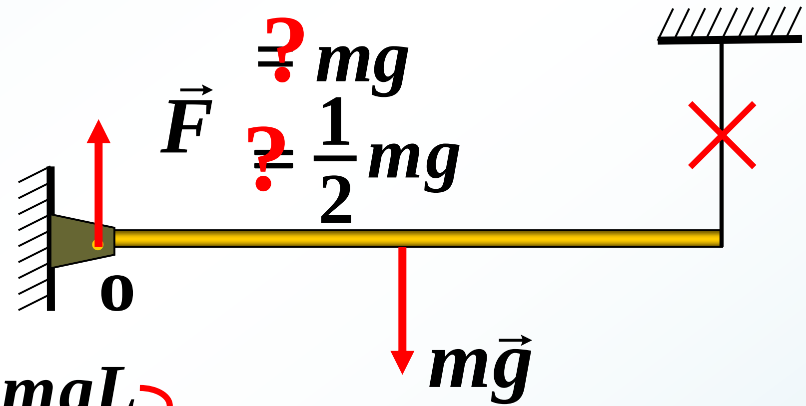
质心的位矢 $\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$

$\therefore \quad \vec{F}_{合外} = m\vec{a}_c$ ——质心运动定理

例. 质量为m、长为L的匀质细杆水平放置，一端为铰链，另一端用绳悬挂。求剪断绳子瞬时，杆的角加速度以及铰链的支撑力。

分析： 剪断时 $\omega=0$　β ? $\neq 0$

$M \neq 0$



解： 剪断时杆绕o点的力矩

由定轴转动定律

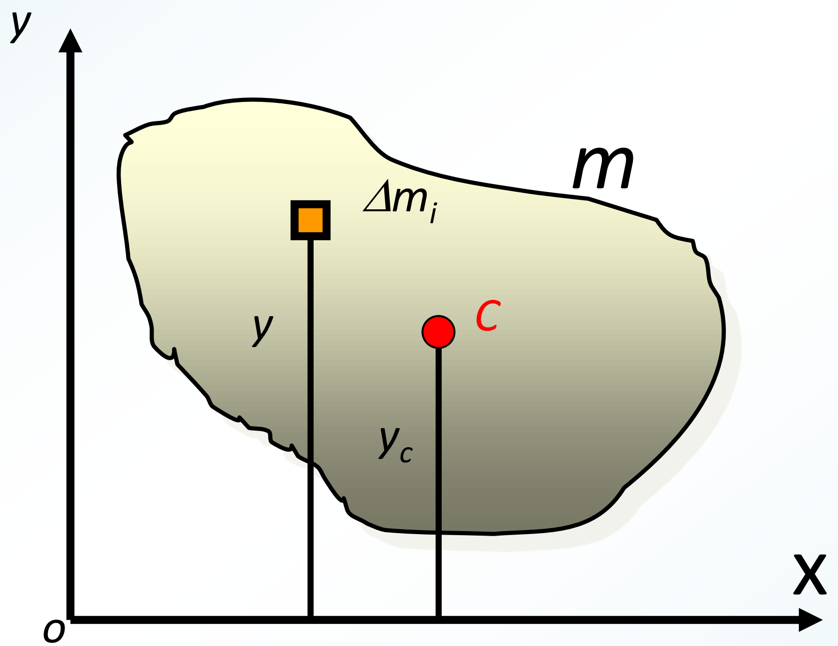
$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}mgL \\ M &= J\beta \\ J &= \frac{1}{3}mL^2 \end{aligned}\right\} \beta = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

$$\boxed{\text{质心平动}\quad \left.\begin{aligned} mg - F &= ma_c \\ a_c &= \frac{1}{2}L\beta \end{aligned}\right\} F = m(g-a_c) = \frac{1}{4}mg}$$

问： 若杆从上方转下来到水平位子时 $\omega=\omega_0$

$\beta = ?$　$F = ?$

刚体的重力势能



$E_{p(y=0)}=0$

一个质元的势能

$$E_{pi}=\Delta m_i gy$$

整个刚体的势能

$$E_p=\sum_i \Delta m_i gy$$

$$=g\frac{(\sum_i \Delta m_i y)m}{m}$$

y_c

$$=mgy_c$$

刚体的重力势能＝它的全部质量都集中在质心时所具有的势能

质心 $\overset{?}{\neq}$ 重心

定轴转动定律: $\boxed{M = J\beta}$

$J = \sum m_i r_i^2$ ——刚体对定轴（z 轴）的转动惯量

与牛顿定律比较： $\vec{F} = m\vec{a}$

$M = J\beta$

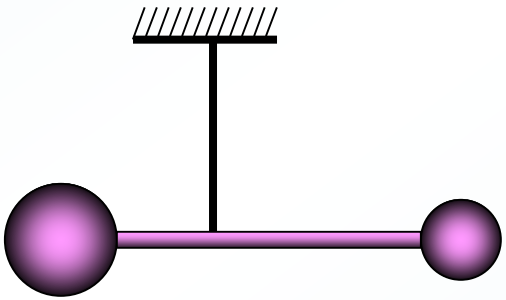
$$\begin{cases} \vec{M} \longrightarrow \vec{F} \\ \vec{\beta} \longrightarrow \vec{a} \\ J \longrightarrow m \end{cases}$$

m反映质点的平动惯性，J反映刚体的转动惯性。

转动惯量的计算

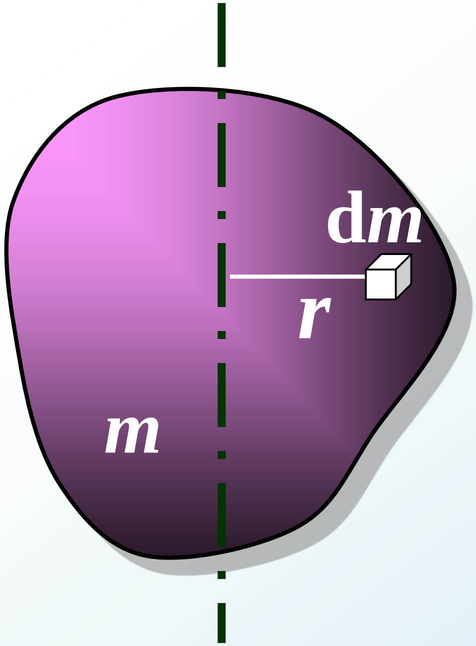
（1）构成刚体的质量元是分立的

$$J=\sum m_i r_i^2$$



（2）刚体的质量是连续分布的

$$J=\int_m r^2\cdot \mathrm{d}m$$

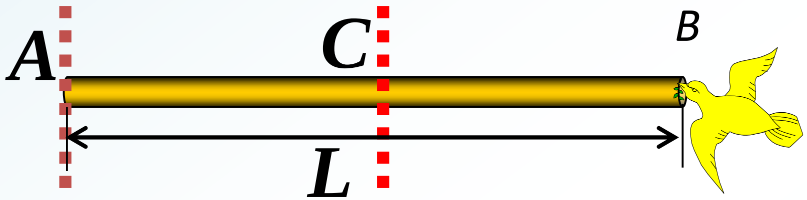


与转动惯量有关的因素

$\left\{\begin{array}{l}\text{刚体的质量}\\ \text{转轴的位置}\end{array}\right.$

$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l$　　$\mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}S$　　$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$

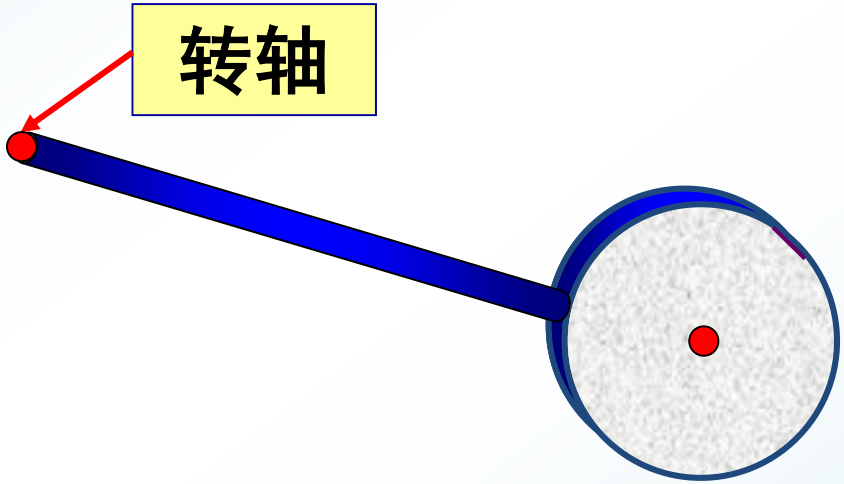
平行轴定理



若有任一轴A与过质心C的轴平行、相距为d，刚体对其转动惯量为J_A，则有：

$$\boxed{J_A = J_C + md^2}$$ ——平行轴定理

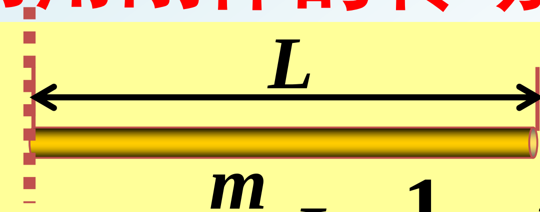
(推导见P65底)：



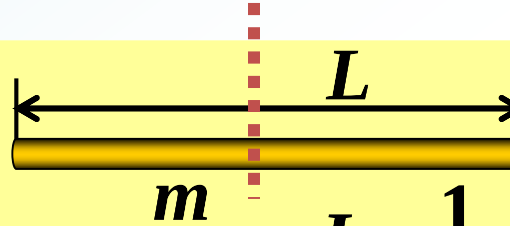
转动惯量可以拆分计算

几种常用刚体的转动惯量

细棒

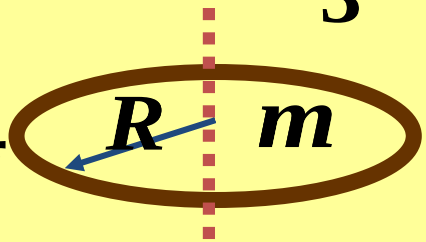


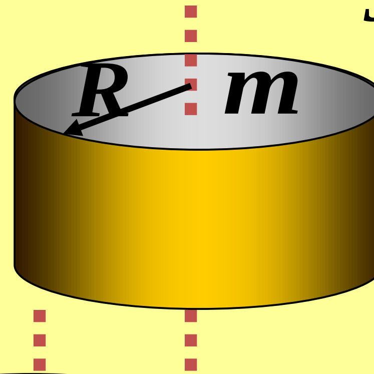
$$J=\frac{1}{3}mL^2$$



$$J=\frac{1}{12}mL^2$$

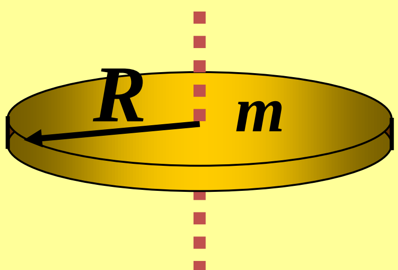
薄圆环
或薄圆筒

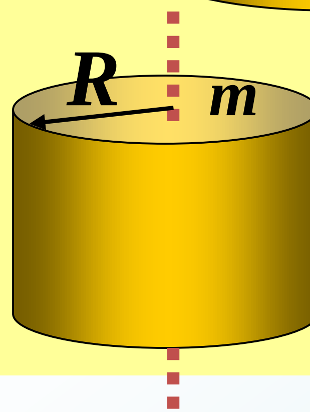




$$J=mR^2$$

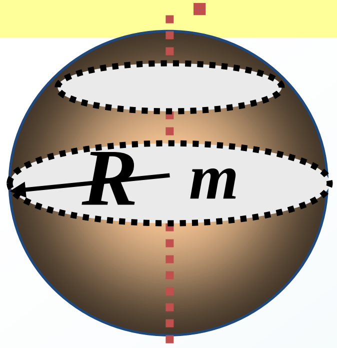
圆盘或
圆柱体





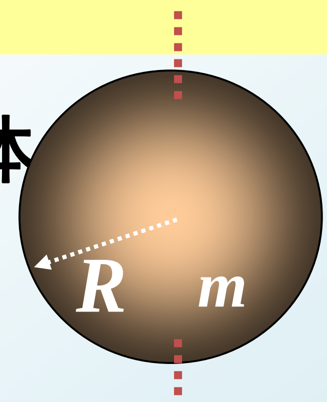
$$J=\frac{1}{2}mR^2$$

薄球壳



$$J=\frac{2}{3}mR^2$$

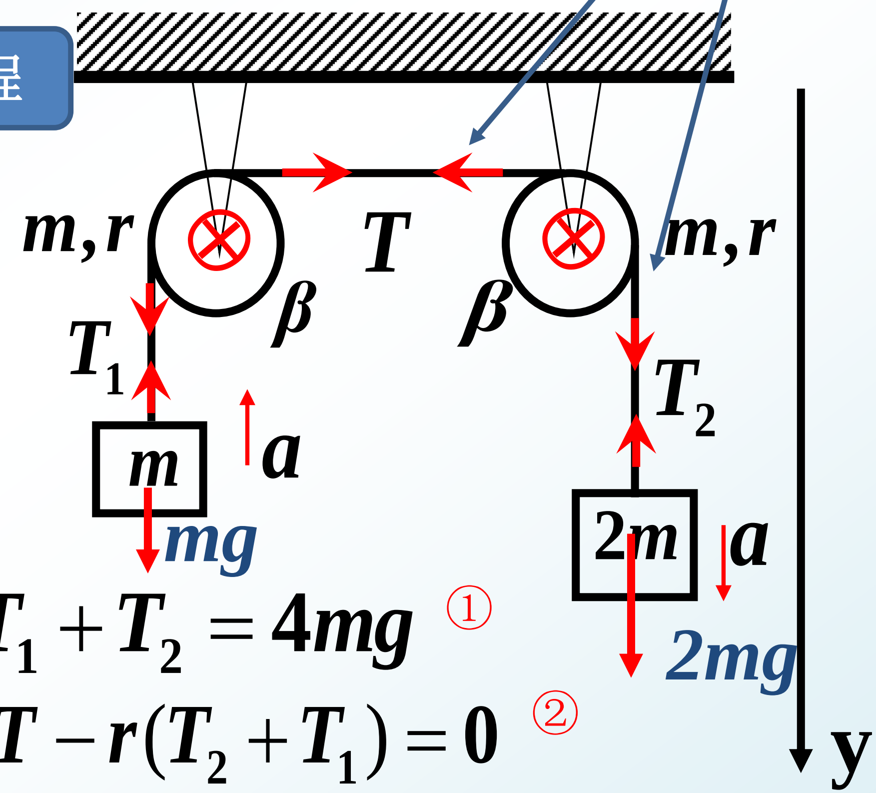
球体



$$J=\frac{2}{5}mR^2$$

3-T5. 已知两滑轮质量均为m、半径均为r，转动惯量均为$mr^2/2$，轻绳两端重物质量为m和$2m$。系统从静止释放，求两滑轮之间绳内的张力。

两边张力不一定相等



解：根据 $\boxed{M = J\beta}$ 转动方程

左：$rT - rT_1 = J\beta$

右：$rT_2 - rT = J\beta$

又由 $\boxed{F = ma}$ 平动方程

$T_1 - mg = ma$

$2mg - T_2 = 2ma$

$2T_1 + T_2 = 4mg$ ①

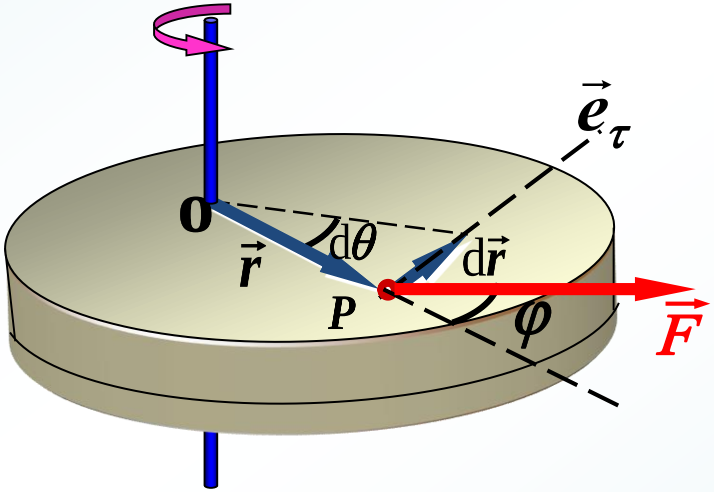
$2rT - r(T_2 + T_1) = 0$ ②

$a = r\beta$

角、线量间关系

$T_1/m - g = r^2(T - T_1)/J$ ③

①②③联立求解可得：$T = \dfrac{11}{8}mg$



$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta$$ ——力矩的功

$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k_2} - E_{k_1}$$

——定轴转动的动能定理

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgy_C = \text{常量}$$

——机械能守恒定律

$$\boxed{M\mathrm{d}t = \mathrm{d}L}$$ ——刚体绕定轴的角动量定理

合外力矩 M 对刚体绕定轴的冲量矩

$$\int_0^t M\mathrm{d}t = \int_{L_0}^{L_t} \mathrm{d}L = L_t - L_0 = J\omega - J_0\omega_0$$

与动量定理比较

$$\int \vec{F}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\vec{P} = \vec{P}_t - \vec{P}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

当合外力矩 $M = 0$ 则 $\boxed{L_t = L_0 = \text{常量}}$

——角动量守恒

由 $J_2\omega_2 = J_1\omega_1$ 可知 $J\uparrow$ $\omega\downarrow$ 或 $J\downarrow$ $\omega\uparrow$

刚体定轴转动与质点一维运动的对比

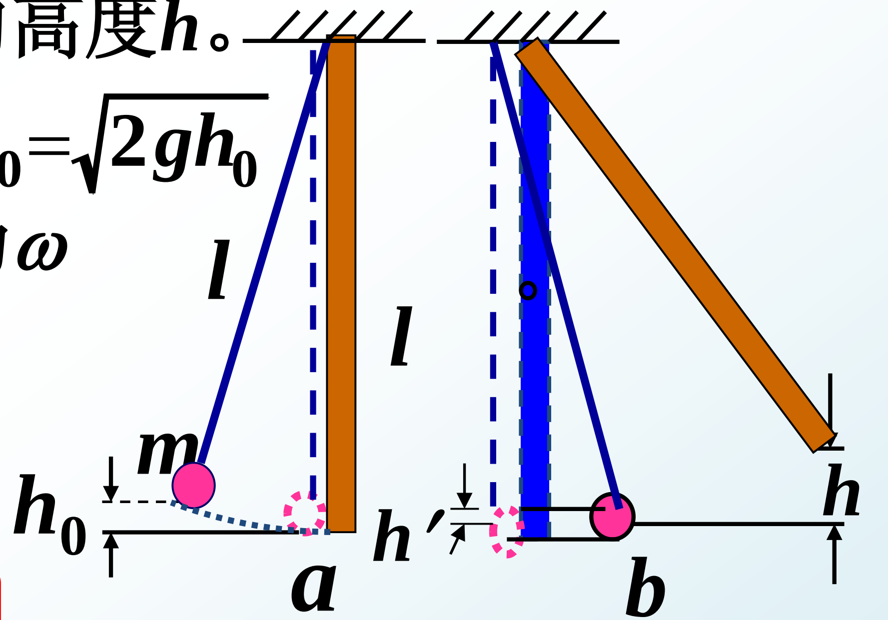
质点一维运动		刚体定轴转动	
位移	Δx	角位移	$\Delta\theta$
速度	$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度	$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
质量	m	**转动惯量**	$J=\int r^2\mathrm{d}m$
力	$\vec{F}$	**力矩**	$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$
运动定律	$\vec{F}=m\vec{a}$	**转动定律**	$\vec{M}=J\vec{\beta}$
动量	$\vec{P}=m\vec{v}$	动量	$\vec{P}=m\vec{v}_C$
角动量	$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$	角动量	$L=J\omega$
动量定理	$\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=mv_2-mv_1$	角动量定理	$\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=J\omega_2-J\omega_1$

质点一维运动	刚体定轴转动
动量守恒定律	角动量守恒定律
$\sum F = 0$ 时 $\sum m_i v_i =$ 恒量	$M = 0$ 时 $\sum J\omega =$ 恒量
力做功 $A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$	力矩做功 $A = \int M \mathrm{d}\theta$
动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$	转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$
动能定理 $A_{外} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$	转动动能定理 $A_{外} = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$
重力势能 mgh	重力势能 $mgh_{质心}$
机械能守恒定律 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时 $E_k + E_p =$ 恒量	机械能守恒定律 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时 $E_k + E_p =$ 恒量

平动、转动的动量、机械能守恒可以联立使用

例. 将单摆和一等长的匀质直杆悬挂在同一点, 杆的质量m 与单摆的摆锤相等, 开始时直杆自然下垂, 将单摆的摆锤拉到高度h_0, 令它自静止状态下落, 于铅垂位置和直杆作弹性碰撞。

求: 碰撞后直杆下端达到的高度h。



解: 碰撞前单摆的速度为$v_0=\sqrt{2gh_0}$

设碰撞后杆的角速度为ω

摆锤的速度为v'

由角动量守恒有

$$mlv_0 = J\omega + mlv'$$

碰撞过程中机械能也守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

$$v' = \frac{v_0}{2}, \quad \omega = \frac{3v_0}{2l}$$

$$v_0=\sqrt{2gh_0}\ ,\ v'=\frac{v_0}{2},\quad \omega=\frac{3v_0}{2l}$$

按机械能守恒 $\frac{1}{2}mv'^2=mgh'$

$$\frac{1}{2}J\omega^2=mgh_c$$

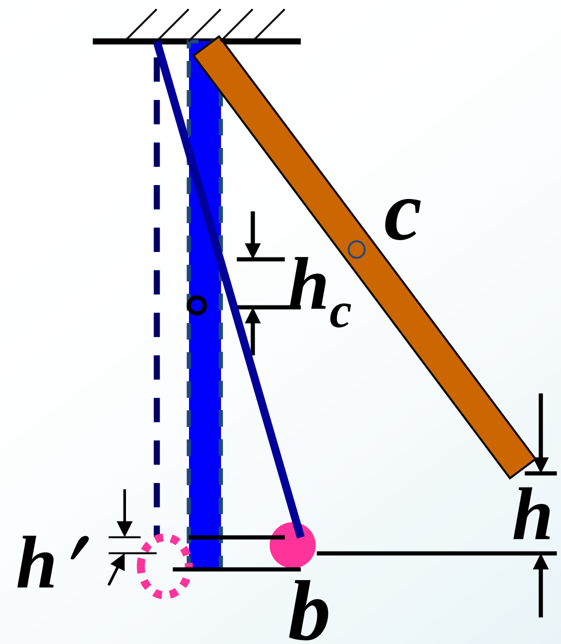
碰撞后摆锤达到的高度为

$$h'=\frac{h_0}{4}$$

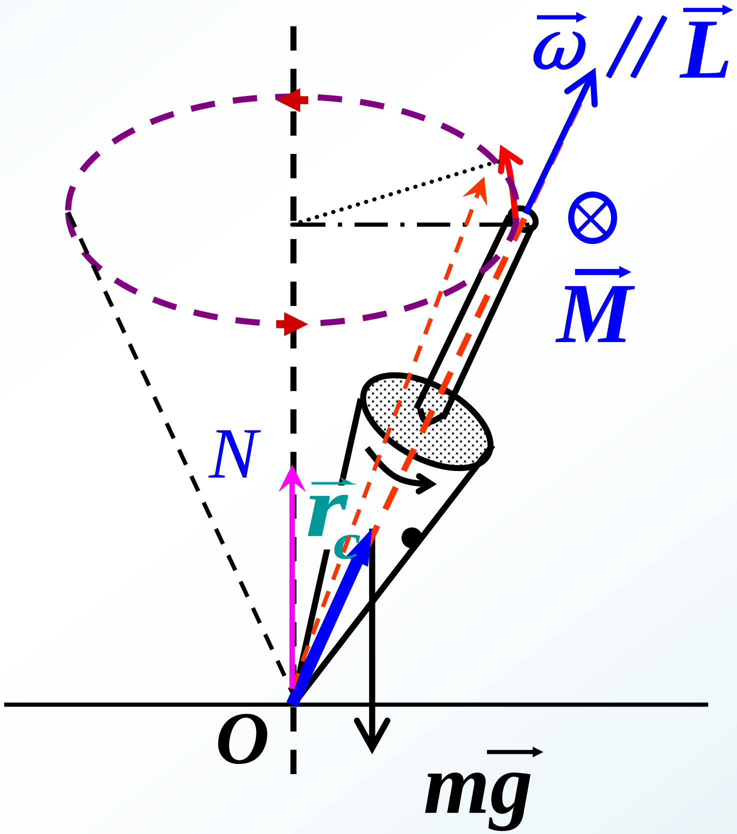
而杆的质心达到的高度

$$h_c=\frac{3h_0}{4}$$

由此得 $h=2h_c=\frac{3h_0}{2}$



进动



陀螺自转角速度远大于进动角动量

$$\vec{L} = \cancel{\vec{L}_{进动}} + \vec{L}_{自转} \approx \vec{L}_{自转}$$

由质点系对定点的角动量定理

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

对O点的重力矩：

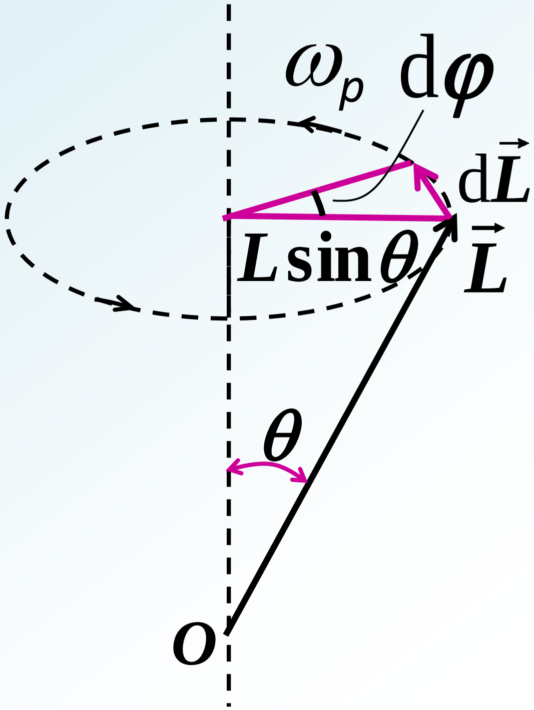
$$\vec{M} = \vec{r}_c \times m\vec{g} \quad \rightarrow \vec{M} \perp \vec{L}$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt // \vec{M}$$

$d\vec{L}$ 与 $\vec{M}$ 同方向 $\quad \therefore \; d\vec{L} \perp \vec{L}$

⇨ 角动量 $\vec{L}$ 顶端(自转轴)做一水平圆周运动

进动的角速度：$\omega_p = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$



$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$M = \frac{|\mathrm{d}\vec{L}|}{\mathrm{d}t} = \frac{L\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

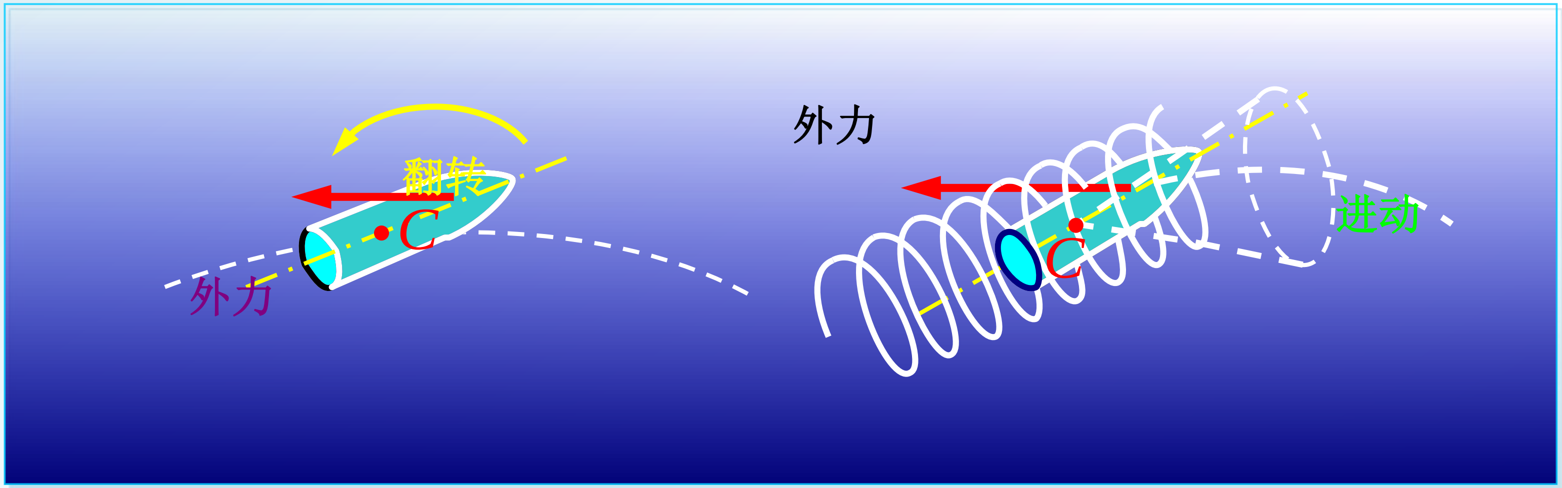
$$= L\sin\theta\cdot\omega_p$$

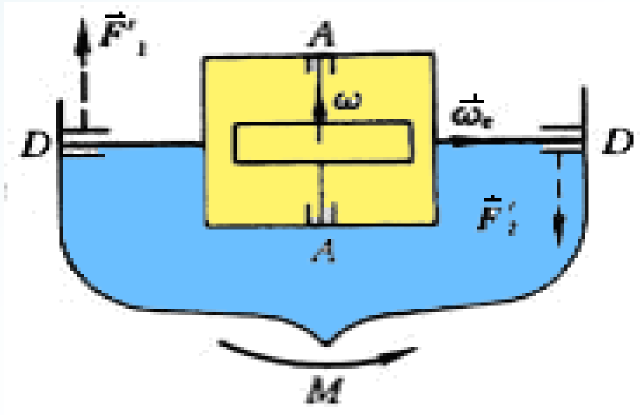
$$\boxed{\omega_p = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}}$$

注意：上述讨论中,将高速旋转的陀螺对O点的角动量近似成了陀螺对本身对称轴的角动量。

思考：有时候看到车轮除了做圆周运动，还会上下摆动，是哪里出了问题?

进动的现象





海船陀螺稳定器

分子的“附加磁矩”