概率论练习二最后一题错排问题的说明

2023年4月5日　　22:26

在概率论练习册中，练习二最后一问出现了这样一个问题：

5. n 个座位依次从 1 号编到 n 号，将 1 至 n 的 n 个号码分给 n 个人，每人一个号码，这 n 个人随意坐到座位上，求至少有一个人手里的号码恰与座位号码相同的概率。

这类问题属于错位排列(derangment)问题，机械工业出版社的《组合数学(第五版)》Richard A. Brualdi著(再次提到表示为[1])对该类问题做了详细的叙述与解答，本文大部分解答基于此书，使用两种方法，1.容斥原理(即教材(华中科技大学出版社《概率论与数理统计(第三版)》刘次华主编，再次提到表示为[2]) 公式(1.15))，2.递推法，读者也可参考此网址的解答：

https://oi-wiki.org/math/combinatorics/derangement/

可看[1]6.3节叙述内容(下图)简要了解该问题：

(可以只看橙色下划线部分)

6.3 错位排列

在一个聚会上，10 位绅士查看他们的帽子。有多少种方式使得这些绅士中没有人能够拿到他们来时所戴的帽子？V-8 发动机的 8 个火花塞从汽缸中被取出清洗。有多少种方式能够将它们放回到汽缸中使得没有火花塞重新被放回到原先被取出时的汽缸？有多少种方法能够将字母 M，A，D，I，S，O，N 写出，使得所拼的"单词"与单词 MADISON 的拼写在下述意义上完全不 172
同：没有字母占据与它在单词 MADISON 中占据的位置相同？这些问题中的每一个都是下面一般问题的一个具体实例。

给定 n 元素集合 X，它的每一个元素都有一个特定的位置，而现在要求求出集合 X 的排列中没有一个元素在它指定位置上的排列的数目。在第一个问题中，集合 X 是 10 顶帽子的集合，而一顶帽子的指定位置就是它所归属的绅士（的头）。在第二个问题中，X 是火花塞的集合，而火花塞的位置就是容纳它的汽缸。在第三个问题中，$X=\{M, A, D, I, S, O, N\}$，而字母的位置就是由单词 MADISON 所指定的位置。

因为对象的实际性质与讨论不相干，所以我们可以取 X 为集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$，其中每个整数的位置都由它们在序列 $1, 2, \cdots, n$ 中的位置确定。$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个错位排列（derangement）是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$，使得 $i_1 \neq 1$，$i_2 \neq 2$，…，$i_n \neq n$。因此，$\{1,$

$2, \cdots, n\}$ 的一个错位排列是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$，在这个排列中没有整数是在其自然位置上：

$$i_1 \neq 1 \quad i_2 \neq 2 \quad \cdots \quad i_n \neq n$$

用 D_n 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的错位排列的数目。上述几个问题就是要相应地求出 D_{10}，D_8 和 D_7 的值。对于 $n=1$，没有错位排列。对于 $n=2$，唯一的错位排列是 2 1。对于 $n=3$ 有两个错位排列，即 2 3 1 和 3 1 2。而 $n=4$ 时的错位排列则可列出如下：

2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 2 3
2 3 4 1	3 4 1 2	4 3 1 2
2 4 1 3	3 4 2 1	4 3 2 1

因此，我们有 $D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$，$D_4=9$。

2 4 1 3　　3 4 2 1　　4 3 2 1

因此，我们有 $D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$，$D_4=9$。

注意到n个元素的全排列数为 n!，故n个元素错排的概率为$P_n=\frac{D_n}{n!}$，问题转化为求D_n

1.容斥原理法

容斥原理：集合Ω中至少具有$P_1,P_2,\ldots P_m$中的一个性质（也可理解为至少属于$P_1,P_2,\ldots P_m$这些集合中的一个）的元素总个数由下列公式给出：(|A|表示集合A的元素个数)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} Pi\right| = \sum_{i}^{m}|P_i| - \sum_{1\le i<j\le m}|P_i\cap P_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m}|P_i\cap P_j\cap P_k| + \cdots + (-1)^{m-1}\left|\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right| \quad (1)$$

假设P_i为第i个元素恰在第i个位置上的排列的集合，不难看出$D_n=\left|\cap_{i=1}^{m}\bar{P_i}\right|$ (逆事件的交)

由德摩根定律([2]1.8式)：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}\bar{P_i}\right| = \left|\overline{\bigcup_{i=1}^{m} Pi}\right| = |\Omega| - \left|\bigcup_{i=1}^{m} Pi\right|$$

得到：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}\bar{P_i}\right| = |\Omega| - \sum_{i}^{m}|P_i| + \sum_{1\le i<j\le m}|P_i\cap P_j| - \sum_{1\le i<j<k\le m}|P_i\cap P_j\cap P_k| + \cdots + (-1)^{m}\left|\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right| \quad (2)$$

为了简化计算，我们利用以下推论：

推论1：若在容斥原理中$\left|P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap\cdots\cap P_{i_k}\right|$的取值只与$k$相关而与选择了哪些集合无关(容易看出我们假设的$P_i$满足这样的性质)，或者说存在常数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$，使得

$a_0=|\Omega|$，

$a_1=|P_1|=|P_2|=\cdots=|P_m|$，

$a_2=|P_1\cap P_2|=\cdots=|P_{m-1}\cap P_m|$，

$a_3=|P_1\cap P_2\cap P_3|=\cdots=|P_{m-2}\cap P_{m-1}\cap P_m|$，

⋮

$a_{\mathrm{m}}=\left|\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right|$，

并且在(2)式右侧的累加式中,第k个累加式含$\binom{m}{k}$个式子(我们用$\binom{m}{k}$表示C_m^k,后文相同)

这是因为第k个累加式实际相当于从m个集合中选出k个集合.

于是我们得到这种情况下容斥原理的表达式：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}\bar{P_i}\right| = a_0 - \binom{m}{1}a_1 + \binom{m}{2}a_2 + \cdots + (-1)^k\binom{m}{k}a_k + \cdots + (-1)^m a_m \qquad (3)$$

把(3)中的m改写为n即为D_n的表达式，不难看出a_k即为除去k个元素后剩下的$(n-k)$个元素的全排列，

即：$\left|P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap\cdots\cap P_{i_k}\right| = a_k = (n-k)!$　　　　(4)

将(4)代入到(3)得：(注意$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$)

$$D_n = \left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{P}_i\right| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! + \cdots + (-1)^n 0!$$
$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right) \qquad (5)$$

则n个元素错排的概率$P_n = \frac{D_n}{n!} = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ (6) ■

（请读者注意此处的P_n与原题目要求的概率的区别）

2.递推公式法

对于$n \geq 3$的情况，先考虑第一个位置的元素，可以是除了编号为1的元素外的所有$(n-1)$个元素，且每个元素排第一个时对应的满足条件的错位排列个数应该相等，我们不妨讨论编号为2的元素在1号位置的情况，再将总数乘以$(n-1)$．

在上述条件下，我们进一步再把情况分为两种：

①编号为1的元素在2号位置，此时错位排列的个数应为剩下$(n-2)$个元素的错排数，即D_{n-2}．

②编号为1的元素不在2号位置，让我们把1号位置上的2号元素忘掉，实际上现在的错位排列的个数即等价于下述问题：

"1号元素不在2号位置,3号元素不在3号位置,......,n号元素不在n号位置的排列数"

不难看出这实际上就是$(n-1)$个元素的错排问题，此时错位排列个数应为$(n-1)$个元素的错排数，即D_{n-1}．

于是我们得到： $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (n \geq 3) \quad (7)$

公式(7)可写成： $D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] \quad (8)$

递归地运用公式(8)，得到：

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] \\ &= (-1)^2[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}] \\ &= (-1)^3[D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}] \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^n[D_2 - 2D_1] \end{aligned}$$

由于我们已经知道$D_1 = 0$，$D_2 = 1$，因此我们得到更简单的递推式：

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \qquad (n \geq 2) \qquad (9)$$

(严格来说我们只证明了$n \geq 3$的情况，n=2时可手动验算成立)

将(9)式左右两侧同时除以$n!$，得到：

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (10)$$

注意到错排的概率$P_n = \frac{D_n}{n!}$,因此(10)式亦可写为：

$$P_n = P_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (11)$$

对(11)式递归求和，并注意到$P_1 = 0$：

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= P_{n-2} + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \cdots \\ &= P_1 + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2!} + \frac{-1}{3!} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (12)$$

我们发现(12)式相比(6)式似乎少了两项，但仔细观察会发现少的两项$1 - \frac{1}{1!} = 0$，因此对结果是没有影响的.

因此我们也可以将(12)式写成：

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \qquad \blacksquare$$

（请读者注意此处的P_n与原题目要求的概率的区别）