2024 春概率论 (尚世界) 期中考试

双叶数理咖啡厅 (转载)

日期: 2024 年 1 月 12 日

一、现有 n 段绳子, 共 $2n$ 个结点. 将结点两两连接, 求能得到 n 个圈的概率.

二、设 X 为非负整数值随机变量, 求证

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

三、设 X, Y 为离散型随机变量, 定义条件方差 $\mathrm{Var}(X \mid Y) = \mathbb{E}[X^2 \mid Y] - (\mathbb{E}[X \mid Y])^2$.

(i) 求证

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X^2 \mid Y]) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)].$$

(ii) 设时刻 t 到达车站的旅客人数服从参数为 λt 的泊松分布, $\lambda > 0$. 缆车到达车站的时间服从参数为 $[0, T]$ 的均匀分布. 设旅客到站的时间和缆车到站的事件相互独立, 求缆车到站时旅客人数的期望和方差.

四、设 $X_i,\ i \geq 0$ 为一列相互独立且具有相同分布的随机变量, N 满足参数为 λ 的泊松分布, 且 N 与 $\{X_i\}$ 相互独立. 定义

$$S = X_1 + \cdots + X_N.$$

设 g 为使得下面期望存在的函数.

(i) 证明

$$\mathbb{E}[Ng(N)] = \lambda \mathbb{E}[g(N+1)].$$

(ii) 求证

$$\mathbb{E}[Sg(S)] = \lambda \mathbb{E}[g(S + X_0) X_0].$$

五、设联合离散型随机变量 (X, Y) 有质量函数 $f(x, y)$, X, Y 分别有分布列 $g(x)$ 与 $h(y)$.

(i) 证明: $\mathbb{E}[\log g(X)] \geq \mathbb{E}[\log h(X)]$.

(ii) 证明互信息

$$I(X, Y) = \mathbb{E}\left[\log \frac{f(x, y)}{g(x) h(y)}\right]$$

满足 $I(X, Y) \geq 0$, 且 $I(X, Y) = 0$ 当且仅当 X 和 Y 独立.

六、记欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不大于 n 的正整数中与 n 互素的个数. 用概率方法证明:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p\in\Lambda_n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

这里 $\Lambda_n = \{p \le n \mid p\text{是整除}n\text{的素数}\}$. (提示: 考虑概率空间 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ 与概率测度 $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$.)

七、设 $\{X_i\}$ 独立同分布, 有有限的期望 μ 与方差 σ^2, N 为非负整数值随机变量, 有有限的期望和方差. 令

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N.$$

(i) 求证: $\mathbb{E}[S_N] = \mu\mathbb{E}[N]$, $\mathbb{E}[S_N^2 \mid N = n] = n\sigma^2 + n^2\mu^2$. 并求 $\mathrm{Var}(S_N)$.

(ii) 设 $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $p \in (0, 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. b 为给定的正整数, 并定义

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} \mid |S_n| = b\}.$$

求证 $\mathbb{E}[S_T] = \mu\mathbb{E}[T] < \infty$, 进一步求 $\mathrm{Var}(S_T)$.