

# 重庆邮电大学

## 学生实验实习报告册

学年学期： 2022 -2023 学年 ☐春 ☒秋学期

课程名称： 信号处理实验

学生学院： 通信与信息工程学院

专业班级：

学生学号：

学生姓名：

联系电话：

重庆邮电大学教务处制

课程名称	信号处理实验	课程编号	A2010550
实验地点	YF314	实验时间	2022 年 11 月 11 日
校外指导教师	郑丹玲	校内指导教师	郑丹玲
实验名称	时域采样与频域采样		
评阅人签字		成绩	

## 一、实验目的

- 1、理解时域采样理论与频域采样理论；
- 2、掌握模拟信号采样前后频谱的变化，以及如何选择采样频率才能使采样后的信号不丢失信息；
- 3、掌握频率域采样会引起时域周期化的原因，频率域采样定理及其对频域采样点数选择的指导作用；
- 4、对信号在某个表示域进行采样，会导致在另一个域周期化，科学的结论是建立在对问题的仔细分析和实事求是的基础上得到的。

## 二、实验原理

### 2.1 时域采样定理要点

对模拟信号  $x_a(t)$  以间隔  $T$  进行时域等间隔理想采样，形成的采样信号的频谱  $X(j\Omega)$  是原模拟信号频谱  $X_a(j\Omega)$  以采样角频率  $\Omega_s \left( \Omega_s = \frac{2\pi}{T} \right)$  为周期进行周期延拓。公式为：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = FT[x_a(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jn\Omega_s)$$

采样频率  $\Omega_s$  必须大于等于模拟信号最高频率的两倍以上，才能使采样信号的频谱不产生频谱混叠。但是利用计算机计算上式并不方便，下面导出另外一个公式，以便使用计算机上进行实验。理想采样信号  $\hat{x}_a(t)$  和模拟信号  $x_a(t)$  之间的关系如下：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

对上式进行傅立叶变换，得到：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt$$

在上式的积分号中，只有当  $t = nT$  时，才有非零值，因此：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT}$$

上式中，在数值上  $x_a(nT) = x(n)$ ，再将  $\omega = \Omega T$  代入，得到：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

上式的右边就是序列的傅立叶变换  $X(e^{j\omega})$  即

$$\hat{X}_a(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

上式说明理想采样信号的傅立叶变换可用相应的采样序列的傅立叶变换得到，只要将自变量  $\omega$  用  $\Omega T$  代替即可。

## 2. 频域采样定理要点

对信号  $x(n)$  的频谱函数  $X(e^{j\omega})$  在  $[0, 2\pi]$  上等间隔采样  $N$  点，得到：

$$X_N(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi/N}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

则  $N$  点  $IDFT[X_N(k)]_N$  得到的序列就是原序列  $x(n)$  以  $N$  为周期进行周期延拓后的主值区序列，公式为：

$$x_N(n) = IDFT[X_N(k)] = \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n + iN) \right] R_N(n)$$

由上式可知，频域采样点数  $N$  必须大于等于时域离散信号的长度  $M$  (即  $N \geq M$ )，才能使时域不产生混叠，则  $N$  点  $IDFT[X_N(k)]$  得到的序列  $x_N(n)$  就是原序列  $x(n)$ ，即  $x_N(n) = x(n)$ 。如果  $N > M$ ， $x_N(n)$  比原序列尾部多  $N-M$  个零点；如果  $N < M$ ，则发生了时域混叠失真，而且  $x_N(n)$  的长度  $N$  也比  $x(n)$  的长度  $M$  短，因此。 $x_N(n)$  与  $x(n)$  不相同。

在数字信号处理的应用中，只要涉及时域或者频域采样，都必须服从这两个采样理论的要点。对比上面叙述的时域采样原理和频域采样原理，得到一个有用的结论，这两个采样理论具有对偶性：“时域采样频谱周期延拓，频域采样时域信号周期延拓”。因此放在一起进行实验。

## 三、实验程序

```
1.  clc;
2.  clear;
3.  %% 时域采样定理的验证 example
4.  x = [1 1 1 1];
5.  N = 64;
6.  xk = fft(x,N);
7.  Xm = abs(xk);
8.  Xp = angle(xk);
9.  figure(1);
10. subplot(211);
11. stem(0:3,x,'.');
12. subplot(212);
13. k = 0:N-1;
```

```

14. plot(2*k/N,Xm);
15. title("|FT[x(n)]|");
16. xlabel("\omega/\pi")
17.
18. %% 时域采样定理的验证
19. % 1khz 采样
20. t = 0:63;
21. n = t/1000;
22. f = 444.128*exp(-50*2^0.5.*n*pi).*sin(50*2^0.5.*n*pi).*uDT(n);
23. figure(2);
24. subplot(321);
25. stem(t,f, '.');
26. title("Fs=1khz");
27. fk = fft(f)/1000;
28. fm = abs(fk);
29. fp = angle(fk);
30. subplot(322);
31. plot(0:1000/63:1000, fm);
32. title("|T*FT[x1(n)]|");
33. xlabel("f(hz)");
34.
35. %300hz 采样
36. n = 0:1/300:0.063;
37. f = 444.128*exp(-50*2^0.5.*n*pi).*sin(50*2^0.5.*n*pi).*uDT(n);
38. subplot(323);
39. stem(0:18, f, '.');
40. title("Fs=300hz");
41. fk = fft(f)/300;
42. fm = abs(fk);
43. fp = angle(fk);
44. subplot(324);
45. plot(0:300/18:300, fm);
46. title("|T*FT[x2(n)]|");
47. xlabel("f(hz)");
48.
49. %200hz 采样
50. n = 0:1/200:0.063;
51. f = 444.128*exp(-50*2^0.5.*n*pi).*sin(50*2^0.5.*n*pi).*uDT(n);
52. subplot(325);
53. stem(0:12, f, '.');
54. title("Fs=200hz");
55. fk = fft(f)/200;
56. fm = abs(fk);
57. fp = angle(fk);
58. subplot(326);
59. plot(0:300/12:300, fm);

```

```

60. title("|T*FT[x3(n)]|");
61. xlabel("f(hz)");
62.
63. clc;
64. clear;
65. t=0:1/1024:0.08
66. f = 444.128*exp(-50*2^0.5.*t*pi).*sin(50*2^0.5.*t*pi).*uDT(t);
67. figure(12);
68. title("f(t)");
69. xlabel("t");
70. xk = fft(f,1024)/1024;
71. Hm = abs(xk);
72. Hp = angle(xk);
73. subplot(311);
74. plot(t,f);
75. title("原信号");
76. subplot(312);
77. plot(0:512/511:512,Hm(1:512));
78. xlabel("f");
79. title("幅频特性曲线");
80. subplot(313);
81. plot(0:2*pi/1023:pi,Hp(1:512));
82. xlabel("\omega");
83. title("相频特性曲线");
84. %% 频域采样定理的验证
85. M=27;N=32;n=0:M;
86. %产生 M 长三角波序列 x(n)
87. xa=0:floor(M/2); xb= ceil(M/2)-1:-1:0; xn=[xa,xb];
88. for i = 1:length(xn)
89.     if i<=14
90.         xn(i) = xn(i) +1;
91.     else
92.         xn(i) = xn(i);
93.     end
94. end
95. Xk=fft(xn,1024); %1024 点 FFT[x(n)], 用于近似序列 x(n)的 TF
96. X32k=fft(xn,32) ;%32 点 FFT[x(n)]
97. x32n=ifft(X32k); %32 点 IFFT[X32(k)]得到 x32(n)
98. X16k=X32k(1:2:N); %隔点抽取 X32k 得到 X16(K)
99. x16n=ifft(X16k,N/2); %16 点 IFFT[X16(k)]得到 x16(n)
100. subplot(3,2,2);stem(n,xn,'. ');box on
101. title('(b) 三角波序列 x(n)');xlabel('n');ylabel('x(n)');axis([0,32,0,20])
102. k=0:1023;wk=2*k/1024; %
103. subplot(3,2,1);plot(wk,abs(Xk));title('(a)FT[x(n)]');
104. xlabel('\omega/\pi');ylabel('|X(e^j\omega)|');axis([0,1,0,200])
105. k=0:N/2-1;

```

```

106. subplot(3,2,3);stem(k,abs(X16k),'.');box on
107. title('(c) 16 点频域采样
        ');xlabel('k');ylabel('|X_1_6(k)|');axis([0,8,0,200])
108. n1=0:N/2-1;
109. subplot(3,2,4);stem(n1,x16n,'.');box on
110. title('(d) 16 点 IDFT[X_1_6(k)]');xlabel('n');ylabel('x_1_6(n)');axis([0,3
        2,0,20])
111. k=0:N-1;
112. subplot(3,2,5);stem(k,abs(X32k),'.');box on
113. title('(e) 32 点频域采样
        ');xlabel('k');ylabel('|X_3_2(k)|');axis([0,16,0,200])
114. n1=0:N-1;
115. subplot(3,2,6);stem(n1,x32n,'.');box on
116. title('(f) 32 点 IDFT[X_3_2(k)]');xlabel('n');ylabel('x_3_2(n)');axis([0,3
        2,0,20])
117.
118. %% 音频信号
119. [xn,fs] = audioread('F:\学习\数字信号处理实验\实验 1\motherland.wav');
120. x = xn(1000:2999);
121. wx = 0:2*pi/511:2*pi;
122. xxk = fft(x,512);
123. HHm = abs(xxk);
124. HHp = angle(xxk);
125. figure(4);
126. subplot(311);
127. [n,m]=size(x);
128. stem(0:n-1,x, '. ');
129. title("2000 个采样点原序列");
130. subplot(312);
131. plot(wx,HHm);
132. xlabel("\omega");
133. title("幅频特性曲线");
134. subplot(313);
135. plot(wx,HHp);
136. xlabel("\omega");
137. title("相频特性曲线");
138. for i = 1: 2000
139.     if mod(i,2)
140.         x1((i+1)/2) = x(i);
141.     else
142.         x2(i/2) = x(i);
143.     end
144. end
145. xxk = fft(x1,512);
146. HHm = abs(xxk);
147. HHp = angle(xxk);

```

```
148. figure(5);
149. subplot(311);
150. [n,m]=size(x1);
151. stem(0:m-1,x1, ' ');
152. title("奇数抽样序列");
153. subplot(312);
154. plot(wx,HHm);
155. xlabel("\omega");
156. title("幅频特性曲线");
157. subplot(313);
158. plot(wx,HHp);
159. xlabel("\omega");
160. title("相频特性曲线");
161. xxk = fft(x2,512);
162. HHm = abs(xxk);
163. HHp = angle(xxk);
164. figure(6);
165. subplot(311);
166. [n,m]=size(x2);
167. stem(0:m-1,x2, ' ');
168. title("偶数抽样序列");
169. subplot(312);
170. plot(wx,HHm);
171. xlabel("\omega");
172. title("幅频特性曲线");
173. subplot(313);
174. plot(wx,HHp);
175. xlabel("\omega");
176. title("相频特性曲线");
177.
178. xk = fft(xn,1024);
179. figure(13)
180. Hm = abs(xk);
181. Hp = angle(xk);
182. subplot(311);
183. [n,m]=size(xn);
184. plot(0:n-1,xn);
185. title("原信号");
186. subplot(312);
187. plot(0:2*pi/1023:2*pi,Hm);
188. xlabel("\omega");
189. title("幅频特性曲线");
190. subplot(313);
191. plot(0:2*pi/1023:2*pi,Hp);
192. xlabel("\omega");
193. title("相频特性曲线");
```

#### 四、仿真分析

1. 给定模拟信号,  $x_a(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega t_0)u(t)$ , 始终  $A=444.128$ ,  $\alpha=50\sqrt{2}\pi$ ,  $\Omega_0 = 50\sqrt{2}\pi \text{rad/s}$ , 得到幅频特性曲线验证时域采样定理。

因为原信号为模拟信号, 所以对模拟信号利用 DFT 进行谱分析, 如下式:

$$\tilde{X}_a'(kF) = TX(k) = T \cdot DFT[x(n)]_N$$

最终, 得到的幅频特性与相频特性曲线如下图中所示, 幅频特性为 DFT 的  $\frac{1}{T_s}$ , 相频特性不变, 符合理论中利用 DFT 对连续信号谱分析的结果。

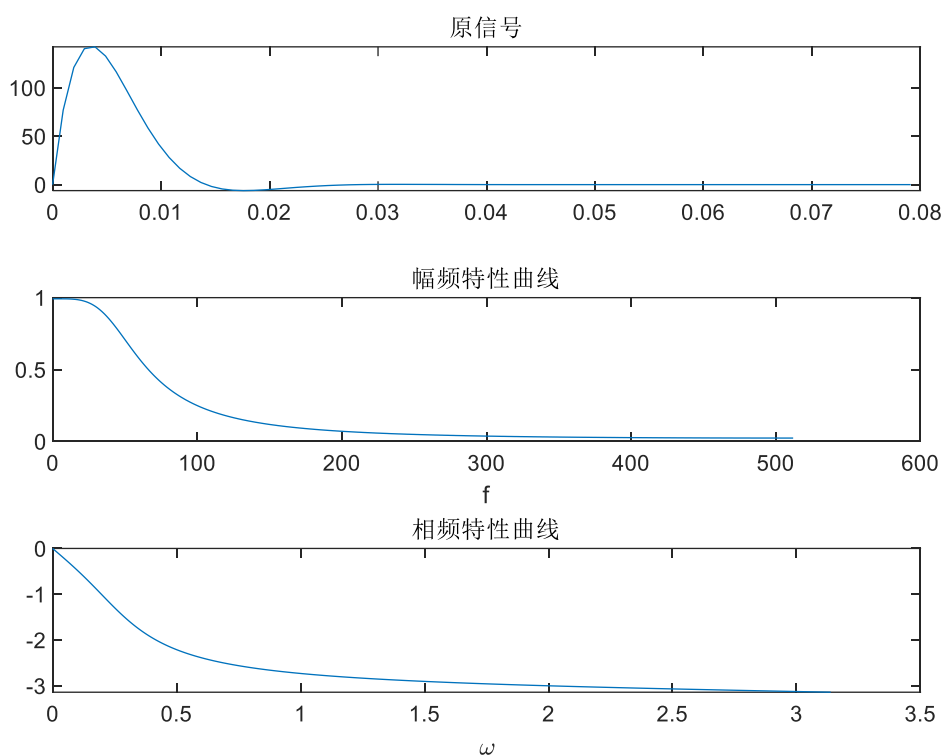


图1 原模拟信号谱分析仿真图

利用 DFT 对模拟信号进行谱分析, 最终可以得到原信号在 0 到 0.01s 处取值较大, 幅频特性上看可以发现该系统为低通系统。

此时, 进行时域采样的仿真, 最终结果如图 2 所示。



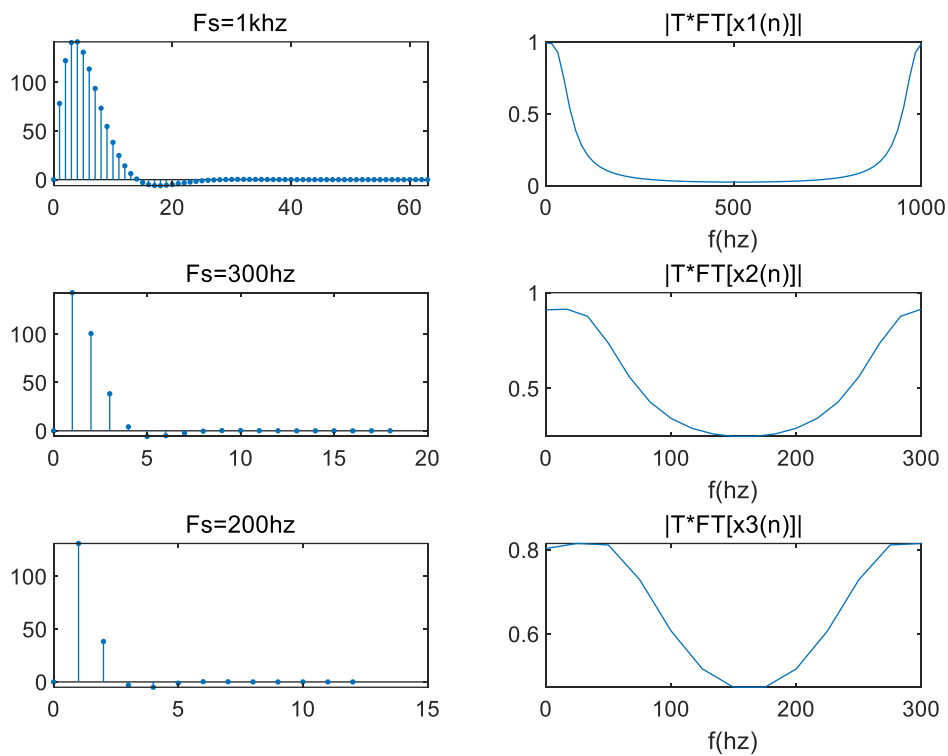


图 2 时域采样定理仿真验证图

因为原信号为模拟信号，所以通过采样后的频谱搬移一定对引起混叠失真，可以发现当抽样频率越大是，混叠失真的现象越弱，当抽样频率为 300Hz、200Hz 时，可以看出明显的混叠失真。

2. 近似绘制  $x(n) = R_4(n)$  在  $[0, 2\pi]$  上的幅频响应曲线 ( $FT[x(n)]$ )。

针对  $x(n) = R_4(n)$ ，对其进行  $x(n) = R_4(n)$  进行 FT，计算过程如下所示：

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_4(n) e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} \\
 &= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}
 \end{aligned}$$

同时，利用 Matlab 进行仿真验证，最终结果如下图所示：

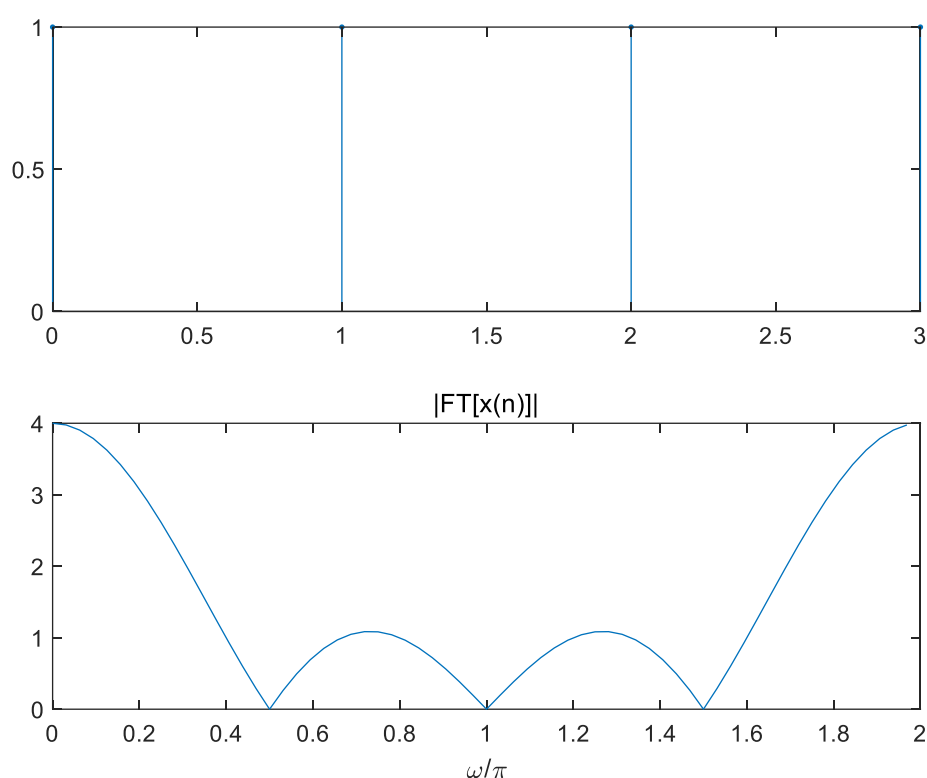


图 3 四点矩形序列 FT 仿真验证图

从仿真结果与计算结果进行对比，可以发现理论结果与仿真结果相同，仿真遵循理论。

3. 给定信号如下：
$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 13, \\ 27-n, & 14 \leq n \leq 26, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
，分别画出  $X(e^{j\omega})$ 、 $X_{32}(k)$  和  $X_{16}(k)$  的幅度谱，并绘

图显示  $x(n)$ 、 $x_{32}(n)$  和  $x_{16}(n)$  的波形，进行对比和分析，验证总结频域采样理论。

首先计算处  $X(e^{j\omega})$  通过抽样得到  $X_{32}(k)$  和  $X_{16}(k)$ ，最终将得到的频域采样序列进行还原，最终得到由频域采样还原的  $x(n)$ ，仿真结果如下图 3 所示。

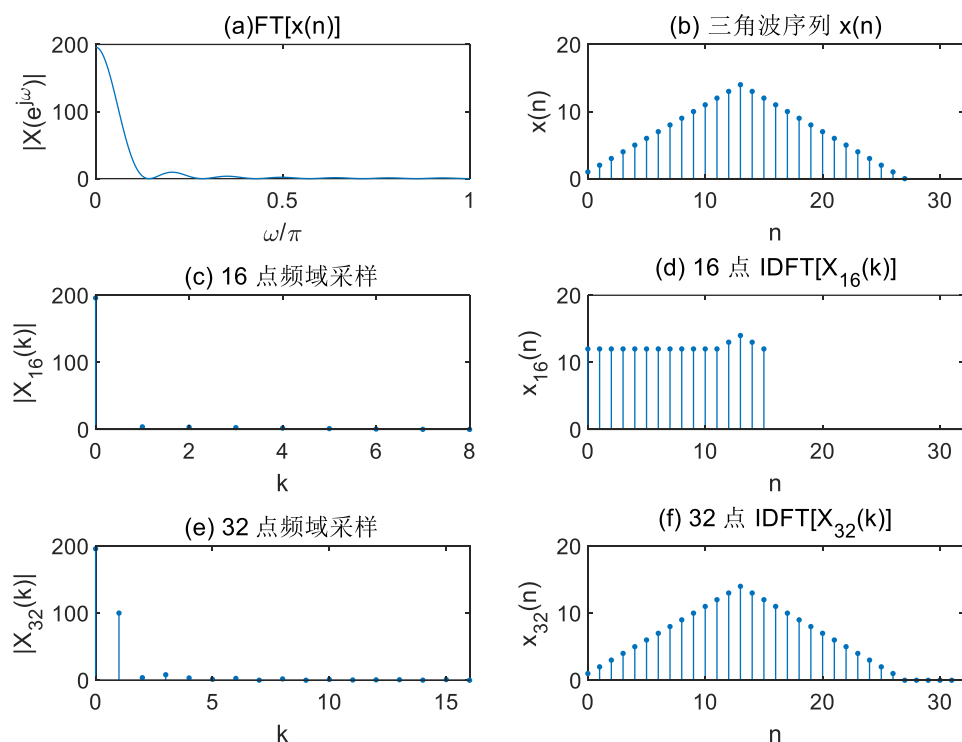


图 4 频域采样定理仿真验证图

因为原序列  $x(n)$  的长度为 28，所以 16 点频域采样中 16 小于长度 27，此时会产生时域中混叠现象，如上图所示，16 点 IDFT 出现了混叠现象，无法还原原有的三角序列。

当频域采样选择 32 点时，可以发现 32 点的 IDFT 不会产生混叠现象，可以将三角波序列完全恢复，如图 4 仿真所示。

#### 4. 语音信号整数倍抽取后频谱的分析

读取 motherland.wav 语音文件，截取第 1000 至 2999 共 2000 个采样点。

- (1) 分析这 2000 采样点的幅度频谱；
- (2) 对这 2000 采样点数据，每 2 个点抽取 1 点，得到 1000 点数据，画出这 1000 个采样点的幅度频谱。

对该音频信号中的 1000-2999 的采样点，仿真结果如下图 5 所示，可以得出以下结论：该音频信号低频分量较为丰富，高频分量较为弱。

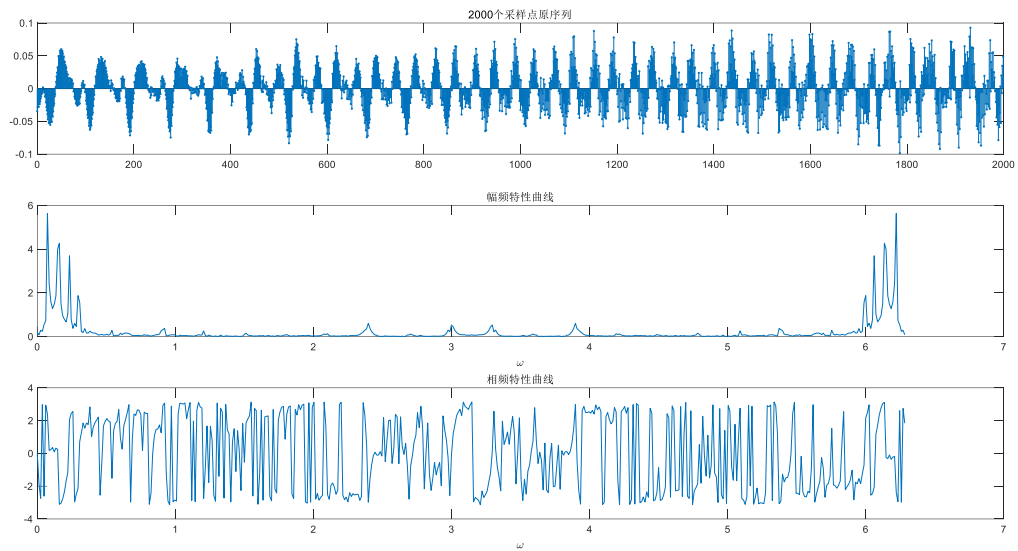


图 5 音频采样仿真验证图

同时，对 2000 点的原序列分别进行奇数点抽样与偶数点抽样，仿真结果如下图 6、图 7 所示。

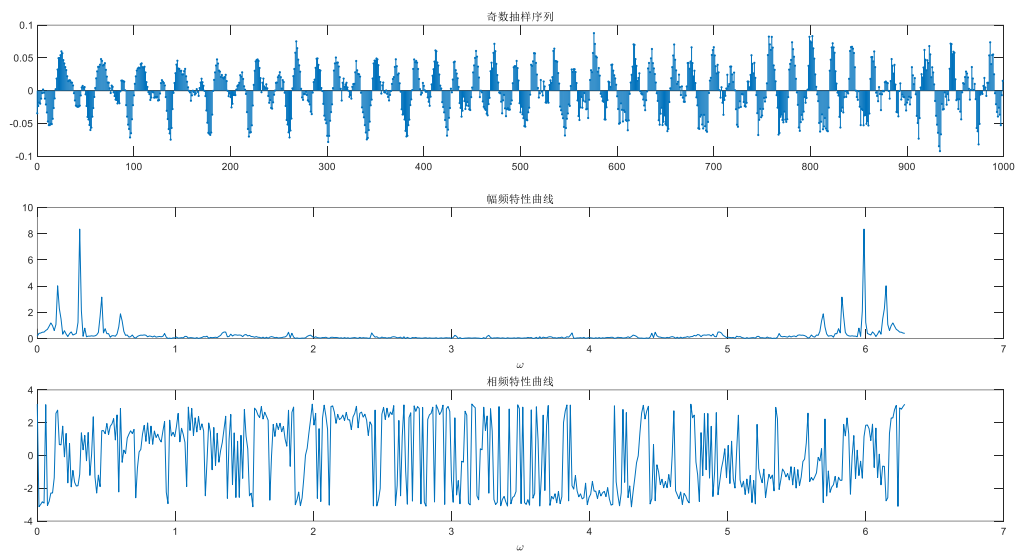


图 6 奇数采样仿真验证图

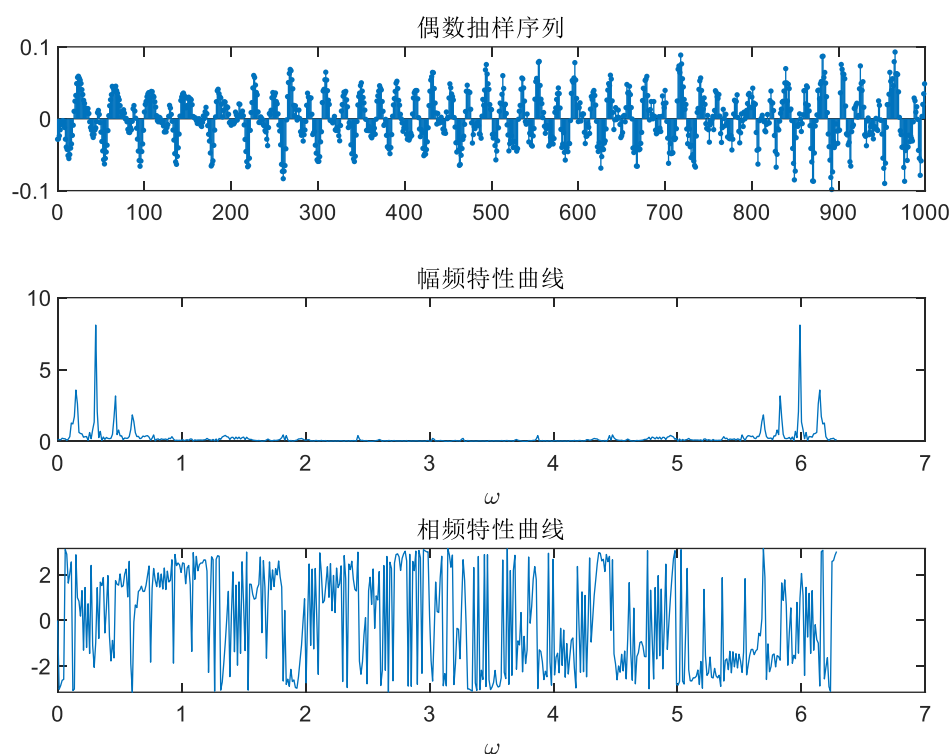


图 7 偶数采样仿真验证图

$$\begin{aligned}
 & \text{FT}[x_2(n)] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\omega n}, n \text{ 为偶数} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega 2m} \\
 &= X(e^{j2\omega})
 \end{aligned}$$

此时，对上述音频原序列进行偶数与奇数采样，最终得到结果如图 6、7 所示，此时是对离散序列进行压扩，由上述推导即压扩性质可以得到，最终的频域中，频域被展宽，最终仿真结果与理论分析相同。

## 五、思考题

1. 如果序列  $x(n)$  的长度为  $M$ ，希望得到其频谱在上的  $N$  点等间隔采样，当  $N < M$  时，如何用一次最少点数的 DFT 得到该频谱采样？

将长序列进行分段处理，利用**重叠相加法**与**重叠保留法**进行对长序列分段的处理。

### 重叠相加法：

1、将  $x(n)$  分段，每段长为  $M$ ，保证  $M$  接近  $N$  即可，然后将  $x_k(n)$  补零延长到  $L=M+N-1$ ，计算  $L$  点

FFT 得到  $X(K)$

2、将  $h(n)$  补零延长至  $L=M+N-1$ ，计算  $L$  点 FFT 得到  $H(K)$ 。

3、计算  $Y_k(k) = H(k) * X(k)$ ，然后求  $L$  点的 IFFT, 得到  $y_k(n)$

**重叠保留法:**

将  $x(n)$  分段，每段长为  $M$ ，保证  $M$  接近  $N$  即可，然后 将每段  $x_k(n)$  向前多取  $N-1$  个点，第一段前面补  $N-1$  个 0，则每段  $x_k(n)$  长为  $L=M+N-1$ ，计算  $L$  点 FFT 得到  $XK(K)$

将  $h(n)$  补零延长至  $L=M+N-1$ ，计算  $L$  点 FFT 得到  $H(K)$ 。

2. 对采样后的语音信号，每 2 个样点抽取 1 点，语音信号会发生频谱混叠吗？如果发生会发生频谱混叠，原因是什么？以实验内容 3.3 为例进行说明

会发生频谱混叠，采样后的语音信号频谱是周期性的，所以在此采样一定会发生频谱搬移发生混叠现象。

在我看来，我更倾向于解释为离散序列的压扩性质，由于被采样后的语音信号本身就是一种离散序列，对离散序列进行抽样，对引起频域的展宽，发生频谱混叠。