重慶郵電大學

学生实验实习报告册

学年学期：2022 -2023 学年 □春■秋学期

课程名称：信号处理实验

学生学院：通信与信息工程学院

专业班级：

学生学号：

学生姓名：

联系电话：

重庆邮电大学教务处制

课程名称	信号处理实验	课程编号	A2010550
实验地点	YF314	实验时间	2022 年 11 月 4 日
校外指导教师	郑丹玲	校内指导教师	郑丹玲
实验名称	用 FFT 进行谱分析		
评阅人签字		成绩	

一、实验目的

1. 进一步加深对 DFT 算法原理和基本性质的理解(因为 FFT 只是 DFT 的一种快速算法,所以 FFT 的运算结果必然满足 DFT 的基本性质)。

2. 熟悉 FFT 算法原理和 FFT 子程序的应用。

3. 学习用 FFT 对连续信号和时域离散信号进行谱分析的方法,了解可能出现的分析误差及其原因,以便在实际中正确应用 FFT 频率特性分析。

二、实验原理

1.DFT 的基本原理

离散傅里叶变换(DFT),是傅里叶变换在时域和频域上都呈现离散的形式,将时域信号的采样变换为在离散时间傅里叶变换(DTFT)频域的采样。在形式上,变换两端(时域和频域上)的序列是有限长的,而实际上这两组序列都应当被认为是离散周期信号的主值序列。即使对有限长的离散信号作 DFT,也应当将其看作经过周期延拓成为周期信号再作变换。在实际应用中通常采用快速傅里叶变换以高效计算 DFT。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n){W^{kn}}_N$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k){W^{-kn}}_N$$

Matlab 信号处理工具箱提供了一个对 x(n)进行 DFT 的函数即快速傅里叶算法 fft,其语句格式为:

xk=fft(xn,N)

其中,xn 为原序列;N 表示进行 N 点 fft;xk 为最终的 N 点 DFT。

2. 利用 DFT 对模拟信号进行谱分析

在工程实际中经常遇到的模拟信号$x_n(t)$,其频谱函数$X_n(j\Omega)$也是连续函数,为了利用 DFT 对$x_n(t)$进行谱分析,对$x_n(t)$进行时域采样得到$x(n)=x_n(nT)$,再对$x(n)$进行 DFT,得到$X(k)$则是$x(n)$的傅里叶变换$X(e^{j\omega})$在频率区间$[0,2\pi]$上的 N 点等间隔采样,这里$x(n)$和$X(k)$都是有限长序列。

然而,傅里叶变换理论证明,时间有限长的信号其频谱是无限宽的,反之,弱信号的频谱有限宽的则其持续时间将为无限长,因此,按采样定理采样时,采样序列应为无限长,这不满足 DFT 的条件。实际中,对于频谱很宽的信号,为防止时域采样后产生‘频谱混叠’,一般用前置滤波器滤除幅度较小的

高频成分，使信号的带宽小于折叠频率；同样对于持续时间很长的信号，采样点数太多也会导致存储和计算困难，一般也是截取有限点进行计算。上述可以看出，用 DFT 对模拟信号进行谱分析，只能是近似的，其近似程度取决于信号带宽、采样频率和截取长度。

最终，可以通过对连续信号采样并进行 DFT 在乘 T，得到模拟信号频谱周期延拓函数在第一个周期 $[0,F_s]$ 上的 N 点等间隔采样即：

$$\tilde{X}_a'(kF)=TX(k)=T\cdot DFT[x(n)]_N$$

3. 利用 DFT 对离散周期信号进行谱分析

针对离散周期信号利用 DFT 进行谱分析时，需要对截取长度进行限制，即截取长度 M=mN,m 为正整数，即

$$x_M(n)=\tilde{x}(n)R_M(n)$$

则此时，最终得到的 M 点 DFT 为：

$$X_M(k)=\begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{k}{m}=\text{整数} \\ 0 & \frac{k}{m}\neq\text{整数} \end{cases}$$

4.Matlab 中常用的快速傅里叶变换函数

1）Y=fft(x,N)

采用 FFT 算法计算序列向量 x 的 N 点 DFT，这里假设 x 的长度为 R。

（1）当省略 N 时，fft 函数计算 x 的 R 点的 DFT，Y 的长度也为 R；

（2）若 R>N，截取 x 的前 N 点计算 DFT，Y 的长度为 N；

（3）若 R<N，对 x 先补零扩展为 N 点长序列，再求 N 点 DFT，Y 的长度为 N。

2）x=ifft(Y,N)

采用 FFT 算法计算序列向量 Y 的 N 点 IDFT。

3）Y=fft2(x,M,N) % 二维快速离散傅里叶变换

（1）当省略 M 和 N 时，计算 x 二维离散傅里叶变换，Y 的长度与 x 相同；

（2）对 x 进行截断或补零扩展，以便在计算变换之前 x 形成 m×n 矩阵，计算得到的 Y 是 m×n 矩阵。

4）Y=fftshift(X) % 将零频率的分量移到频谱的中心

三、实验程序

```
clc;
```

```
clear;
%% 任务一
N=8;
for i=0:N-1
    x1(i+1)=X1(i);
end
xk1=fft(x1,N);
figure(1);
subplot(211);
stem(0:length(x1)-1,x1,'.');
title('x1 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk1),'.');
title('x1 的 8 点离散幅度谱');


N=16;
xk1=fft(x1,N);
figure(2);
subplot(211);
stem(0:length(x1)-1,x1,'.');
title('x1 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk1),'.');
title('x1 的 16 点离散幅度谱');


%% 任务二
N=8;
for i=0:N-1
    x2(i+1)=X2(i);
end
xk2=fft(x2,N);
figure(3);
subplot(211);
stem(0:length(x2)-1,x2,'.');
title('x2 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk2),'.');
title('x2 的 8 点离散幅度谱');


N=16;
xk2=fft(x2,N);
figure(4);
subplot(211);
```

```
stem(0:length(x2)-1,x2,'.');
title('x2 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk2),'.');
title('x2 的 16 点离散幅度谱');

%% 任务三
N=8;
for i=0:N-1
    x4(i+1)=X4(i);
end
xk4=fft(x4,N);
figure(5);
subplot(211);
stem(0:length(x4)-1,x4,'.');
title('x4 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk4),'.');
title('x4 的 8 点离散幅度谱');


N=16;
for i=0:N-1
    x4(i+1)=X4(i);
end
xk4=fft(x4,N);
figure(6);
subplot(211);
stem(0:length(x4)-1,x4,'.');
title('x4 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk4),'.');
title('x4 的 16 点离散幅度谱');

%% 任务四
Fs = 64; %采样频率 64hz
N = 16;
t = 0:1/Fs:(N-1)/Fs;
for i =1:length(t)
    x6(i)=X6(t(i));
end
xk6=fft(x6,N);
figure(7);
subplot(211);
stem(0:length(x6)-1,x6,'.');
title('x6 的波形');
```

```
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk6),'.');
title('x6 的 16 点离散幅度谱');

N = 32;
t = 0:1/Fs:(N-1)/Fs;
for i =1:length(t)
    x6(i)=X6(t(i));
end
xk6=fft(x6,N);
figure(8);
subplot(211);
stem(0:length(x6)-1,x6,'.');
title('x6 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk6),'.');
title('x6 的 32 点离散幅度谱');

N = 64;
t = 0:1/Fs:(N-1)/Fs;
for i =1:length(t)
    x6(i)=X6(t(i));
end
xk6=fft(x6,N);
figure(9);
subplot(211);
stem(0:length(x6)-1,x6,'.');
title('x6 的波形');
subplot(212);
stem(0:N-1,abs(xk6),'.');
title('x6 的 64 点离散幅度谱');


%% 任务五
N=512;
[xn,fs] = audioread('F:\学习\数字信号处理实验\实验 1\motherland.wav');
% n = 0:N-1;
% t = n/fs;
% f1 = n*fs/N-fs/2;
w1 = 0:2*pi/(N-1):2*pi;
xn = xn(8000:8199);
xnk = fft(xn,N);
Hm = abs(xnk);
Hp = angle(xnk);
figure(10);
subplot(211);
```

```
plot(w1,Hm);
xlabel("\omega")
subplot(212);
plot(w1,Hp);
xlabel("\omega")

%% 图像处理
lena = imread('lena_colour.bmp'); % 读原图
figure(13);
imshow(lena);
title('原图')
fftI = fft2(lena); % 二维离散傅里叶变换
A1 = abs(fftI); % 取模值
% 把幅度限定在[0,255]
B1=(A1-min(min(A1)))./(max(max(A1))-min(min(A1)))*255;
figure(14);
imshow(B1); title('二维幅度谱图');
B= fftshift(B1);
figure(15);
imshow(B); title('移到中心位置的二维频谱图')

%% 思考题 1
N=8;
for i=0:N-1
    x2(i+1)=X2(i);
end
xk2=fft(x2,N);
figure(11);
subplot(321);
stem(0:length(x2)-1,x2,'.');
title('x2 的波形');
subplot(323);
stem(0:N-1,abs(xk2),'.');
title('x2 的 8 点离散幅度谱');

N=16;
xk2=fft(x2,N);
subplot(325);
stem(0:N-1,abs(xk2),'.');
title('x2 的 16 点离散幅度谱');

N=8;
for i=0:N-1
    x3(i+1)=X3(i);
end
xk3=fft(x3,N);
```

```
subplot(322);
stem(0:length(x3)-1,x3,'.');
title('x3 的波形');
subplot(324);
stem(0:N-1,abs(xk3),'.');
title('x3 的 8 点离散幅度谱');
N=16;
xk3=fft(x3,N);
subplot(326);
stem(0:N-1,abs(xk3),'.');
title('x3 的 16 点离散幅度谱');

%% 思考题 3
xx = [1 2 2 3 3 2 2 1];
xx1 = [1 2 3 2 1];
xx2 = [1 0 2 0 2 0 3 0 3 0 2 0 2 0 1];
wx = 0:2*pi/511:2*pi;
xxk = fft(xx,512);
HHm = abs(xxk);
HHp = angle(xxk);
xxk1 = fft(xx1,512);
HHm1 = abs(xxk1);
HHp1 = angle(xxk1);
xxk2 = fft(xx2,512);
HHm2 = abs(xxk2);
HHp2 = angle(xxk2);
figure(12);
subplot(331);
[n,m]=size(xx);
stem(0:m-1,xx,'.');
subplot(334);
plot(wx,HHm);
xlabel("\omega");
title("幅频特性曲线");
subplot(337);
plot(wx,HHp);
xlabel("\omega");
title("相频特性曲线");
subplot(332);
[n,m]=size(xx1);
stem(0:m-1,xx1,'.');
subplot(335);
plot(wx,HHm1);
xlabel("\omega");
title("辐频特性曲线");
subplot(338);
```

```
plot(wx,HHp1);
xlabel("\omega");
title("相频特性曲线");
subplot(333);
[n,m]=size(xx2);
stem(0:m-1,xx2,'.');
subplot(336);
plot(wx,HHm2);
xlabel("\omega");
title("辐频特性曲线");
subplot(339);
plot(wx,HHp2);
xlabel("\omega");
title("相频特性曲线");
```

四、仿真分析

1. 编写 matlab M 文件对信号$x_1(n)$做 8 点和 16 点的 FFT。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} R_4(n) W^{kn}{}_N$$

对上式的 n 分别取 8、16 最终得到的结果为：

```
列 1 至 4
 4.0000 + 0.0000i   1.0000 - 2.4142i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 - 0.4142i
列 5 至 8
 0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.4142i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 2.4142i
```

图 1 $x_1(n)$ 8 点 DFT 仿真结果图

```
列 1 至 4
 4.0000 + 0.0000i   3.0137 - 2.0137i   1.0000 - 2.4142i  -0.2483 - 1.2483i
列 5 至 8
 0.0000 + 0.0000i   0.8341 + 0.1659i   1.0000 - 0.4142i   0.4005 - 0.5995i
列 9 至 12
 0.0000 + 0.0000i   0.4005 + 0.5995i   1.0000 + 0.4142i   0.8341 - 0.1659i
列 13 至 16
 0.0000 + 0.0000i  -0.2483 + 1.2483i   1.0000 + 2.4142i   3.0137 + 2.0137i
```

图 2 $x_1(n)$ 16 点 DFT 仿真结果图

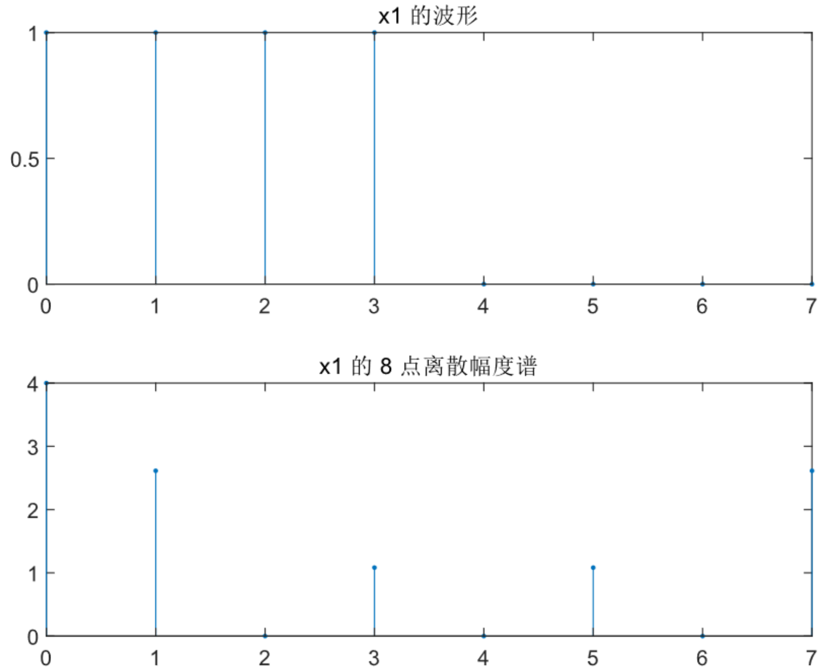

图 3 $x_1(n)$8 点 DFT 仿真图

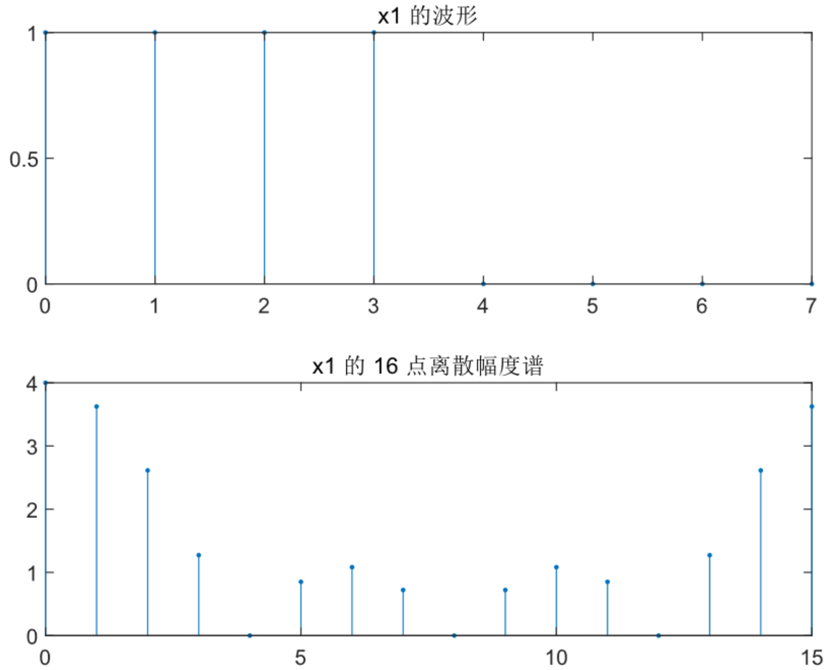

图 4 $x_1(n)$16 点 DFT 仿真图

由图 3、图 4 可以看出 DFT 可以看作 FT 在的频域在$[0,2\pi]$的 N 点抽样，可以发现 16 点 DFT 在 8 点 DFT 的基础上，在两个抽样的中间间隔增加一个抽样值，符合理论分析的结论，且符合对四点矩形序列进行频域抽样的结论。

2. 编写 Matlab M 文件对信号$x_2(n)$做 8 点和 16 点的 FFT。

与问题 1 同理，对$x_2(n)$进行 DFT 展开，得到结果如下：

```
列 1 至 4
20.0000 + 0.0000i  -5.8284 - 2.4142i   0.0000 + 0.0000i  -0.1716 - 0.4142i
列 5 至 8
 0.0000 + 0.0000i  -0.1716 + 0.4142i   0.0000 + 0.0000i  -5.8284 + 2.4142i
```

图 5 $x_2(n)$8 点 DFT 仿真结果图

```
列 1 至 4
20.0000 + 0.0000i   3.0137 -15.1507i  -5.8284 - 2.4142i  -0.2483 + 0.3716i
列 5 至 8
 0.0000 + 0.0000i   0.8341 - 0.5573i  -0.1716 - 0.4142i   0.4005 - 0.0797i
列 9 至 12
 0.0000 + 0.0000i   0.4005 + 0.0797i  -0.1716 + 0.4142i   0.8341 + 0.5573i
列 13 至 16
 0.0000 + 0.0000i  -0.2483 - 0.3716i  -5.8284 + 2.4142i   3.0137 +15.1507i
```

图 6 $x_2(n)$16 点 DFT 仿真结果图

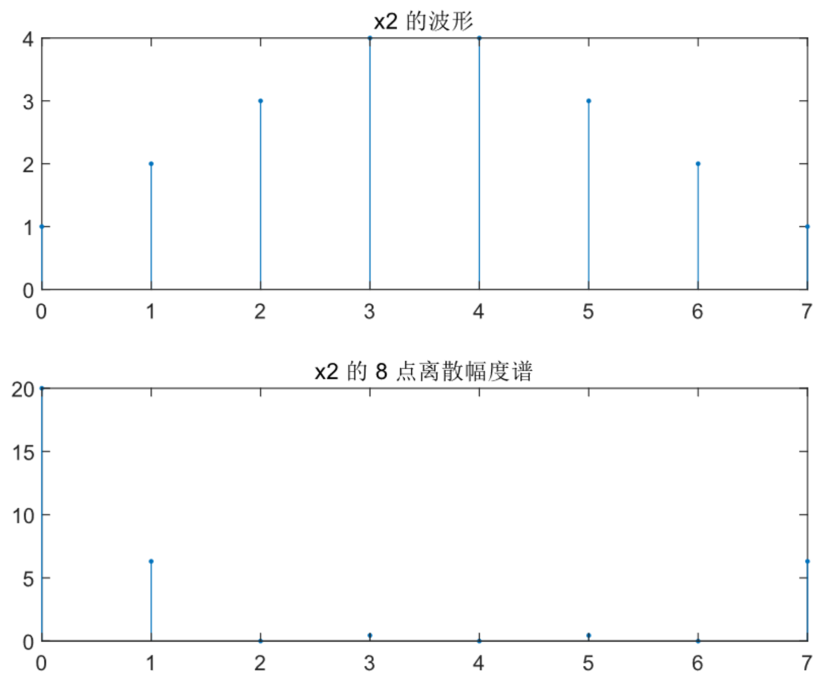

图 7 $x_2(n)$8 点 DFT 仿真图

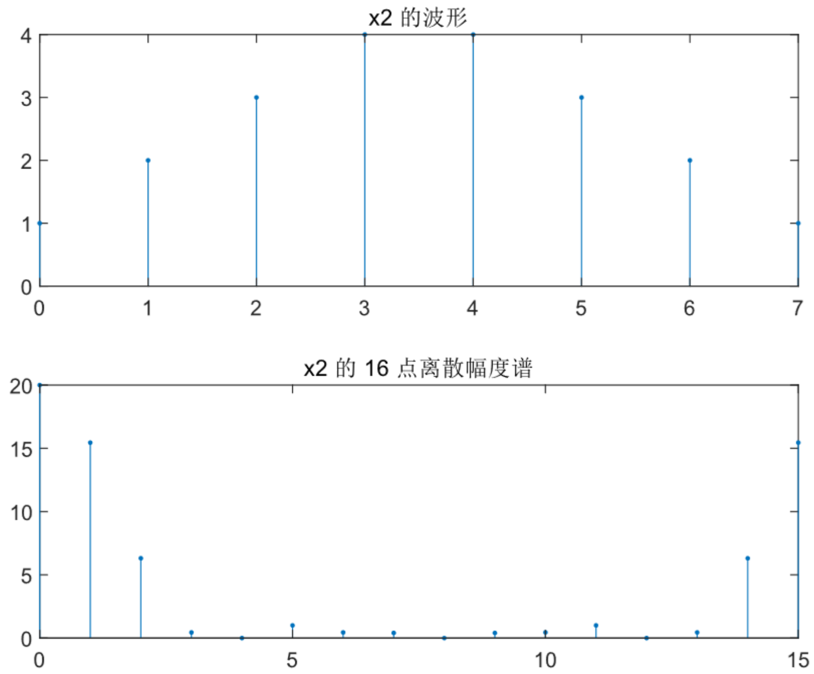

图 8 $x_2(n)$16 点 DFT 仿真图

由图 7、图 8 可以看出 DFT 可以看作 FT 在的频域在$[0,2\pi]$的 N 点抽样，可以发现 16 点 DFT 在 8 点 DFT 的基础上，在两个抽样的中间间隔增加一个抽样值，符合理论分析的结论。

3. 编写 Matlab M 文件对信号$x_4(n)$做 8 点和 16 点的 FFT。

与问题 1、2 同理，对 进行 DFT 展开，得到结果如下：

```
列 1 至 4
-0.0000 + 0.0000i   4.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
列 5 至 8
 0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   4.0000 + 0.0000i
```

图 9 $x_4(n)$8 点 DFT 仿真结果图

```
列 1 至 4
 0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   8.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
列 5 至 8
 0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
列 9 至 12
-0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
列 13 至 16
 0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   8.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
```

图 10 $x_4(n)$16 点 DFT 仿真结果图

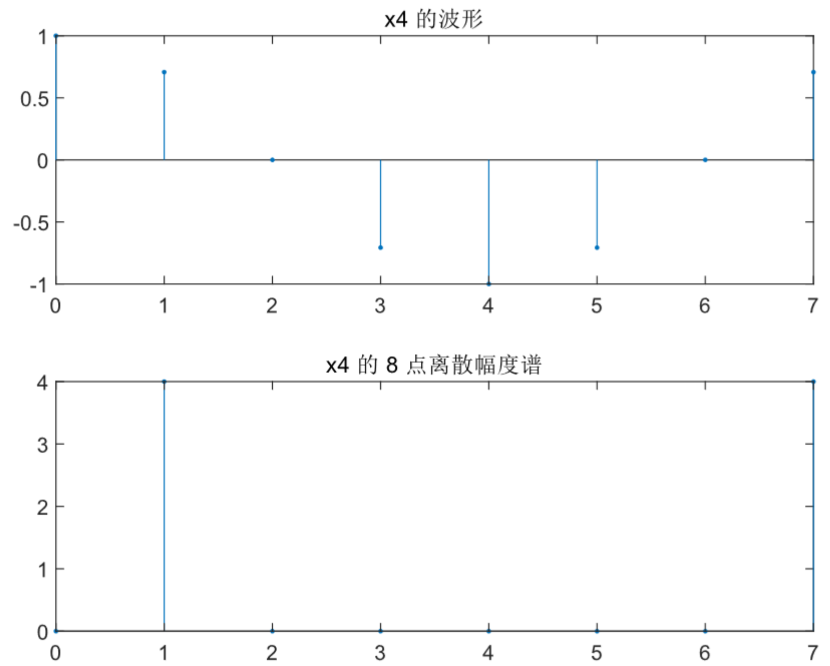

图 11 $x_4(n)$ 8 点 DFT 仿真图

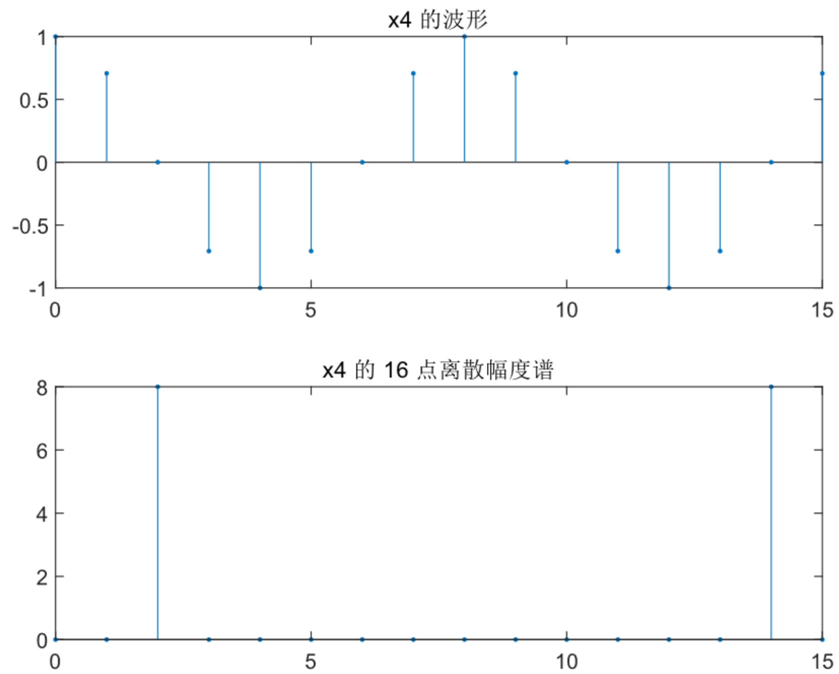

图 12 $x_4(n)$ 16 点 DFT 仿真图

由图 11、图 12 可以看出 DFT 可以看作 FT 在的频域在$[0,2\pi]$的 N 点抽样，可以发现 16 点 DFT 在 8 点 DFT 的基础上，在两个抽样的中间间隔增加一个抽样值，符合理论分析的结论。

4. 编写 Matlab M 文件对信号$x_6(n)$以$f_s = 64Hz$采样后做 N=16、32、64 点的 FFT。

当$f_s = 64Hz$时，采样间隔$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{64}s$，进行 16、32、64 点采样时，分别采样的长度为 16、32、64 点有限序列，然后与问题 1、2、3 同理，分别进行 16、32、64 点 FFT，最终得到如下仿真结果：

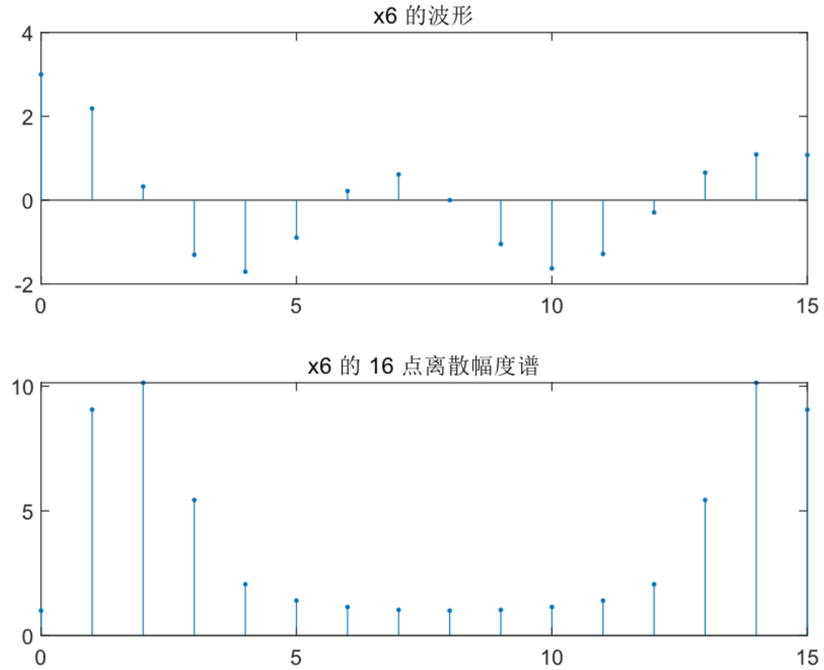

图 13 $x_6(n)$ 16 点 DFT 仿真图（$\frac{1}{64}s$采样）

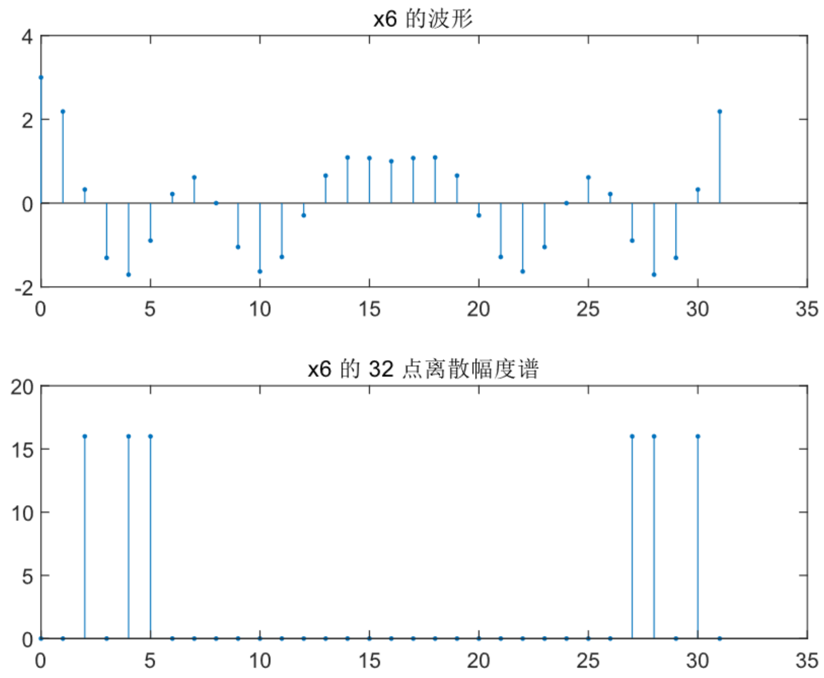

图 14 $x_6(n)$ 32 点 DFT 仿真图（$\frac{1}{64}s$采样）

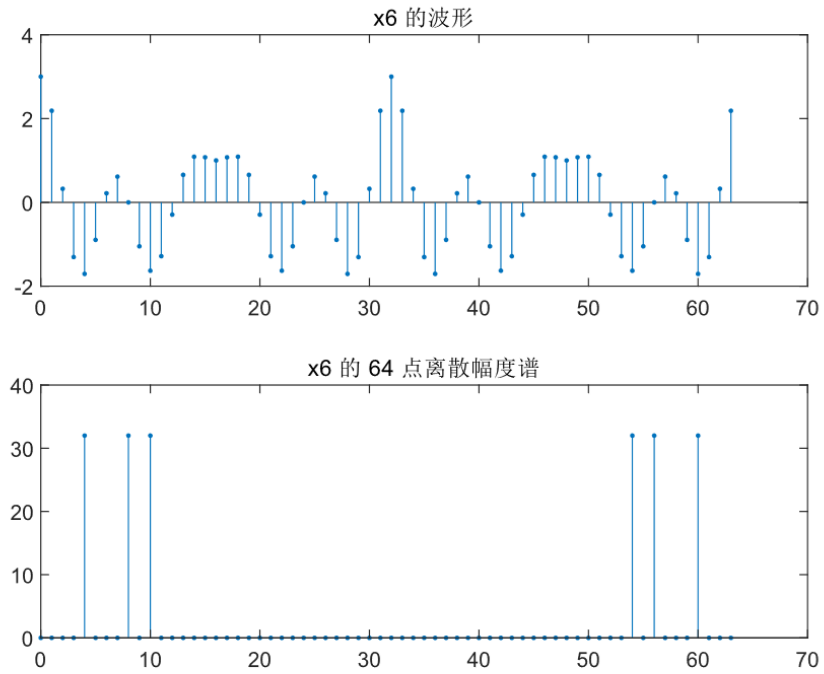

图 15 $x_6(n)$64 点 DFT 仿真图（$\frac{1}{64}s$采样）

由于$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{64}s$，最终的序列$x(n)$的周期为 N=32，所以，针对离散周期信号利用 DFT 进行谱分析时，需要对截取长度进行限制，即截取长度 M=mN,m 为正整数，即

$$x_M(n)=\tilde{x}(n)R_M(n)$$

则此时，最终得到的 M 点 DFT 为：

$$X_M(k)=\begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{k}{m}=\text{整数} \\ 0 & \frac{k}{m}\neq\text{整数} \end{cases}$$

所以结果中，只有 32 点 64 点 DFT 是满足谱分析规则的，对应频谱反应内容相同，仿真符合理论分析结果。

5.编写 Matlab M 文件，读取 motherland.wav 音频数据，分析第 8000 至 8199 共 200 个采样点的频谱（提示这里的频谱指的是信号的傅里叶变换）。实现方法为：对这 200 个点数据做 N=512 的 DFT（采用 FFT 实现）。要求：画出其在$[0,2\pi)$的连续幅度谱和相位谱图。

对于音频信号，$f_s=8000Hz$时，采样间隔$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{8000}s$，做 8000-8199 的 200 点采样，得到 1-1.025s 的序列，并对其进行 512 点的 DFT，最终进行幅频特性与相频特性分析，仿真结果如下：

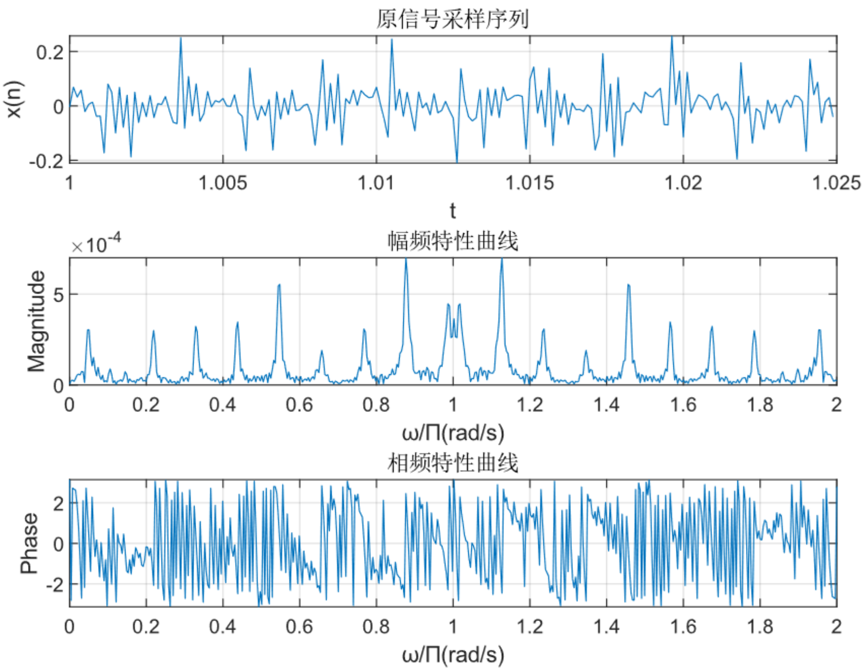

图 16 音频信号 DFT 仿真图

抽样出 1-1.025s 的音频信号如图 16 中原信号采样序列所示，利用 512 点 DFT 对其进行**谱分析**，因为原信号为模拟信号，所以对模拟信号利用 DFT 进行**谱分析**,如下式：

$$\tilde{X}_a{}'(kF) = TX(k) = T \cdot DFT[x(n)]_N$$

最终，得到的幅频特性与相频特性曲线如上图中所示，幅频特性为 DFT 的 $\frac{1}{8000}$， 相频特性不变，符合理论中利用 DFT 对连续信号**谱分析**的结果，通过分析频谱可以发现这段时间的高频分量要稍强于低频分量。

6.编写 Matlab 程序，分析 lena 图像的二维频谱，调用 fft2 和 fftshift 函数实现。

图像的频率是表征图像中**灰度变化剧烈程度**的指标，是灰度在平面空间上的梯度，对图像而言，图像的边缘部分是突变部分，变化较快，因此反应在频域上是高频分量（能量低，在变换后的图中，呈现黑灰色），图像的噪声大部分情况下是高频部分；图像平缓变化部分则为低频分量（能量高，在变换后的图中，呈现黑灰色）。也就是说，傅立叶变换提供另外一个角度来观察图像，可以将图像从灰度分布转化到频率分布上来观察图像的特征。

图像进行二维傅立叶变换得到频谱图，就是**图像梯度的分布图**,当然频谱图上的各点与图像上各点并不存在一一对应的关系，即使在不移频的情况下也是没有。

图 17 lena 图像原图

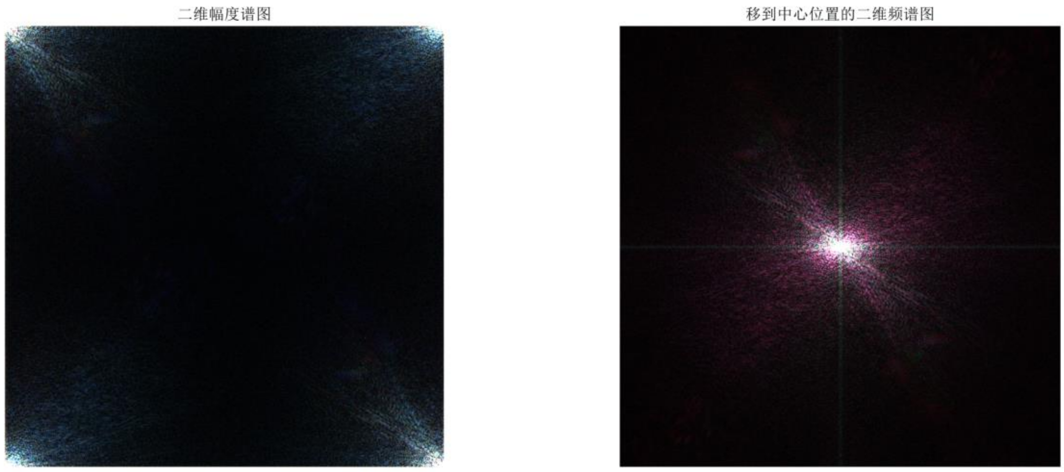

图 18 lena 图像二维幅频图（右图将零频分量其位置移至中心）

由上图可以发现 lena 图像中的低频部分（能量大，呈现白色）指低梯度的点集中在四个角周围，高频部分相反（能量小，呈现黑灰色）集中在图像内部。

五、思考题

1. 在 N=8 和 N=16 两种情况下，$x_2(n)$和$x_3(n)$的幅频特性会相同吗？为什么？

当 N=8 时，可以发现，通过观察序列图像可以发现：

$$x_3(n)=x_2((n-4))_8R_8(n)$$

利用 DFT 的时域循环移位性质，可以得到如下结论：

$$X_3(k)=X_2(k)W^{4k}{}_8=(-1)^kX_2(k),\qquad k=0,1,\ldots,7$$

$$|X_3(k)|=|X_2(k)|,\qquad k=0,1,\ldots,7$$

所以，此时的幅频特性曲线完全一致。

当 N=16 时，需要在$x_2(n)$和$x_3(n)$两个序列最后补 0，最终可以得到两个新的 16 点序列，但是此时不满足$x_3(n)=x_2((n-4))_8R_8(n)$，所以最终两序列的 16 点 DFT 不相等。

最终仿真结果如下图所示：

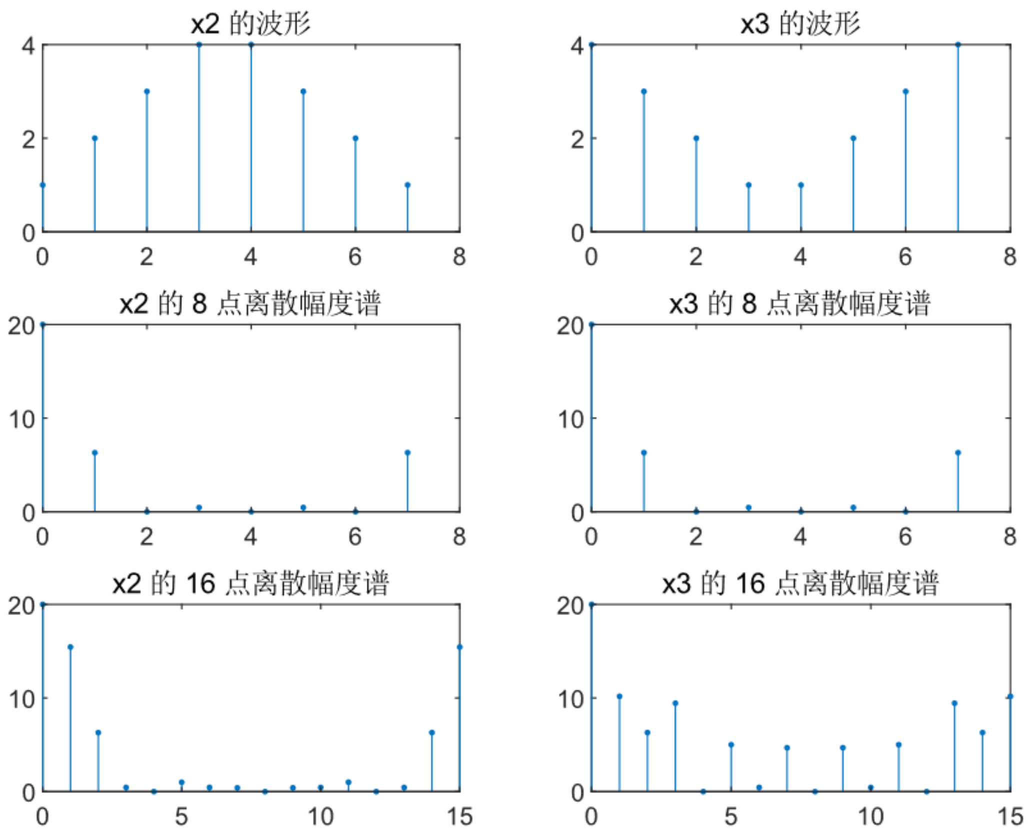

图 19 $x_2(n)$与 $x_3(n)$幅频特性仿真对比图

由图 19 仿真结果可以得到：$x_2(n)$和$x_3(n)$的 8 点 DFT 相同，16 点 DFT 不相同，即与理论分析结果吻合，准确性强。

2.如果周期信号的周期预先不知道，如何用 FFT 进行分析？

①.周期信号的周期预先不知道时，可先截取 M 点进行 DFT，再将截取长度扩大一倍截取，比较结果，如果二者的差别满足分析误差要求,则可以近似表示该信号的频谱，如果不满足误差要求就继续将截取长度加倍，重复比较，直到结果满足要求。

②.可以先通过$\tilde{x}(n)$的自相关函数来估算$\tilde{x}(n)$的周期（具体方式可见《数字信号处理：原理、算法与应用》与《数字信号导论（第 2 版）》），从而利用 DFT 分析周期函数的方式，即抽取长度 M=mN（m 为整数）对周期信号进行**谱分析**，则此时，最终得到的 M 点 DFT 为：

$$X_M(k)=\begin{cases} mX\left(\dfrac{k}{m}\right) & \dfrac{k}{m}=\text{整数} \\ 0 & \dfrac{k}{m}\neq\text{整数} \end{cases}$$

3. 已知序列 x=[1,1,2,2,3,3,2,2,1,1]。

（1）对 x 进行 2 选 1 的抽取，得到序列 x1=[1,2,3,2,1]；

（2）对 x 在两个序列值之间插入一个 0 值点进行内插，得到序列 x2=[1,0,1,0,2,0,2,0,3,0,3,0,2,0,2,0,1,0,1]。

（3）使用函数 fft 分别画出 x、x1 和 x2 在$[0,2\pi)$的连续幅度谱图（提示是序列 FT)；

（4）分别写出 x1、x2 与 x 频谱关系的数学表达式。根据（3）显示出的幅度频谱图，解释 x1、x2 与 x 幅度频谱变化的原因。

（1）对 x 进行 2 选 1 的抽取，得到序列 x1=[1,2,3,2,1]，即：

$$x_1(n)=x(2n)$$

（2）对 x 在两个序列值之间插入一个 0 值点进行内插，得到序列 x2，即

$$x_2(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{2}\right)，\dfrac{n}{2}=\text{整数} \\ 0，\dfrac{n}{2}\neq\text{整数} \end{cases}$$

（3）此时对以上序列进行仿真，最终得到如下仿真结果：

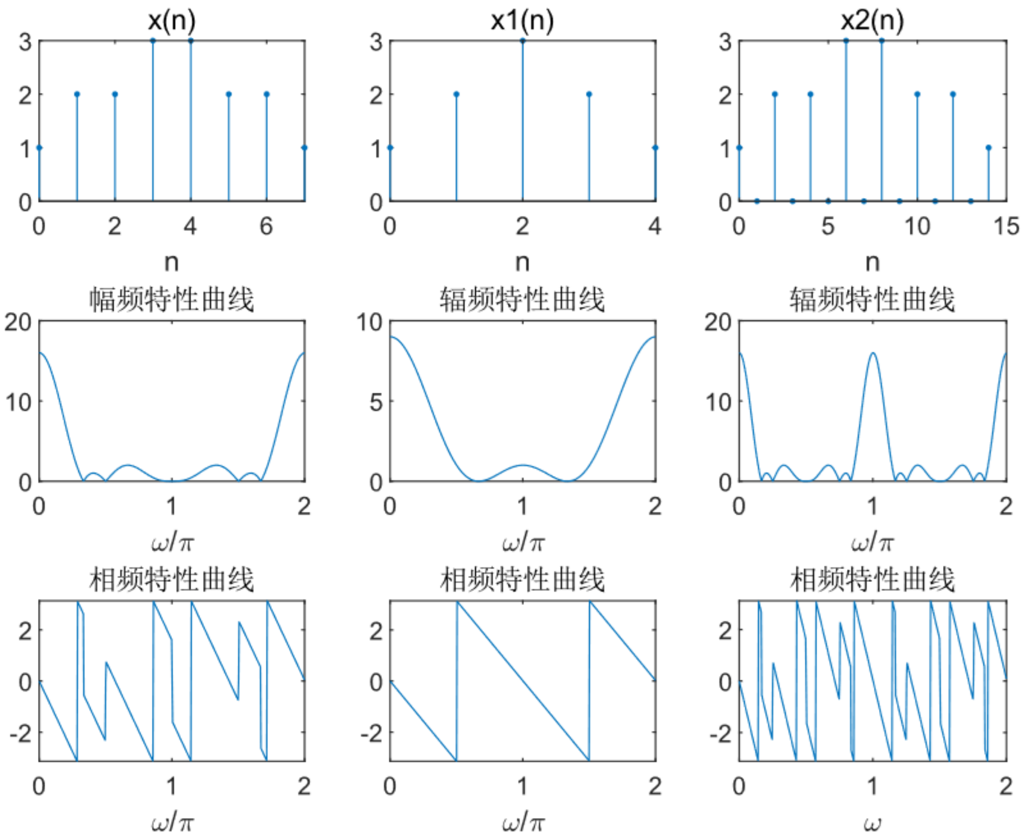

图 20 x(n)、x_1(n)与 x_2(n)幅频特性仿真对比图

（4）由（1）、（2）可以得到 x1、x2 的表达式：

$$x_1(n)=x(2n)$$

$$x_2(n)=\begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right)，& \frac{n}{2}=\text{整数} \\ 0，& \frac{n}{2}\neq\text{整数} \end{cases}$$

$FT[x(2n)]$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-j\omega n}$

令 $2n=m$　$n=\frac{m}{2}$

原式 $=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega\frac{m}{2}}$

$=X(e^{\frac{j\omega}{2}})$

$FT[x_2(n)]$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n}$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right)e^{-j\omega n}$，n为偶数

$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega 2m}$

$=X(e^{2j\omega})$

所以得到由上述理论分析可以得到$x_1(n)=x(2n)$的 FT 相较于$x(n)$的 FT 的频率分量缺失，而

$$x_2(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{2}\right), & \dfrac{n}{2}=\text{整数} \\ 0, & \dfrac{n}{2}\neq\text{整数} \end{cases}$$

的 FT 的频率分量相较于$x(n)$的频率分量丰富，理论分析与仿真结果完全符合，体现了结果的准确性。