

实验三 z 变换及离散 LTI 系统的 z 域分析

一、实验目的

- (1) 学会运用 Matlab 求离散时间信号的有理函数 z 变换的部分分式展开；
- (2) 学会运用 Matlab 分析离散时间系统的系统函数的零极点；
- (3) 学会运用 Matlab 分析系统函数的零极点分布与其时域特性的关系；
- (4) 学会运用 Matlab 进行离散时间系统的频率特性分析。

二、实验原理及实例分析

2.1 有理函数 z 变换的部分分式展开

如果信号的 z 域表示式 $X(z)$ 是有理函数，设 $X(z)$ 的有理分式表示为

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2-1)$$

Matlab 信号处理工具箱提供了一个对 $X(z)$ 进行部分分式展开的函数 `residuez`，其语句格式为

$$[R,P,K]=\text{residuez}(B,A)$$

其中，B，A 分别表示 $X(z)$ 的分子与分母多项式的系数向量；R 为部分分式的系数向量；P 为极点向量；K 为多项式的系数。若 $X(z)$ 为有理真分式，则 K 为零。

【实例 2-1】试用 Matlab 命令对函数 $X(z) = \frac{18}{18 + 3z^{-1} - 4z^{-2} - z^{-3}}$ 进行部分分式展开，并求出其 z 反变换。

解：MATLAB 源程序为

```
>>B=[18];  
>>A=[18,3,-4,-1];  
>>[R,P,K]=residuez(B,A)
```

R=

0.3600

```

0.2400
0.4000
P=
0.5000
-0.3333
-0.3333
K=
[]

```

从运行结果可知， $p_2 = p_3$ ，表示系统有一个二重极点。所以， $X(z)$ 的部分分式展开为

$$X(z) = \frac{0.36}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.24}{1+0.3333z^{-1}} + \frac{0.4}{(1+0.3333z^{-1})^2}$$

2.2 系统函数的零极点分析

离散时间系统的系统函数定义为系统零状态响应的 z 变换与激励的 z 变换之比，即

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2-2)$$

如果系统函数 $H(z)$ 的有理函数表示式为

$$H(z) = \frac{b_1 z^m + b_2 z^{m-1} + \cdots + b_m z + b_{m+1}}{a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \cdots + a_n z + a_{n+1}} \quad (2-3)$$

那么，在 Matlab 中系统函数的零极点就可通过函数 `roots` 得到，也可借助函数 `tf2zp` 得到，`tf2zp` 的语句格式为

$$[Z,P,K]=tf2zp(B,A)$$

其中， B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子与分母多项式的系数向量。它的作用是将 $H(z)$ 的有理分式表示式转换为零极点增益形式，即

$$H(z) = k \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} \quad (2-4)$$

【实例 2-2】 已知一离散因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z + 0.32}{z^2 + z + 0.16}$$

试用 Matlab 命令求该系统的零极点。

解：用 tf2zp 函数求系统的零极点，MATLAB 源程序为

```
>>B=[1,0.32];  
>>A=[1,1,0.16];  
>>[R,P,K]=tf2zp(B,A)  
R=  
    -0.3200  
P=  
    -0.8000  
    -0.2000  
K=  
    1
```

因此，零点为 $z = 0.32$ ，极点为 $p_1 = 0.8$ 与 $p_2 = 0.2$ 。

若要获得系统函数 $H(z)$ 的零极点分布图，可直接应用 zplane 函数，其语句格式为

zplane(B,A)

其中，B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数向量。它的作用是在 Z 平面上画出单位圆、零点与极点。

【实例 2-3】已知一离散因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.36}{z^2 - 1.52z + 0.68}$$

试用 Matlab 命令绘出该系统的零极点分布图。

解：用 zplane 函数求系统的零极点，MATLAB 源程序为

```
>>B=[1,0,-0.36];  
>>A=[1,-1.52,0.68];  
>>zplane(B,A),grid on  
>>legend('零点','极点')  
>>title('零极点分布图')
```

程序运行结果如图 3-1 所示。可见，该因果系统的极点全部在单位圆内，故系统是稳定的。

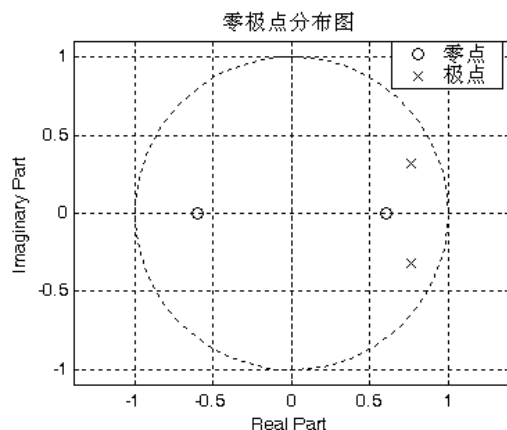


图 2-1 零极点分布图

2.3 系统函数的零极点分布与其时域特性的关系

与拉氏变换在连续系统中的作用类似，在离散系统中， z 变换建立了时域函数 $h(n)$ 与 z 域函数 $H(z)$ 之间的对应关系。因此， z 变换的函数 $H(z)$ 从形式可以反映 $h(n)$ 的部分内在性质。我们仍旧通过讨论 $H(z)$ 的一阶极点情况，来说明系统函数的零极点分布与系统时域特性的关系。

【实例 2-4】 试用 MATLAB 命令画出现下列系统函数的零极点分布图、以及对应的时域单位取样响应 $h(n)$ 的波形，并分析系统函数的极点对时域波形的影响。

$$(1) H_1(z) = \frac{z}{z - 0.8}$$

$$(2) H_2(z) = \frac{z}{z + 0.8}$$

$$(3) H_3(z) = \frac{z}{z^2 - 1.2z + 0.72}$$

$$(4) H_4(z) = \frac{z}{z - 1}$$

$$(5) H_5(z) = \frac{z}{z^2 - 1.6z + 1}$$

$$(6) H_6(s) = \frac{z}{z - 1.2}$$

$$(7) H_7(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1.36}$$

解：MATLAB 源程序为

```
>>b1=[1,0];
```

```
>>a1=[1,-0.8];
```

```
>>subplot(121)
```

```
>>zplane(b1,a1)
```

```
>>title('极点在单位圆内的正实数')
```

```

>>subplot(122)
>>impz(b1,a1,30);grid on;
>>figure
>>b2=[1,0];
>>a2=[1,0.8];
>>subplot(121)
>>zplane(b2,a2)
>>title('极点在单位圆内的负实数')
>>subplot(122)
>>impz(b2,a2,30);grid on;
>>figure
>>b3=[1,0];
>>a3=[1,-1.2,0.72];
>>subplot(121)
>>zplane(b3,a3)
>>title('极点在单位圆内的共轭复数')
>>subplot(122)
>>impz(b3,a3,30);grid on;
>>figure
>>b4=[1,0];
>>a4=[1,-1];

>>subplot(121)
>>zplane(b4,a4)
>>title('极点在单位圆上为实数 1')
>>subplot(122)
>>impz(b4,a4);grid on;
>>figure
>>b5=[1,0];
>>a5=[1,-1.6,1];
>>subplot(121)
>>zplane(b5,a5)
>>title('极点在单位圆上的共轭复数')
>>subplot(122)
>>impz(b5,a5,30);grid on;
>>figure

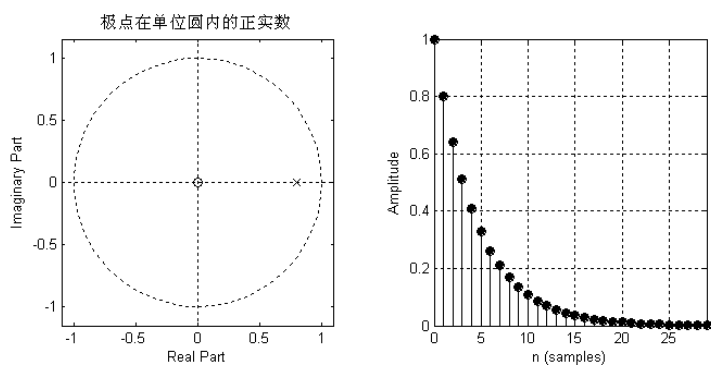
```

```

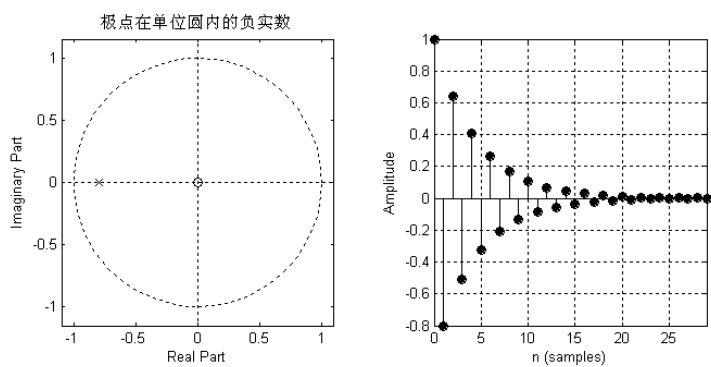
>>b6=[1,0];
>>a6=[1,-1.2];
>>subplot(121)
>>zplane(b6,a6)
>>title('极点在单位圆外的正实数')
>>subplot(122)
>>impz(b6,a6,30);grid on;
>>figure
>>b7=[1,0];
>>a7=[1,-2,1.36];
>>subplot(121)
>>zplane(b7,a7)
>>title('极点在单位圆外的共轭复数')
>>subplot(122)
>>impz(b7,a7,30);grid on;

```

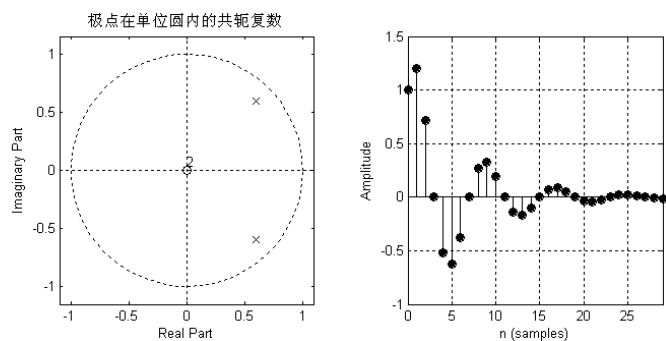
程序运行结果分别如图 2-2 的 (a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f)、(g) 所示。



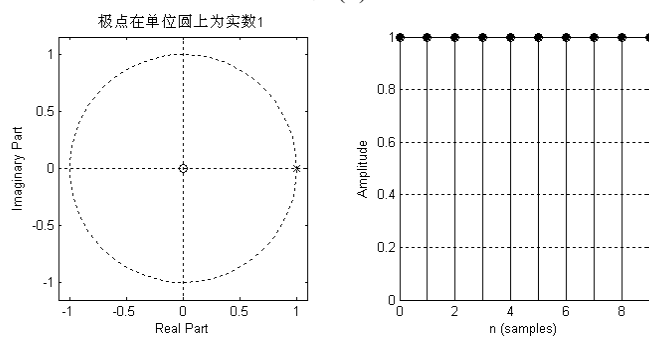
图(a)



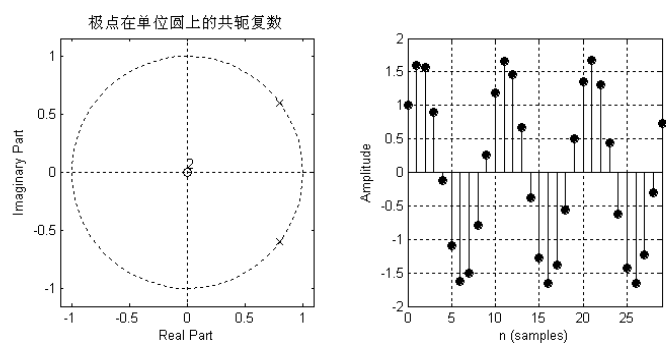
图(b)



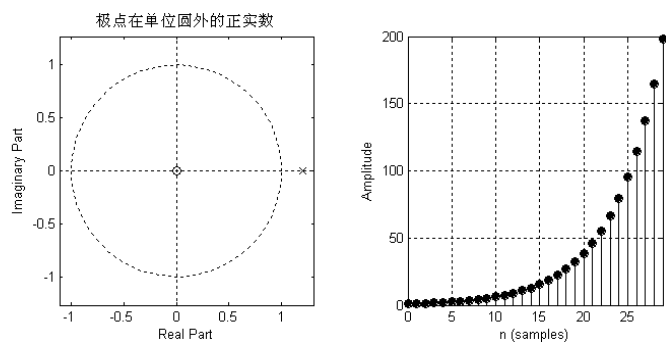
图(c)



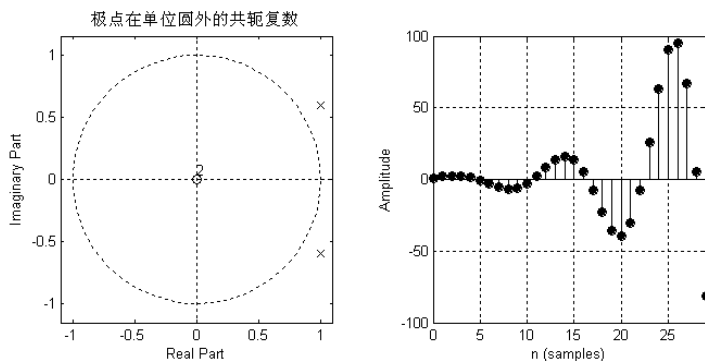
图(d)



图(e)



图(f)



图(g)

图 2-2 系统函数的零极点分布与其时域特性的关系

从图 2-2 可知，当极点位于单位圆内时， $h(n)$ 为衰减序列；当极点位于单位圆上时， $h(n)$ 为等幅序列；当极点位于单位圆外时， $h(n)$ 为增幅序列。若 $h(n)$ 有一阶实数极点，则 $h(n)$ 为指数序列；若 $h(n)$ 有一阶共轭极点，则 $h(n)$ 为指数振荡序列；若 $h(n)$ 的极点位于虚轴左边，则 $h(n)$ 序列按一正一负的规律交替变化。

2.4 离散时间 LTI 系统的频率特性分析

对于因果稳定的离散时间系统，如果激励序列为正弦序列 $x(n) = A \sin(n\omega)u(n)$ ，则系统的稳态响应为 $y_{ss}(n) = A |H(e^{j\omega})| \sin[n\omega + \varphi(\omega)]u(n)$ 。其中， $H(e^{j\omega})$ 通常是复数。离散时间系统的频率响应定义为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (2-5)$$

其中， $|H(e^{j\omega})|$ 称为离散时间系统的幅频特性； $\varphi(\omega)$ 称为离散时间系统的相频特性； $H(e^{j\omega})$ 是以 ω_s ($\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ ，若零 $T = 1$ ， $\omega_s = 2\pi$) 为周期的周期函数。因此，只要分析 $H(e^{j\omega})$ 在 $|\omega| \leq \pi$ 范围内的情况，便可分析出系统的整个频率特性。

Matlab 提供了求离散时间系统频响特性的函数 `freqz`，调用 `freqz` 的格式主要有两种。一种形式为

$$[H, w] = \text{freqz}(B, A, N)$$

其中， B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数向量； N 为正整数，默

认值为 512；返回值 w 包含 $[0, \pi]$ 范围内的 N 个频率等分点；返回值 H 则是离散时间系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在 $0 \sim \pi$ 范围内 N 个频率处的值。另一种形式为

$$[H,w]=\text{freqz}(B,A,N,'whole')$$

与第一种方式不同之处在于角频率的范围由 $[0, \pi]$ 扩展到 $[0, 2\pi]$ 。

【实例 2-5】用 Matlab 命令绘制系统 $H(z) = \frac{z^2 - 0.96z + 0.9028}{z^2 - 1.56z + 0.8109}$ 的频率响应曲线。

解：利用函数 `freqz` 计算出 $H(e^{j\omega})$ ，然后利用函数 `abs` 和 `angle` 分别求出幅频特性与相频特性，最后利用 `plot` 命令绘出曲线。

MATLAB 源程序为：

```
>>b=[1 -0.96 0.9028];
>>a=[1 -1.56 0.8109];
>>[H,w]=freqz(b,a,400,'whole');
>>Hm=abs(H);
>>Hp=angle(H);
>>subplot(211)
>>plot(w,Hm),grid on
>>xlabel('\omega(rad/s)'),ylabel('Magnitude')
>>title('离散系统幅频特性曲线')
>>subplot(212)
>>plot(w,Hp),grid on
>>xlabel('\omega(rad/s)'),ylabel('Phase')
>>title('离散系统相频特性曲线')
```

程序运行结果如图 2-3 所示。

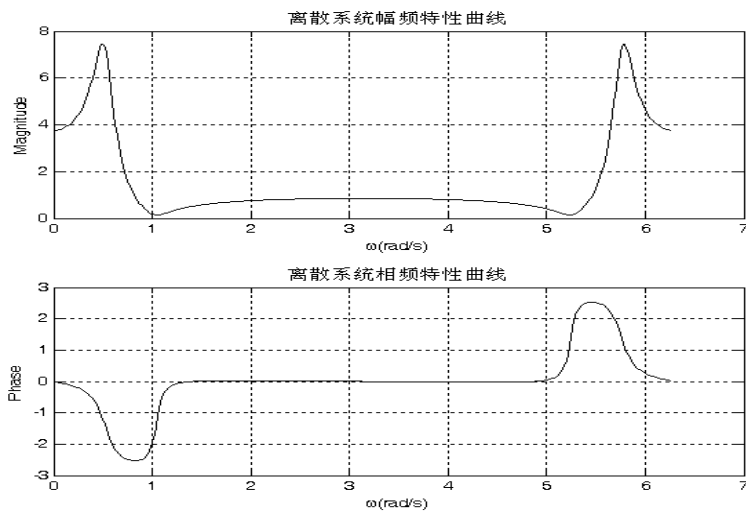


图 2-3 离散系统频响特性曲线

三、 实验内容

1. 试用 MATLAB 的 `residuez` 函数，求出 $X(z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12}$

的部分分式展开和。

结果：

R =

-0.0177

9.4914

-3.0702 + 2.3398i

-3.0702 - 2.3398i

P =

-3.2361

1.2361

0.5000 + 0.8660i

0.5000 - 0.8660i

K =

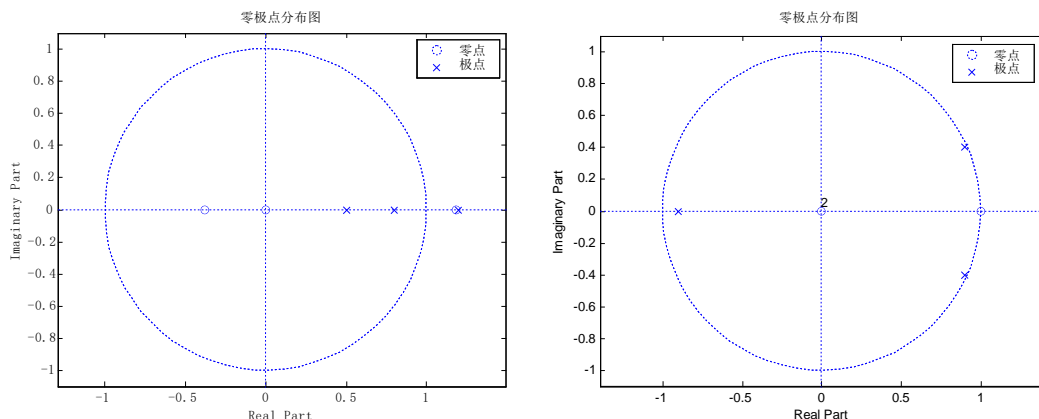
-2.6667

2. 试用 Matlab 画出下列因果系统的系统函数零极点分布图，并判断系统的稳定性。

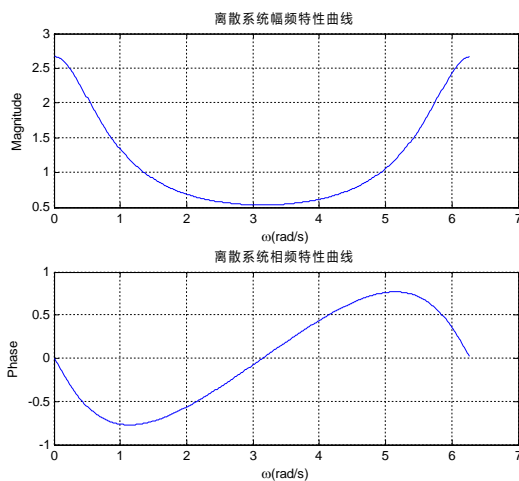
$$(1) H(z) = \frac{2z^2 - 1.6z - 0.9}{z^3 - 2.5z^2 + 1.96z - 0.48}$$

$$(2) H(z) = \frac{z - 1}{z^4 - 0.9z^3 - 0.65z^2 + 0.873z}$$

结果：



3. 试用 Matlab 绘制系统 $H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$ 的频率响应曲线。



4. 编写 Matlab 程序，系统的差分方程为 $y(n) - 0.9y(n-8) = x(n) - x(n-8)$ 。

(1) 画出该系统的零极点分布图，判断系统的稳定性；(2) 画出系统在 $0 \sim 2\pi$ 范围内的幅频特性曲线和相频特性曲线；(3) 分析该系统是什么类型的滤波器。

四、 思考题

1. 编写 Matlab 程序，分别采用系统 $H_1(z) = \frac{z}{z+0.8}$ 、 $H_2(z) = \frac{z}{z-1}$ 、 $H_3(z) = \frac{z}{z+1.2}$ 对音频文件 `motherland.wav` 进行滤波（可采用实验二的 `conv` 函数）。（1）画出滤波前后该音频文件 1~2s 时间段的连续时域波形图，要求横坐标的单位为秒；（2）说明滤波后信号幅度变化的原因。

2. 已知系统函数 $H(z) = \frac{z^2-2z+2}{2z^2-2z+1}$ ，编写 Matlab 程序实现：（1）画出该系统的零极点分布图，判断系统的稳定性；（2）画出系统在 $0 \sim 2\pi$ 范围内的幅频特性曲线和相频特性曲线；（3）查找资料说明该系统是什么类型的滤波器，在实际应用中有什么功能？