

重庆邮电大学

学生实验实习报告册

学年学期： 2022 -2023 学年 ☐春 ☒秋学期

课程名称： 信号处理实验

学生学院： 通信与信息工程学院

专业班级：

学生学号：

学生姓名：

联系电话：

重庆邮电大学教务处制

课程名称	信号处理实验	课程编号	A2010550
实验地点	YF314	实验时间	2022 年 10 月 28 日
校外指导教师	郑丹玲	校内指导教师	郑丹玲
实验名称	z 变换及离散 LTI 系统的 z 域分析		
评阅人签字		成绩	

一、实验目的

- (1) 学会运用 Matlab 求离散时间信号的有理函数 z 变换的部分分式展开;
- (2) 学会运用 Matlab 分析离散时间系统的系统函数的零极点;
- (3) 学会运用 Matlab 分析系统函数的零极点分布与其时域特性的关系;
- (4) 学会运用 Matlab 进行离散时间系统的频率特性分析。

二、实验原理

1. 有理函数 z 变换的部分分式展开

如果信号的 z 域表示式 $X(z)$ 是有理函数, 设 $X(z)$ 的有理分式表示为

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Matlab 信号处理工具箱提供了一个对 $X(z)$ 进行部分分式展开的函数 `residuez`, 其语句格式为

$$[R, P, K] = \text{residuez}(B, A)$$

其中, B, A 分别表示 $X(z)$ 的分子与分母多项式的系数向量; R 为部分分式的系数向量; P 为极点向量; K 为多项式的系数。若 $X(z)$ 为有理真分式, 则 K 为零。

2. 系统函数的零极点分析

离散时间系统的系统函数定义为系统零状态响应的 z 变换与激励的 z 变换之比, 即

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

如果系统函数 $H(z)$ 的有理函数表示式为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

那么, 在 Matlab 中系统函数的零极点就可通过函数 `roots` 得到, 也可借助函数 `tf2zp` 得到, `tf2zp` 的语句格式为

$$[Z, P, K] = \text{tf2zp}(B, A)$$

其中, B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子与分母多项式的系数向量。它的作用是将 $H(z)$ 的有理分式表示式转换为零极点增益形式, 即

$$H(z) = k \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

若要获得系统函数 $H(z)$ 的零极点分布图，可直接应用 `zplane` 函数，其语句格式为

`zplane(B, A)`

其中， B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数向量。它的作用是在 Z 平面上画出单位圆、零点与极点。

3. 系统函数的零极点分布与其时域特性的关系

与拉氏变换在连续系统中的作用类似，在离散系统中， z 变换建立了时域函数 $h(n)$ 与 z 域函数 $H(z)$ 之间的对应关系。因此， z 变换的函数 $H(z)$ 从形式可以反映 $h(n)$ 的部分内在性质。我们仍旧通过讨论 $H(z)$ 的一阶极点情况，来说明系统函数的零极点分布与系统时域特性的关系。

4. 离散时间 LTI 系统的频率特性分析

对于因果稳定的离散时间系统，如果激励序列为正弦序列 $x(n) = A \sin(n\omega)u(n)$ ，则系统的稳态响应为 $y_{ss}(n) = A |H(e^{j\omega})| \sin[n\omega + \varphi(\omega)]u(n)$ 。其中， $H(e^{j\omega})$ 通常是复数。离散时间系统的频率响应定义为：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中， $|H(e^{j\omega})|$ 称为离散时间系统的幅频特性； $\varphi(\omega)$ 称为离散时间系统的相频特性； $H(e^{j\omega})$ 是以 ω_s 为周期的周期函数。因此，只要分析 $H(e^{j\omega})$ 在 $|\omega| \leq \pi$ 范围内的情况，便可分析出系统的整个频率特性。

Matlab 提供了求离散时间系统频响特性的函数 `freqz`，调用 `freqz` 的格式主要有两种。一种形式为

`[H, w]=freqz(B, A, N)`

认为 `512`；返回值 `w` 包含 $[0, \pi]$ 范围内的 N 个频率等分点；返回值 `H` 则是离散时间系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在 $[0, \pi]$ 范围内 N 个频率处的值。另一种形式为

`[H, w]=freqz(B, A, N, 'whole')`

与第一种方式不同之处在于角频率的范围由 $[0, \pi]$ 扩展到 $[0, 2\pi]$ 。

三、实验程序

```
1.  clc;
2.  clear;
3.  %%
4.  %第一问
5.  A1 = [2 16 44 56 32];
6.  B1 = [3 3 -15 18 -12];
7.  [R1 P1 K1] = residuez(A1,B1);
8.
9.  %%
```

```

10. %第二问
11. A2 = [2 -1.6 -0.9];
12. B2 = [1 -2.5 1.96 -0.48];
13. A3 = [1 -1];
14. B3 = [1 -0.9 -0.65 0.873];
15. [R2 P2 K2] = tf2zp(A2,B2)
16. [R3 P3 K3] = tf2zp(A3,B3)
17. figure(1);
18. zplane(A2,B2);
19. figure(2);
20. zplane(A3,B3);
21.
22. %%
23. %第三问
24. A4 = [1];
25. B4 = [1 -3/4 1/8];
26. [H w] = freqz(A4,B4,400,'whole');
27. Hm = abs(H);
28. Hp = angle(H);
29. figure(3);
30. subplot(2,1,1);
31. plot(w,Hm);
32. grid on;
33. xlabel("w(rad/s)");
34. ylabel("Magnitude");
35. title("离散系统的幅频特性曲线");
36. subplot(2,1,2);
37. plot(w,Hp);
38. grid on;
39. xlabel("w(rad/s)");
40. ylabel("Phase");
41. title("离散系统的相频特性曲线");
42.
43. %% 思考题 1
44. A5 = [1 0 0 0 0 0 0 -1];
45. B5 = [1 0 0 0 0 0 0 -0.9];
46. [R5 P5 K5] = tf2zp(A5,B5);
47. figure(4);
48. zplane(A5,B5);
49. [H1 w1] = freqz(A5,B5,400,'whole');
50. Hm1 = abs(H1);
51. Hp1 = angle(H1);
52. figure(5);
53. subplot(2,1,1);
54. plot(w1,Hm1);
55. grid on;

```

```

56. xlabel("ω(rad/s)");
57. ylabel("Magnitude");
58. title("离散系统的幅频特性曲线");
59. subplot(2,1,2);
60. plot(w1,Hp1);
61. grid on;
62. xlabel("ω(rad/s)");
63. ylabel("Phase");
64. title("离散系统的相频特性曲线");
65.
66. %% 思考题 2
67. [xn,fs] = audioread('F:\学习\数字信号处理实验\实验 3\motherland.wav');
68.
69. A6 = [1 0];
70. B6 = [1 0.8];
71. [h1,t1] = impz(A6,B6);
72. [y1,zf1] = filter(A6,B6,xn);
73.
74. A7 = [1 0];
75. B7 = [1 -1];
76. [h2,t2] = impz(A7,B7);
77. [y2,zf2] = filter(A7,B7,xn);
78.
79. A8 = [1 0];
80. B8 = [1 1.2];
81. [h3,t3] = impz(A8,B8);
82. [y3,zf3] = filter(A8,B8,xn);
83.
84. figure(6);
85. subplot(2,1,1);
86. stem(t1,h1);
87. xlabel("t");
88. ylabel("h1(t)");
89. title("原信号");
90. subplot(2,1,2);
91. plot([0:1/8000:10.3999],y1);
92. xlabel("t");
93. ylabel("f1(t)");
94. title("滤波后信号");
95.
96. figure(7);
97. subplot(2,1,1);
98. stem(t2,h2);
99. xlabel("t");
100. ylabel("h2(t)");
101. title("原信号");

```

```
102. subplot(2,1,2);
103. plot([0:1/8000:10.3999],y2);
104. xlabel("t");
105. ylabel("f2(t)");
106. title("滤波后信号");
107.
108. figure(8);
109. subplot(2,1,1);
110. stem(t3,h3);
111. xlabel("t");
112. ylabel("h3(t)");
113. title("原信号");
114. subplot(2,1,2);
115. plot([0:1/8000:10.3999],y3);
116. xlabel("t");
117. ylabel("f3(t)");
118. title("滤波后信号");
119.
120. %% 思考题 2
121. A = [1 -2 2];
122. B = [2 -2 1];
123. [R P K] = residuez(A,B);
124. figure(9);
125. subplot(3,1,1);
126. zplane(A,B);
127. [H w] = freqz(A,B,400,'whole');
128. Hm = abs(H);
129. Hp = angle(H);
130. subplot(3,1,2);
131. plot(w,Hm);
132. grid on;
133. xlabel("w(rad/s)");
134. ylabel("Magnitude");
135. title("幅频特性曲线");
136. subplot(3,1,3);
137. plot(w,Hp);
138. grid on;
139. xlabel("w(rad/s)");
140. ylabel("Phase");
141. title("相频特性曲线");
```

四、仿真分析

1. 试用 MATLAB 的 `residuez` 函数, 求出 $X(z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12}$ 的部分分式展开和。

```
R1 =  
    -0.0177 + 0.0000i  
     9.4914 + 0.0000i  
    -3.0702 + 2.3398i  
    -3.0702 - 2.3398i  
P1 =  
    -3.2361 + 0.0000i  
     1.2361 + 0.0000i  
     0.5000 + 0.8660i  
     0.5000 - 0.8660i  
K1 =  
    -2.6667
```

图 1 部分分式展开和系数仿真图

由图 1 可以发现部分分式的系数分别为-0.0177、9.4914、-3.0702+2.3398i、-3.0702-2.3398i, 部分分式的极点分别为-3.2361、1.2361、0.5+0.866i、0.5-0.866i、多项式系数为-2.6667。

所以, 最终 $X(z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12}$ 的部分分式展开和为:

$$X(z) = \frac{-0.0177z}{z + 3.2361} + \frac{9.4914z}{z - 1.2361} - \frac{(3.0702 - 2.3398i)z}{z - (0.5 + 0.866i)} - \frac{(3.0702 + 2.3398i)z}{z - (0.5 - 0.866i)} - 2.6667$$

2. 试用 Matlab 画出下列因果系统的系统函数零极点分布图, 并判断系统的稳定性。

$$(1) X(z) = \frac{2z^2 - 1.6z - 0.9}{z^3 - 2.5z^2 + 1.96z - 0.48}$$

$$(2) X(z) = \frac{z - 1}{z^4 - 0.9z^3 - 0.65z^2 + 0.873z}$$

```
R2 =  
     1.1810  
    -0.3810  
P2 =  
     1.2000  
     0.8000  
     0.5000  
K2 =  
     2  
R3 =  
     1  
P3 =  
    -0.9000 + 0.0000i  
     0.9000 + 0.4000i  
     0.9000 - 0.4000i  
K3 =  
     1
```

图 2 系统零极点结果仿真图

由图 2 可以得到系统 (1) 的零点为 1.181、-0.381，系统 (1) 极点分别为 1.2、0.8、0.5，对应的系数为 2；系统 (2) 的零点为 1，系统 (1) 极点分别为 -0.9、0.9+0.4i、0.9-0.4i，对应的系数为 1。即：

$$X_1(z) = 2 \frac{(z - 1.181)(z + 0.381)}{(z - 1.2)(z - 0.8)(z - 0.5)}$$

$$X_1(z) = \frac{z - 1}{(z + 0.9)(z - 0.9 - 0.4i)(z - 0.9 + 0.4i)}$$

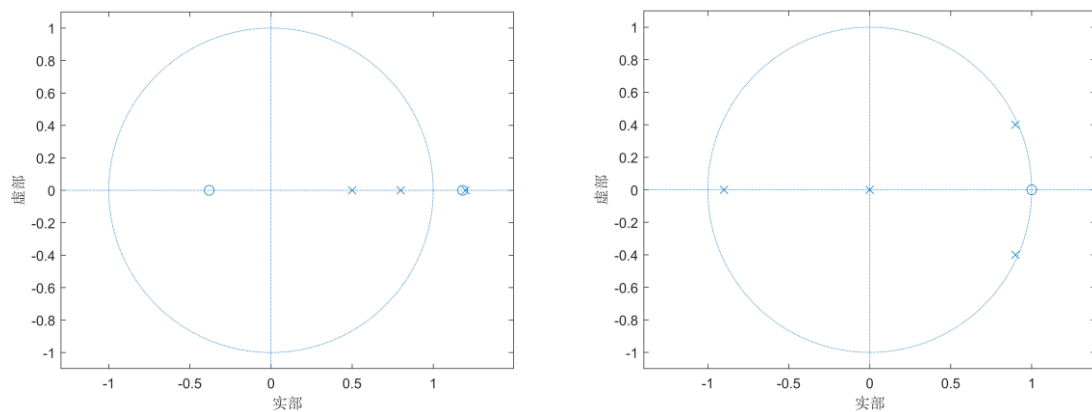


图 3 系统零极点仿真图

由图 3 的零极点仿真图可以清晰的得到：系统 (1) 的零点为 1.181、-0.381，系统 (1) 极点分别为 1.2、0.8、0.5；系统 (2) 的零点为 1，系统 (1) 极点分别为 -0.9、0.9+0.4i、0.9-0.4i。与上述计算结果保持一致。

因为系统 (1) 存在极点在单位圆外，所以该系统不稳定，而系统 (2) 的极点均在单位圆内。所以系统 (2) 是稳定的。

3. 试用 Matlab 绘制系统 $H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$ 的频率响应曲线。

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{2j\omega}}{e^{2j\omega} - \frac{3}{4}e^{j\omega} + \frac{1}{8}}$$

由上式可以得到系统函数的频率特性，分别将其拆分为幅频特性与相频特性计算量相对复杂，所以本文采用 Matlab 进行辅助计算，与此同时我们利用零级图可以进行定性分析，分析如下：

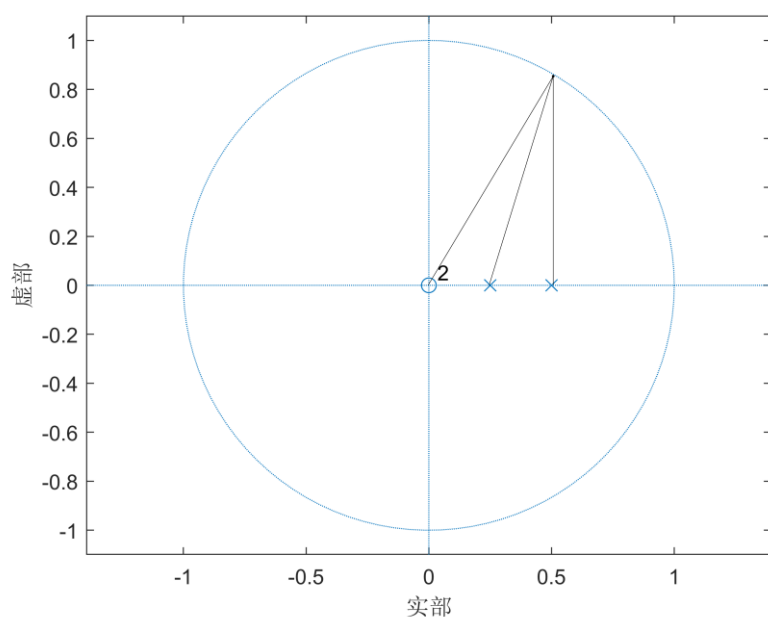


图 4 系统零极点辅助分析图

$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$ 的零级图如下图所示，通过矢量在单位圆上的旋转，定性得到该系统的幅

频特性与相频特性，发现与图 5 仿真结果相同，验证了结果的正确性。

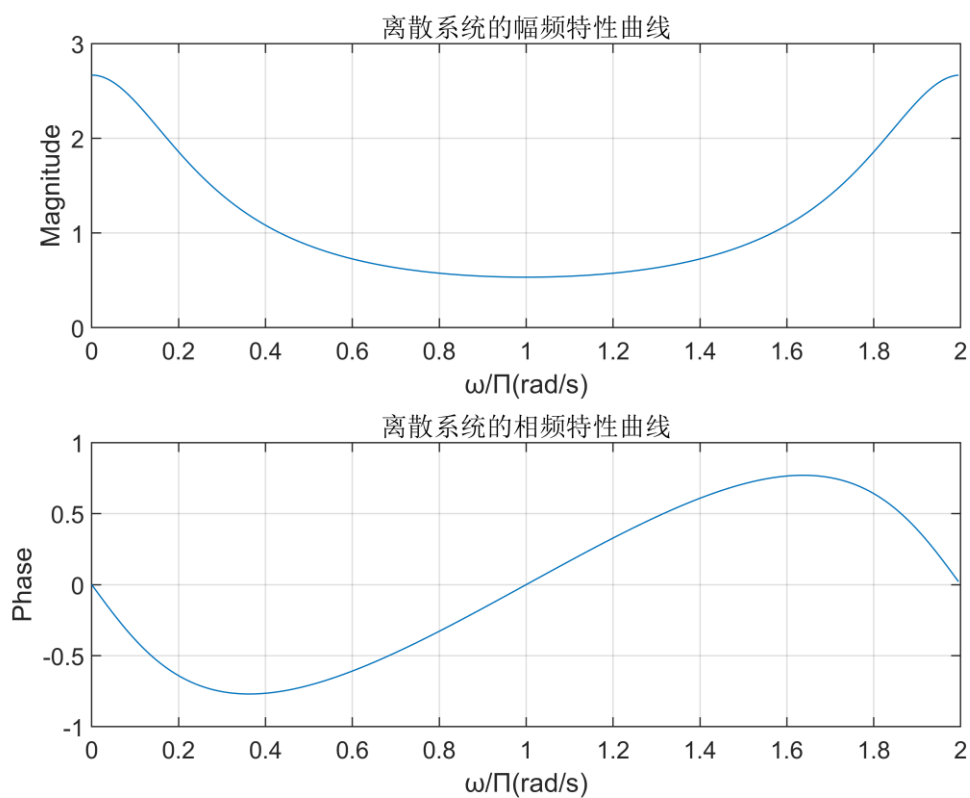


图 5 系统频率特性分析图

4. 编写 Matlab 程序，系统的差分方程为 $y(n) - 0.9y(n-8) = x(n) - x(n-8)$

- (1) 画出该系统的零极点分布图，判断系统的稳定性；
- (2) 画出系统在 $[0, 2\pi]$ 范围内的幅频特性曲线和相频特性曲线；
- (3) 分析该系统是什么类型的滤波器。

由题中系统，可以得到的对应的系统函数 $H(z)$ ，即：

$$H(z) = \frac{z^8 - 1}{z^8 - 0.9}$$

上述系统函数满足梳状滤波器的形式，所以该系统为梳状滤波器。此时极点均匀分布在 0.9 的圆上，零点均匀分布在单位圆上，均为 8 个。而 $H(e^{j\omega})$ 是以 $2\pi/8$ 为周期的，即在 $[0, 2\pi]$ 上有 8 个相同的频率特性曲线。

下面进行仿真验证：

- (1) 零极点分布图

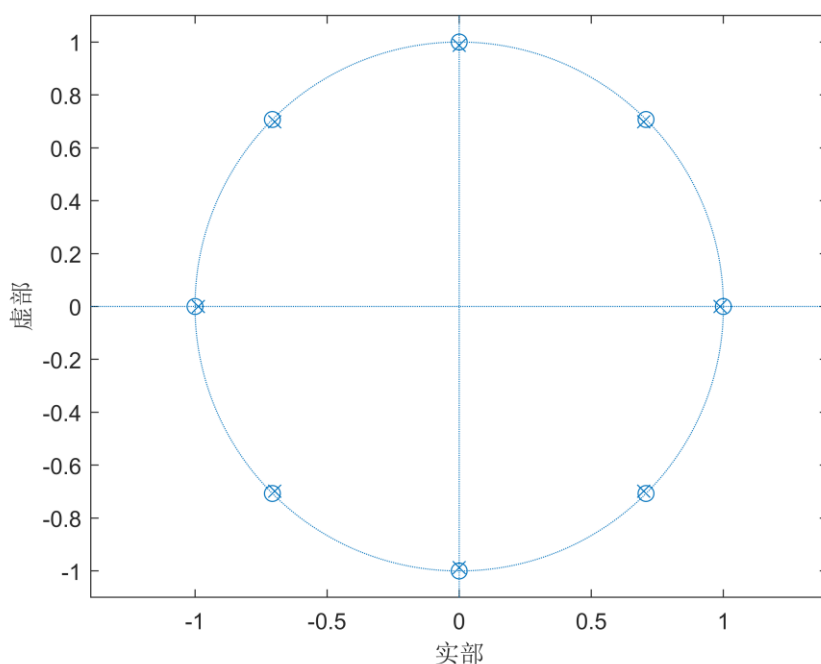


图 6 梳状滤波器系统零级仿真图

由图 6 仿真结果可以验证上述结论：此时极点均匀分布在 0.9 的圆上，零点均匀分布在单位圆上，均为 8 个。

- (2) 幅频特性曲线和相频特性曲线图

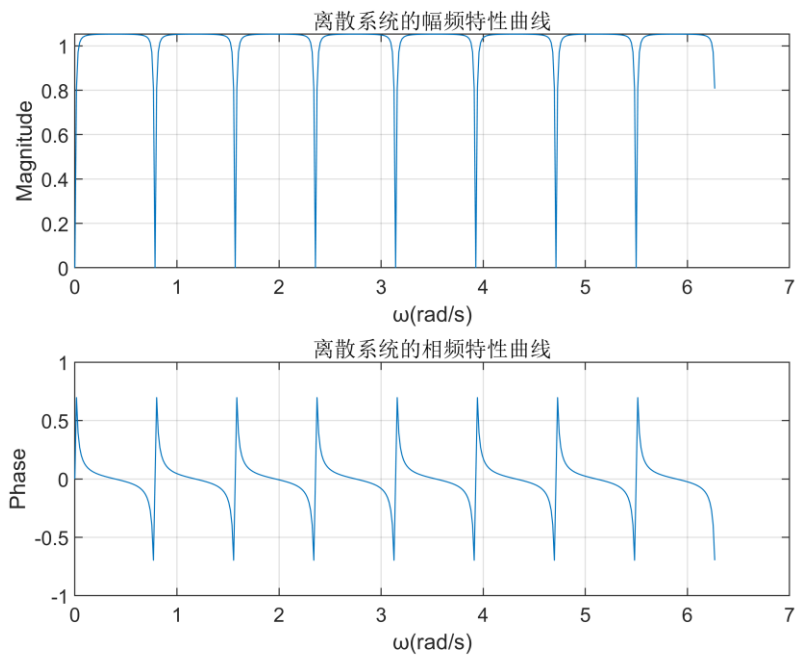


图 7 梳状滤波器系统频率特性仿真图

由图 7 仿真结果可以验证上述结论： $H(e^{j\omega})$ 是以 $2\pi/8$ 为周期的，即在 上有 8 个相同的频率特性曲线。

(3) 从上述仿真结果与理论分析结果可以得出该系统为**梳状滤波器**。

五、思考题

1. 编写 Matlab 程序，分别采用系统 $H_1(z) = \frac{z}{z+0.8}$ 、 $H_2(z) = \frac{z}{z-1}$ 、 $H_3(z) = \frac{z}{z+1.2}$ 对音频文件 motherland.wav 进行滤波（可采用实验二的 conv 函数）。

(1) 画出滤波前后该音频文件 1~2s 时间段的连续时域波形图，要求横坐标的单位为秒；

(2) 说明滤波后信号幅度变化的原因。

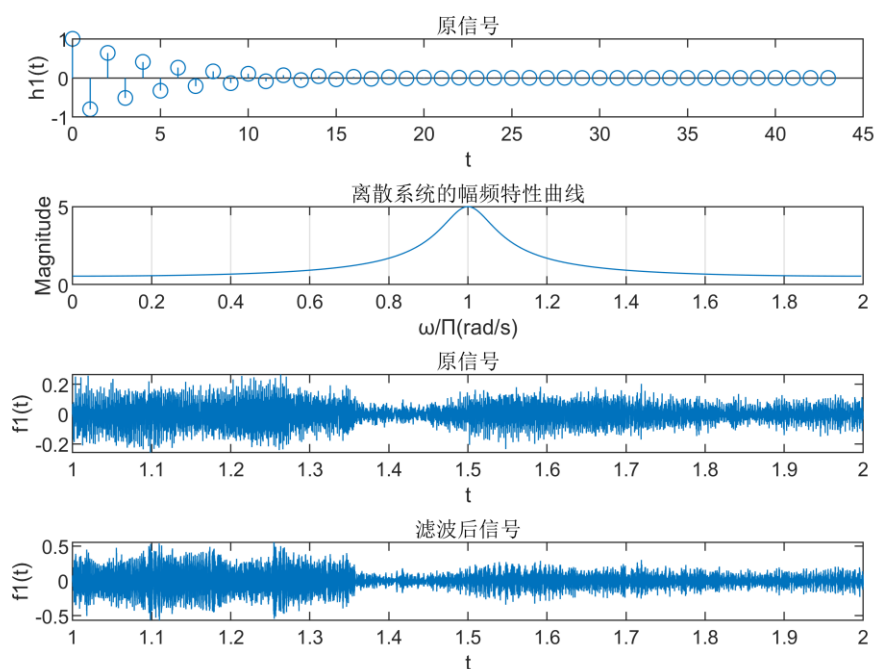


图 8 系统 1 滤波仿真图

由图 8 仿真结果可以得到： $H_2(z)$ 为稳定系统且为高通滤波器，利用高通滤波器对原音频信号进行滤波，滤掉部分低频部分，最终的得到其 1-2s 的音频信号如上图所示，从听觉上可以感受到该音频在原有音频的基础上加入了掺杂了部分噪声，所以，也可以得到该音频受高频分量主导影响，低频分量影响较小。

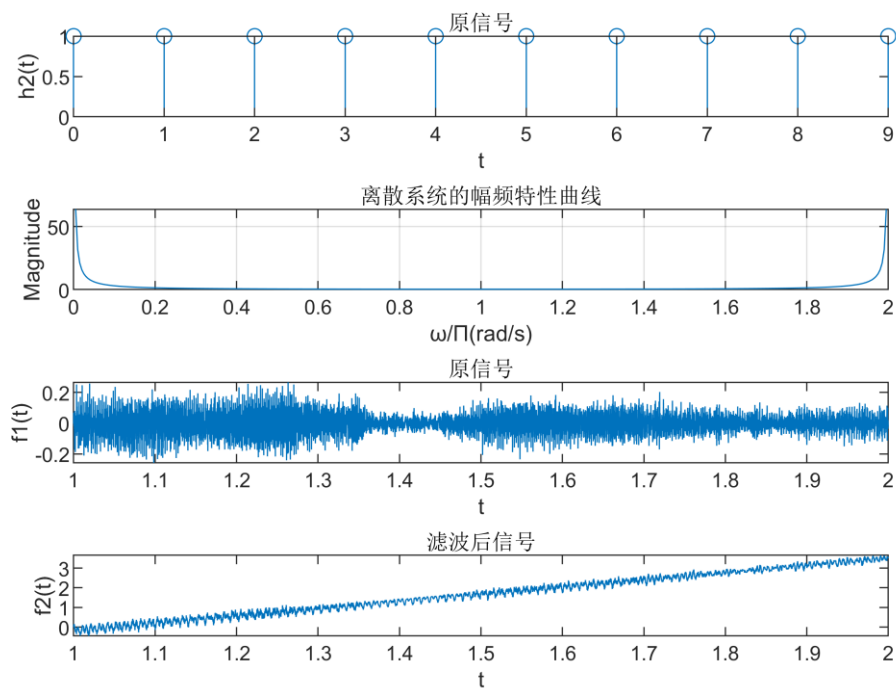


图 9 系统 2 滤波仿真图

由图 9 仿真结果可以得到： $H_2(z)$ 为临界稳定系统且为低通滤波器，利用低通滤波器对原音频信号进行滤波，滤掉部分高频部分，最终的得到其 1-2s 的音频信号如上图所示，从听觉上可以感受到该音频突然截止，所以，也可以得到该音频受高频分量主导影响，低频分量影响较小。

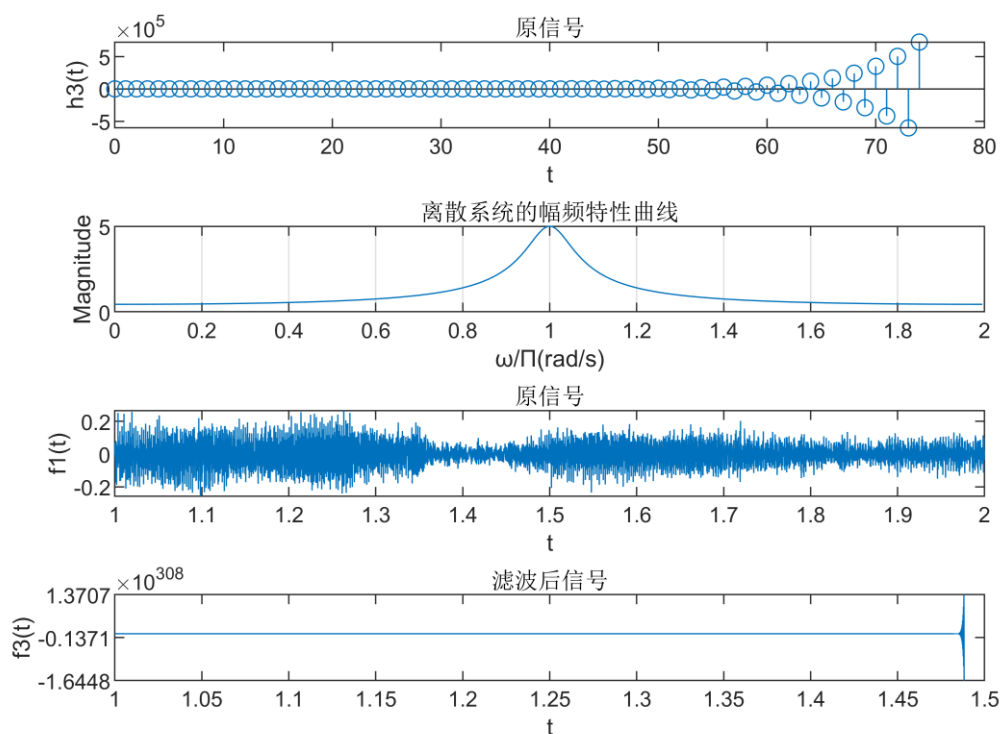


图 10 系统 3 滤波仿真图

由图 10 仿真结果可以得到： $H_3(z)$ 不稳定，理论上滤波最终的幅度在高频部分非常大，使原有信号产生很大的幅频特性，使原有信号产生畸变，最终的得到其 1-2s 的音频信号如上图所示，从听觉上可以感受到十分刺耳，符合上述理论分析与仿真结果。

2. 已知系统函数 $H(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{2z^2 - 2z + 1}$ ，编写 Matlab 程序实现：

- (1) 画出该系统的零极点分布图，判断系统的稳定性；
- (2) 画出系统在 $[0, 2\pi]$ 范围内的幅频特性曲线和相频特性曲线；
- (3) 查找资料说明该系统是什么类型的滤波器，在实际应用中有什么功能

针对系统 $H(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{2z^2 - 2z + 1}$ ，可以发现他符合全通滤波器的形式即 $H(z) = \frac{X(z^{-1})}{X(z)}$ ，此时对其求模可以发现其模值始终为 1，即为全通滤波器。具体仿真结果如下所示：

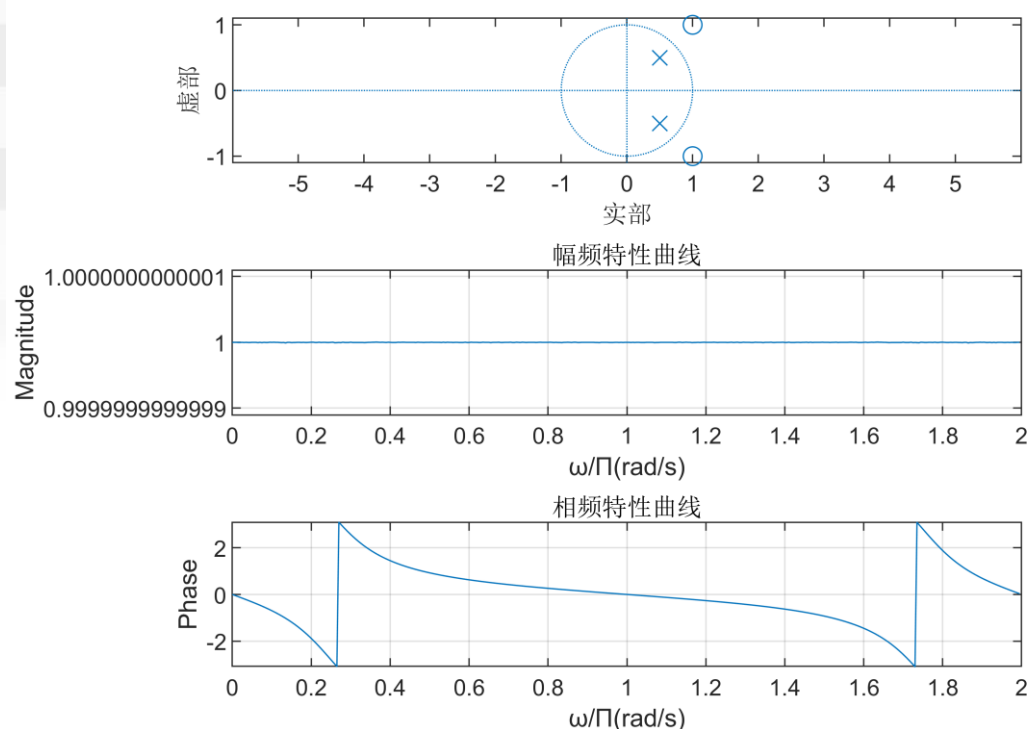


图 11 全通滤波器结果仿真图

(1) 该系统的零极点分布图中可以得出, 此时零极点满足**共轭倒易**的关系, 两两成对, 且此时的极点均在单位圆内, 即此时的全通滤波器为一个**稳定系统**。

(2) 该系统的幅频特性曲线中可以发现幅频始终保持在 1 的附近几乎没有变化, 相频特性在如上图所示会随频率发生变化符合**全通滤波器**的性质。

(3) 从上述仿真结果以及理论分析可以得出该系统为一个**全通滤波器**。

全通滤波器虽然并不改变输入信号的频率特性, 但它会改变输入信号的相位。利用这个特性, 全通滤波器可以用做延时器、延迟均衡等。实际上, 常规的滤波器 (包括低通滤波器等) 也能改变输入信号的相位, 但幅频特性和相频特性很难兼顾, 使两者同时满足要求。全通滤波器和其他滤波器组合起来使用, 能够很方便的解决这个问题。

在通讯系统中, 尤其是数字通讯领域, 延迟均衡是非常重要的。不夸张的说, 没有延迟均衡器, 就没有现在广泛使用的宽带数字网络。延迟均衡是全通滤波器最主要的用途, 全世界所有生产出来的全通滤波器, 估计有超过 90% 的全通滤波器被用于相位校正, 因此全通滤波器也被 (不准确的) 被称为延迟均衡器。