$\min \frac{1}{2}\|AX-y\|^2+\lambda\|X\|_1$

$X\in R^n \quad A\in R^{m\times n} \quad y\in R^m \quad \lambda\in R$

当$\lambda\geq\lambda_{max}$时 最优解必然为0，计算λ_{max}

证明：

设 $f(x)=\frac{1}{2}\|AX-y\|^2+\lambda\|X\|_1$

求次梯度集得 $\partial f(x)=A^T(AX-y)+\lambda\partial\|X\|_1$

若有，$0\in\partial f(x)$，即 $0\in A^TAX-A^Ty+\lambda\partial\|X\|_1$ ①

对①=0 求解 可知：

可以看出

当 $\lambda\geq|-A^Ty|$中最大元素 时

$X=0$是①的解

下面证明 $X\neq0$时不是①的解

1° 若$AX=0$ 且 $X\neq0$

则有 $X^TA^TAX=(AX)^T(AX)=0$

① 两边左乘 X^T有

$0 \in (X^T A^T)(AX) - X^T A^T y + \lambda X^T \partial \|X\|_1$

对于 $X^T \partial \|X\|_1$ 有

对 X 中不等于0的元素 X_i，$\partial \|X\|_1$ 中的第i行元素与 X 的每一行同号

故 $X^T \partial \|X\|_1 > 0$

对 $0 \in X^T A^T A X - X^T A^T y + X^T \partial \|X\|_1$ 中

其中 $X^T A^T A X = X^T A^T y = 0$

故 $X^T \partial \|X\|_1 = 0$

与 $X \neq 0$ 矛盾

2° 若 $AX \neq 0$

则 $X^T A^T A X$ 必大于0.

而 $-X^T A^T y + \lambda X^T \partial \|X\|_1 \geq 0 \quad (\lambda \geq |-A^T y|)$

故此时 $0 \notin X^T A^T A X - X^T A^T y + \lambda X^T \partial \|X\|_1$

即 $X \neq 0$ 时 $0 \notin X^T A^T A X - X^T A^T y + \lambda X^T \partial \|X\|_1$

综上所述

$X=0$ 时即 λ_{max} 等于 $|-A^T y|$ 的最大元素时

$\frac{1}{2}\|AX-y\|^2+\lambda\|X\|_1=0$ 的最优解必为0

$X\neq 0$ 时即 λ_{max} 小于 $|-A^T y|$ 的最大元素时

$\frac{1}{2}\|AX-y\|^2+\lambda\|X\|_1=0$ 的最优解可能不为0