19335182 唐晨轩

2.16

有 $\forall (x_1,y_1)(x_2,y_2)\in S$

$\exists y_1', y_1''\in R^n$ 有 $y_1'+y_1''=y_1$，$(x_1, y_1'+y_1'')\in S$

$\exists y_2', y_2''\in R^n$ 有 $y_2'+y_2''=y_2$，$(x_2, y_2'+y_2'')\in S$

由部分和的定义可知：

$(x_1, y_1')(x_2, y_2')\in S_1 \quad (x_1, y_1'')(x_2, y_2'')\in S_2$

由凸集定义可知：

对 $0\le\theta\le1$，有：

$(\theta x_1+(1-\theta)x_2, \theta y_1'+(1-\theta)y_2')\in S_1$

$(\theta x_1+(1-\theta)x_2, \theta y_1''+(1-\theta)y_2'')\in S_2$

相加，凸集与凸集相加仍为凸集

$(\theta x_1+(1-\theta)x_2, (\theta y_1'+(1-\theta)y_2')+(\theta y_1''+(1-\theta)y_2''))$ 为凸集

$=\theta(x_1, y_1'+y_1'')+(1-\theta)(x_2, y_2'+y_2'')$ 为凸集

上述表达式在 S 内，故 S 为凸集！

3.3：证明：

有 $g(f(x))=x$，则有对 x 求导

$g'(f(x))f'(x)=1$；

$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$；对 $f(x)$ 求导

$g''(f(x))=\frac{-f''(x)}{f'(x)^2}$；

$\because$ $f(x)$ 为凸函数

$\therefore$ $f''(x)\geqslant 0$，

$\therefore$ $g''(f(x))\leq 0$

$\therefore$ $g(x)$ 为凹函数