

# 量子物理学特論 2018/10/24

g1840624 鷺津 優維

## 1 問い

$$\begin{cases} |\phi_n\rangle = \cos\theta |-, n+1\rangle - \sin\theta |+, n\rangle \\ |\psi_n\rangle = \sin\theta |-, n+1\rangle + \cos\theta |+, n\rangle \end{cases}$$

のとき、以下の式が成り立つことを示す。

$$\sum_n (|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n|) + |-, 0\rangle\langle-, 0| = 1$$

## 2 解

シグマの和の中身を計算すると、

$$\begin{aligned} |\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n| &= (\cos\theta |-, n+1\rangle - \sin\theta |+, n\rangle)(\cos\theta \langle-, n+1| - \sin\theta \langle+, n|) \\ &\quad + (\sin\theta |-, n+1\rangle + \cos\theta |+, n\rangle)(\sin\theta \langle-, n+1| + \cos\theta \langle+, n|) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta) |-, n+1\rangle\langle-, n+1| \\ &\quad + (\cos\theta \sin\theta - \cos\theta \sin\theta) (|-, n+1\rangle\langle+, n| + |+, n\rangle\langle-, n+1|) \\ &\quad + (\cos^2\theta + \sin^2\theta) |+, n\rangle\langle+, n| \\ &= |-, n+1\rangle\langle-, n+1| + |+, n\rangle\langle+, n| \end{aligned}$$

これらの和をとると、

$$\sum_n (|-, n+1\rangle\langle-, n+1| + |+, n\rangle\langle+, n|) = \sum_n |-, n+1\rangle\langle-, n+1| + \sum_n |+, n\rangle\langle+, n|$$

第2項は bracket の中身が  $n=0$  からの和になっているが、第1項では bracket の中身が  $n=1$  からの和になっている。揃えるために  $|-, 0\rangle\langle-, 0|$  を加えると、

$$\sum_n (|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n|) + |-, 0\rangle\langle-, 0|$$

ここで、

$$\sum_n |-\rangle\langle-| + |+\rangle\langle+| = 1$$

なので、

$$\sum_n (|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n|) + |-, 0\rangle\langle-, 0| = 1$$

となる。