量子物理学特論 2018/10/24

g1840624 鷲津 優維

1　問い

$$\begin{cases} |\phi_n\rangle = \cos\theta\,|-,n+1\rangle - \sin\theta\,|+,n\rangle \\ |\psi_n\rangle = \sin\theta\,|-,n+1\rangle + \cos\theta\,|+,n\rangle \end{cases}$$

のとき、以下の式が成り立つことを示す。から

$$\sum n(|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n|) + |-,0\rangle\langle -,0| = 1$$

2　解

シグマの和の中身を計算すると、

$$\begin{aligned} |\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n| &= (\cos\theta\,|-,n+1\rangle - \sin\theta\,|+,n\rangle)(\cos\theta\,\langle -,n+1| - \sin\theta\,\langle +,n|) \\ &\quad + (\sin\theta\,|-,n+1\rangle + \cos\theta\,|+,n\rangle)(\sin\theta\,\langle -,n+1| + \cos\theta\,\langle +,n|) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,|-,n+1\rangle\langle -,n+1| \\ &\quad + (\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta)(|-,n+1\rangle\langle +,n| + |+,n\rangle\langle -,n+1|) \\ &\quad + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,|+,n\rangle\langle +,n| \\ &= |-,n+1\rangle\langle -,n+1| + |+,n\rangle\langle +,n| \end{aligned}$$

これの和をとると、

$$\sum_n (|-,n+1\rangle\langle -,n+1| + |+,n\rangle\langle +,n|) = \sum_n |-,n+1\rangle\langle -,n+1| + \sum_n |+,n\rangle\langle +,n|$$

第 2 項は braket の中身が n=0 からの和になっているが、第 1 項では braket の中身が n=1 からの和になっている。揃えるために $|-,0\rangle\langle -,0|$ を加えると、

$$\sum_n (|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n|) + |-,0\rangle\langle -,0|$$

ここで、

$$\sum_n |-\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +| = 1$$

なので、

$$\sum_n (|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\psi_n\rangle\langle\psi_n|) + |-,0\rangle\langle -,0| = 1$$

となる。