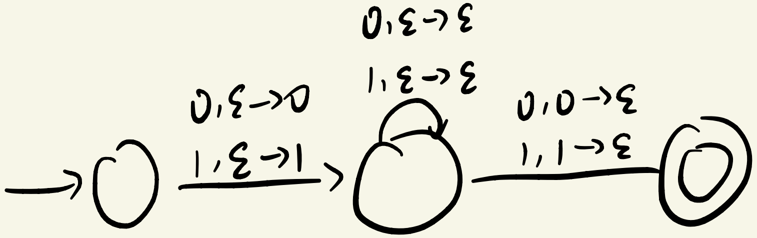
2.4

b. $S \to 0X0$
$\mid 1X1$

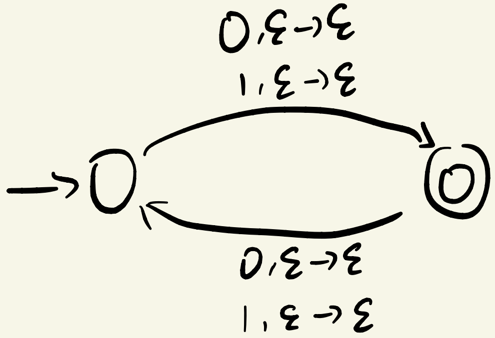
$X \to 0X$
$\mid 1X$
$\mid \varepsilon$



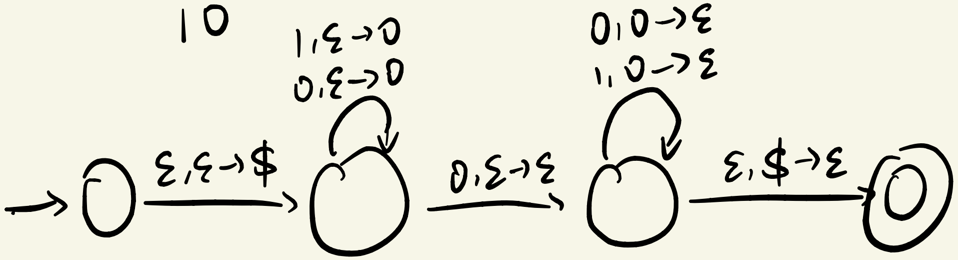
c. $S \to 0X$
$\mid 1X$

$X \to 0Y$
$\mid 1Y$
$\mid \varepsilon$

$Y \to 0X$
$\mid 1X$



d. $S \to 0S0$
$\mid 1S1$
$\mid 0S1$
$\mid 1S0$
$\mid 0$



2.6

a. $S \to TaT$

$T \to TT$
$\mid aTb$
$\mid bTa$
$\mid a$
$\mid \varepsilon$

d. $S \to uvw$

$u \to A$
$\mid s$

$A \to aA$
$\mid bA$
$\mid \#A$
$\mid \#$

$v \to ava$
$\mid bvb$
$\mid \#B$
$\mid \#$

$B \to aB$
$\mid bB$
$\mid \#B$
$\mid \#$

$w \to B$
$\mid \varepsilon$

2.14 解：① 添加起始变元 S_0

$$S_0 \to A \qquad B \to 00 \mid \varepsilon$$

$$A \to BAB \mid B \mid \varepsilon$$

② 去掉 $B \to \varepsilon$

$$S_0 \to A \qquad B \to 00$$

$$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid \varepsilon$$

③ 去掉 $A \to \varepsilon$

$$S_0 \to A \qquad B \to 00$$

$$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid B \mid BB$$

④ 去掉 $A \to B$

$$S_0 \to A \qquad B \to 00$$

$$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid 00$$

⑤ 去掉 $S_0 \to A$

$$S_0 \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid 00$$

$$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid 00$$

$$B \to 00$$

⑥ 添加变元

$$S_0 \to VB \mid AB \mid BA \mid BB \mid UU$$

$$A \to VB \mid AB \mid BA \mid BB \mid UU$$

$$B \to 00$$

$$V \to BA$$

$$U \to 0$$

2.18 b. $A \cap a^*b^*c^* = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$

若A上下文无关，则由命题"C上下文无关，R正则，则 $C \cap R$ 上下文无关"可得 $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ 是上下文无关的。

但 $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ 不是上下文无关的，故A也不是。

2.20 证明：设M是B的DFA，P是A的PDA，我们通过修改P来构造A/B的PDA

原来的P只用自己跑，修改后，将在w被读取后启动M。

随后，对一个串x，只有M和P同时能接收时，机器才会接收。

2.26 证明：

当$n=2$时，对于Chomsky范式CFG，长度为2的字符串必由3步派生

假设当$2 \le n \le k$时命题为真，则当$n=k+1$，对长度为$k+1$的字符串$S=S_1S_2\cdots S_{k+1}$

$\exists$ S_0的一个直接派生$S_0 \Rightarrow AB$，使得A产生子串$S_1S_2\cdots S_p$，B产生子串$S_{p+1}S_{p+2}\cdots S_{k+1}$，其中$1 \le p \le k+1$

则A产生子串需要$2p-1$步派生，B需要$2(k+1-p)-1$步派生。

故S_0产生S共需要$2k+1$步派生，成立。

$\Rightarrow$ 由G产生长度为$n \ge 2$的字符串需要$2n-1$步派生。

2.30 a. 令 $s=0^p1^p0^p1^p=uvxyz$

① vxy中不包含s的中点

uv^0xy^0z 将会使s中前后的0或1数量不一致.

② vxy包含s中点, 则 vxy只会影响s中间的1与0,

uv^0xy^0z 一定会使中间的0与1少于前后的.

故上下文无关

b. 令 $s=0^p\#0^{2p}\#0^{3p}=uvxyz$

① v或y中包含#

uv^0xy^0z 会使#消失, 不成立

② v和y中都无#

$\because |vxy|\le p$

$\therefore$ v与y最多只能控制 0^p、0^{2p}、0^{3p} 三组0中的两组

此时一定 $\exists i\ge 0$, 使得 $uv^ixy^iz\notin\{0^n\#0^{2n}\#0^{3n}\mid n\ge 0\}$

故上下文无关

c. 令 $s=a^pb^p\#a^{2p}b^{2p}=uvxyz$

① vxy中不含#

则无论vxy在#的前后, uv^0xy^0z 都不属于该语言

② vxy中含#

$\because |vxy|\le p$

$\therefore$ vxy只能控制 b^p 和 a^{2p}

$\Rightarrow uv^0xy^0z$ 一定不属于该语言

故上下文无关

d. 令 $s=a^pb^p\#a^pb^p$

① vxy中不含#

则无论vxy在#的前后, uv^0xy^0z 都不能保证 $t_1=t_2$

② vxy中含#

$\because |vxy|\le p$

$\therefore$ vxy只能控制紧邻#的 b^p 和 a^p

$\Rightarrow uv^0xy^0z$ 不能保证 $t_1=t_2$

故上下文无关

2.40 设L是无限前缀封闭的上下文无关语言

令s为L语言中一个长于p的串，则 $s=uvxyz$

∵ L对前缀封闭

∴ 对 $\forall i\geq 0$，$uv^i\in L$

因此，正则语言 $uv^*\subseteq L$

若 $v\neq\varepsilon$，则L有无限正则子集

若 $v=\varepsilon$，则 $y\neq\varepsilon$，此时 $uxy^*\subseteq L$，L有无限正则子集

2.42 令 $S=1\#1^2\#\cdots\#1^p=uvxyz$

① v与y中都不含#

则 uv^0xy^0z 或 uv^3xy^3z 中一定有 $t_i=t_j$

② v或y中有#

则 uv^2xy^2z 中有 $t_i=t_j$

故上下文无关