1. 1) standard form:

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

subject to
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2) $\max \quad z = [1, 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

s.t. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

对偶问题

$\min \quad f = [4, 1, 12]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 4y_1 + y_2 + 12y_3$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 \ge 1 \end{array}$

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow y_1, y_2, y_3 \ge 0$

2. (a) $\min \frac{1}{\sqrt{xy}}$ s.t. $x^2 + y^2 < 7$ GP

(b) $\max \min(x_1, x_2)$ s.t. $x_1 + x_2 < 5$ LP

(c) $\min \sum_{ij} X_{ij}$ s.t. $v^T X v \ge 0$ SDP

(d) $\min \|Ax - b\|_2^2$ QP

3. $f(x)=x^Tx$，其中 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$2x_1-x_2=5 \Rightarrow Ax=b$，其中 $A=[2\sqrt{2},-\sqrt{2}]$，$b=5$

拉格朗日函数为:

$$L(x,v)=x^Tx+v^T(Ax-b)$$

令 $\nabla_x L(x,v)=0 \Rightarrow 2x+A^Tv=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}A^Tv$

$\Rightarrow$ 拉格朗日对偶函数为

$$g(v)=\inf_x L(x,v)=L(-\frac{1}{2}A^Tv,v)=-\frac{1}{4}v^TAA^Tv-b^Tv=-\frac{5}{2}v^Tv-5v$$

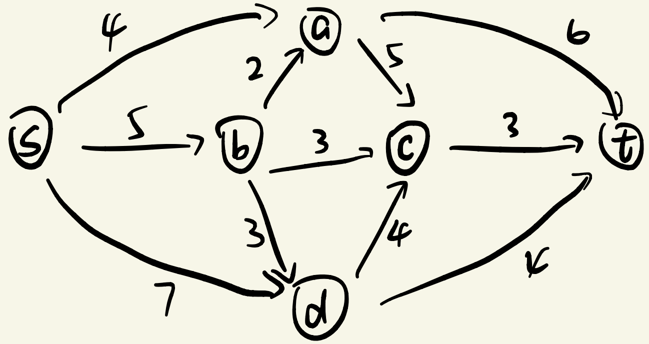
$\Rightarrow$ 拉格朗日对偶问题为

$$\max_v g(v)=\max_v(-\frac{5}{2}v^Tv-5v)$$

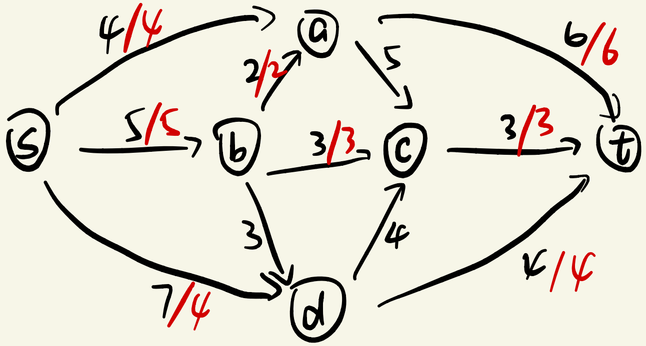
令 $\nabla_v g(v)=0 \Rightarrow -5v-5=0 \Rightarrow v=-1$

$\therefore \max_v g(v)=g(-1)=\frac{5}{2}$

4.



1) 最大流为13



2) 最小割为13