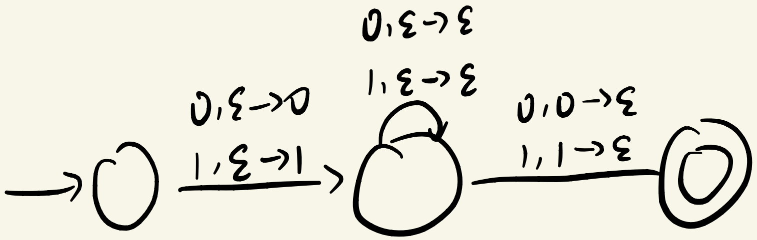
2.4

b. $S \to 0X0 \mid 1X1$

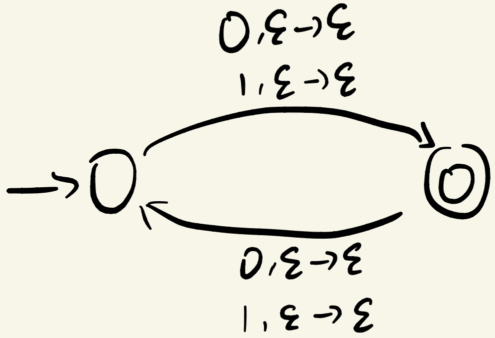
$X \to 0X \mid 1X \mid \varepsilon$



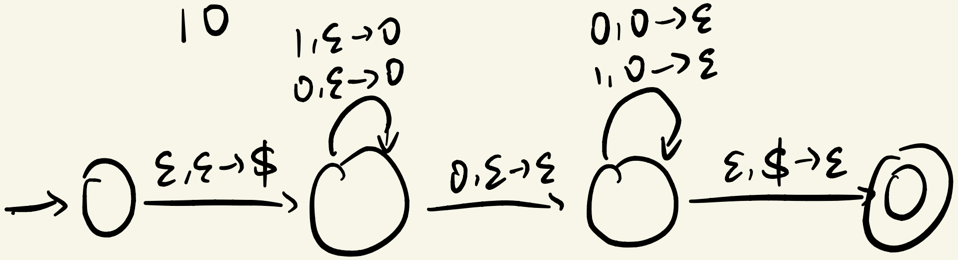
c. $S \to 0X \mid 1X$

$X \to 0Y \mid 1Y \mid \varepsilon$

$Y \to 0X \mid 1X$



d. $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 0$



2.6

a. $S \to SbSaSaS \mid SaSbSaS \mid SaSaSbS \mid \varepsilon$

d. $S \to uvw$

$u \to A \mid s$

$A \to aA \mid bA \mid \#A \mid \#$

$v \to ava \mid bvb \mid \#B \mid \#$

$B \to aB \mid bB \mid \#B \mid \#$

$w \to B \mid \varepsilon$

2.14 解: ① 添加起始变元 S_0

$S_0 \to A$

$A \to BAB \mid B \mid \varepsilon$

$B \to 00 \mid \varepsilon$

② 去掉 $B \to \varepsilon$

$S_0 \to A$

$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid \varepsilon$

$B \to 00$

③ 去掉 $A \to \varepsilon$

$S_0 \to A$

$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid B \mid BB$

$B \to 00$

④ 去掉 $A \to B$

$S_0 \to A$

$B \to 00$

$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid 00$

⑤ 去掉 $S_0 \to A$

$S_0 \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid 00$

$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid 00$

$B \to 00$

⑥ 添加变元

$S_0 \to VB \mid AB \mid BA \mid BB \mid UU$

$A \to VB \mid AB \mid BA \mid BB \mid UU$

$B \to 00$

$V \to BA$

$U \to 0$

2.18 b. $A \cap a^*b^*c^* = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$

若A上下文无关，则由命题"C上下文无关，R正则，则 $C \cap R$ 上下文无关"可得

$\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ 是上下文无关的。

但 $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ 不是上下文无关的，故A也不是。

2.20 证明：设 M 是 B 的DFA，P 是 A 的PDA，我们通过修改 P 来构造 A/B 的PDA

原来的 P 只用自己跑，修改后，将在 w 被读取后启动 M。

随后，对一个串 x，只有 M 和 P 同时能接收时，机器才会接收。

2.26 证明：

当 $n=2$ 时，对于Chomsky范式CFG，长度为2的字符串必由3步派生

假设当 $2\le n\le k$ 时命题为真，则当 $n=k+1$，对长度为 $k+1$ 的字符串 $S=S_1S_2\cdots S_{k+1}$

$\exists$ S_0 的一个直接派生 $S_0\Rightarrow AB$，使得 A 产生子串 $S_1S_2\cdots S_p$，B 产生子串 $S_{p+1}S_{p+2}\cdots S_{k+1}$，其中 $1\le p\le k+1$

则 A 产生子串需要 $2p-1$ 步派生，B 需要 $2(k+1-p)-1$ 步派生。

故 S_0 产生 S 共需要 $2k+1$ 步派生，成立。

$\Rightarrow$ 由 G 产生长度为 $n\ge 2$ 的字符串需要 $2n-1$ 步派生。

2.30 a. 令 $s=0^p1^p0^p1^p=uvxyz$

① vxy中不包含s的中点

uv^0xy^0z 将会使s中前后的0或1数量不一致.

② vxy包含s中点，则 vxy只会影响s中间的1与0，

uv^0xy^0z 一定会使中间的0与1少于前后的.

故上下文无关

b. 令 $s=0^p\#0^{2p}\#0^{3p}=uvxyz$

① v或y中包含#

uv^0xy^0z 会使#消失，不成立

② v和y中都无#

∵ $|vxy|\le p$

∴ v与y最多只能控制 0^p、0^{2p}、0^{3p} 三组0中的两组

此时一定∃$i\ge 0$，使得 $uv^ixy^iz \notin \{0^n\#0^{2n}\#0^{3n} \mid n\ge 0\}$

故上下文无关

c. 令 $s=a^pb^p\#a^{2p}b^{2p}=uvxyz$

① vxy中不含#

则无论vxy在#的前后，uv^0xy^0z 都不属于该语言

② vxy中含#

∵ $|vxy|\le p$

∴ vxy只能控制 b^p 和 a^{2p}

⇒ uv^0xy^0z 一定不属于该语言

故上下文无关

d. 令 $s=a^pb^p\#a^pb^p$

① vxy中不含#

则无论vxy在#的前后，uv^0xy^0z 都不能保证 $t_1=t_2$

② vxy中含#

∵ $|vxy|\le p$

∴ vxy只能控制紧邻#的 b^p 和 a^p

⇒ uv^0xy^0z 不能保证 $t_1=t_2$

故上下文无关

2.40 设L是无限前缀封闭的上下文无关语言

令s为L语言中一个长于p的串，则 $s = uvxyz$

∵ L对前缀封闭

∴ 对 $\forall i \geq 0$，$uv^i \in L$

因此，正则语言 $uv^* \subseteq L$

若 $v \neq \varepsilon$，则L有无限正则子集

若 $v = \varepsilon$，则 $y \neq \varepsilon$，此时 $uxy^* \subseteq L$，L有无限正则子集

2.42 令 $S = 1 \# 1^2 \# \cdots \# 1^p = uvxyz$

① v与y中都不含#

则 uv^0xy^0z 或 uv^3xy^3z 中一定有 $t_i = t_j$

② v或y中有#

则 uv^2xy^2z 中有 $t_i = t_j$

故上下文无关