

## part1:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
5	1	1	2	2	3	3+1	4+1	4+2	5+2	5+3	6+3+1	6+4+1	7+4+2	7+5+2
10	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	10+1	10+1	12+2	14+2

我发现只考虑 0、1、2 的情况很容易列出总数，且很难得出结论，而加上 5 之后就开始不同，因此我可以以使用 5 作为切入点。

先看 amount=0~4 元，在不足以使用 5 的时候与上一行无异，而 amount=5 时，选择数比上一行多了 1，就是直接使用 5 的情况。amount=6 时，还是比上一行多 1，很好理解，就是使用 5 元+1 元的情况。

然而到了 7 元，时代变了。我第一眼认为也是比上一行多 1，但实际上，多了有 5 元+2 元以及 5 元+1 元+1 元这两种情况。即：先用 7 元-5 元，剩下的 2 元不足以使用 5 元了，要用上一行的 graph[2][2]来凑，所以暂时得出公式  $graph[3][7]=graph[2][7]+graph[2][2]$ 。amount=5~9 元时都套用这个式子得到了结果。

然而到了 10 元，时代又变了。因为除了直接用上述公式，还有一种情况是直接 2 张 5 元钞票，因此要再加 1。而 11 元也是再加 1 即可。

然而到了 12 元，时代又双变了。因为用 2 张 5 元钞票之后还剩下 2 元，这有两种组成情况，因此应该是  $graph[3][12]=graph[2][12]+graph[2][7]+graph[2][2]$ 。

到此，我发现对于某一面额 (coins[i]元) 这一行，应该先算出要凑的 amount 中最多包含多少张 coins[i]元，即  $contain\_num=amount / coins[i]$ ，然后对每个包含不同张 coins[i]元情况 (包含 0、1、2、3 张...) 都用上一行的数据来凑成。即：

```
int contain_num = j / coins[i]; // j 中包含多少个 coins[i]
for (int k=0; k<=contain_num; k++)
    graph[i+1][j] += graph[i][j-k*coins[i]];
```

时间复杂度:  $O(amount * coins.size())$

将空间复杂度优化到 M: 即数组只用存两行，分别是现在正在算的这一行和这一行的前一行。

## part2:

(1)

```
  A B C D E F
A: 0 1 0 1 1 1
B: 0 0 0 1 1 0
C: 1 1 0 0 1 0
D: 0 0 1 0 0 0
E: 0 0 0 1 0 1
F: 0 1 1 1 0 0
```

B 必不可能吃鸡。由于 B 只打得过 DE，因此 B 要吃鸡就整局只能跟 DE 打。而 B 开局左边是 A 右边是 C。

先看左边：A 只怕 C，因此 B 的左边永远有个 A，除非 A 被 C 杀了，但那样就只剩 B 和 C 俩人，B 还是打不过。

再看右边：C 一定不能死，如果 C 没了那么整局没人能限制 A，必是 A 吃鸡。因此 B 的右边必须保证有个 C，但是 B 又打不过 C，C 死了也不行不死也不行。

所以 B 可以直接开始下一局了，芜湖

A 吃鸡：C 开局被 D 杀了，然后 A 乱杀

C 吃鸡：打工仔 A 一路杀掉 FED，给 C 送人头，然后 C 再干掉 B

D 吃鸡：A 杀了 BFE，剩 A-C-D-A，然后 C 杀了 A，D 杀了 C

E 吃鸡：A 杀了 B，C 反手杀了 A，D 反手杀了 C，剩 D-E-F-D，E 屠杀

F 吃鸡：C 疯狂打工，A 杀了 B，C 杀了 A，剩 C-D-E-F-C，然后 E 杀了 D，C 又杀了 E，只剩 F 和 C，F 杀了 C

(2) 时间复杂度：最坏  $O(\text{amount}^3)$

空间复杂度： $O(\text{amount}^2)$

感觉按我的思路写已经优化不了了，别的思路可能还能优化。

思路：用 bool 矩阵 `graph[amount][amount]` 来记录是否可以主动交手，`graph[i][j]=true` 表示 i 可以主动和 j 交手，`=false` 表示 i 不可以主动和 j 交手，只能等 j 来找他，否则双方无法交手。（注意，`graph[i][j]` 和 `graph[j][i]` 的值可能不同，这与我们选取的交手方向有关）我选择让每个人都只沿一个方向进行 PK，即要么选从小到大的人 PK，要么不 PK，以此来更新 graph 矩阵。所以 graph 的初始化情况：对每个 i，除了 `graph[i][i+1]` 为 true，别的都为 false（`graph[i][i-1]` 也为 false）。

为了避免对双方能否交手产生漏判或误判（`[i][j]` 和 `[j][i]` 中只要一个为 true 即可交手），我们必须对每个玩家“同步”进行判断，即判断第一位玩家能否主动与自己左边第 i 人主动交手后，不能立即判断第一位玩家能否与自己左边第 i+1 人主动交手，而是要继续判断第二位、第三位…第 n 位玩家能否与自己左边第 i 人主动交手，然后再判断 i+1 的情况。因此第一层循环是相隔人数 len1 (从 2 到 n，n 即自己)，第二层循环是遍历每位玩家 i (从 0 到 `amount-1`)。

第三层循环则是根据一位中间玩家（利用距离 len2 来寻找）来判断 i 能否主动与 j 交手。假如在 0~len1 之间有个玩家 k 满足 `graph[i][k]=true` 且 `graph[k][j]=true`，那么 i 只差一步就可以主动与 j 交手了，这一步就是把 k 干掉，谁干掉 k 不重要，因此 `conquer[i][k]=1` 或 `conquer[j][k]=1` 都可。于是这三重循环如下：

```

for (int len1=2;len1<=amount;len1++)//从各自的下个人开始
    for (int i=0;i<amount;i++)//从第一个人开始依次判断
        int player=op(i,len1,amount);
        //下面判断 i 和 player 是否能交手
        if (graph[i][player]==false)
            for (int len2=1;len2<len1;len2++)
                int temp_player=op(i,len2,amount);//工具人
                if(graph[i][temp_player]==true && graph[temp_player][player]==true&& (conquer[i][temp_player]==1 || conquer[player][temp_player]==1) )
                {
                    graph[i][player]=true;
                    break;
                }

```

那么判断一个人能不能吃鸡，就变成了判断 graph[i][i] 是否为 true。因为他如果能够主动与自己交手，说明他是转了一圈并且干掉了最后一个人来到自己面前的，所以他有可能会吃鸡。

### part3

(1) 用邻接表 graph 来存每个路口能到达的路口，则状态转移方程：

$$\begin{aligned}
 & \text{记 } graph[i].size() \text{ 为 } s[i] \\
 & f(i, j) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{s[i]} f(i+damage[i], graph[i][k]) / s[i], & i+damage[i] \leq hp \\ 0, & i+damage[i] > hp \parallel i=damage[i]=0 \\ \sum_{k=0}^{s[i]} f(i+damage[i], graph[i][k]) / s[i] + 1, & i=hp \& \& j=1 \end{cases} \\
 & \quad (graph[i][k] \neq n) \quad (graph[i][k] \neq n)
 \end{aligned}$$

f 为在尝试 t 次的情况下，在 hp=i 的情况下到达 j 路口的次数的期望，于是最后到达 n 路口的期望是 f(n) 的求和，再除以 t。在这里我认为自己能够分清次数和概率，所以我直接设定 t=1（也就是说 f(hp, 1) 一定会 >= 1）

(2) 对于某个特定的 hp，所有无陷阱节点构成的方程组，未知数为到达所有无陷阱节点的期望次数（概率）。以 part3-case3 在 hp=2 时的方程组为例

$$\text{方程组: } \begin{cases} x = \frac{y}{3} + \frac{f(2,3)}{4} \\ y = \frac{x}{2} + \frac{f(2,3)}{4} + \frac{f(2,4)}{3} \\ z = \frac{f(2,3)}{4} + \frac{f(2,4)}{3} \end{cases}, \text{ 其中 } x, y, z \text{ 分别表示到达 } 1, 2, 5 \text{ 的次数的期望}$$

$$\text{增广矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{f(2,3)}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{f(2,3)}{4} + \frac{f(2,4)}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{f(2,3)}{4} + \frac{f(2,4)}{3} \end{pmatrix}$$

(3) 时间复杂度:  $\max\{O(hp \cdot n^2), O(hp \cdot \text{num}^3)\}$ , 其中 num 为 damage 为 0 的路口个数  
空间复杂度:  $O(n^2)$

上一小问给我的启发是: 高斯消元法的系数矩阵 a 不随 hp 的变化而变化, 只有常数列 b 是跟 hp 有关的。而高斯消元法的时间复杂度为  $O(\text{num}^3)$ , 其中 num 为 a 的行数也即 damage 为 0 的路口个数。而如下图, 高斯消元法中对 a 的处理恰好是三重 for 循环嵌套, 因此我们可以通过提前处理 a 来使高斯消元法的时间复杂度降为  $O(\text{num}^2)$ , 总时间复杂度将降为  $O(hp \cdot n^2)$ 。

```
for (k = 0; k < num - 1; k++)
{
    //求出第 k 次初等行变换的系数
    for (i = k + 1; i < num; i++)
        c[i] = a[i][k] / a[k][k];

    //第 k 次的消元计算
    for (i = k + 1; i < num; i++)
    {
        for (j = 0; j < num; j++)
        {
            a[i][j] = a[i][j] - c[i] * a[k][j];
        }
        b[i] = b[i] - c[i] * b[k];
    }
}
```

不幸的是, 我发现对 b 的处理要跟 a 和 c (工具列) 同步进行, 因此不能提前处理好 a、c 然后直接传入, 那么怎么办呢...

那就把 c 做成 num\*num 的工具矩阵不就好了! 所以就只需要  $b[i] = b[i] - c[k][i] * b[k]$   
^ ^