平成 29 年 7 月 28 日

制御系構成特論

レポート課題2

機械知能工学専攻 知能制御工学コース　17344219　二宮 悠二

問題

1. $G(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ において，$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{b} \end{bmatrix}^T$ のとき，入力 $u(t) = e^{at}$ に対する応答 $y(t)$ を求めよ．

2. $G_1 = \dfrac{s-1}{s+1}$，$G_2 = \dfrac{1}{s-1}$ の場合について，直列，並列結合を求め，結合後のシステムの可制御・可観測性を調べよ．またそれぞれにおいて結合後の伝達関数を求めよ．

3. **Fig.**1 のフィードバック系で

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, K(s) = \frac{s-1}{s}$$

としたとき，次のことを確かめよ．

(1) r から y までの伝達関数 $G_{yr}(s)$ と d から y までの伝達関数 $G_{yd}(s)$ を求め，それぞれの安定性を調べよ．

(2) (1) における 2 つの伝達関数の解析結果の相違点の原因は何かを述べよ．

(3) 特性方程式の極を調べ，閉ループ系の安定性を調べよ．

(4) $P(s)$，$K(s)$ の実現を求め，閉ループ系の A 行列とその固有値を求めることで閉ループ系の安定性を調べよ．

(5) $K(s) = \dfrac{3s+1}{s}$ と変更したとき，フィードバック系の内部安定性を調べよ．

4. あるシステムの実現

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

について，次の問に答えよ．

(1) システムの可制御・可観測性を調べよ．

(2) システムの可安定性・可検出性を調べよ．

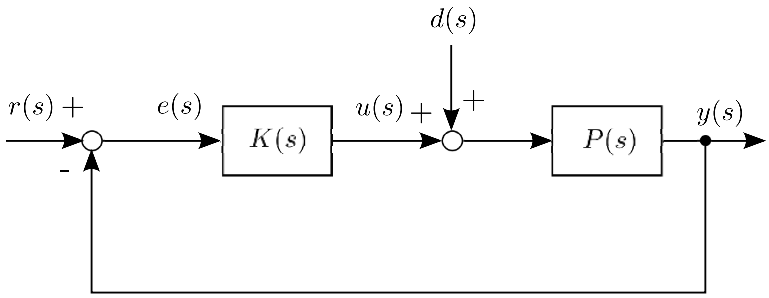

Fig. 1 内部安定性

解答

1. 伝達関数 $G(s)$ は次のように変換できる．

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

したがって

$$\begin{aligned}
y(s) &= C(sI-A)^{-1}x(0) + C(sI-A)^{-1}Bu(s) \\
&= [1 \ \ 0]\begin{bmatrix} s-a & -b \\ b & s-a \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{bmatrix} + [1 \ \ 0]\begin{bmatrix} s-a & -b \\ b & s-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s-a} \\
&= \frac{1}{(s-a)^2+b^2}\left[\ 1 \ \ 0\ \right]\begin{bmatrix} s-a & b \\ -b & s-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{(s-a)^2+b^2}\left[\ 1 \ \ 0\ \right]\begin{bmatrix} s-a & b \\ -b & s-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s-a} \\
&= \frac{1}{(s-a)^2+b^2}\left[\ s-a \ \ \ b\ \right]\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b} \end{bmatrix} + \frac{1}{(s-a)^2+b^2}\left[\ s-a \ \ \ b\ \right]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s-a} \\
&= \frac{1}{(s-a)^2+b^2}\cdot(-1) + \frac{1}{(s-a)^2+b^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．よって入力信号が印加されても，出力信号は 0 となり，入力は出力から遮断されていることが分かる．

2. それぞれのシステムを Doyle の記法を用いて表現することを考える．まず，G_1 を状態空間表現

すると

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \frac{s-1}{s+1} \\
&= 1 + \frac{-2}{s+1}
\end{aligned}
$$

より，入出力の関係式は次のようになる．

$$
y = \frac{-2}{s+1}u + u \tag{1}
$$

$x = \dfrac{-2}{s+1}u$ とおくと

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2}{s+1}u \\
(s+1)x &= -2u \\
\dot{x} &= -x - 2u
\end{aligned}
$$

より，状態方程式と出力方程式は次のようになる．

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -x - 2u \\
y = x + u
\end{cases} \tag{2}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{3}
$$

を得る．同様に G_2 について，$x = \dfrac{1}{s-1}u$ とおくと

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{s-1}u \\
(s-1)x &= u \\
\dot{x} &= x + u
\end{aligned}
$$

より，状態方程式と出力方程式は次のようになる．

$$
\begin{cases}
\dot{x} = x + u \\
y = x
\end{cases} \tag{4}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
G_2 &= \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \qquad (5)
\end{aligned}
$$

を得る．

直列結合の場合の伝達関数を G_c とすると

$$
\begin{aligned}
G_c &= G_1 G_2 \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \qquad (6)
\end{aligned}
$$

と表せる．可制御性行列 U_c と可観測性行列 U_o の行列式がそれぞれ $\det U_c \neq 0$，$\det U_o \neq 0$ を満たせば可制御，可観測である．

$$
\begin{aligned}
\det U_c &= \det \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2 \neq 0 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det U_o &= \det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

以上より，直列結合の場合システムは可制御，不可観測であり，このときの伝達関数 G_c は

$$
G_c = \frac{1}{s+1} \qquad (9)
$$

となる． 一方，並列結合の場合の伝達関数を G_p とすると

$$
\begin{aligned}
G_p &= G_2 + G_2 \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる．このシステムの可制御性行列と可観測性行列の行列式の値はそれぞれ次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\det U_c &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 0 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det U_o &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 0 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

以上より，並列結合の場合システムは不可制御，不可観測であり，このときの伝達関数 G_p は

$$
G_p = \frac{2}{s-1} \qquad (13)
$$

となる．

3. (1) **Fig.**1 より各入出力の関係を式で表すと次のようになる．

$$
\begin{aligned}
e(s) &= r(s) - y(s) \qquad (14) \\
u(s) &= K(s)\ e(s) \qquad (15) \\
y(s) &= P(s)\big(\ u(s) + d(s)\ \big) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

上記 3 つの式より

$$
\begin{aligned}
y(s) &= P(s)\big(\ u(s) + d(s)\ \big) \\
&= P(s)\Big(K(s)\ \big(\ r(s) - y(s)\ \big) + d(s)\Big) \\
\Big(1 + P(s)K(s)\Big)y(s) &= P(s)K(s)r(s) + P(s)d(s) \\
y(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}r(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}d(s) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

を得る．式 (17) より，$G_{yr}(s)$ と $G_{yd}(s)$ はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s}}{1+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s}} \\ &= \frac{1}{s+1} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s}} \\ &= \frac{\frac{s}{s-1}}{s+1} \end{aligned} \tag{19}$$

ここで，式 (18) はすべての極が負であるため安定，式 (19) は非負の極を持つため不安定である．

(2)　伝達関数 G_{yr} の分子の計算においては極零相殺が起こっているが，G_{yd} の分子の計算においてはそれが起こっていない．すなわち，これらの解析結果に違いが出るのは極零相殺が生じているためである．

(3)　式 (18)，式 (19) を，特性多項式を求めるために次のように変形する．

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s}}{1+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s}} \\ &= \frac{s-1}{s^2-1} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s}} \\ &= \frac{s}{s^2-1} \end{aligned} \tag{21}$$

したがって，特性多項式 $\Phi(s)$ は次のようになる．

$$\Phi(s) = s^2 - 1 \tag{22}$$

特性方程式は

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= 0 \\
s^2 - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

となり，これを解くと，$s = \pm 1$ を得る．

以上より，特性多項式の根の実部に非負であるものが含まれるため，閉ループ系は不安定である．

(4) $P(s)$，$K(s)$ それぞれの実現を $G_P = [A_1, B_1, C_1, D_1]$，$G_K = [A_2, B_2, C_2, D_2]$ とする．入力を u，出力を y とおけば，システムの状態空間表現から実現は次のように求まる．まず，$P(s)$ について

$$
\begin{aligned}
y &= P(s)u \\
&= \frac{1}{s-1}u
\end{aligned}
$$

$x = \dfrac{1}{s-1}u$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(s-1)x &= u \\
\dot{x} &= x + u
\end{aligned}
$$

したがって状態方程式と出力方程式は

$$
\begin{cases}
\dot{x} = x + u \\
y = x
\end{cases}
\tag{23}
$$

より

$$
\begin{aligned}
G_P &= [\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1\ ] \\
&= [\ 1,\ 1,\ 1,\ 0\ ]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

を得る．同様に $K(s)$ について

$$
\begin{aligned}
y &= K(s) \\
&= \frac{s-1}{s}u \\
&= -\frac{1}{s}u + u
\end{aligned}
$$

$x = -\dfrac{1}{s}$ とおくと

$$\begin{aligned} sx &= -u \\ \dot{x} &= -u \end{aligned}$$

したがって状態方程式と出力方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = -u \\ y = x + u \end{cases} \tag{25}$$

より

$$\begin{aligned} G_K &= [\ A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2\ ] \\ &= [\ 0, -1,\ 1,\ 1\ ] \end{aligned} \tag{26}$$

を得る．

以上より，この閉ループ系の A 行列は次のように表される．

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 R_{12}^{-1} C_1 & -B_1 R^{-1} 21 C_2 \\ B_2 R_{12}^{-1} C_1 & A_2 - B_2 D_1 R_{21}^{-1} C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

ただし，$R_{12} = I + D_1 D_2$，$R_{21} = I + D_2 D_1$ である．この行列の固有値 λ は

$$\begin{aligned} \mathrm{def}\ [\ \lambda I - A\ ] &= 0 \\ \mathrm{def} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (\lambda^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

で表され，これを解くと

$$\lambda = \pm 1 \tag{28}$$

を得る．

この固有値が閉ループ系の極を表し，実部が非負のものを含んでいるため閉ループ系は不安定であることが分かる．

(5) フィードバック系の内部安定性を調べるには特性方程式の根の符号を調べればよい．$K(s) =$

$\dfrac{3s+1}{s}$ のときの特性多項式 $\Phi(s)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= 1+P(s)K(s)\\ &= s(s-1)+(3s+1)\\ &= s^2+2s+1\\ &= (s+1)^2\end{aligned}$$

よって，特性方程式の解は次のように求まる．

$$\begin{aligned}1+P(s)K(s) &= 0\\ s(s-1)+(3s+1) &= 0\\ s^2+2s+1 &= 0\\ (s+1)^2 &= 0\\ s &= -1 \ \ (\text{重解})\end{aligned}$$

以上より，すべての根の実部が負であるため，このときのフィードバック系は内部安定となる．

4. (1)　このシステムの可制御性行列 U_c の行列式の値は

$$\begin{aligned}\det U_c &= \det\begin{bmatrix} B & BA \end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1 \end{bmatrix}\\ &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

となる．また，可観測性行列 U_o の行列式の値は

$$\begin{aligned}\det U_o &= \det\begin{bmatrix} C\\ CA \end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\ &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

となる．

したがって，システムは不可制御，不可観測である．

(2)　行列 A の固有値は

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= 0 \\
\mathrm{def}\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} &= 0 \\
(\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0 \\
\lambda &= \pm 1
\end{aligned}
$$

である．$\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ に対して行列 $[\ A - \lambda I \quad B\ ]$ のランクが行フルランクとなれば可安定，行列 $[\ A - \lambda I \quad C\ ]^T$ のランクが列フルランクとなれば可検出であるので，$\lambda = 1$ として解析を行う．

まず，可安定性について考える．

$$
\begin{aligned}
[\ A - \lambda I \quad B\ ] &= \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

この行列を行基本変形すると次のようになる．

$$
[\ A - \lambda I \quad B\ ] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

したがって，$\mathrm{rank}\,[\ A - \lambda \quad B\ ] = 1$ であり，行フルランクではない．

次に，可検出性について考える．

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

この行列を列基本変形すると次のようになる．

$$
\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

したがって，$\mathrm{rank}\,[\ A - \lambda I \quad C\ ]^T = 2$ であり，列フルランクになる．

以上より，このシステムは不可安定，可検出である．