計画数学特論

平成29年度 (5/8)

5月8日分の欠席課題は提出不要

例題2.1.4（生産計画問題）

利益を最大にするための、最適な生産計画を立てたい

- １ヶ月単位で１年間（１２ヶ月）の計画
- 需要予測が与えられている
- 生産能力は1ヶ月あたり最大 T 単位
- 倉庫を所有しており、その月に残った分は M 単位まで保管可能
- 生産および在庫に関してはそれぞれ費用が発生
- １年後の在庫に関しては処分費用が発生

e_n : 需要予測値 $(n = 1, 2, \ldots, 12)$
$l_n(x)$: x 単位販売したときの売り上げ $(n = 1, 2, \ldots, 12)$
$g_n(x)$: x 単位生産したときの生産費用 $(n = 1, 2, \ldots, 12)$
$h_n(x)$: x 単位在庫したときの１ヶ月あたりの在庫費用 $(n = 1, 2, \ldots, 12)$
$p(x)$: 在庫 x 単位の処分費用

定式化

計画期間 : $N = 12$
状態空間（在庫量） : $X = \{0, 1, 2, \cdots, M\}$ (M:最大在庫量)
初期状態（初期在庫量） : $x_1 = 0$
決定空間（生産量） : $U = \{0, 1, 2, \cdots, T\}$ (T:最大生産量)
場合によっては $U = \{0, 100, 200, \cdots, K\}$ など
推移法則（在庫量推移） : $f_n(x, u) = (x + u - e_n) \vee 0$
利得 : $r_n(x, u) = l_n((x + u) \wedge e_n) - g_n(u) - h_n(x)$
終端利得（在庫処分費） : $r_G(x) = -p(x)$

$$\text{Max} \quad \sum_{n=1}^{12} r_n(x_n, u_n) + r_G(x_{13})$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_{n+1} = f_n(x_n, u_n) & n = 1, 2, \ldots, 12 \\ u_n \in U_n(x), & n = 1, 2, \cdots, 12 \end{cases}$$
$$\left(U_n(x) = \{u \in U \mid u \leq M + e_n - x\} \right)$$

2.
$$\text{Max} \quad \sum_{n=1}^{12} r_n(x_n, u_n) + r_G(x_{13})$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_{n+1} = f_n(x_n, u_n) & n = 1, 2, \ldots, 12 \\ u_n \in U_n(x), & n = 1, 2, \cdots, 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^{13}(x) = r_G(x), & x \in X \\ v^n(x) = \underset{u \in U_n(x)}{\text{Max}} \left[r_n(x, u) + v^{n+1}(f_n(x, u)) \right], & x \in X, \\ & n = 1, 2, \ldots, 12 \end{cases}$$

Theorem 4.2

$$v^{N+1}(x) = r_G(x) \qquad x \in X$$
$$v^n(x) = \underset{u \in U}{\text{Max}} \left[r_n(x, u) + v^{n+1}(f(x, u)) \right] \qquad x \in X, \ 1 \leq n \leq N.$$

Max-Add Criterion

The binary operator $\vee$ denotes the maximum operator:

$$a \vee b = \max(a, b), \qquad a, \ b \in \mathbf{R},$$

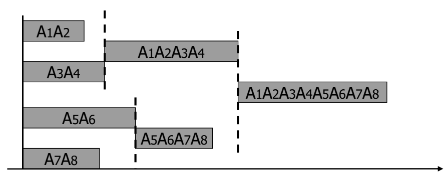
and for a set $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$ and a function $h : A \to \mathbf{R}$, the set operator $\bigvee$ is defined as follows:

$$\bigvee_{a \in A} h(a) = h(a_1) \vee h(a_2) \vee \cdots \vee h(a_M).$$

Parallel Computing

Objective Function

$$V(x_0; \pi) = r(x_0, u_0) + \bigvee_{x_1 \in T_1} \left\{ r(x_1, u_1) + \bigvee_{x_2 \in T_2} \left\{ r(x_2, u_2) + \cdots + \bigvee_{x_{N-1} \in T_{N-1}} \left\{ r(x_{N-1}, u_{N-1}) + \sum_{x_N \in T_N} k(x_N) \right\} \cdots \right\} \right\}$$



Objective Function (Max-Add)

Our objective function is given by

$$V(x_0, \pi) = \bigvee_{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X(x_0, \pi)} \Big(r(x_0, u_0) + r(x_1, u_1) + \cdots + r(x_{N-1}, u_{N-1}) + k(x_N) \Big),$$

where

$$u_n = \pi(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

and $X(x_0, \pi)$ denotes the set of all state sequences $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ generated by the initial state x_0, the nondeterministic transition T and a Markov decision function π. Indeed, $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X(x_0, \pi)$ satisfies

$$x_{n+1} \in T(x_n, \pi(x_n)), \quad x_n \in X \setminus X_G, \ n = 0, 1, \ldots,$$

and the length N depends on the history:

$$N = N(x_0, \pi(x_0), x_1, \pi(x_1), \ldots) = \max\{n : x_n \notin X_G\} + 1.$$

Nondeterministic DP Problem (Max-Add)

Nondeterministic Dynamic Programming Problem :

$$\mathrm{P}(x_0) \qquad \text{Minimize} \quad V(x_0; \pi) \quad \text{subject to} \quad \pi \in \Pi$$

Let $v(x_0)$ be the optimal value of the problem $\mathrm{P}(x_0)$ $(x_0 \in X \setminus X_G)$ and

$$v(x_0) = k(x_0), \quad x_0 \in X_G.$$

Thus, we have the following recursive equation.

Corollary 2.1.(Max-Add Criterion)

$$v(x) = k(x), \qquad x \in X_G$$

$$v(x) = \min_{u \in U(x)} \Big[r(x, u) + \bigvee_{y \in T(x,u)} v(y) \Big], \qquad x \in X \setminus X_G.$$