7.4　数値シミュレーション例

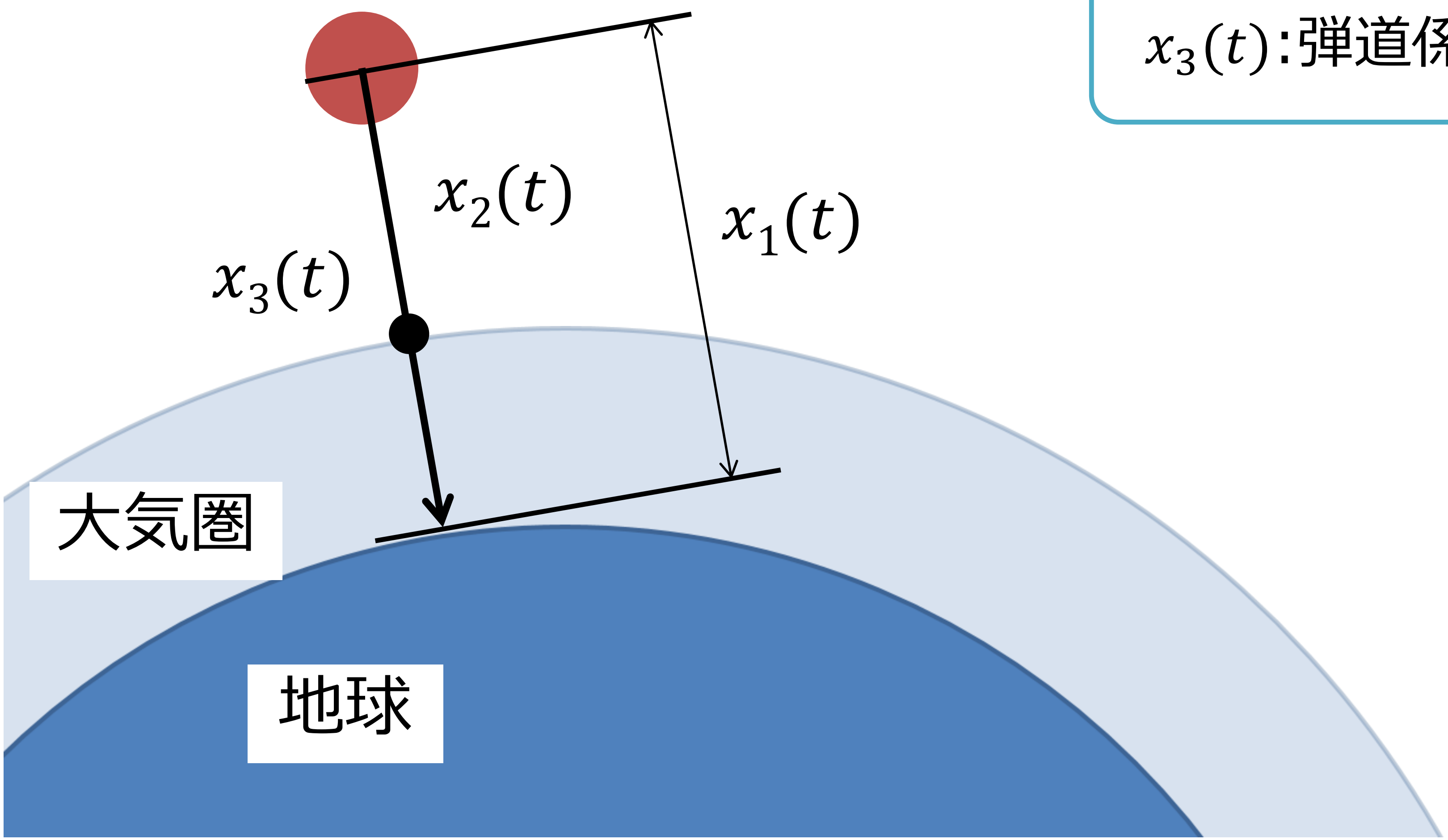
二つの数値シミュレーション例を用いて，EKFとUKFの性能比較を行う．

EKF・・・非線形システムを各時刻において，線形化を行い
それぞれの時刻において時変カルマンフィルタを適用する．

UKF・・・非線形システムを各時刻における線形近似ではなく
確率密度関数（確率分布）を正規分布で近似するという
統計量の近似に基づく．

7.4　数値シミュレーション例

例題7.3



$x_1(t)$:高度

$x_2(t)$:速度

$x_3(t)$:弾道係数

7.4　数値シミュレーション例

状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ 0.5\rho_0 \exp\left(-\frac{x_1(t)}{\eta}\right) x_2^2(t) x_3(t) - g \\ 0 \end{bmatrix}$$

ρ_0 ：海抜高度における空気密度
η ：空気密度と高度の関係を定義する定数
g ：重力加速度
T ：サンプリング周期 0.5 [s]

7.4　数値シミュレーション例

観測方程式

$$y(k) = \sqrt{M^2 + (x_1(k) - a)^2} + w(k)$$

M　：レーダと物体の間の水平距離
a　：レーダの高度（三平方の定理より）

$w(k)$：平均値0，分散 $4 \times 10^3 [\mathrm{m}^2]$
正規性白色雑音

シミュレーション条件

パラメータ	数値[単位]
ρ_0	$1.23\ \mathrm{kg/m^3}$
η	$6\times10^3\ \mathrm{m}$
g	$9.81\ \mathrm{m/s^2}$
M	$3\times10^4\ \mathrm{m}$
a	$3\times10^4\ \mathrm{m}$

7.4　数値シミュレーション例

初期値

状態推定値の初期値

$$\boldsymbol{x}_0 = [9 \times 10^4 \quad -6 \times 10^3 \quad 3 \times 10^{-3}]^T$$

共分散行列の初期値

$$P(0) = \begin{bmatrix} 9 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

UKFの設定パラメータ

$$\kappa = 0$$

7.4　数値シミュレーション例

状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ 0.5\rho_0 \exp\left(-\frac{x_1(t)}{\eta}\right) x_2^2(t) x_3(t) - g \\ 0 \end{bmatrix}$$

オイラー法により周期 T で離散化

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + T x_2(t) \\ x_2(k) + T\left\{0.5\rho_0 \exp\left(-\frac{x_1(t)}{\eta}\right) x_2^2(t) x_3(t) - g\right\} \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

例題7.4

状態方程式

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big) + v(k)$$
$$= 0.2x(k) + \frac{25x(k)}{1+x^2(k)} + 8\cos 1.2k + v(k)$$

$$y(k) = h\big(x(k)\big) + w(k) = \frac{1}{20}x^2(k) + w(k)$$

$v(k), w(k)$:互いに独立な正規性白色雑音
それらの平均値は0である.

$\sigma_v^2 = 1, \sigma_w^2 = 3$とする.

A.1　連続時間モデルから離散時間モデルへの変換

連続時間モデル ⇒ 離散時間関数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f_c\,(t, x(t)) \Rightarrow x(t+h) = f_{\mathrm{d}}(t, x(t))$$

オイラー法

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{h} = f_c\,(t, x(t))$$

$$x(k+1) - x(k) = h \cdot f_c\,(t, x(t))$$

$$x(k+1) = x(k) + h \cdot f_c\,(t, x(t))$$

ルンゲクッタ法

$$k_1 = f_c\,(t, x(t))$$

$$k_2 = f_c\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f_c\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2} \cdot k_2\right)$$

$$k_4 = f_c\,(t + h, x(t) \cdot k_3)$$

$$x(k+1) = x(k) + h/6 \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

7.5　状態と未知パラメータの同時推定

線形状態方程式

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}v(\boldsymbol{k}) \qquad (7.68)$$

$$y(k) = \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x}(k) + w(k) \qquad (7.69)$$

$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{c}$：未知

未知パラメータ（一定値を仮定）

$$\boldsymbol{\theta}(k+1) = \boldsymbol{\theta}(k) \qquad (7.70)$$

新しい状態変数を導入

$$\boldsymbol{z}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{\theta}(k) \end{bmatrix} \qquad (7.71)$$

7.5　状態と未知パラメータの同時推定

拡大系を構成してEKFやUKFを適用する.

$$\boldsymbol{z}(k+1) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{z}(k)\big) + \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}(k)\big)v(k) \tag{7.72}$$

$$y(k) = h\big(\boldsymbol{z}(k)\big) + w(k) \tag{7.73}$$

ただし

$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{z}(k)\big) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta}) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(k) \tag{7.74}$$

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}(k)\big) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{7.75}$$

$$h\big(\boldsymbol{z}(k)\big) = \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x}(k) \tag{7.76}$$

※推定値の大域的な収束性が保証されていない

⮡ 未知パラメータや状態の初期値を
真値の近くに選ぶ必要がある

7.5　状態と未知パラメータの同時推定

例題7.5

状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \qquad (7.77)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad (7.78)$$

質量　:$M = 2$　(既知)
バネ定数：$K = 0.7$　(既知)
粘性係数：$C = 1$　(未知)
離散化周期：$T = 0.01s$
観測雑音$w(k)$：分散：0.1，平均値0

→ **二つの状態と未知である粘性抵抗Cを推定**

7.5　状態と未知パラメータの同時推定

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C(k)}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

オイラー法による離散化

※問題ではルンゲクッタ法による
離散化を指定しているので
皆さんやってみよう！

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -\frac{K}{M}T & 1-\frac{C(k)}{M}T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M}T \end{bmatrix} u(k)$$

$$C(k+1) = C(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

拡大系の構成

7.5　状態と未知パラメータの同時推定

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ C(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ -\dfrac{K}{M}T & 1-\dfrac{C(k)}{M}T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ C(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M}T \\ 0 \end{bmatrix} v(k)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{z}(k+1) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{z}(k)\big) + \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}(k)\big)v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ C(k) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y(k) = h\big(\boldsymbol{z}(k)\big)$$

統合慣性航法システム
Integrated inertial navigation system

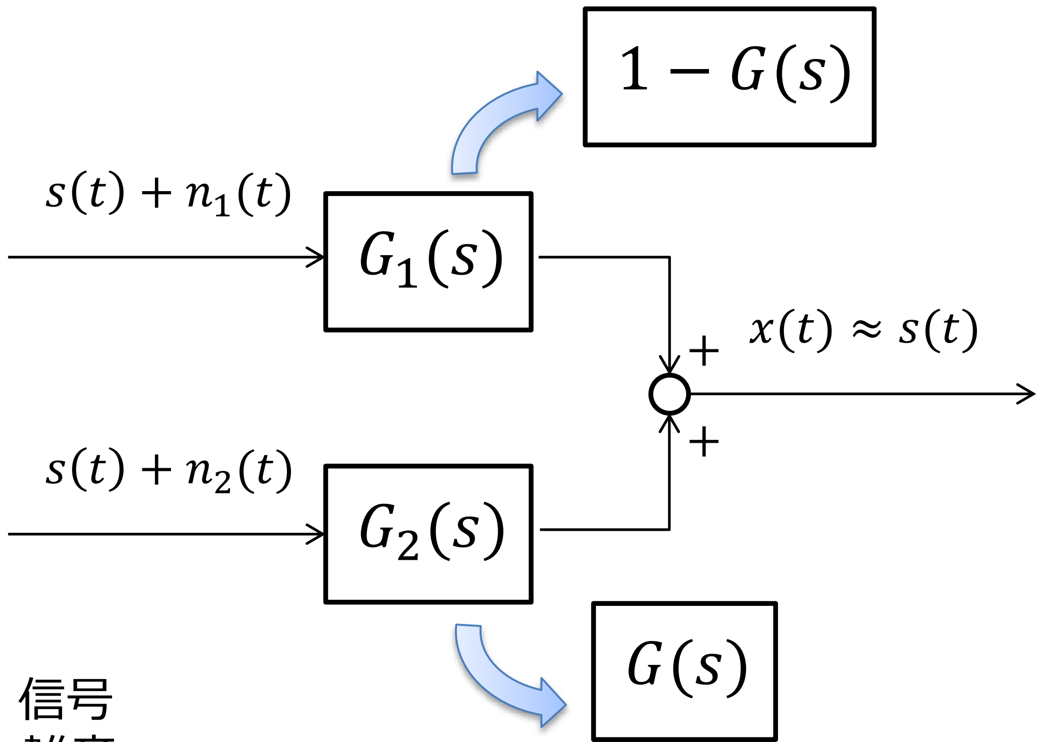
慣性航法システム（INS: inertial Navigation System）とGPSのような他のセンサからの航法データとを統合するシステム．
カルマンフィルタを用いてセンサフュージョン（sensor fusion）を行う手法が提案されている．

衛星航法システムとは、衛星航法のシステムを指す。衛星航法とは，複数の航法衛星（人工衛星の一種）が航法信号を地上の不特定多数に向けて電波送信（放送）し，それを受信する受信機を用いる方式の航法（自己の位置や進路を知る仕組み・方法）を指す．

日本では「衛星測位」及び**衛星測位システム**と呼ぶことが多い．2011年4月からは国土地理院では全地球型のシステム（全地球航法衛星システム）を，**GNSS（Grovel Navigation satellite systems）**と呼称することになった．なお，よく誤解されるが，GPSはあくまでも衛星測位システムの中の1つであり，衛星測位システムそのものを指すものではない．

システム	国	信号方式	軌道 遠地点と近地点	衛星数	周波数	状態
GPS	アメリカ	CDMA	20,200 km, 12.0h	≥ 24機	1.57542 GHz（L1信号）1.2276 GHz（L2信号）	運用中
GLONASS	ロシア	FDMA/CDMA	19,100 km, 11.3h	24機（CDMA対応機を打ち上げた場合は30機）	約 1.602 GHz (SP) 約 1.246 GHz (SP)	再構築後運用中 CDMAは準備中
Galileo	ヨーロッパ共同体	CDMA	23,222 km, 14.1h	2機の試験機が周回中 22機の衛星の運用予算が認可	1.164-1.215 GHz (E5a and E5b) 1.215-1.300 GHz (E6) 1.559-1.592 GHz (E2-L1-E11)	準備中
Compass	中国	CDMA	21,150 km, 12.6h	35機[8]	B1: 1,561098 GHz B1-2: 1.589742 GHz B2: 1.207.14 GHz B3: 1.26852 GHz	15機運用中、20機追加予定

8.1　相補フィルタ



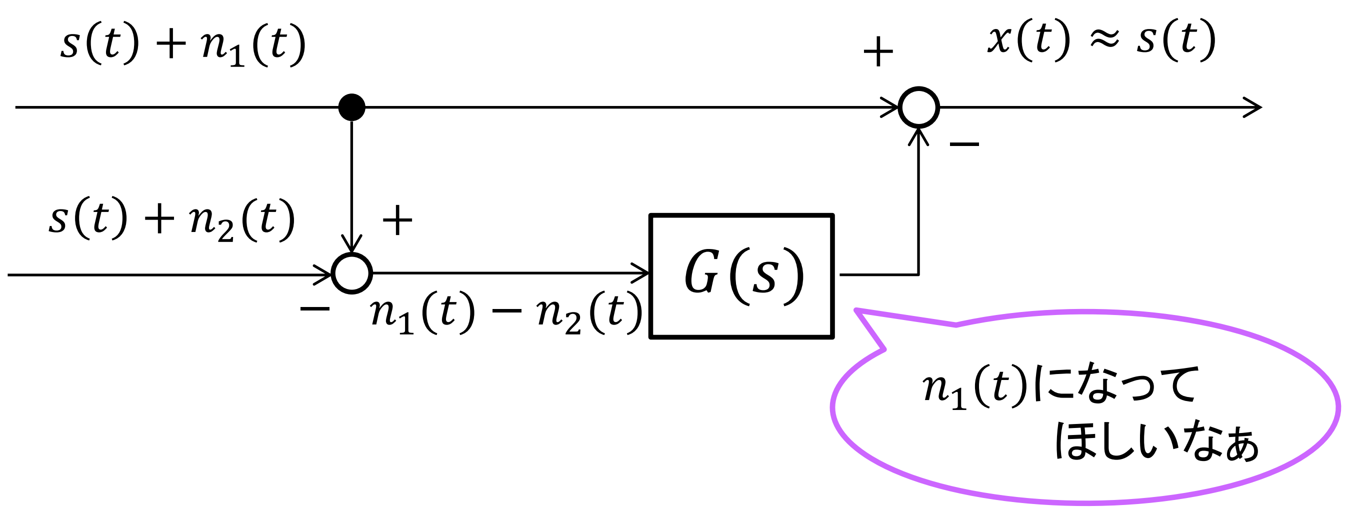
$s(t)$：信号
$n_1(t)$，$n_2(t)$:雑音
$x(t)$：フィルタリングによる推定値

$$X(s) = [1 - G(s)][S(s) + N_1(s)] + G(s)[S(s) + N_2(s)]$$
$$= S(s) + [1 - G(s)]N_1(s) + G(s)N_2(s)$$

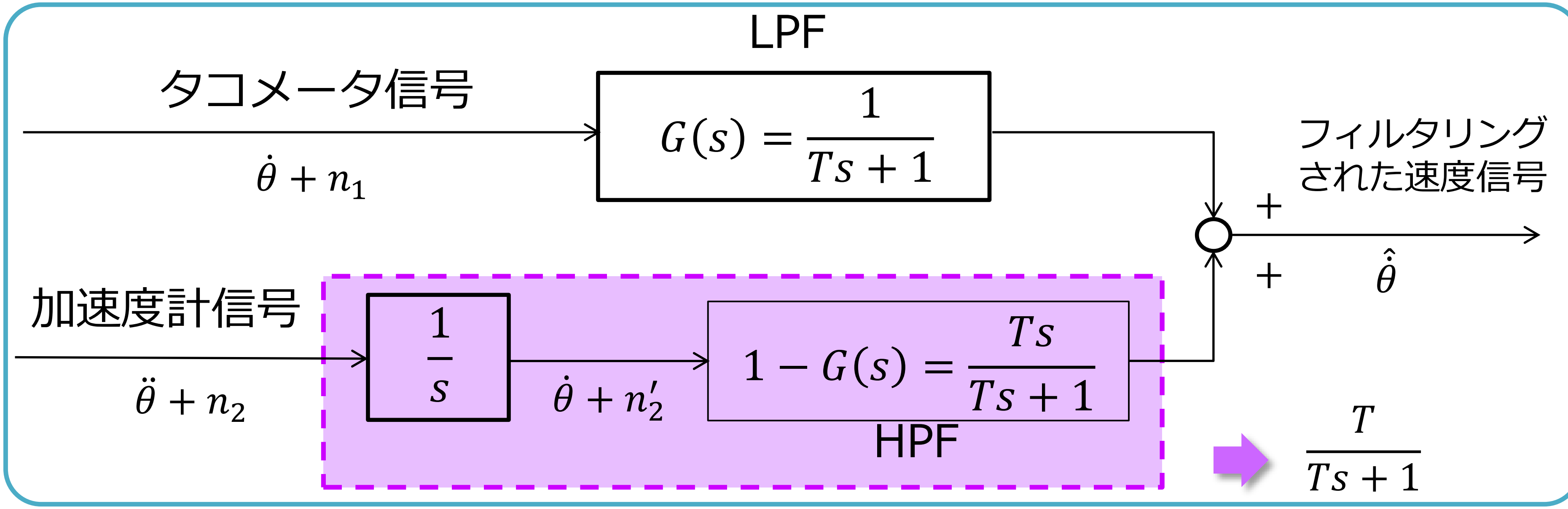
8.1　相補フィルタ

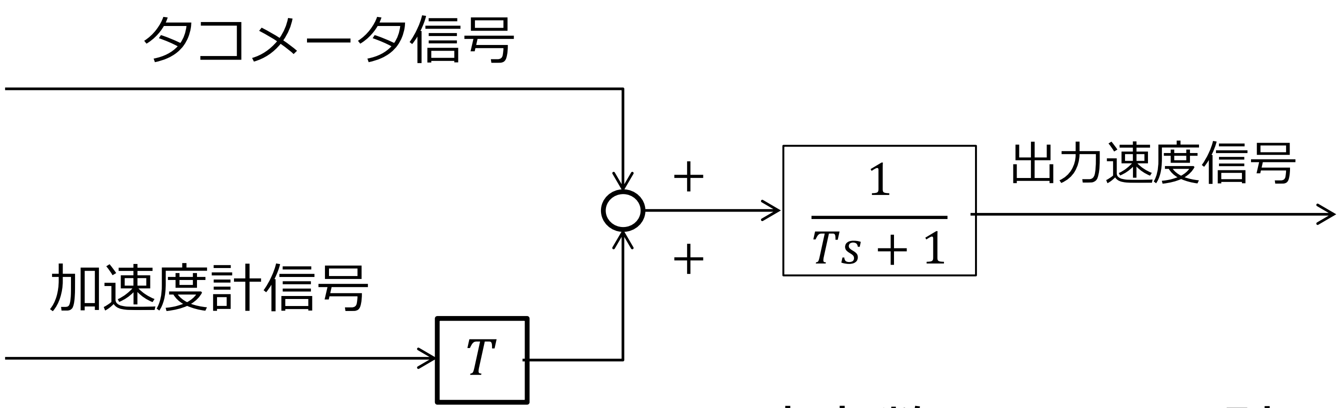
$$X(s) = [1 - G(s)][S(s) + N_1(s)] + G(s)[S(s) + N_2(s)]$$
$$= S(s) + [1 - G(s)]N_1(s) + G(s)N_2(s)$$

相補フィルタの差分・フィードフォーワード構成



8.1　相補フィルタ





T (時定数)のみを設計すればよい

8.1　相補フィルタ

慣性航法システム
INS : Internal navigation system

ジャイロスコープ

角速度 →積分→ 姿勢

加速度センサ

加速度 →積分→ 速度 →積分→ 位置

積分により姿勢や位置の誤差は
不安定になりドリフト誤差をもつ.

$h(\boldsymbol{x}^*)$ = (真の位置，速度など) $+ n_1$

n_1:慣性系誤差

補助センサ
(GPSやドップラーレーダなど)

$z(k)$ = (真の位置，速度など) $+ n_2$

n_2: 補助センサ誤差

計測の差をとると，雑音成分のみが残る.

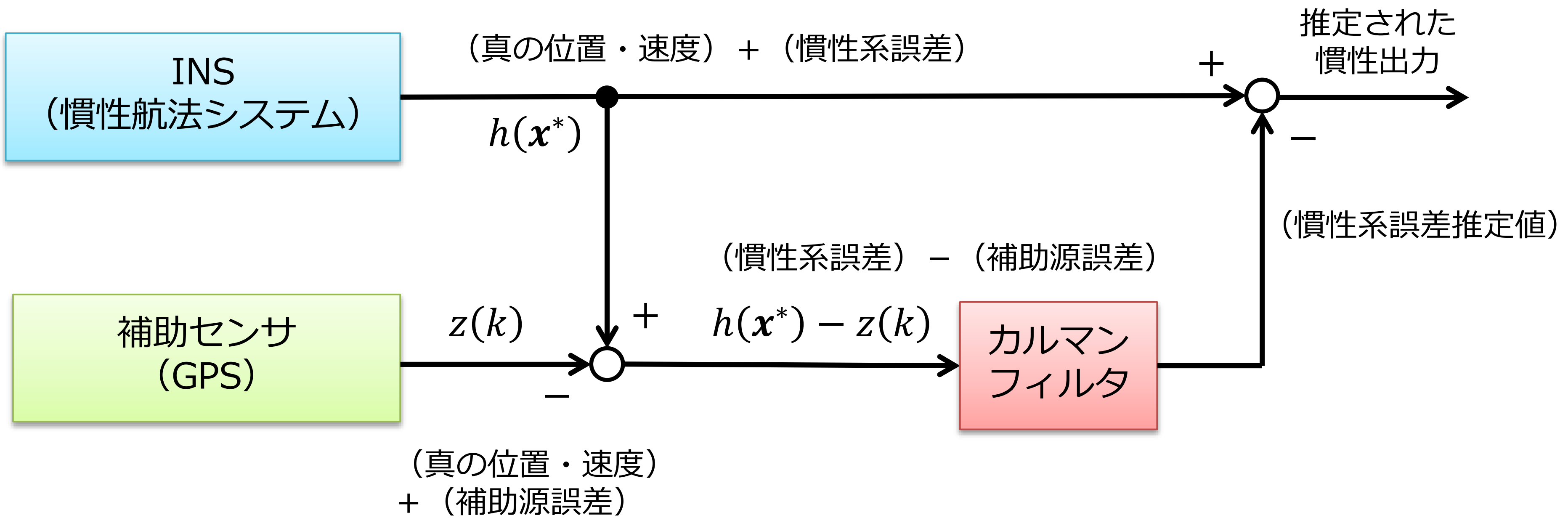
$$h(\boldsymbol{x}^*) - z(k) = n_1 - n_2$$

ねらい

$n_1 - n_2$ → カルマンフィルタ → $\hat{n}_1$

$h(\boldsymbol{x}^*) - \hat{n}_1$ = (真の位置，速度など)の推定

8.1　相補フィルタ



差分演算によって非線形性を相殺できるので
線形カルマンフィルタを利用できる.

色々な補助センサを利用できる.

相補フィルタは早い即応性能を実現し
瞬時に雑音を除去できる.

慣性系誤差を記述する
状態空間モデルが必要.