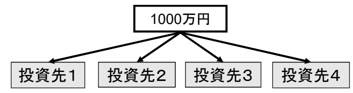
動的計画（Dynamic Programming : DP）

再帰的に問題を解いていくための考え方・枠組み（を与える理論）

- 問題の中に潜む再帰的な構造を見出す
- 再帰式を構成し、それを利用して解を導く

例題1.2.3（投資問題）

1000万円の投資資金を4つの投資先に分配し、投資した結果得られる利益を最大にしたい。1単位を100万円とし、10単位をどのように配分すれば良いだろうか。



投資量u ＼各投資先の回収利益	$r_1(u)$	$r_2(u)$	$r_3(u)$	$r_4(u)$
0	0	0	0	0
1	0.28	0.25	0.15	0.20
2	0.45	0.41	0.25	0.33
3	0.65	0.55	0.40	0.42
4	0.78	0.65	0.50	0.48
5	0.90	0.75	0.62	0.53
6	1.02	0.80	0.73	0.56
7	1.13	0.85	0.82	0.58
8	1.23	0.88	0.90	0.60
9	1.32	0.90	0.96	0.60
10	1.38	0.90	1.00	0.60

列挙による解法

配分パターンの列挙

投資先1	10	9	9	9	8	……	0	0	0	0
投資先2	0	1	0	0	2		0	0	0	0
投資先3	0	0	1	0	0		3	2	1	0
投資先4	0	0	0	1	0		7	8	9	10
総利益	1.38	1.57	1.47	1.52	1.64		0.98	0.85	0.75	0.60

1.38 + 0 + 0 + 0

1.32 + 0.25 + 0 + 0

全パターンに対して総利益を求める ⇒ 最大値を与える配分が最適配分！

再帰を用いた解法

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & r_1(x_1)+r_2(x_2)+r_3(x_3)+r_4(x_4) \\ \text{s. t.} & x_1+x_2+x_3+x_4 \ = \ 10 \\ & x_i = 0,1,\ldots,10 \ \ (i=1,2,3,4) \end{array}$$

投資先$1,\ldots,n$にc投資したときの最大の利益を$u^n(c)$であらわす。すなわち

$$u^n(c) \ = \ \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = c,\ x_i = 0,1,\ldots,c \ (i=1,\ldots,n) \right\}$$

このとき、次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} u^1(c) &= r_1(c) \qquad c=0,1,\ldots,10 \\ u^{n+1}(c) &= \max_{x=0,1,\ldots,c} \{r_{n+1}(x)+u^n(c-x)\} \qquad c=0,1,\ldots,10 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad n=1,2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^1(c) &= r_1(c) \qquad c=0,1,\ldots,10 \\ u^{n+1}(c) &= \max_{x=0,1,\ldots,c} \{r_{n+1}(x)+u^n(c-x)\} \qquad c=0,1,\ldots,10 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad n=1,2,3 \end{aligned}$$

$u^{n+1}(c)$は$u^n(c)$の結果を利用して求めることができる。

よって、$u^1(c), u^2(c), u^3(c), u^4(c)$と順に求めることにより、与問題の最大値$u^4(10)$を得る。

最適な投資配分は、各$u^n(c)$の最大値を与えるxを$\pi_n(c)$とおくことにより、以下のように得られる。

$$x_4 = \pi_4(10) \qquad x_3 = \pi_3(10-x_4) \qquad x_2 = \pi_2(10-x_4-x_3)$$

$$x_1 = \pi_1(10-x_4-x_3-x_2) = 10-x_4-x_3-x_2$$

$u^1(c) \ = \ r_1(c)$ より

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u^1(c)$	0	0.28	0.45	0.65	0.78	0.90	1.02	1.13	1.23	1.32	1.38

$(\pi_1(c) = c)$

$u^2(c) \ = \ \max_{x=0,1,\ldots,c} \{r_2(x)+u^1(c-x)\}$ より

$$\begin{aligned} u^2(0) &= \max_{x=0} \{r_2(x)+u^1(0-x)\} \ = \ r_2(0)+u^1(0) \ = \ 0, \quad \pi_2(0)=0 \\ u^2(1) &= \max_{x=0,1} \{r_2(x)+u^1(1-x)\} \ = \ (r_2(0)+u^1(1)) \vee (r_2(1)+u^1(0)) \\ &= (0+0.28) \vee (0.25+0) \ = \ 0.28, \quad \pi_2(1)=0 \\ u^2(2) &= \max_{x=0,1,2} \{r_2(x)+u^1(2-x)\} \\ &= (r_2(0)+u^1(2)) \vee (r_2(1)+u^1(1)) \vee (r_2(2)+u^1(0)) \\ &= (0+0.45) \vee (0.25+0.28) \vee (0.41+0) \ = \ 0.53, \quad \pi_2(2)=1 \end{aligned}$$

同様に続けて

$$
\begin{aligned}
u^4(10) &= \max_{x=0,1,\ldots,10} \{r_4(x) + u^3(10-x)\} \\
&= (r_4(0) + u^3(10)) \vee (r_4(1) + u^3(9)) \vee \cdots \vee (r_4(10) + u^3(0)) \\
&= 1.81, \quad \pi_4(10) = 2
\end{aligned}
$$

最大値は

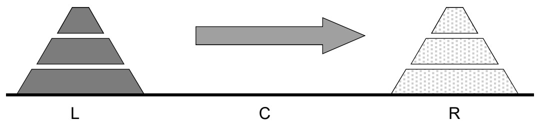
$$u^4(10) \ = \ 1.81$$

最適配分は

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \ = \ (4, 3, 1, 2)$$

□

ハノイの塔の解法（これも動的計画）



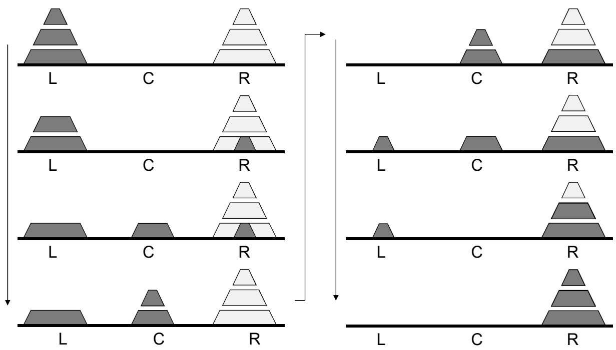
直径の異なる3枚の円板をＬからＲへ移したい

・一度に動かせるのは1枚

・円盤を置ける位置はL, C, Rの3箇所のみ

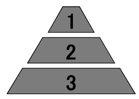
・円盤は直接もしくは自身より大きな円盤の上にのみ置くことが可能

L → R



移動規則

$(\{1,2,3\}, O, D)$: O から D へ $\{1,2,3\}$ を移す



$$
\begin{aligned}
& (\{1,2,3\}, L, R) \\
=\ & (\{1,2\}, L, C), (\{3\}, L, R), (\{1,2\}, C, R) \\
=\ & (\{1\}, L, R), (\{2\}, L, C), (\{1\}, R, C), \\
& (\{3\}, L, R), \\
& (\{1\}, C, L), (\{2\}, C, R), (\{1\}, L, R)
\end{aligned}
$$

再帰的！