１．２．配分問題と最適化

配分問題とは

- 資源には限りがある
- 資源には複数の用途（仕事）がある

各資源をどの用途に用いるのがよいか？

LP
NLP
IP
DP
メタ戦略

例）

- 割当問題：資源と用途が１対１に対応
- 輸送問題：資源と用途に１対１対応がない
- 製品ミックス問題：用途の選択も必要

輸送問題

工場 A_1, A_2 で生産した製品を、取引先 B_1, B_2, B_3 へ納入する。注文量は

$$B_1 : 70 \qquad B_2 : 40 \qquad B_3 : 60$$

で、各工場で次の量だけ生産することにした：

$$A_1 : 90 \qquad A_2 : 80$$

工場から取引先までの製品１単位あたりの輸送コストは

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	7	12
A_2	11	6	3

で与えられる。このとき、総輸送コストが最小となるような輸送計画を立てよ。

工場 A_i から取引先 B_j への輸送量を x_{ij} とすれば、

注文量：

$B_1 : 70 \quad B_2 : 40 \quad B_3 : 60$

$$x_{11} + x_{21} = 70$$
$$x_{11} + x_{21} = 40$$
$$x_{11} + x_{21} = 60$$

生産量：

$A_1 : 90 \quad A_2 : 80$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$$

輸送コストは

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	7	12
A_2	11	6	3

$$4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}$$

$$\text{Minimize} \;\; 4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}$$

subject to

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + x_{12} + x_{13} &=& 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &=& 80 \\ x_{11} + x_{21} &=& 70 \\ x_{11} + x_{21} &=& 40 \\ x_{11} + x_{21} &=& 60 \\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23} &\geq& 0 \end{array}$$

栄養の問題

複数の食品を組み合わせて、最低限必要な栄養を確保し、かつ費用を最小限に抑えたい。

$\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$: n 種類の食品　　$\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots, \mathrm{D}_m$: m 種類の栄養素

$c_1, c_2, \ldots, c_n$: 各食品の１単位当たりの価格
$x_1, x_2, \ldots, x_n$: 各食品の摂取量
$a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$: 各食品１単位に含まれる栄養素 j の含有量
$b_1, b_2, \ldots, b_m$: 各栄養素の必要最低量

総費用：$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ を最小にしたい。

各栄養素の必要量を満たさねばならない。

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

食品購入量は０以上である。

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

線形計画（ Linear Programming:LP ）

n 個の変数に対して１次不等式もしくは１次等式による制約が与えられた際、ある１次式の最大化もしくは最小化を考える問題

線形計画問題の一般形は次で与えられる：

$$\text{Maximize} \;\; c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

subject to

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

用語の定義

Maximize $\boxed{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n}$ ← 目的関数 (objective function)

subject to

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}}$$

← 制約 (constraints)

$\boxed{x_i \ge 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n}$ ← 非負条件 (nonnegative condition)

〔**注**：制約式と言った場合、非負条件を含める場合も多い。〕

実行可能解：制約式および非負条件を満たす点
(feasible solutions)

実行可能領域：実行可能解全体
(実行可能集合)
(feasible region)

単体法(Simplex Method)

Maximize $3x_1 + 5x_2$

subject to

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \le & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \le & 24 \\ x_1 & + & 3x_2 & \le & 21 \end{array}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0$

↓ **スラック変数の導入**

Maximize $3x_1 + 5x_2$

subject to

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$

Maximize $\boxed{3}x_1 + 5x_2$

subject to

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 24 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \end{array}$$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$

ここで

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (0,\ 0,\ 10,\ 24,\ 21)$$

は明らかに制約を満たす。 この時の目的関数値は 0 である。

目的関数における x_1 の係数が正であることから、x_1 を増加させれば目的関数値は増加することが分かる。

制約を満たす範囲で x_1 はどこまで増やせるか？

Maximize $3x_1 + 5x_2$

subject to

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 24 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \end{array}$$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$

↓

Maximize

subject to

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (10,\ 0,\ 0,\ 4,\ 11)$$

は明らかに制約を満たす。

Maximize $3x_1 + 5x_2$

subject to

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 24 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \end{array}$$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$

↓ **単体表へ**

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
I							

---

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
I	10	1	1	1	0	0	
	24	2	3	0	1	0	
	21	1	3	0	0	1	
	0	−3	−5	0	0	0	

- 最終行から負値の列を選択
- その列で b_i 列を割って θ 列へ
- θ 列内最小値の行を選択

↓ **掃き出し法**

II	10	1	1	1	0	0	10

II	10	1	1	1	0	0	10
	4	0	1	-2	1	0	4
	11	0	2	-1	0	1	11/2
	30	0	-2	3	0	0	
III	6	1	0	3	-1	0	2
	4	0	1	-2	1	0	
	3	0	0	3	-2	1	1
	38	0	0	-1	2	0	
IV	3	1	0	0	1	-1	
	6	0	1	0	$-1/3$	$2/3$	
	1	0	0	1	$-2/3$	$1/3$	
	39	0	0	0	$4/3$	$1/3$	

（負の場合は無視）

最終行に負の値がなくなったら終了！

最大値を与える x_1 は $x_1 = 3$

最大値を与える x_2 は $x_2 = 6$

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
IV	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	0	0	1	-1	
	$\boxed{6}$	0	$\boxed{1}$	0	$-1/3$	$2/3$	
	1	0	0	1	$-2/3$	$1/3$	
	39	0	0	0	$4/3$	$1/3$	

最大値

単体法の手順

ピボット成分を定める

・最終行から負値の列を選択（$\Longrightarrow$ ピボット列）

・その列で b_i 列を割って θ 列へ（ピボット列の非正の値は無視）

・θ 列内最小値の行を選択（$\Longrightarrow$ ピボット行）

掃き出し法

・ピボット成分を１に（ピボット成分の値でその行を割る）

・ピボット列のピボット成分以外を全て０へ

（行単位で足したり引いたりする）

判定と結果

・最終行に負の値があれば上記の手順を繰り返す

・負の値がなくなれば終了

左下隅の値が最大値

表から最大値を与える変数の値を読み取る

問題2.1

次の線形計画問題を単体表を用いて解け。

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } 3x_1 + 5x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\quad x_1 + x_2 \le 10 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ &\quad x_1 + 3x_2 \le 21 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

単体法に関する補足

- ピボット列の選択の仕方によっては単体法が終了しない場合がある。
  - このような現象は巡回と呼ばれる。
  - 最小添字規則により回避可能。
    - ピボット列の選択時に複数の候補があれば最小の添字のものを選択
    - ピボット行を決める際に複数の候補があれば、基底変数でなくなるものとして、最小の添字のものを選択
  - 実質的には、滅多に起こらない。

- ピボット列として選んだ列が（目的関数行をのぞき）すべて0以下のときは無限解。