

2. 線形動的システムの 時系列モデリング

2.1 モデリングとは

モデル(model)

対象の本質的な部分に焦点を当て特定の形式で表現したもの.

モデリング(modeling)

対象とするシステムあるいは時系列（信号）の振る舞いを特徴付ける
モデルを構築すること.

- モデリングという過程は、方法論だけでなくエンジニアの知識と経験に大きく左右される.
- モデルは本物と完全に一致するものではなく、モデルを構築する人物が注目している特徴と一致しているものであればよい.
- モデルには本物とは似つかない「**モデルの不確かさ**」が存在する.

2.2 時系列のモデリングとシステムのモデリング

時系列のモデリング

対象とする時系列を線形システムの入力としてモデリング



システムのモデリング

対象とするシステムのモデルをそのシステムの入出力信号から構築



2.3 線形動的システムを用いた時系列のモデリング



対象とする時系列データを $\{y(k), k = 1, 2, \dots, N\}$ とする.
データは適切なサンプリング周期 T を用いて離散化された信号,
 k は時間を表す整数, N は利用できるデータの数.



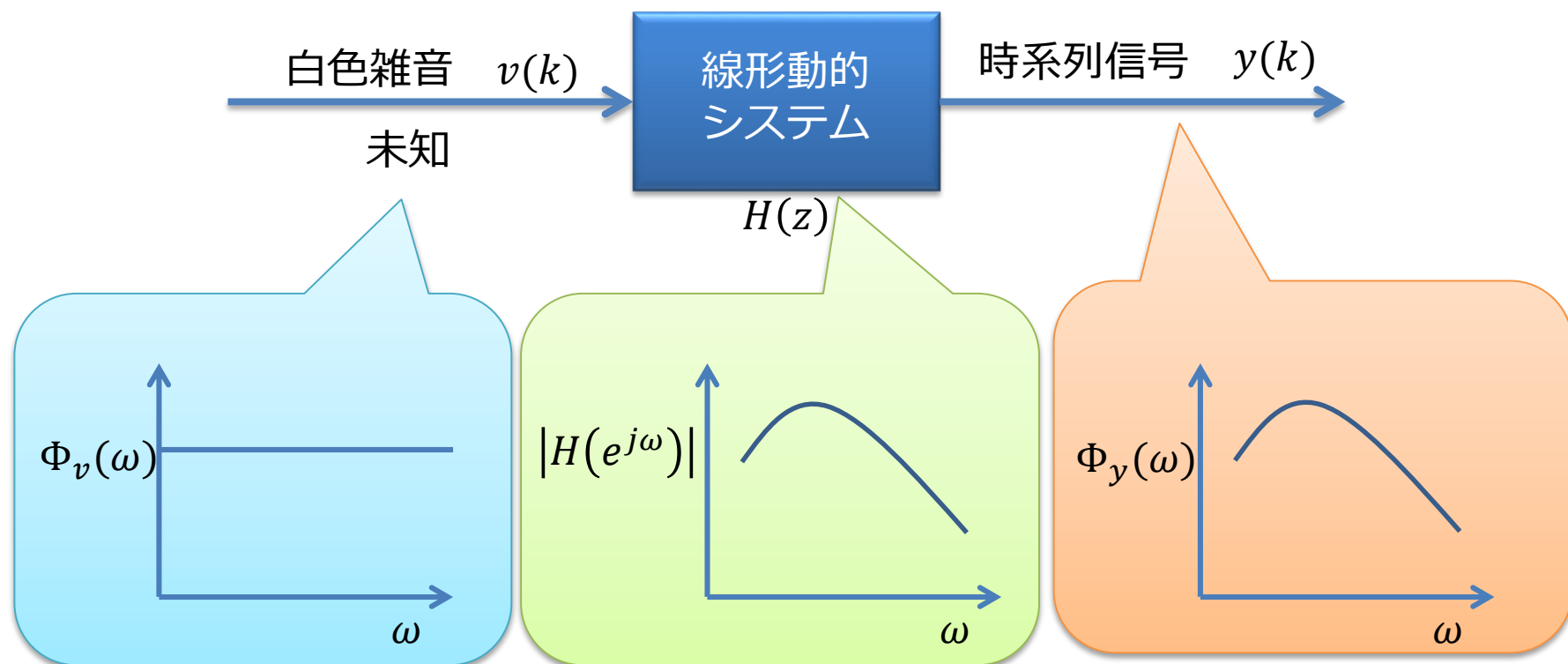
入力時系列信号 $v(k)$ は**白色雑音** (white noise) とする.
 $v(k)$ は**正規性**を有し, 平均0, 分散1である.

「ある時系列 $v(k)$ が何らかの線形離散時間動的システムを
通過して $y(k)$ が得られた」としてモデリング

$$y(k) = H(z)v(k)$$

z : 時間推移演算子(time shift operator)
e.g. $zy(k) = y(k + 1)$

2.3 線形動的システムを用いた時系列のモデリング



白色雑音のパワースペクトル密度関数は周波数に対して一定値をとるので、ある周波数特性を持つシステム $H(z)$ を通過すると、時系列 $y(k)$ のパワースペクトル密度は、システムの周波数特性と同じ情報を持つ。

∴ (時系列信号の動特性解析) = (システムの動特性解析)

2.3 線形動的システムを用いた時系列のモデリング

自己相関関数 (auto-correlation function)

時系列 $y(k)$ の自己相関関数 $\phi_y(\tau) = E[y(k)y(k + \tau)]$ E : 期待値 τ : 遅れ (lag)

具体的には

$$\phi_y(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} y(k)y(k + \tau) & \tau \geq 0 \\ \phi_y(-\tau) & \tau < 0 \end{cases}$$

連続信号の場合

$$\phi_y(t, t + \tau) = E[y(k)y(k + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

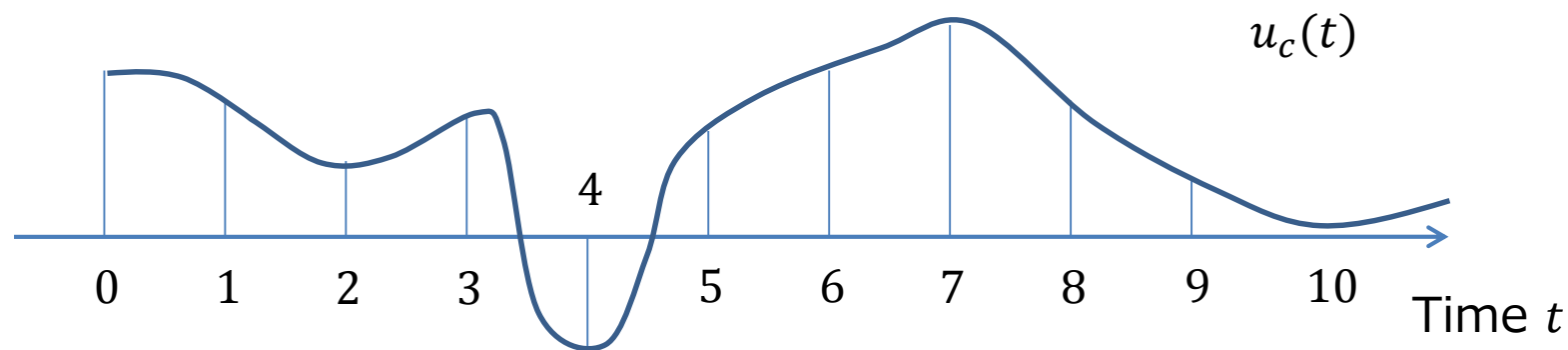
白色雑音

時系列 $y(k)$ の自己相関関数が $\phi_y(\tau) = \begin{cases} \sigma_y^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$ を満たすとき

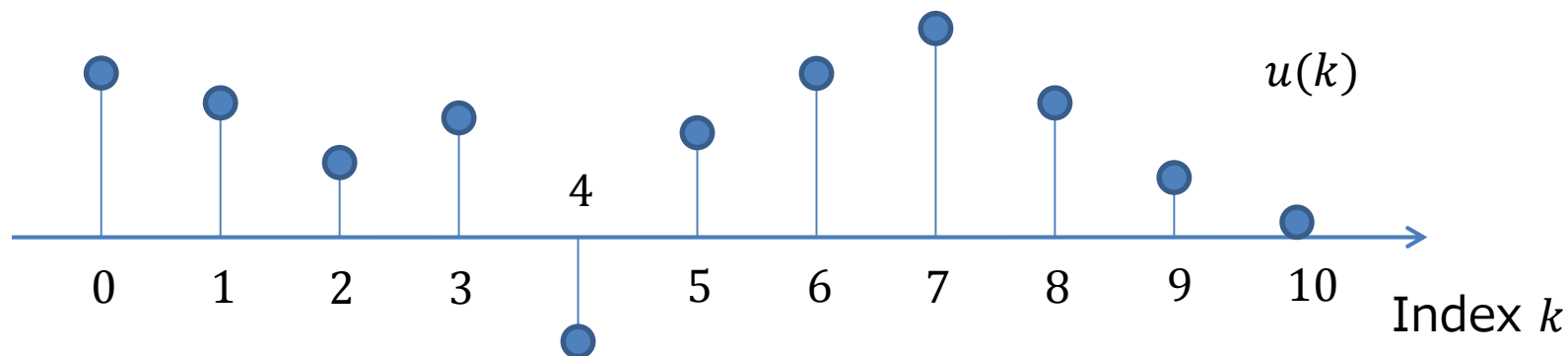
$y(k)$ を白色雑音という。ただし, σ_y^2 は時系列 $y(k)$ の分散.

2.4 LTI (Linear Time-Invariant) システムの表現

連続時間信号



離散時間信号



2.4 LTIシステムの表現

連続時間LTIシステム
の応答

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau = g(t) * u(t)$$

インパルス応答

入力

出力

離散時間LTIシステム
の応答

$k = 0, 1, 2, \dots$

T サンプルング周期

$$y(kT) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(kT - \tau)d\tau = g(kT) * u(kT)$$

インパルス応答

入力

出力

2.4 LTIシステムの表現

連続時間LTIシステム
の応答

ラプラス変換の表現

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$$

離散時間LTIシステム
の応答

z変換の表現

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k}$$

2.4 LTIシステムの表現

連続時間LTIシステムの応答

LTIシステムの線形定係数常微分方程式表現

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned}$$

ラプラス変換の表現

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) \\ = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) \end{aligned}$$

離散時間LTIシステムの応答

LTIシステムの線形定係数差分方程式表現

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_m u(k-m) \end{aligned}$$

z変換の表現

$$\begin{aligned} (1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) Y(z) \\ = (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}) U(z) \end{aligned}$$

2.4 LTIシステムの表現

連続時間LTIシステム の応答

ラプラス変換の表現

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

微分オペレータを利用した表現

$$A(p)y(t) = B(p)u(t)$$

$$p \triangleq \frac{d}{dt}$$

$$A(p) \triangleq p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

$$B(p) \triangleq b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

離散時間LTIシステム の応答

z変換の表現

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

シフトオペレータを利用した表現

$$qy(k) \triangleq y(k+1)$$

$$q^{-1}y(k) = y(k-1)$$

$$A(q)y(k) = B(q)u(k)$$

$$A(q) \triangleq 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q) \triangleq b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_m q^{-m}$$

2.4 確率過程のスペクトル分解とARMAモデル

離散時間LTIシステムの
応答

シフトオペレータを利用した表現

$$q \triangleq z$$

$$u(k) \rightarrow v(k)$$



$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})v(k)$$

$$zy(k) \triangleq y(k+1), \quad z^{-1}y(k) = y(k-1)$$

$$A(z^{-1}) \triangleq 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}$$

$$B(z^{-1}) \triangleq b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}$$

$v(k)$: 平均値0, 分散1の正規性白色雑音

ARMAモデル(自己回帰移動平均モデル: Auto-Regressive Moving Average model)

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(k)$$

$v(k)$
白色雑音

$$\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$y(k)$
時系列

2.4 確率過程のスペクトル分解とARMAモデル

例題

$$y(k) = \frac{z + 0.2}{z + 0.5} v(k)$$

$$y(k) = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} v(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(k) \quad \begin{array}{l} A(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1} \\ B(z^{-1}) = 1 + 0.2z^{-1} \end{array}$$

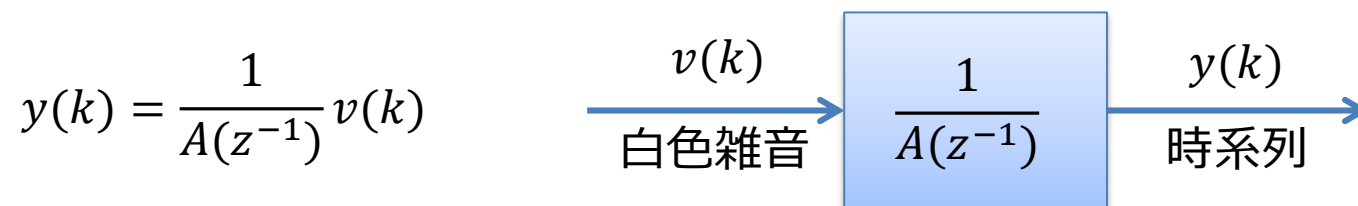


$$y(k) = -0.5y(k-1) + v(k) + 0.2v(k-1)$$

確率差分方程式(stochastic difference equation)

2.5 A RモデルとM Aモデル

ARモデル(自己回帰モデル : Auto-Regressive model)



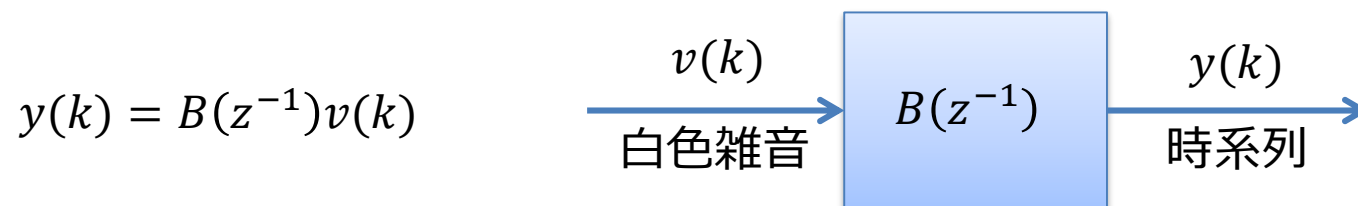
例 : AR(1)モデル

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1}$$

$$(1 + a_1 z^{-1})y(k) = v(k) \rightarrow y(k) = -a_1 y(k-1) + v(k)$$

2.5 A RモデルとM Aモデル

MAモデル(移動平均モデル : Moving Average model)

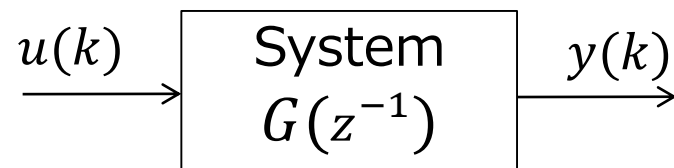


例 : MA(1)フィルタ

$$B(z^{-1}) = 0.5 + 0.5z^{-1}$$

$$y(k)/(0.5 + 0.5z^{-1}) = v(k) \rightarrow y(k) = \frac{v(k) + v(k-1)}{2}$$

2.5 A RモデルとM Aモデル



制御入力 $u(k)$ とノイズが混入しない場合の出力 $y(k)$ は線形差分方程式で関連付けることができる。

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_b) \end{aligned}$$

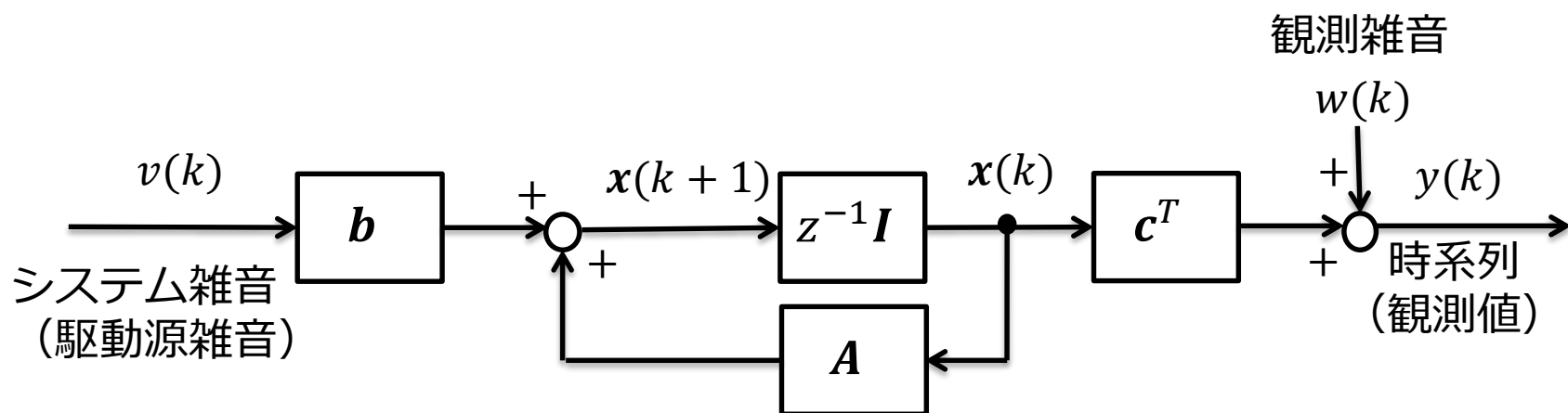
時間推移演算子 $z^{-i} y(k) = y(k-i)$

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 z^{-1} y(k) + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a} y(k) \\ = b_0 u(k) + b_1 z^{-1} u(k) + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b} u(k) \end{aligned}$$

2.6 時系列の状態空間モデル

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v(k) \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

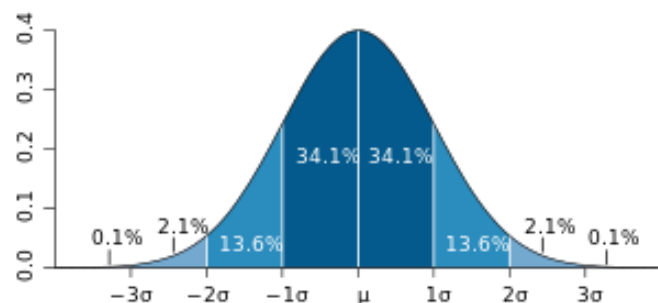
$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + w(k) \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$



2.6 時系列の状態空間モデル

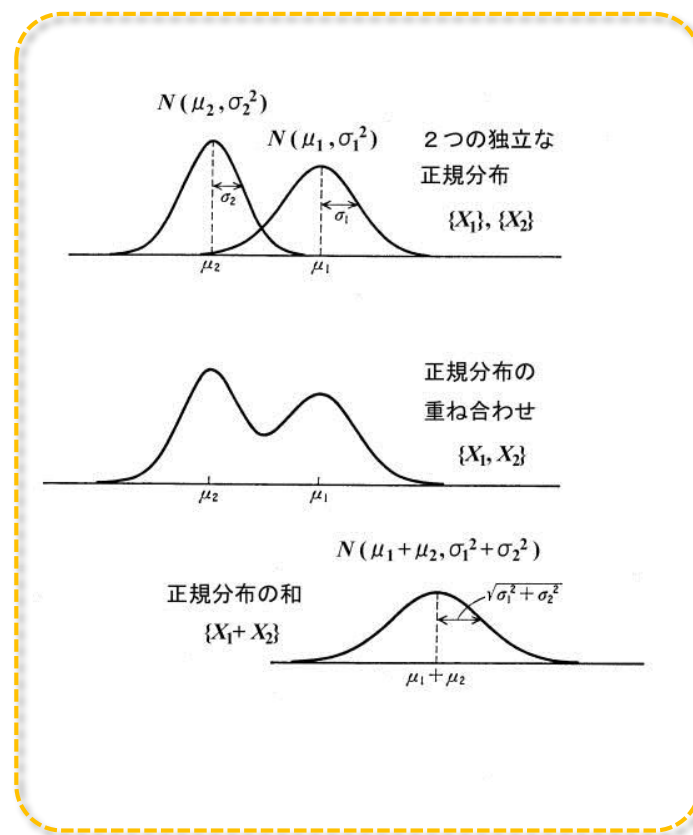
正規分布（ガウス分布）の性質

- 1 平均と分散で，分布が確定する。
- 2 線形変換で標準正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ にできる。
- 3 中心極限定理に基づき，多くの確率現象を $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ で近似できる。
- 4 正規分布の確率密度関数のフーリエ変換は同じ形式の関数になる。
- 5 正規分布の合成は正規分布になる。



標準正規分布の確率密度

±1σ 以内 68.27%, ±2σ 以内 95.45%,
±3σ 以内 99.73%



$$p(x) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

$$p(x) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{P}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}$$

2.6 時系列の状態空間モデル

確率過程 $\{x(t)\}$ の平均値

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

E : 期待値

 $p(x)$: $x(t)$ の確率密度関数確率過程 $\{x(t)\}$ の分散 (variance)

$$\phi_x(0) = E[x^2(t)] = \sigma_x^2 \quad (\text{遅れが0の時の自己相関関数})$$

確率過程 $\{x(t)\}$ の標準偏差 (standard deviation)

$$\sigma_x$$

定常性

強定常(strongly stationary) : 確率過程の確率分布が時刻に無関係であること.

弱定常(weakly stationary) : 確率過程の平均値と自己相関関数が時刻に依存しないこと.

2.6 時系列の状態空間モデル

エルゴード性

$$\mu_{x_i} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) dt$$

標本過程 $x_i(t)$ の時間平均

$$\phi_{x_i}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) x_i(t + \tau) dt$$

標本過程 $x_i(t)$ の自己相関関数

$\mu_{x_i} = \phi_{x_j}(\tau)$ (i, j は標本過程のインデックス)
である場合をエルゴード性 (ergodic) であるという.

(集合平均と時間平均が一致する)

定常エルゴード過程

多くの場合, 確率過程を定常エルゴード過程と見なして定式化がなされる.

2.6 時系列の状態空間モデル

中心極限定理 (central limit theorem)

整数 M が十分大きいとき、独立で同一の分布に従う確率変数 x_1, x_2, \dots, x_M の期待値が μ 、標準偏差が σ であれば、これらの確率変数の総和として与えられる確率変数

$$y_M \triangleq x_1 + x_2 + \dots + x_M = \sum_{i=1}^M x_i$$

は、期待値が μM 、標準偏差が $\sigma\sqrt{M}$ の正規確率変数で近似できる。

$$p\left(\frac{y_M - \mu M}{\sigma\sqrt{M}} \leq \alpha\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

すなわち、母集団の分布がどんな分布であっても、標本平均と真の平均との誤差は標本数を大きくしたとき近似的に正規分布に従う。 標本平均：ある母集団から無作為抽出された標本の平均

大数の法則 (law of large numbers)

同一の期待値 μ と分散 σ^2 を持つ N 個の確率変数 x_1, x_2, \dots, x_N と正の実数 λ に対して、次式が成り立つ。

$$p\left(\left|\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} - \mu\right| \geq \lambda\right) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2 N}$$

すなわち、期待値が未知の確率変数に対して、数多くの独立な試行を繰り返して実現値を得れば得るほど、その実現値の算術平均は確率変数の期待値に近づいていく。

2.8 測定データに基づく時系列モデリング

ARモデルを用いた同定

時系列モデリングとは

時系列データ $\{y(k)\}$ が観測されたとき, そのデータに基づいてARモデルのパラメータ $\{a_i\}$ を推定する問題

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \cdots - a_ny(k-n) + v(k)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$$

推定すべき未知パラメータベクトル

$$y(k) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k) + v(k)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ \cdots \ -y(k-n)]^T$$

回帰ベクトルベクトル

2.8 測定データに基づく時系列モデリング

ARモデルを用いた同定

評価関数を最小化する $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を推定値とする.

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{y(k) - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(k)\}^2$$

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y^2(k) - 2\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(k)y(k) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) - 2\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k)y(k) \right) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= c_N - 2\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{h}_N + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{G}_N \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

2.8 測定データに基づく時系列モデリング

ARモデルを用いた同定

$$J_N = c_N - 2\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{h}_N + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{G}_N \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

\mathbf{G}_N が正則であれば J_N は最小値をもつ。

$$\frac{dJ_N}{d\hat{\boldsymbol{\theta}}} = 2\mathbf{G}_N \hat{\boldsymbol{\theta}} - 2\mathbf{h}_N = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}_N \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{h}_N$$

正規方程式 (normal equation)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{h}_N$$

一括処理最小二乗推定法
(batch least-squares estimation method)

テプリッツ行列 (Toeplitz matrix)

$$\mathbf{G}_N = \begin{bmatrix} \phi_y(0) & \phi_y(1) & \cdots & \phi_y(n-1) \\ \phi_y(1) & \phi_y(0) & \cdots & \phi_y(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_y(n-1) & \phi_y(n-2) & \cdots & \phi_y(0) \end{bmatrix}$$

自己相関関数

$$\phi_y(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k-\tau)$$

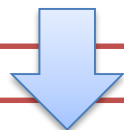
2.8 測定データに基づく時系列モデリング

ARMAモデルを用いた同定

例

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = v(k) + b_1 v(k-1) + b_2 v(k-2)$$

$$k = 1, 2, \dots, N \quad b_0 = 1$$



$$y(k) = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ v(k-1) \\ v(k-2) \end{bmatrix} + v(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(k) + v(k)$$

回帰ベクトル $\boldsymbol{\varphi}(k)$ に白色雑音が含まれているが、これらは推定可能な量ではない。
パラメータ推定問題が非線形最適化問題である。

1. Levinson-Durbin アルゴリズムによってARパラメータのみ求める。
2. 求まったARパラメータを固定し、MAパラメータを近似的に求める。

2.8 測定データに基づく時系列モデリング

状態空間モデルを用いた同定

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + w(k)$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ を推定する問題

- 部分空間同定法
(subspace identification method)
- 共分散確率部分空間同定法
(covariance stochastic subspace identification method)



ARXモデルに対するパラメータ推定には
カルマンフィルタが利用可能