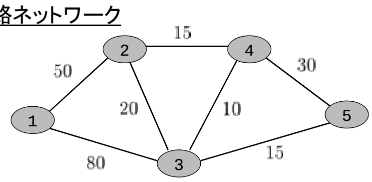
1.3. 最適経路問題

- 最短路
  - 最も距離が短い道は？
  - 最も早く着く道は？
- その他
  - 初心者ドライバーに最も優しい道は？
    （道路幅、右折回数などを数値化して評価）
  - ある時刻までに着く可能性が最も高い道は？
    （到着確率最大化）

1.3.1. 最短路問題

<u>経路ネットワーク</u>



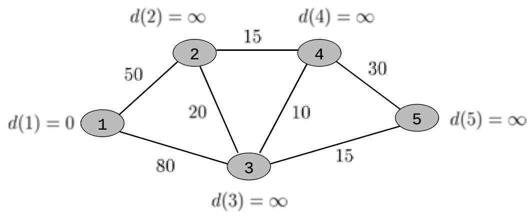
1 から 5 へ行きたい！ 最も近い道は？

⇧

ダイクストラ法

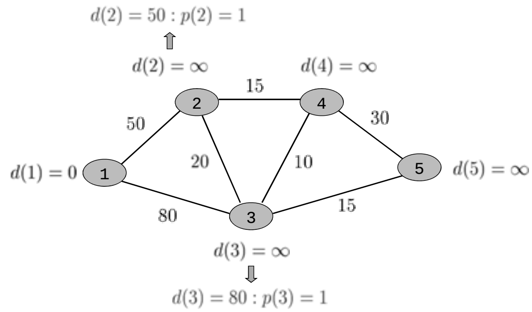
初期化

$d(i)$：節点 1 から節点 i への（その時点での）最短距離



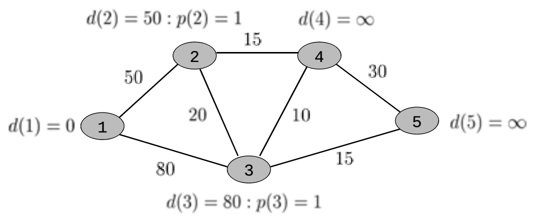
(次の $d(i)$) $=\min\{d(j)+(j$ から i への距離) : j は i と接する節点 $\}$

1回目のくり返し



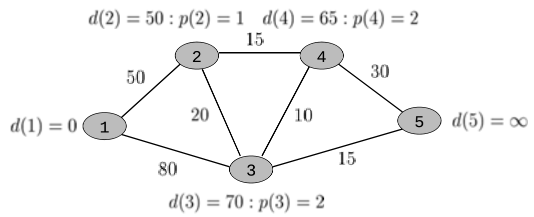
(次の $d(i)$) $=\min\{d(j)+(j$ から i への距離) : j は i と接する節点 $\}$

2回目のくり返し



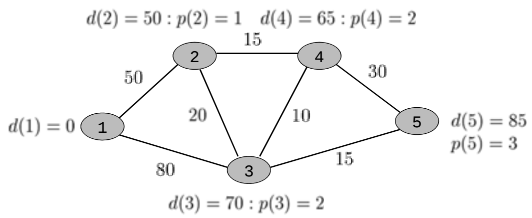
(次の $d(i)$) $=\min\{d(j)+(j$ から i への距離) : j は i と接する節点 $\}$

3回目のくり返し



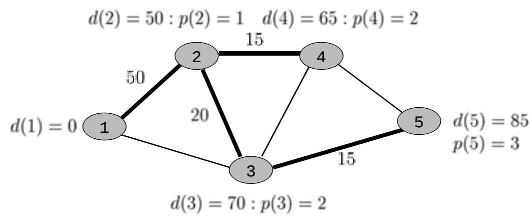
(次の $d(i)$) $=\min\{d(j)+(j$ から i への距離) : j は i と接する節点 $\}$

4回目のくり返し



更新される節点がなくなったら終了！

最短路木



最短距離：85　　最適経路：$1 \to 2 \to 3 \to 5$

ダイクストラ法

N を節点集合、A を枝集合とし、枝の評価関数を $c : A \to \mathbf{R}^+$ とする。

始点からすべての節点への最短経路問題群を考える。

各節点 x に対し、始点からの最短路長を $d(x)$ であらわす。
（すなわち、$d(x)$ は問題群に対する最適値をあらわす）

このとき、$d(x)$ は次式を満たす。

$$d(x) \;=\; \min\{d(y) + c(y,x) \mid e = (y,x) \in A\}$$

アルゴリズム（ダイクストラ法）

始点 $s \in N$ に対する、ダイクストラ法は次の手順となる。

Step 1（初期化）　$d(s) = 0,\ d(x) = +\infty\ (x \in N - \{s\})$ とおき、$P = \phi$ とおく。

Step 2（反復）　次式を満たす $x^* \in N - P$ を一つ選ぶ。

$$d(x^*) = \min\{d(x) \mid x \in N - P\}$$

$P \leftarrow P \cup \{x^*\}$ とおき、枝 $e = (x^*, y) \in A; y \in N - P$ に対し、

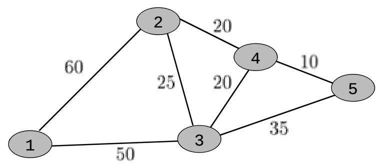
$$d(y) = \min\{d(y), d(x^*) + c(e)\}$$

と更新する。ここで、値が更新されれば、$p(y) = x^*$ とおく。

Step 4（終了判定）　$P = N$ なら終了、そうでなければ Step2 へ。

例題1.3.1

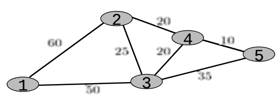
1 から 5 へ行きたい！ 最も近い道は？



$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

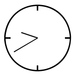
Step 1　$d(1) = 0,\ \ d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = \infty,\ \ P = \phi$
Step 2　$x^* = 1$
Step 3　$P = \{1\},\ \ d(2) = \min(\infty, 60) = 60,\ \ p(2) = 1$
$d(3) = \min(\infty, 50) = 50,\ \ p(3) = 1$
Step 4　$P \neq N$　Step 2 へ

Step 2　$x^* = 3$
Step 3　$P = \{1, 3\},\ \ d(2) = \min(60, 50 + 25) = 60,\ \ p(2) = 1$
$d(4) = \min(\infty, 50 + 20) = 70,\ \ p(4) = 3$
$d(5) = \min(\infty, 50 + 35) = 85,\ \ p(5) = 3$
Step 4　$P \neq N$　Step 2 へ
Step 2　$x^* = 2$
Step 3　$P = \{1, 2, 3\},\ \ d(4) = \min(70, 60 + 20) = 70,\ \ p(4) = 3$
Step 4　$P \neq N$　Step 2 へ
Step 2　$x^* = 4$
Step 3　$P = \{1, 2, 3, 4\},\ \ d(5) = \min(85, 70 + 10) = 80,\ \ p(5) = 4$
Step 4　$P \neq N$　Step 2 へ
Step 2　$x^* = 5$
Step 3　$P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Step 4　$P = N$　終了



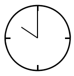
最短距離：$(d(5) =)\ 80$
最適経路：$p(3) = 1 \ \to\ p(4) = 3 \ \to\ p(5) = 4 \ \to\ 5$

1.3.2. 到着確率最大化



9:40

１８分 ： ０．５
２０分 ： ０．５



10:00

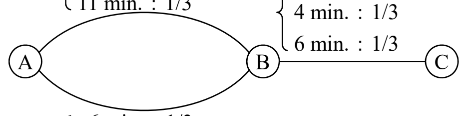
１２分 ： ０．５
２２分 ： ０．５

例:最適路が変わる？

P(T(A, B) ≦ 8) = 0

North Root
9 min. : 1/3
10 min. : 1/3
11 min. : 1/3

2 min. : 1/3
4 min. : 1/3
6 min. : 1/3



South Root
6 min. : 1/3
10 min. : 1/3
14 min. : 1/3

$\boxed{\text{P(T(A, B) ≦ 8) = 1/3}}$

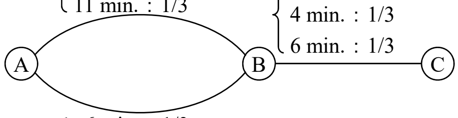
Optimal

Optimal

$\boxed{\text{P(T(A, B, C) ≦ 15) = 7/9}}$

North Root
9 min. : 1/3
10 min. : 1/3
11 min. : 1/3

2 min. : 1/3
4 min. : 1/3
6 min. : 1/3



South Root
6 min. : 1/3
10 min. : 1/3
14 min. : 1/3

P(T(A, B, C) ≦ 15) = 5/9

定式化

N を節点集合、$A \subset N \times N$ を枝集合とする。また、各枝 $(x, y) \in A$ に対する所要時間を確率変数 $T(x, y)$ であらわす。

このとき、経路 $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ に対する所要時間は

$$T(x_1, x_2) + T(x_2, x_3) + \cdots + T(x_{n-1}, x_n)$$

とあらわされる。

よって、出発地を S、目的地を G、制限時間を M としたときの到着確率最大化問題は次のように定式化される：

$$(P)\quad \max\ P\Big[T(S, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_{n-1}, x_n) + T(x_n, G) \le M\Big]$$

$$\text{s.t.}\quad \{S,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ G\} : S\text{-}G\text{-経路},\quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

目的関数の変換

ここで、特性関数

$$\chi_{(-\infty, M]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \le M) \\ 0 & (x > M) \end{cases}$$

を導入すると

$$\begin{aligned} & P\Big[T(S, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_n, G) \le M\Big] \\ = & \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{n+1} : \\ t_{i_1}(S, x_1) + t_{i_2}(x_1, x_2) + \cdots + t_{i_{n+1}}(x_n, G) \le M}} \Big\{p_{i_1}(S, x_1) \times p_{i_2}(x_1, x_2) \times \cdots \times p_{i_{n+1}}(x_n, G)\Big\} \\ = & \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}} \chi_{(-\infty, M]}\Big(t_{i_1}(S, x_1) + \cdots + t_{i_{n+1}}(x_n, G)\Big) \times \Big\{p_{i_1}(S, x_1) \times \cdots \times p_{i_{n+1}}(x_n, G)\Big\} \\ = & E\Big[\chi_{(-\infty, M]}(T(S, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_n, G))\Big]. \end{aligned}$$

埋め込み問題

$(P) \quad \Longleftrightarrow$

$$(P_0)\quad \text{Max}\ E\Big[\chi_{(-\infty, M]}(T(S, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_n, G))\Big]$$

$$\text{s.t.}\quad \{S,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ G\} : S\text{-}G\text{-経路},\quad n = 0, 1, \ldots.$$

埋め込み問題

$$(P_\lambda)\quad \text{Max}\ E\Big[\chi_{(-\infty, M]}(\lambda + T(S, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_n, G))\Big]$$

$$\text{s.t.}\quad \{S,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ G\} : S\text{-}G\text{-経路},\quad n = 0, 1, \ldots.$$

再帰式

部分問題群

$$w(G;\lambda) = E\Big[\chi_{(-\infty,M]}(\lambda)\Big]$$

$$w(x;\lambda) = \operatorname*{Max}_{\substack{x,\ x_1,\ \ldots,\ x_l, G:\\ x\text{-}G\text{-経路}}} E\Big[\chi_{(-\infty,M]}(\lambda + T(x,x_1) + \cdots + T(x_n,G))\Big] \qquad \Big(x \in N\backslash\{G\}\Big)$$

再帰式

$$w(G;\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \le M \\ 0 & \lambda < M \end{cases}$$

$$w(x;\lambda) = \operatorname*{Max}_{(x,y)\in A} \sum_i w\Big(y; \lambda + t_i(x,y)\Big) \times p_i(x,y) \qquad \Big(x \in N\backslash\{G\}\Big)$$

再帰式の計算手順

Step 1: $w(x;\lambda) = 0 \ \ (x \in N\backslash\{G\})$, $w(G;\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \le M \\ 0 & \lambda > M. \end{cases}$ とおく

Step 2: 各 $x \in N\backslash\{G\}$ に対し

$$w'(x;\lambda) = \operatorname*{Max}_{y;(x,y)\in N} E\Big[w(y;\lambda + T(x,y))\Big]$$

を計算し、右辺の最大値を与える節点の集合を $Y_x^*(\lambda)$ とおく。

Step 3: すべての $(x,\lambda) \in N \times \mathbf{R}$ に対し $w'(x;\lambda) \le w(x;\lambda)$ が成り立てば終了。

Step 4: $w'(x;\lambda) > w(x;\lambda)$ を満たす各 $(x,\lambda) \in N \times \mathbf{R}$ に対し

$$w(x;\lambda) = w'(x;\lambda), \quad \pi^*(x;\lambda) = Y_x^*(\lambda),$$

と更新し Step 2 へ。

最適解の導出

元の問題は

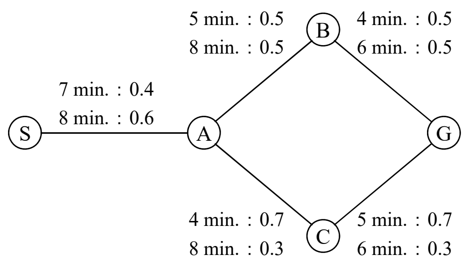
$$w(S;0) = \max_{\substack{S,x_1,\ldots,x_l,G:\\ S\text{-}G\text{-パス}}} E\Big[\chi_{(-\infty,M]}(0 + T(S,x_1) + \cdots + T(x_n,G))\Big]$$

と同値なので、最適値（最大到着確率）は $w(S;0)$ で与えられる。

一方、最適経路 $P^* = \{S,\ x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*,\ G\}$ は、次のように生成される：

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 = 0 \\
&x_1^* = \pi^*(S;\lambda_0), \quad \lambda_1 = \lambda_0 + T(S,x_1^*) \\
&x_2^* = \pi^*(x_1^*;\lambda_1), \quad \lambda_2 = \lambda_1 + T(x_1^*,x_2^*) \\
&\quad \vdots \\
&x_n^* = \pi^*(x_{n-1}^*;\lambda_{n-1}).
\end{aligned}$$

例題1.3.2



$N = \{S, A, B, C, G\}$

$A = (S,A), (A,B), (A,C), (B,G), (C,G)$

$M = 20$

とする。

Step 1

$$w(x;\lambda) = 0.0 \ \ (x = S, A, B, C) \quad \text{and} \quad w(G;\lambda) = \begin{cases} 1.0 & \lambda \le 20 \\ 0.0 & \lambda > 20. \end{cases}$$

Step 2

$$\begin{aligned}
w'(B;\lambda) &= \operatorname*{Max}_{y;(B,y)\in N} E[w(y;\lambda + T(B,y)] \\
&= \operatorname{Max}(E\Big[w(A;\lambda + T(B,A)\Big], E\Big[w(G;\lambda + T(B,G)\Big])
\end{aligned}$$

ここで

$$E\Big[w(A;\lambda + T(B,A)\Big] = 0$$

$$\begin{aligned}
&E\Big[w(G;\lambda + T(B,G)\Big] \\
&= \begin{Bmatrix} 1.0 & (\lambda + 4 \le 20) \\ 0.0 & (\lambda + 4 > 20) \end{Bmatrix} \times 0.5 + \begin{Bmatrix} 1.0 & (\lambda + 6 \le 20) \\ 0.0 & (\lambda + 6 > 20) \end{Bmatrix} \times 0.5 \\
&= \begin{Bmatrix} 0.5 & (\lambda \le 16) \\ 0.0 & (\lambda > 16) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5 & (\lambda \le 14) \\ 0.0 & (\lambda > 14) \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1.0 & \lambda \le 14 \\ 0.5 & 14 < \lambda \le 16 \\ 0.0 & 16 < \lambda \end{cases}
\end{aligned}$$

よって

$$w'(B;\lambda) = \begin{cases} 1.0 & \lambda \le 14 \\ 0.5 & 14 < \lambda \le 16 \\ 0.0 & 16 < \lambda \end{cases}, \quad Y_B^*(\lambda) = \begin{cases} G & \lambda \le 14 \\ G & 14 < \lambda \le 16 \\ A, G & 16 < \lambda \end{cases}.$$

同様にして

$$w'(C;\lambda) = \begin{cases} 1.0 & \lambda \le 14 \\ 0.7 & 14 < \lambda \le 15 \\ 0.0 & 15 < \lambda \end{cases}, \quad Y_C^*(\lambda) = \begin{cases} G & \lambda \le 14 \\ G & 14 < \lambda \le 15 \\ A, G & 15 < \lambda \end{cases}.$$

$$w'(A;\lambda) = 0, \qquad w'(S;\lambda) = 0$$

を得る。

Step 3 条件は満たされない（B, C に対して）ので、ここでは終了しない。

Step 4 B, C に対し $w'(x;\lambda) > w(x;\lambda)$ なので、

$$w(x;\lambda) = w'(x;\lambda), \quad \pi^*(x;\lambda) = Y_x^*(\lambda) \quad (x = B, C)$$

同様に繰り返していくと

$$w(B;\lambda) = \begin{cases} 1.0 & \lambda \le 14 \\ 0.5 & 14 < \lambda \le 16 \\ 0.0 & 16 < \lambda \end{cases}, \quad \pi^*(B;\lambda) = \begin{cases} G & \lambda \le 14 \\ G & 14 < \lambda \le 16 \\ A, G & 16 < \lambda \end{cases}$$

$$w(C;\lambda) = \begin{cases} 1.0 & \lambda \le 14 \\ 0.7 & 14 < \lambda \le 15 \\ 0.0 & 15 < \lambda \end{cases}, \quad \pi^*(C;\lambda) = \begin{cases} G & \lambda \le 14 \\ G & 14 < \lambda \le 15 \\ A, G & 15 < \lambda \end{cases}$$

$$w(A;\lambda) = \begin{cases} 1.00 & \lambda \le 6 \\ 0.91 & 6 < \lambda \le 7 \\ 0.75 & 7 < \lambda \le 8 \\ 0.70 & 8 < \lambda \le 10 \\ 0.49 & 10 < \lambda \le 11 \\ 0.00 & 11 < \lambda \end{cases}, \quad \pi^*(A;\lambda) = \begin{cases} B, C & \lambda \le 6 \\ C & 6 < \lambda \le 7 \\ B & 7 < \lambda \le 8 \\ C & 8 < \lambda \le 10 \\ C & 10 < \lambda \le 11 \\ B, C & 11 < \lambda \end{cases}$$

$$w(S;\lambda) = \begin{cases} 1.000 & \lambda \le -2 \\ 0.946 & -2 < \lambda \le -1 \\ 0.814 & -1 < \lambda \le 0 \\ 0.720 & 0 < \lambda \le 1 \\ 0.700 & 1 < \lambda \le 2 \\ 0.574 & 2 < \lambda \le 3 \\ 0.196 & 3 < \lambda \le 4 \\ 0.000 & 4 < \lambda \end{cases}, \quad \pi^*(S;\lambda) = A.$$

この結果から、最適値

$$w(S;0) = 0.814$$

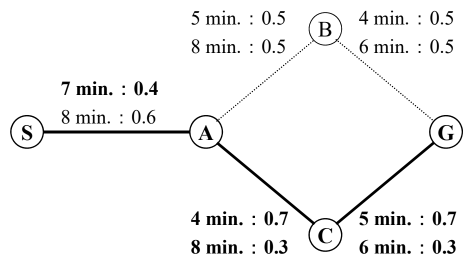
が得られ、最適経路 $\{S, x_1^*, x_2^*, x_3^* = G\}$ は次のように定まる:

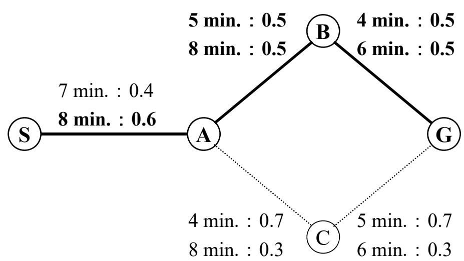
$$\lambda_0 = 0$$

$$x_1^* = \pi^*(S;\lambda_0) = \pi^*(S;0) = A, \quad \lambda_1 = 0 + T(S,A)$$

$$x_2^* = \pi^*(x_1^*;\lambda_1) = \begin{cases} C & \lambda_1 = 7 \\ B & \lambda_1 = 8 \end{cases}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 + T(A, x_2^*)$$

$$x_3^* = \pi^*(x_2^*;\lambda_2) = G$$





補足

1. 得られた結果は、動的に経路を選択することを意味している。すなわち、ある地点に達したとき、次に進む道は、それまでの情報を元に決定する。

2. 値関数 $w(x;\lambda)$ は制限時間が変わったとしても、再計算の必要が無い。

$$\begin{aligned} & P[T(S,x_1) + T(x_1,x_2) + \cdots + T(x_n,G) \le M - \alpha] \\ = \; & P[\alpha + T(S,x_1) + T(x_1,x_2) + \cdots + T(x_n,G) \le M] \\ = \; & E[\chi_{[0,M]}(\alpha + T(S,x_1) + T(x_1,x_2) + \cdots + T(x_n,G))] \end{aligned}$$