平成 29 年 10 月 18 日

確率システム制御特論

第 2 回演習問題

機械知能工学専攻 知能制御工学コース　17344219　二宮 悠二

問題

1. 次の状態方程式で記述される時系列 $\{y(k)\}$ を ARMA モデルに変換せよ．

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(k) \tag{1}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. 一括処理最小二乗法の適用により，1 次元の時系列データを自らで 7 点以上定め，二次の AR モデルのパラメータを推定せよ．

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + v(k),\quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{3}$$

解答

1. (1)，(2) 式を，それぞれ初期値を 0 として z 変換すると次のようになる．

$$\begin{bmatrix} zx_1(z) \\ zx_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(k) \tag{4}$$

$$y(z) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} \tag{5}$$

ただし，$x_1(z)$, $x_2(z)$, $v(z)$, $y(z)$ はそれぞれ $x_1(k)$, $x_2(k)$, $v(k)$, $y(k)$ の z 変換である．(4) 式をまとめると次のようになる．

$$\begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+0.7 & 0 \\ 0 & z+0.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(z) \tag{6}$$

(5)，(6) 式より次式を得る．

$$\begin{aligned} y(z) &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+0.7 & 0 \\ 0 & z+0.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(z) \\ &= \frac{z+1.5}{(z+0.7)(z+0.3)} v(z) \\ &= \frac{z+1.5}{z^2+z+0.21} v(z) \\ &= \frac{z^{-1}+1.5z^{-2}}{1+z^{-1}+0.21^{-2}} v(z) \end{aligned} \tag{7}$$

以上より，与式を ARMA モデルへ変換することができた．

2.　まず，与式 (2) を次のように変形する．

$$y(k) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k) + v(k) \tag{8}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\theta} = [\ a_1 \ \ a_2\ ]^T \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [\ -y(k-1) \ \ -y(k-2)\ ]^T \tag{10}$$

であり，$\boldsymbol{\theta}$ は未知パラメータベクトル，$\boldsymbol{\varphi}(k)$ は回帰ベクトルと呼ばれる．AR モデルでは未知パラメータに関して線形な形で時系列 $y(k)$ を記述でき，パラメータ推定のための評価関数として次式を採用する．

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\{y(k) - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(k)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(y^2(k) - 2\widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(k) y(k) + \widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y^2(k) - 2\widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}(k)y(k)\right) + \widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \tag{11}$$

この式を最小とするための $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = [\ \widehat{a}_1 \ \ \widehat{a}_2\ ]^T$ をパラメータ推定値とする．ここで，

$$c_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y^2(k), \quad \boldsymbol{h}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}(k)y(k), \quad \boldsymbol{G}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k) \tag{12}$$

とおくと，(11) 式は次のようになる．

$$J_N = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{G}_N \widehat{\boldsymbol{\theta}} - 2\widehat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{h}_N + c_N \tag{13}$$

これは，パラメータベクトル $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ に関して二次形式であり，行列 $\boldsymbol{G}_N$ が正定値であればこの評価関

数 J_N は最小値を持つ．そこで，J_N を $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ に関して微分して 0 とおき，これについて解くと，

$$\frac{\mathrm{d}J_N}{\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\theta}}} = 2\boldsymbol{G}_N\widehat{\boldsymbol{\theta}} - 2\boldsymbol{h}_N = 0 \tag{14}$$

より，一括処理最小二乗推定法の式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_N\widehat{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{h}_N \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{G}_N^{-1}\boldsymbol{h}_N \end{aligned} \tag{15}$$

を得る．

時系列データとして，**Tab.**1 を利用した [2]．この中から連続する 7 点を使用する．具体的には，$y(k-2)$ の値が必要となるため，$k=1$ を No.3 に設定する．数値を (12) 式へ代入して解くと次のようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_7 &= \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7}\begin{bmatrix} y^2(k-1) & y(k-1)y(k-2) \\ y(k-1)y(k-2) & y^2(k-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9075810 & 9060000 \\ 9060000 & 9051490 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}_7 &= \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7}\begin{bmatrix} -y(k)y(k-1) \\ -y(k)y(k-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9016380 \\ -9004640 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

Tab. 1: 推定パラメータの導出に用いたセンサの値

No.	センサ値
1	3030.93
2	3095.78
3	2932.61
4	2988.72
5	3032.24
6	2946.25
7	3030.27
8	3058.88
9	2967.68
10	3016.11

したがって，AR モデルの推定パラメータは

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\theta}} &= \begin{bmatrix} \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 \end{bmatrix}^T \\
&= \boldsymbol{G}_7^{-1}\boldsymbol{h}_7 \\
&= \begin{bmatrix} 9075810 & 9060000 \\ 9060000 & 9051490 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -9016380 \\ -9004640 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4.008 \times 10^{-5} \\ -4.868 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

となる．

参考文献

[1] 足立 修一・丸田 一郎，”カルマンフィルタの基礎”，東京電機大学出版局，pp.38-41，2012．

[2] UCI Machine Learning Repositiry，SECOM Data Set，https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/SECOM，（最終閲覧日：2017 年 10 月 18 日）．