2段階単体法

線形計画問題の制約条件にて、等式あるいは不等号が逆向きのものへの対応は？

・スラック変数を導入し、等式制約へ

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j \quad (b_j > 0)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j$$

・等式制約へ人工変数 (artificial variable) を導入

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & y_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & & & + & y_2 & & & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & & & & & + & y_m & = & b_m \end{array}$$

・前段階として次の線形計画問題を解く

$$\begin{array}{l} \text{Maximize} \quad -y_1 - y_2 - \cdots - y_m \\ \quad \text{subject to} \\ \qquad \begin{array}{ccccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & y_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & & & + & y_2 & & & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & & & & & + & y_m & = & b_m \end{array} \\ \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0 \end{array}$$

もし、最大値 0 が得られたら、元の問題に実行可能解が存在。

このとき、$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$ なので、すべての人口変数を除外した制約部を用いて、元の問題を解く。

例題2.1

$$\begin{array}{l} \text{Maximize} \quad -2x_1 - 3x_2 \\ \quad \text{subject to} \\ \qquad \begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & \geq & 270 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 75 \\ 4x_1 & + & x_2 & \geq & 120 \end{array} \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

制約条件

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & & & & & = & 270 \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = & 75 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 120 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & & & & & + & y_1 & & & & & = & 270 \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & & & + & y_2 & & & = & 75 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & & & & & + & y_3 & = & 120 \end{array} \right.$$

Phase I

$$\begin{array}{l} \text{Maximize} \quad -y_1 - y_2 - y_3 \\ \quad \text{subject to} \\ \qquad \begin{array}{ccccccccccccccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & & & & & + & y_1 & & & & & = & 270 \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & & & + & y_2 & & & = & 75 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & & & & & + & y_3 & = & 120 \end{array} \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

ここで、目的関数は

$$\begin{aligned} & -y_1 - y_2 - y_3 \\ & = -(270 - 2x_1 - 5x_2 + x_3) - (75 - x_1 - x_2 + x_4) \\ & \qquad\qquad -(120 - 4x_1 - x_2 + x_5) \\ & = -465 + 7x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \end{aligned}$$

である。

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	θ
I	270	2	5	−1	0	0	1	0	0	135
	75	1	1	0	−1	0	0	1	0	75
	120	4	1	0	0	−1	0	0	1	30
	−465	−7	−7	1	1	1	0	0	0	
II	210	0	9/2	−1	0	1/2	1	0	−1/2	420
	45	0	3/4	0	−1	1/4	0	1	−1/4	180
	30	1	1/4	0	0	−1/4	0	0	1/4	
	−255	0	−21/4	1	1	−3/4	0	0	7/4	
III	120	0	3	−1	2	0	1	−2	3/2	60
	180	0	3	0	−4	1	0	4	−4	
	75	1	1	0	−1	0	0	1	0	
	−120	0	3	1	−2	0	0	3	1	
VI	60	0	3/2	−1/2	1	0	1/2	−1	3/4	
	420	0	9	−2	0	1	2	0	−1	
	135	1	5/2	−1/2	0	0	1/2	0	3/4	
	0	0	6	0	0	0	1	1	5/2	

Phase II

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	θ
	60	0	3/2	−1/2	1	0	1/2	−1	3/4	
VI	420	0	9	−2	0	1	2	0	−1	
	135	1	5/2	−1/2	0	0	1/2	0	3/4	
	0	0	6	0	0	0	1	1	5/2	

Maximize $-2x_1 - 3x_2$

subject to

$$\begin{array}{rcl} 3/2x_2 - 1/2x_3 + x_4 &=& 60 \\ 9x_2 - 2x_3 + x_5 &=& 420 \\ x_1 + 5/2x_2 - 1/2x_3 &=& 135 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

目的関数は

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &= -2(135 - 5/2x_2 - 1/2x_3) - 3x_2 \\ &= -270 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
	60	0	3/2	−1/2	1	0	40
I	420	0	9	−2	0	1	140/3
	135	1	5/2	−1/2	0	0	54
	−270	0	−2	1	0	0	
	40	0	1	−1/3	2/3	0	
II	60	0	0	1	−6	1	
	35	1	0	1/3	−5/3	0	
	−190	0	0	1/3	4/3	0	

従って、Phase II の問題は、$x_1 = 35,\ x_2 = 40$ のとき、最大値 -190 をとる。

様々な問題への対応

最小化: Minimize $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$\Updownarrow$

Maximize $-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$

制約の相互変換

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j \quad (x_i \geq 0)$

$\Longleftrightarrow\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n + x_{n+1} = b_j \quad (x_i \geq 0)$

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j \quad (x_i \geq 0)$

$\Longleftrightarrow\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j \quad (x_i \geq 0)$

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \quad (x_i \geq 0)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j \end{cases} \quad (x_i \geq 0)$$

x_i : 非負条件なし $\Longleftrightarrow$ $x_{i1} - x_{i2} \quad (x_{ij} \geq 0)$

例題2.2 （2段階単体法を必要とする例）

５種類の原料 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 を用いて金属 M_1, M_2, M_3 からなる合金を生産する。原料には不純物も含まれ、成分比率は次の表で与えられる：

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
M_1	40 %	10	20	0	50
M_2	10	30	10	20	20
M_3	20	10	20	10	10
不純物	30	50	50	70	20
コスト	9 千円 /kg	7	5	6	10

また、合金の混合比率は

金属	混合比率
M_1	60%
M_2	20%以下
M_3	20%以上

である。原料 R_i の使用料を $x_i$kg とするとき、1kg の合金を最小コストで作るための問題を線形計画問題として定式化せよ。

Minimize $9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 10x_5$

subject to

$$\begin{array}{l} 0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5 = 1 \\ 0.4x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.5x_5 = 0.6 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 + 0.2x_5 \leq 0.2 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.1x_5 \geq 0.2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

制約の第１式は

$$0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.3x_4 + 0.3x_5 = 0.4$$

でも可。

双対理論(Duality Theory)

Maximize $3x_1 + 5x_2$

subject to

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 &\leq& 10 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq& 24 & (2) \\ x_1 + 3x_2 &\leq& 21 & (3) \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

制約式 (1) の 2 倍と制約式 (2) を足し合わせると

$$4x_1 + 5x_2 \leq 44$$

$x_1 \geq 0$ であることから

$$3x_1 + 5x_2 \leq 4x_1 + 5x_2 \leq 44$$

よって。この 44 は目的関数の上界を与える。

(2) + (3)

$3x_1 + 6x_2 \leq 45$

$\Downarrow$

$3x_1 + 5x_2 \leq 45$

$(1) \times 2 + (3)$

$3x_1 + 5x_2 \leq 41$

制約式を組み合わせることで目的関数値の上界が分かる！

非負変数 y_1, y_2, y_3 を導入し、$(1)\times y_1 + (2)\times y_2 + (3)\times y_3$ を求めると

$$(x_1+x_2)y_1 + (2x_1+3x_2)y_2 + (x_1+3x_2)y_3 \ \le\ 10y_1+24y_2+21y_3$$
$$(y_1+2y_2+y_3)x_1 + (y_1+3y_2+3y_3)x_2 \ \le\ 10y_1+24y_2+21y_3$$

$y_1=2,\ y_2=1,\ y_3=0$ が先ほどの上界 44 を与える。

$$(\ 3x_1+5x_2 \ \le\ 4x_1+5x_2 \ \le\ 44\ )$$

一般には

$$y_1+2y_2+y_3 \ \ge\ 3\ , \quad y_1+3y_2+3y_3 \ \ge\ 5$$

の条件の下で、$y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0$ を様々に変化させることにより上界が得られる。

従って、よりよい（最大値により近い）上界を求める問題を考えると

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & 10y_1 + 24y_2 + 21y_3 \\ \text{subject to} & \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \ \ge\ 3 \qquad (1) \\ & y_1 + 3y_2 + 3y_3 \ \ge\ 5 \qquad (2) \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{array}$$

この問題は、問題 (I) の**双対問題**と呼ばれる。

双対問題

主問題 (P)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{subject to} & \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_i \ge 0 \quad i=1,2,\ldots,n \end{array}$$

双対問題 (D)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ \text{subject to} & \\ & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m \ge c_1 \\ & \vdots \\ & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_m \ge c_n \\ & y_i \ge 0 \quad i=1,2,\ldots,m \end{array}$$

以後、簡単のため

$$x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)^T, \quad y = (y_1,\ y_2, \ldots,\ y_m)^T$$
$$c = (c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n)^T, \quad b = (b_1,\ b_2, \ldots,\ b_m)^T$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とおき、

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \ =\ c^Tx$$

などとあらわす。

ただし A^T は A の転置を表し、$x \ge 0$ は $x_i \ge 0\ (i=1,2,\ldots,n)$ をあらわすものとする（他も同様）。

主問題と双対問題の関係

主問題 (P) Max c^Tx s.t. $Ax \le b,\ x \ge 0$

双対問題 (D) Min b^Ty s.t. $A^Ty \ge c,\ y \ge 0$

定理 2.1（弱双対定理）
主問題 (P) とその双対問題 (D) のそれぞれの実行可能解

$$x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)^T, \quad y = (y_1,\ y_2, \ldots,\ y_m)^T$$

に対し次の関係が成り立つ。

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \ \le\ b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

系 2.1
主問題 (P) が無限解をもつならば、双対問題 (D) は実行可能解をもたない。また、双対問題 (D) が無限解をもつならば、主問題 (P) は実行可能解をもたない。

系 2.2
主問題 (P) とその双対問題 (D) のそれぞれの実行可能解

$$x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n), \quad y = (y_1,\ y_2, \ldots,\ y_m)$$

が

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \ =\ b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

を満たすならば、$x,\ y$ はそれぞれ、主問題 (P) と双対問題 (D) の最適解である。

定理 2.2（双対定理）

主問題 (P) が最適解をもつとき、双対問題 (D) も最適解をもち、(P) の最大値と (D) の最小値は一致する。

系 2.3

主問題 (P) および双対問題 (D) がともに実行可能解をもてば、それらは最適解をもち、(P) の最大値と (D) の最小値は一致する。

定理 2.3（相補スラック定理）

主問題 (P) と双対問題 (D) の実行可能解 $x,\ y$ が、それぞれ (P) と (D) の最適解であるための必要十分条件は、次の 2 つの関係式で与えられる。

$$x^T(A^Ty-c) = 0, \quad y^T(b-Ax) = 0$$

双対問題のパターン

主問題 (P) $\quad \mathrm{Min}\ c^Tx \quad \mathrm{s.t.}\ Ax \geq b,\ x \geq 0$

双対問題 (D) $\quad \mathrm{Max}\ b^Ty \quad \mathrm{s.t.}\ A^Ty \leq c,\ y \geq 0$

主問題 (P) $\quad \mathrm{Min}\ c^Tx \quad \mathrm{s.t.}\ Ax = b,\ x \geq 0$

双対問題 (D) $\quad \mathrm{Max}\ b^Ty \quad \mathrm{s.t.}\ A^Ty \leq c$

双対定理により

- 主問題を解くことと、双対問題を解くことは本質的に等価
- 制約が少ないほうの問題を解くほうが有利
- 内点法への発展

問題2.3

定理 2.1 を用いて、系 2.2 を示せ。

参考図書

- 今野浩、線形計画法、日科技連
- 田村明久・村松正和、最適化法、共立出版
- 福島雅夫、数理計画入門、朝倉書店