ポートフォリオ選択問題（平均・分散モデル）

要求される期待収益率を確保しつつ、リスク（分散）を最小にするポートフォリオを求める

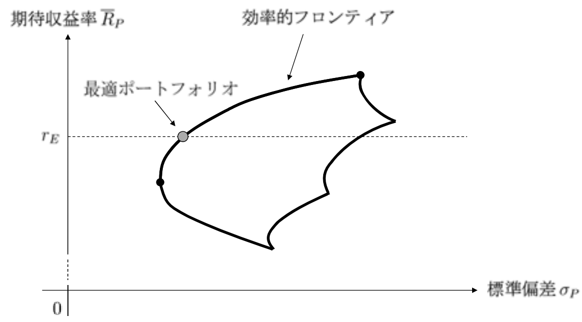
n	:	資産数	r_E	:	投資家の要求期待収益率
σ_{jk}	:	資産 j と資産 k の共分散	$\overline{r}_j$	:	資産 j の期待収益率
x_j	:	資産 j の投資比率			

$$\text{minimize} \quad V(R) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k$$

$$\text{subject to} \quad \overline{r}_P = \sum_{j=1}^{n} \overline{r}_j x_j \geq r_E$$

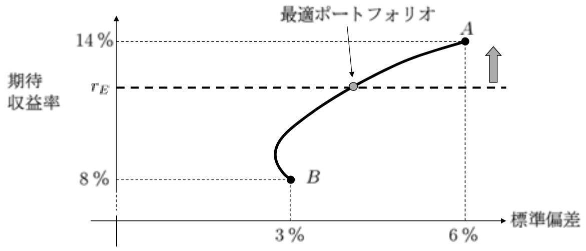
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0$$



例題1.4.1 (最適ポートフォリオを求める)

資産数２個（簡単のため相関係数は０とする）



$x_A + x_B = 1$ より、変数を１つ消去して解けばよい

資産 (X)	期待収益率 $\overline{r}_X$	標準偏差 σ_X
A	14 %	6 %
B	8 %	3 %

$r_E = 12(\%)$

$$\overline{r}_P = \sum_{j=1}^{n} \overline{r}_j x_j \geq r_E$$

$$\Rightarrow \quad \overline{r}_P = 14x_A + 8x_B = 14x_A + 8(1 - x_A) = 6x_A + 8 \geq 12$$

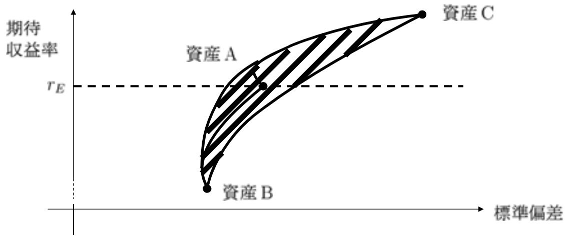
$$6x_A + 8 = 12$$

$$x_A = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_B = \frac{1}{3}$$

例題1.4.2 資産数3個の場合（相関係数は0）

資産 (X)	期待収益率 $\overline{r}_X$	標準偏差 σ_X
A	14 %	6 %
B	8 %	3 %
C	20 %	15 %

$r_E = 14(\%)$



$$x_A + x_B + x_C = 1, \quad x_A,\ x_B,\ x_C \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_C = 1 - x_A - x_B, \quad x_A + x_B \leq 1, \quad x_A,\ x_B \geq 0$$

これより

$$\overline{r}_P = 14x_A + 8x_B + 20(1 - x_A - x_B) = -6x_A - 12x_B + 20 \geq 14$$

$$x_A + 2x_B \leq 1$$

分散が最小になる点は $x_A + 2x_B = 1$ 上にあるので $x_A = 1 - 2x_B$ より

$$x_C = 1 - x_A - x_B = 1 - (1 - 2x_B) - x_B = x_B$$

これらを σ_P^2 へ代入すると

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= 6^2x_A^2 + 3^2x_B^2 + 15^2x_C^2 \\
&= 36(1-2x_B)^2 + 9x_B^2 + 225x_B^2 \\
&= 378x_B^2 - 144x_B + 36 \\
&= 378\left(x_B - \frac{72}{378}\right)^2 - \frac{72^2}{378} + 36 \\
&= 378\left(x_B - \frac{4}{21}\right)^2 + \frac{156}{7}
\end{aligned}
$$

よって σ_P^2 が最小になるのは

$$x_B = \frac{4}{21} = x_C\ ,\quad x_A = 1 - 2x_B = \frac{13}{21}$$

のときで、最小値は

$$\frac{156}{7} = 22.28\cdots \quad (\sigma_P = 4.7207\cdots)$$

空売りを認める場合の最適ポートフォリオ

$$\text{minimize}\quad V(R) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_jx_k$$

$$\text{subject to}\quad \overline{r}_P = \sum_{j=1}^{n}\overline{r}_jx_j = r_E,\quad \sum_{j=1}^{n}x_j = 1$$

ラグランジュ未定乗数法

ラグランジュ関数：

$$L = \sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_jx_k + \lambda_1\left(1 - \sum_{j=1}^{n}x_j\right) + \lambda_2\left(r_E - \sum_{j=1}^{n}\overline{r}_jx_j\right)$$

を x_j で偏微分して 0 とおけばよい

最適投資比率は

$$x_j^* = \frac{(a_{22}D_{1j} - a_{12}D_{2j}) + (-a_{12}D_{1j} + a_{11}D_{2j})r_E}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

ただし

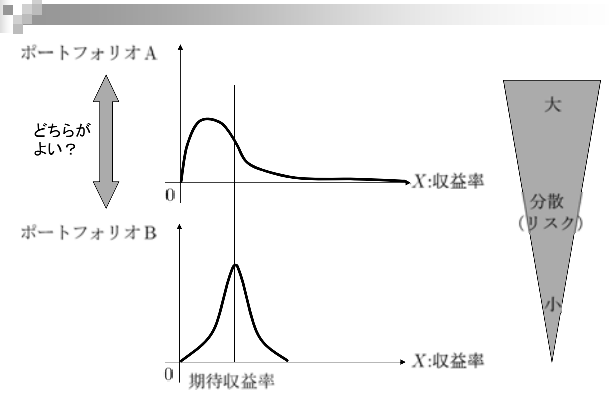
$$a_{11} = \sum_{j=1}^{n}D_{1j}\ ,\quad a_{12} = \sum_{j=1}^{n}D_{2j}\ ,\quad a_{22} = \sum_{j=1}^{n}D_{2j}\overline{r}_j$$

$$D_{1j} = \sum_{k=1}^{n}c_{jk}\ ,\quad D_{2j} = \sum_{k=1}^{n}c_{jk}\overline{r}_k$$

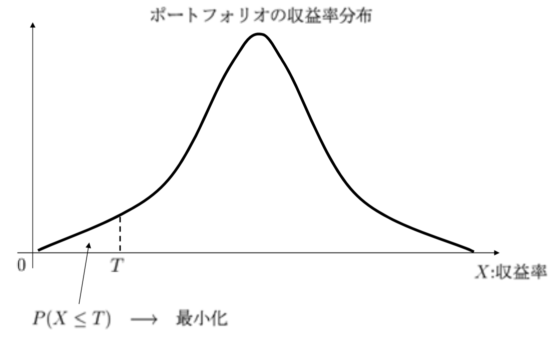
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

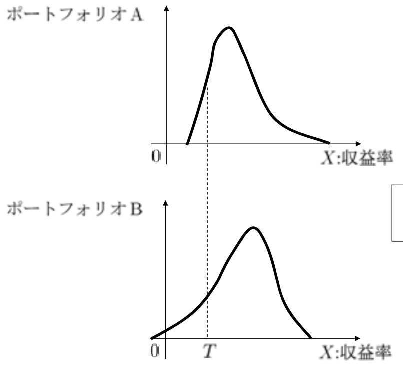
リスク尺度の補足

- 分散を小さくすると、ばらつきがおさえられる
  - □リスクが減少
  - □同時に一攫千金の機会も減少
- 下方リスクモデル
  - □収益が低いほうのみをリスクととらえる
  - □最小許容収益あるいは目標収益を設定し、収益がそれを下回ることをリスクと解釈（閾値確率）
  - □信頼水準（確率）を与え、その範囲で得られる最小収益以下をリスクと解釈（VaR）



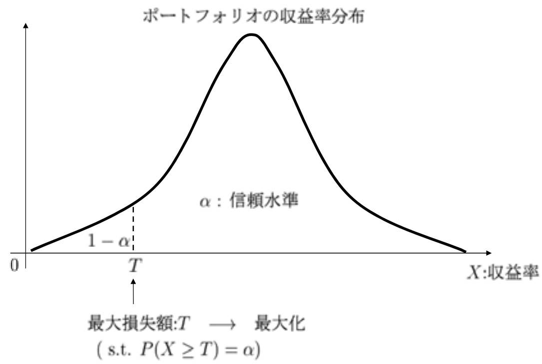
閾値確率評価

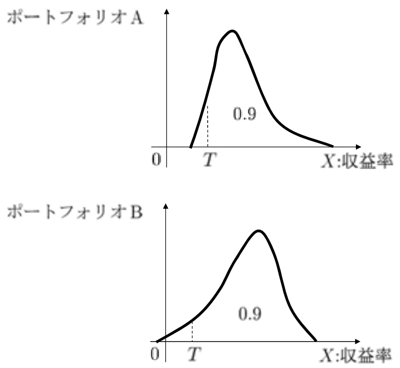




$P(X \leq T)$ が小さいのは
ポートフォリオA

VaR (Value at Risk)





T が大きいのは
ポートフォリオA

参考文献

- 枇々木規雄，金融工学と最適化，朝倉書店
- 山下智志，市場リスクの計量化とVaR，朝倉書店