確率システム制御特論　第４回　演習問題

問１　ベイズの定理の証明をせよ。

問２　$x_1, x_2, \cdots, x_N$が平均μ，分散σ^2の正規分布から独立に発生した数値データであるとき，これらの平均$\bar{\mu}$，分散$\bar{\sigma}^2$の最尤推定量を求めよ．

解）
まず，平均μ，分散σ^2の正規分布の確率密度は以下のように表せる．

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

これより，尤度は次のように書ける．

$$L = \prod_{\alpha=1}^{N} \frac{①}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{②}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^N}$$

これを最大化するμとσ^2を求めるためには，次の$J = -\mathrm{log}L$を最小にするμとσ^2を求めればよい．

$$J = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^{N} ③ + \frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2$$

これをμとσ^2で変微分して 0 とおくと，それぞれ次のようになる．

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma^2} = ④ = 0$$

これをμとσ^2について解いたものを$\bar{\mu}$と$\bar{\sigma}^2$とすると，次のようになる．

$$\bar{\mu} = ⑤$$
$$\bar{\sigma}^2 = ⑥$$

これより，母平均μ，母分散σ^2の最尤推定量$\bar{\mu}$と$\bar{\sigma}^2$は，それぞれサンプル平均とサンプル分散に等しいことがわかる．

（問題）①から⑥の数式を書け。