1. 2. 配分問題と最適化

配分問題とは

- 資源には限りがある
- 資源には複数の用途(仕事)がある



各資源をどの用途に用いるのがよいか?

- 割当問題:資源と用途が1対1に対応
- 輸送問題:資源と用途に1対1対応がない
- 製品ミックス問題:用途の選択も必要



輸送問題

工場 A_1,A_2 で生産した製品を、取引先 B_1,B_2,B_3 へ納入する。注文量は

$$B_1:70 \qquad B_2:40 \qquad B_3:60$$

で、各工場で次の量だけ生産することにした:

$$A_1:90$$
 $A_2:80$

工場から取引先までの製品1単位あたりの輸送コストは

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 4 & 7 & 12 \\ A_2 & 11 & 6 & 3 \\ \hline \end{array}$$

で与えられる。このとき、総輸送コストが最小となるような輸送計画を立 てよ。

工場 A_i から取引先 B_j への輸送量を x_{ij} とすれば、

 $x_{11} + x_{21} = 70$

 $B_1: 70 \quad B_2: 40 \quad B_3: 60 \quad \Longrightarrow x_{11} + x_{21} = 40$ $x_{11} + x_{21} = 60$

生産量: $A_1:90 \quad A_2:80$ $\implies x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$

輸送コストは

$$\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 4 & 7 & 12 \\ A_2 & 11 & 6 & 3 \\ \hline \end{array}$$

 $\longrightarrow 4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}$



Minimize $4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}$ subject to

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{11} + x_{21} = 40$$

$$x_{11} + x_{21} = 60$$

 $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \ge 0$

栄養の問題

複数の食品を組み合わせて、最低限必要な栄養を確保し、かつ費用を最小 限に抑えたい。

 $F_1, F_2, ..., F_n: n$ 種類の食品 $D_1, D_2, ..., D_m: m$ 種類の栄養素

 $c_1, c_2, ..., c_n$: 各食品の1単位当たりの価格

 $x_1, x_2, ..., x_n$: 各食品の摂取量

 $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$: 各食品 1 単位に含まれる栄養素 j の含有量

 $b_1, b_2, ..., b_m$: 各栄養素の必要最低量

総費用: $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ を最小にしたい。

各栄養素の必要量を満たさねばならない。

 $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \ge b_j \quad j = 1, 2, \dots, m$

食品購入量は0以上である。

 $x_i \ge 0$ $i = 1, 2, \dots, n$

線形計画(Linear Programming:LP)

n個の変数に対して1次不等式もしくは1次等式による制約が与えられた際、 ある1次式の最大化もしくは最小化を考える問題

線形計画問題の一般形は次で与えられる:

Maximize
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

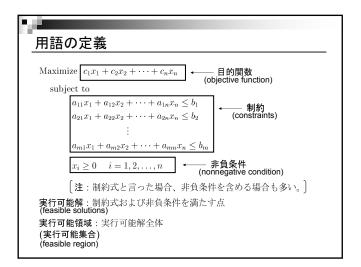
subject to

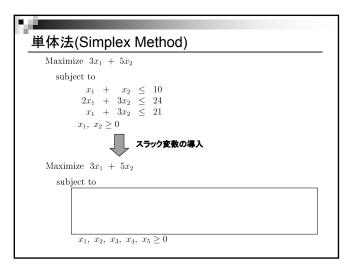
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$

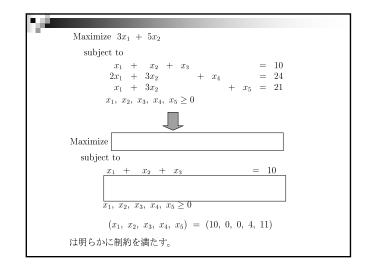
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$

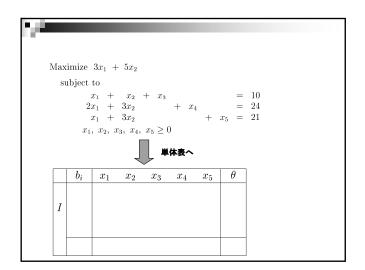
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$$

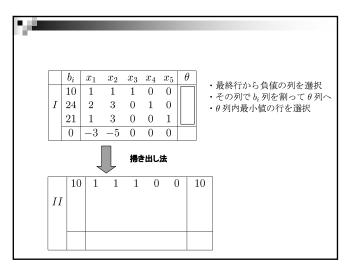
 $x_i \ge 0$ $i = 1, 2, \dots, n$



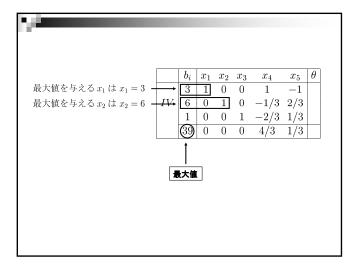












単体法の手順

ピボット成分を定める

- ・最終行から負値の列を選択 (⇒ ピボット列)
- ・その列で b_i 列を割って θ 列へ(ピボット列の非正の値は無視)
- θ 列内最小値の行を選択 (\Longrightarrow ピボット行)

掃き出し法

- ・ピボット成分を1に (ピボット成分の値でその行を割る)
- ・ピボット列のピボット成分以外を全て0~ (行単位で足したり引いたりする)

判定と結果

- ・最終行に負の値があれば上記の手順を繰り返す
- ・負の値がなくなれば終了 左下隅の値が最大値 表から最大値を与える変数の値を読み取る

問題2.1

次の線形計画問題を単体表を用いて解け。

単体法に関する補足

- ピボット列の選択の仕方によっては単体法が終了しない場合がある。
 - □このような現象は巡回と呼ばれる。
 - □最小添字規則により回避可能。
 - ピボット列の選択時に複数の候補があれば最小の添字のものを選択
 - ピボット行を決める際に複数の候補があれば、基底変数でなくなるものとして、最小の添字のものを選択
 - □実質的には、滅多に起こらない。
- ピボット列として選んだ列が(目的関数行をのぞき) すべて0以下のときは無限解。