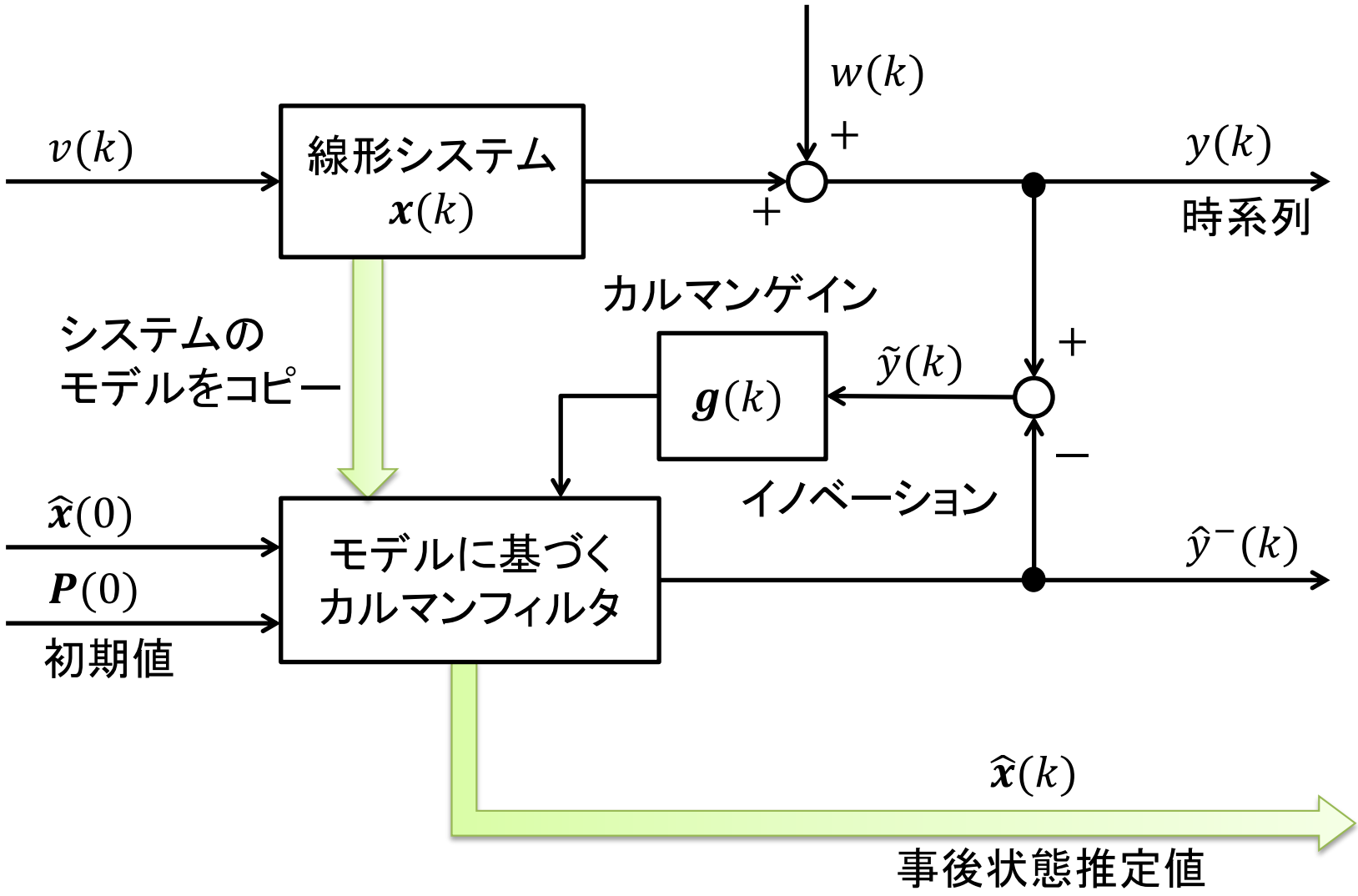
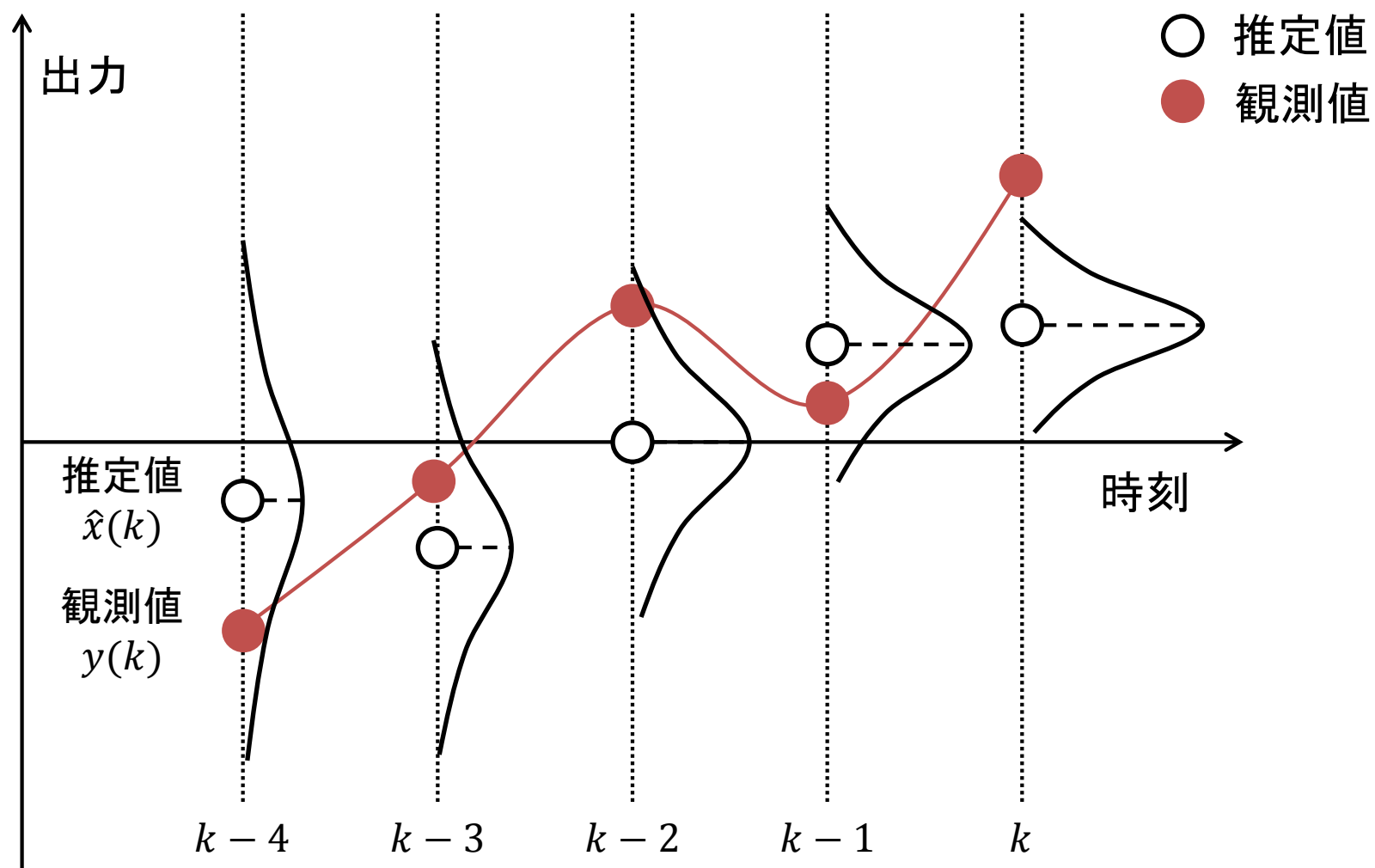


6.3.5 データとカルマンフィルタの関係



6.3.5 分散行列の重要性



6.3.6 多変数時系列に対するカルマンフィルタ

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)\end{aligned}$$

システム行列

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

信号

$$\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^r \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^p \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$$

互いに独立な正規性白色雑音

6.3.6 多変数時系列に対するカルマンフィルタ

初期設定

- ① 状態推定値の初期値 $\hat{x}(0)$ は $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{x}(0) = E[x(0)] = x_0$$

$$P(0) = E[(x(0) - E[x(0)])(x(0) - E[x(0)])^T] = \Sigma_0$$

- ② システム雑音の分散 Q と観測雑音の分散 R を設定する.

時間更新

SISOと異なる箇所

- ① 予測ステップ 事前状態推定: $\hat{x}^-(k) = A\hat{x}(k-1)$

事前誤差共分散行列: $P^-(k) = AP(k-1)A^T + \mathbf{BQB}^T$

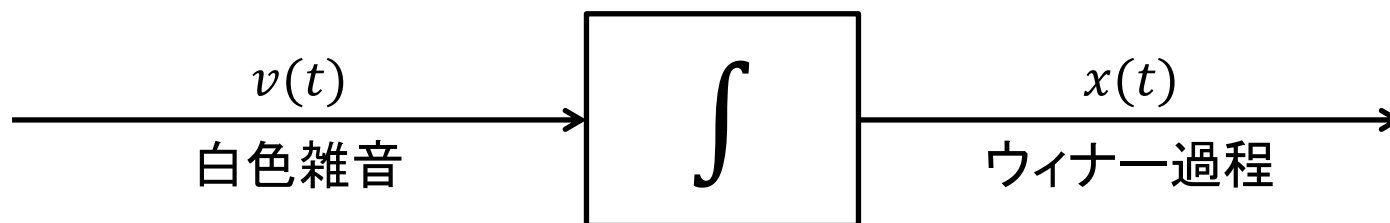
- ② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $G(k) = P^-(k)\mathbf{C}^T(\mathbf{C}P^-(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}$

状態推定値: $\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + G(k)(y(k) - \mathbf{C}\hat{x}^-(k))$

事後誤差共分散行列: $P(k) = (I - G(k)\mathbf{C})P^-(k)$

6.4 数値シミュレーション例



$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + v(k), & x(0) = 0 \\ y(k) = x(k) + w(k) \end{cases}$$

システム雑音 $v(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$

観測雑音 $w(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$

互いに独立を仮定

状態方程式の一般系

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \end{cases}$$

と比較すると...

$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C} = 1$ に対応

$$x(k+1) = x(k) + v(k)$$

$$x(0) = 0$$

$$y(k) = x(k) + w(k)$$

$$x(k) = x(k-1) + v(k-1) = x(k-2) + v(k-2) + v(k-1) = \cdots$$

$$= x(0) + v(1) + \cdots + v(k-1)$$

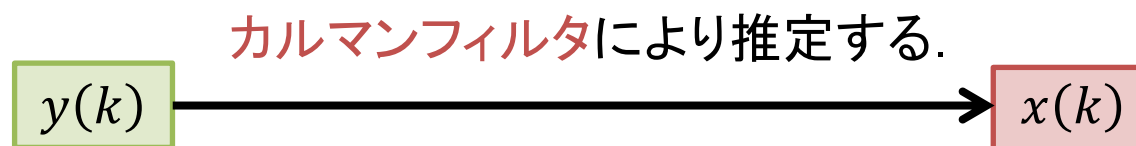
$$= \sum_{i=0}^{k-1} v(i)$$



入力される白色雑音を積分している

例題6.1

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + v(k), & x(0) = 0 \\ y(k) = x(k) + w(k) \end{cases}$$



- ・分散 システム雑音: $\sigma_v^2 = 1$
観測雑音: $\sigma_w^2 = 2$
- ・初期値 $\hat{x}(0) = 0$
 $p(0) = 0$

pp. 112-117 参照

例題6.2

状態方程式

$$x(k+1) = x(k), \quad x(0) = 1 \quad (6.62)$$

$$y(k) = x(k) + w(k) \quad (6.63)$$

$k = 1$ から $k = 3$ に対するカルマンフィルタの時間更新式を導き, それから状態推定値の漸化式を導出せよ. ただし, $w(k)$ は平均値0, 分散 $r = \sigma_w^2$ の正規性白色雑音, $\hat{x}(0) = 0$, $p(0) = 1$ とする.

一般式

$$x(k+1) = Ax(k) + bv(k)$$

$$y(k) = c^T x(k) + w(k)$$

例題

$$x(k+1) = x(k), x(0) = 1$$

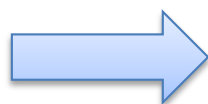
$$y(k) = x(k) + w(k)$$



比較

$$\underline{A = 1}, b = 0, c = 1$$

$$\sigma_v^2 = 0, \sigma_w^2 = r$$



$$\hat{x}^-(k) = \hat{x}(k-1), \hat{p}^-(k) = p(k-1)$$

カルマンフィルタの時間更新式

$$g(k) = \frac{p(k-1)}{p(k-1) + r} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \hat{x}(k-1) + g(k)\{y(k) - \hat{x}(k-1)\} \\ &= \{1 - g(k)\}\hat{x}(k-1) + g(k)y(k) \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$p(k) = \{1 - g(k)\}p(k-1) = \frac{r}{p(k-1) + r}p(k-1) \quad (6.66)$$

• $k = 1$ のとき

$$g(1) = \frac{1}{1+r}$$

$$\hat{x}(1) = \frac{1}{1+r}y(1)$$

$$p(1) = \frac{r}{1+r}$$

• $k = 2$ のとき

$$g(2) = \frac{1}{2+r}$$

$$\hat{x}(2) = \frac{1}{2+r}(y(1) + y(2))$$

$$p(1) = \frac{r}{2+r}$$

• $k = 3$ のとき

$$g(2) = \frac{1}{3+r}$$

$$\hat{x}(2) = \frac{1}{3+r}(y(1) + y(2) + y(3))$$

$$p(1) = \frac{r}{3+r}$$

時刻 k における状態推定値

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{k+r} \sum_{i=1}^k y(i) \quad (6.67)$$



r は小さくなっていく

平均値



ローパスフィルタ

カルマンゲイン

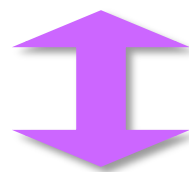
$$g(k) = \frac{1}{k+r} \quad \longrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = 0$$

カルマンフィルタの漸化式

$$\begin{aligned}\hat{x}(k) &= \hat{x}(k-1) + g(k)\{y(k) - \hat{x}(k-1)\} \\ &= \hat{x}(k-1) + \frac{1}{k+r} (y(k) - \hat{x}(k-1)) \quad (6.68)\end{aligned}$$

状態推定値が一定値に収束する

$$\hat{x}(k) = \frac{k+r-1}{k+r} \hat{x}(k-1) + \frac{1}{k+r} y(k) \quad (6.70)$$

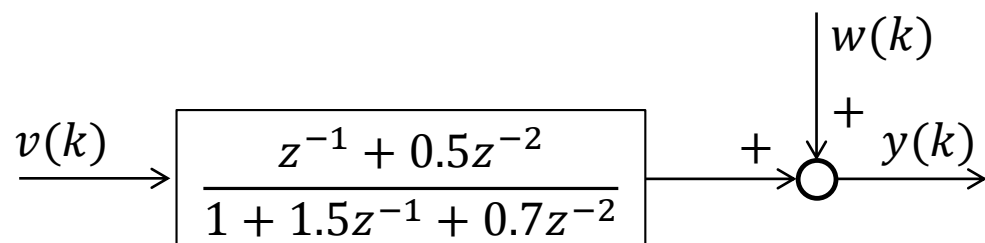


同様の形式

$$\hat{m}(k) = \frac{k-1}{k} \hat{m}(k-1) + \frac{1}{k} y(k) \quad (6.8)$$

時系列の平均を計算している

例題6.3



この伝達関数モデルを可観測正準形の形式の状態空間モデルに変換せよ. ただし, システム雑音は $\mathcal{N}(0, 1)$ に従う正規性白色雑音, 観測雑音は $\mathcal{N}(0, 0.1)$ に従うシステム雑音と独立な正規性白色雑音とする. また, $\hat{x}(0) = \mathbf{0}$, $P(0) = I$ とする.

時系列

$$y(k) = G(z^{-1})v(k) + w(k)$$

ただし

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$



可観測正準形に
変換

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.7 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + w(k)$$

時系列データ(確率過程)のフィルタリング問題



制御入力 $u(k)$ が存在する



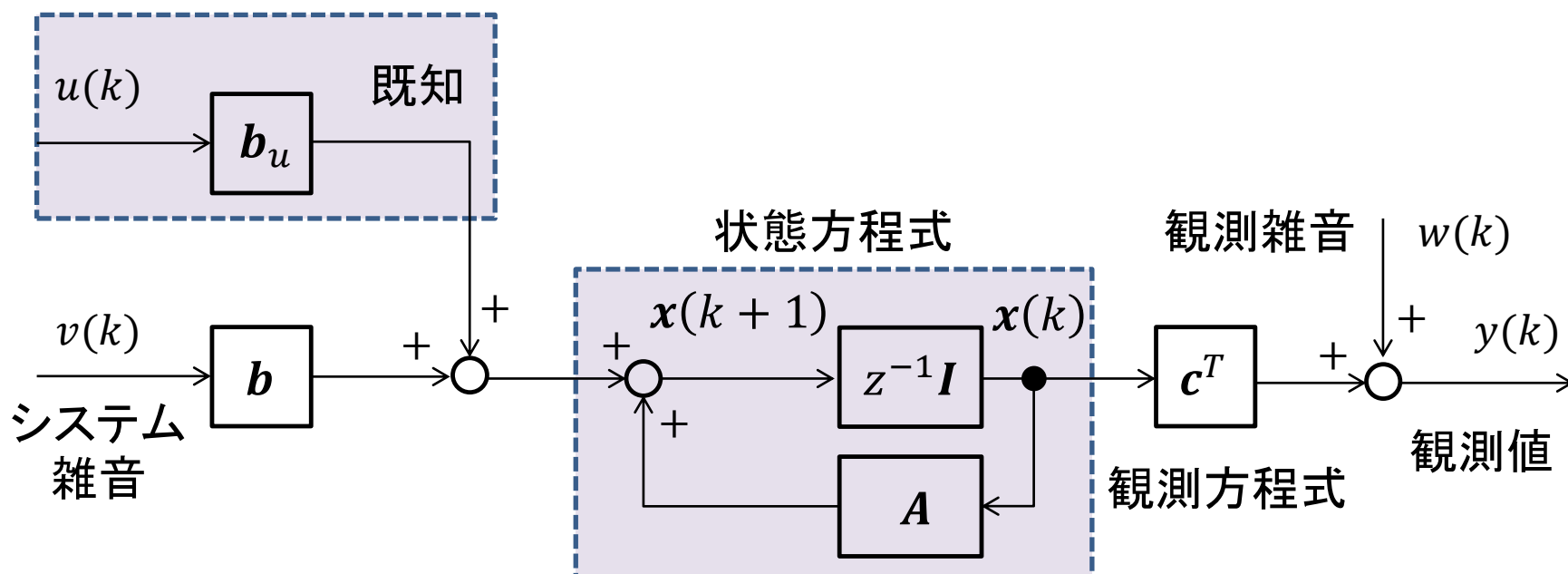
システムの状態推定が必要

6.5 システム制御のためのカルマンフィルタ

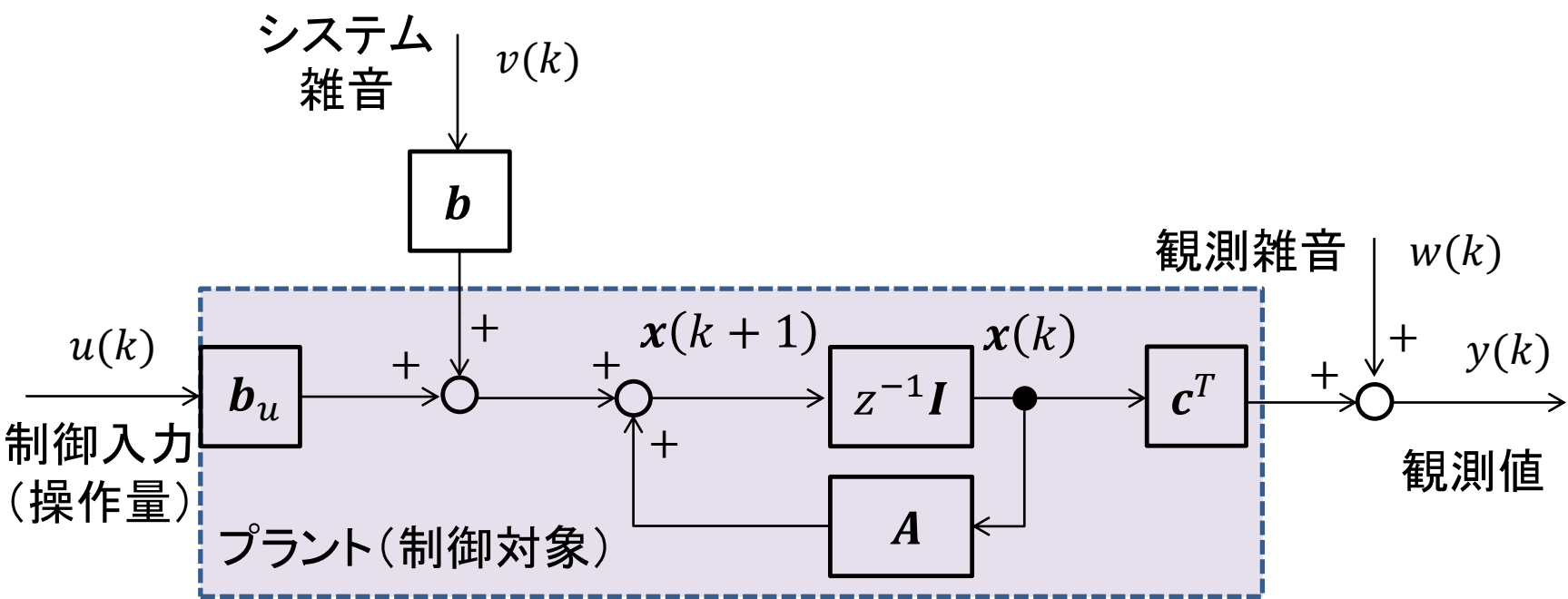
離散時間状態方程式

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_u u(k) + \mathbf{b}v(k) \quad (6.73)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + w(k) \quad (6.74)$$



6.5 システム制御のためのカルマンフィルタ



図： システム制御の観点から書き直したブロック線図

6.5 システム制御のためのカルマンフィルタ ～制御入力がある場合のSISO系～

初期設定

- ① 状態推定値の初期値 $\hat{x}(0)$ は $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{x}(0) = E[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{P}(0) = E[(\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)])(\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)])^T] = \Sigma_0$$

- ② システム雑音の分散 σ_v^2 と観測雑音の分散 σ_w^2 を設定する.

時間更新

自由系と異なる箇所

- ① 予測ステップ 事前状態推定: $\hat{x}^-(k) = \mathbf{A}\hat{x}(k-1) + \mathbf{b}_u u(k-1)$

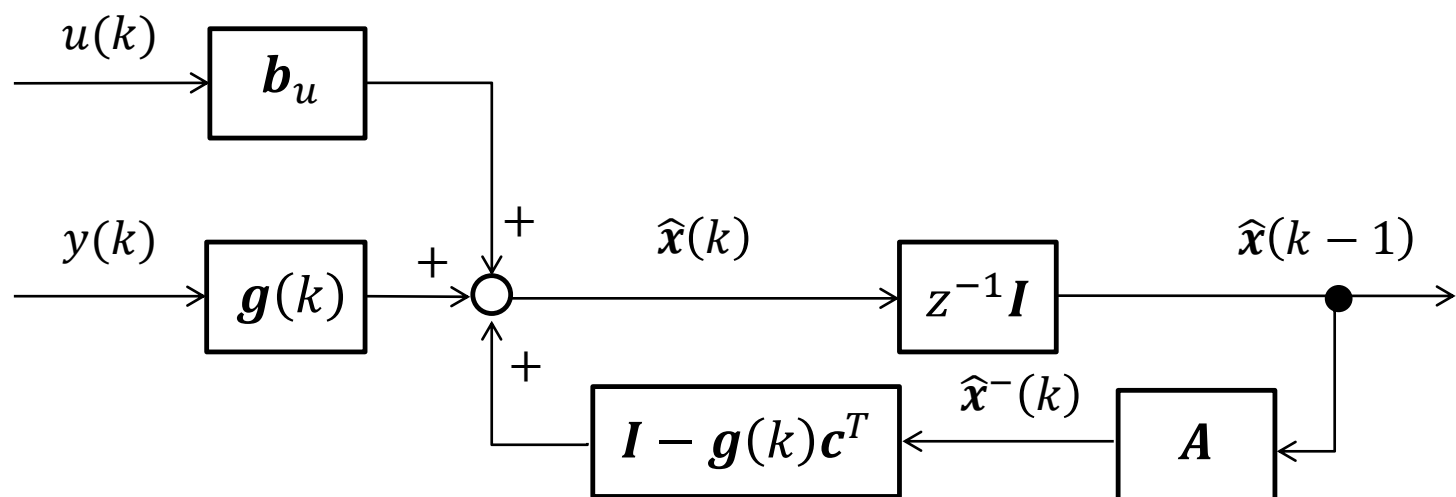
事前誤差共分散行列: $\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T$

- ② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}}{\mathbf{c}^T\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c} + \sigma_w^2}$

状態推定値: $\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + \mathbf{g}(k)(y(k) - \mathbf{c}^T\hat{x}^-(k))$

事後誤差共分散行列: $\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T)\mathbf{P}^-(k)$



図： 制御入力がある場合のカルマンフィルタのブロック線図

6.5 システム制御のためのカルマンフィルタ

制御対象をカルマンフィルタを用いて推定する手順

Step 1 プラントモデリング

- 第一原理モデル, システム同定法を用いて, 制御対象(プラント)をモデリングする.

EX. 力学システム(バネ, マス, ダンパシステム)

- 状態方程式

$$x(k+1) = Ax(k) + b_u u(k) + b_v v(k)$$

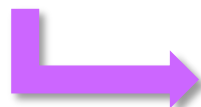
のシステム雑音 $v(k)$ の分散を設定する.

Step 2 カルマンフィルタによる状態推定

- 制御入力がある場合のカルマンフィルタのアルゴリズムを用いて状態を推定する.

Step 3 コントローラの構成

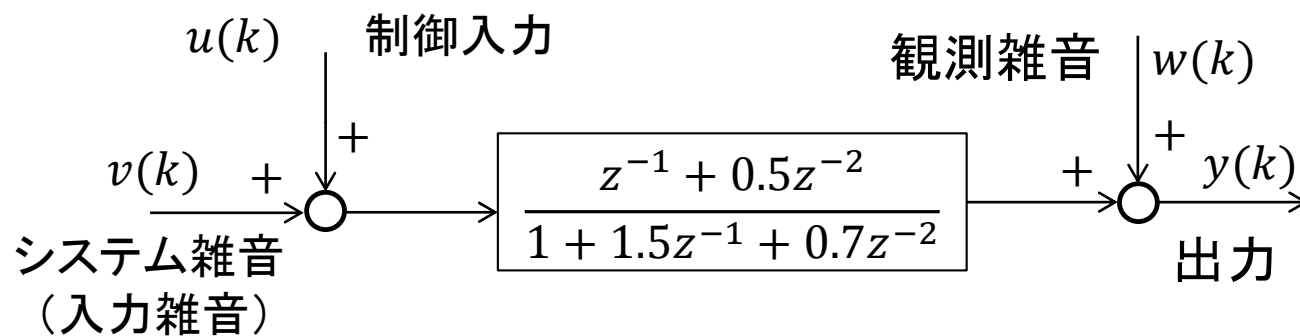
- 現代制御を用いて状態フィードバックにより制御則を決定する



Step 2で求めた状態推定値を用いてコントローラを構成する.

6.5 システム制御のためのカルマンフィルタ

例題6.4



この伝達関数モデルを可観測正準形の形式の状態空間モデルに変換せよ.

ただし, システム雑音は $N(0, 0.01)$ に従う正規性白色雑音, 観測雑音は $N(0, 0.1)$ に従うシステム雑音と独立な正規性白色雑音とする.

また, $\hat{x}(0) = \mathbf{0}$, $P(0) = I$ とする. 制御入力 $u(k)$ は ± 1 の値を不規則にとる信号とする.

6.5 システム制御のためのカルマンフィルタ

時系列 $y(k) = G(z^{-1})v(k) + G(z^{-1})u(k) + w(k)$

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$



可観測正準形に変換

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.7 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + w(k)$$