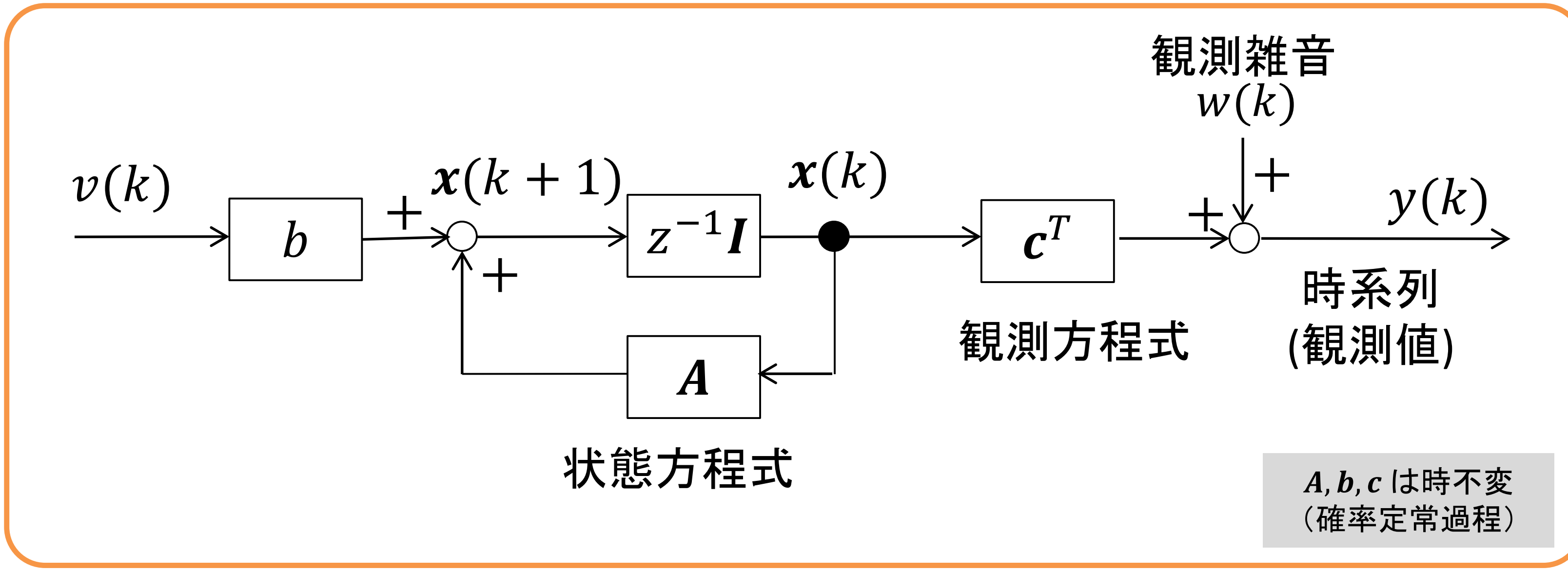
６．線形カルマンフィルタ

6.1　カルマンフィルタリング問題



$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$を$\boldsymbol{A}(k)$，$\boldsymbol{b}(k)$
とすれば非定常過程

離散時間状態方程式

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}v(k)$$

- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ および$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$
- $v(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$: システム雑音

観測方程式

$$y(k) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) + w(k)$$

- $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$: 観測係数ベクトル
- $w(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$: 観測雑音．$v(k)$ と無相関．

6.1　カルマンフィルタリング問題

カルマンフィルタリング問題

時系列データ$\{y(i), i=1,2,\cdots,k\}$に基づいて，状態$\boldsymbol{x}(k)$のMSEの最小値を与える推定値，すなわち最小平均二乗誤差(MMSE: minimum mean square error)を見つけることを，カルマンフィルタリング問題と呼ぶ.

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{filter}}(k) = \arg\min_{\hat{\boldsymbol{x}}(k)} J(k)$$

状態推定誤差の定義

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k) \triangleq \underbrace{\boldsymbol{x}(k)}_{\text{真値}} - \underbrace{\hat{\boldsymbol{x}}(k)}_{\text{推定値}}$$

評価関数

$$J(k) = \mathrm{E}\left[\tilde{\boldsymbol{x}}^2(k)\right]$$

？ スカラの観測値　$y(k)$　からn次元状態ベクトル　$\boldsymbol{x}(k)$　を推定できるだろうか？

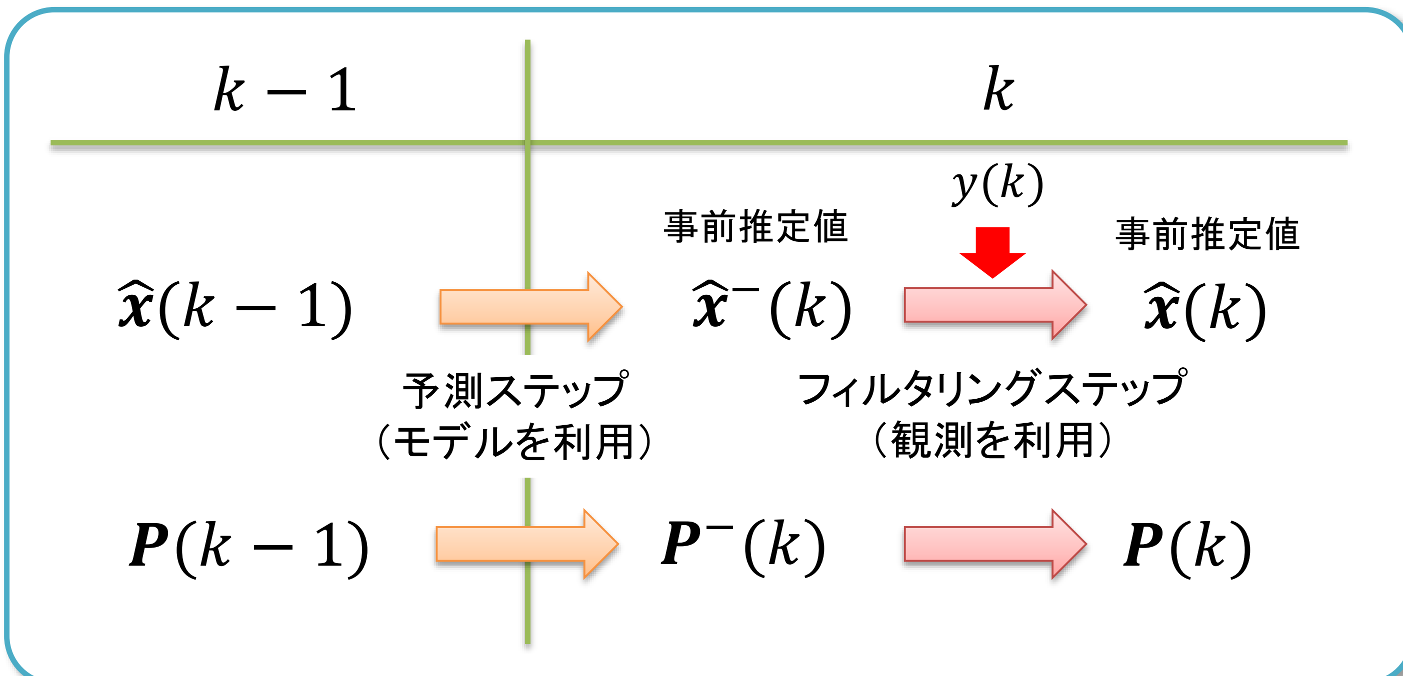
6.3　時系列信号に対するカルマンフィルタ

事前推定値

$\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k) \quad \left(= \hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)\right)$　時刻 $k-1$ までに利用可能なデータに基づいた時刻 k における $\boldsymbol{x}$ の予測推定値.

事後推定値

$\hat{\boldsymbol{x}}(k) \quad \left(= \hat{\boldsymbol{x}}(k|k)\right)$　時刻 k までに利用可能なデータすなわち $y(k)$ も用いた　$\boldsymbol{x}$ のフィルタリング推定値.



6.3　時系列信号に対するカルマンフィルタ

ベイズ予測の立場より
事前推定値と観測値に関する線形予測器を仮定する.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \boldsymbol{G}(k)\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k) + \boldsymbol{g}(k)y(k)$$

事後推定値　事前推定値　観測値

$\boldsymbol{G}(k)$ と $\boldsymbol{g}(k)$ はどうやって決定する？

$\boldsymbol{G}(k) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T$ が成り立つ.

$y(i)$ $(i = 1,2,\cdots,k-1)$は事後状態推定誤差$\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$と直交する.
すなわち,

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)y(i)] = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{G}(k)\right)\mathrm{E}[\boldsymbol{x}(k)y(i)] = \boldsymbol{0}$$

一方で, $\mathrm{E}[\boldsymbol{x}(k)y(i)] \neq \boldsymbol{0}$ より,

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{G}(k) = \boldsymbol{0}$$

まず, $\boldsymbol{g}(k)$ だけに注目すれば良いことが判明した.

6.3　時系列信号に対するカルマンフィルタ

$\boldsymbol{G}(k)$ を消去してまとめると…

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}(k) &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)y(k) \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\big(y(k) - \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\big) \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\big(y(k) - \hat{y}^-(k)\big) \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\tilde{y}(k)
\end{aligned}
$$

一段先予測値

$$\hat{y}^-(k) = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)$$

$k-1$ までの出力が観測されたときの時刻 k での出力の**事前推定値**

カルマンゲイン

状態量の更新に現時刻 k の観測値をどの程度反映させるかを決める.

イノベーション過程

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}^-(k) \\
&= \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}(k) + w(k) - \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) \\
&= \boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) + w(k)
\end{aligned}
$$

現時刻 k での観測値に含まれている最新の情報に基づく**出力予測誤差**.

（事後推定）＝（事前推定）＋（カルマンゲイン）・（出力予測誤差）という形で表現されることが分かった！

6.3　時系列信号に対するカルマンフィルタ

「$\boldsymbol{G}(k) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T$」の証明

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\tilde{y}(i)] = \mathrm{E}[\{\boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k)\}y(i)]$$

$$= \mathrm{E}[\{\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{G}(k)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) - \boldsymbol{g}(k)y(k)\}y(i)]$$

$$= \mathrm{E}[\{\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{G}(k)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) - \boldsymbol{g}(k)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) - w(k))\}y(i)]$$

$$= \mathrm{E}[\{\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{G}(k)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{g}(k)w(k)\}y(i)] = \boldsymbol{0}$$

$\mathrm{E}[w(k)y(i)] = 0,\ i = 1,2,\cdots,k-1$ より

$$\hookrightarrow \mathrm{E}[\{\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{G}(k)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k)\}y(i)] = \boldsymbol{0}$$

$$\hookrightarrow \mathrm{E}[\{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{G}(k)\}\boldsymbol{x}(k)y(i) + \boldsymbol{G}(k)\{\boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\}y(i)]$$

$$= \mathrm{E}[\{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{G}(k)\}\boldsymbol{x}(k)y(i) + \boldsymbol{G}(k)\underbrace{\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)y(i)]}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$$

$\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) = \boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}^-(k)$: 事前状態推定誤差

$$\hookrightarrow \mathrm{E}[\{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{G}(k)\}\boldsymbol{x}(k)y(i)]$$

$$= \{\underbrace{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{G}(k)}_{\boldsymbol{0}}\}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}(k)y(i)] = \boldsymbol{0}$$

6.3　時系列信号に対するカルマンフィルタ

カルマンゲインの求め方

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) - \boldsymbol{g}(k)w(k)$$

$$\tilde{y}(k) = y(k) - \hat{y}^-(k) = \boldsymbol{c}^T\,\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) + w(k)$$

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\tilde{y}(k)] = \boldsymbol{0}$$

3つの関係式を利用する

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\mathrm{E}\left[\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\left(\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\right)^T\right]\boldsymbol{c} - \boldsymbol{g}(k)\sigma_w^2 = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{P}^-(k)$ とおく

$$\boldsymbol{g}(k) = \frac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c} + \sigma_w^2}$$

カルマンゲインの算出方法が分かった！
でも，$\boldsymbol{P}^-(k)$　はどうやって求める？

6.3　時系列信号に対するカルマンフィルタ

カルマンゲイン算出の詳細

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) - \boldsymbol{g}(k)w(k)$$

$$\tilde{y}(k) = y(k) - \hat{y}^-(k) = \boldsymbol{c}^T\,\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) + w(k)$$

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\tilde{y}(k)] = \boldsymbol{0}$$

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\tilde{y}(k)] = \mathrm{E}[\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) - \boldsymbol{g}(k)w(k)\}\{\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k) + w(k)\}] = \boldsymbol{0}$$

$$\hookrightarrow \mathrm{E}[\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\}\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)] + \underbrace{\mathrm{E}[\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\}w(k)]}_{\boldsymbol{0}}$$

$$-\underbrace{\mathrm{E}[\boldsymbol{g}(k)w(k)\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)]}_{\boldsymbol{0}} - \mathrm{E}[\boldsymbol{g}(k)w^2(k)] = \boldsymbol{0}$$

$$\hookrightarrow \mathrm{E}[\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\}\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)] - \mathrm{E}[\boldsymbol{g}(k)w^2(k)] = \boldsymbol{0}$$

$$\hookrightarrow \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\left(\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\right)^T\boldsymbol{c}\right] - \boldsymbol{g}(k)\mathrm{E}[w^2(k)] = \boldsymbol{0}$$

$$\hookrightarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\underbrace{\mathrm{E}\left[\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\left(\tilde{\boldsymbol{x}}^-(k)\right)^T\right]}_{\boldsymbol{P}^-(k)\text{ とおく}}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{g}(k)\sigma_w^2 = \boldsymbol{0}$$

6.3　時系列信号に対するカルマンフィルタ

共分散行列の更新

前提

1時刻前の事後共分散行列 $\boldsymbol{P}(k-1)$ は得られている.

Step 1
予測

$$\boldsymbol{P}(k-1) \Rightarrow \boldsymbol{P}^{-}(k)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{-}(k) &= \mathrm{E}\left[\tilde{\boldsymbol{x}}^{-}(k)\left(\tilde{\boldsymbol{x}}^{-}(k)\right)^{T}\right] \\
&= \mathrm{E}[\{\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(k-1)+\boldsymbol{b}v(k-1)\}\{\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(k-1)+\boldsymbol{b}v(k-1)\}^{T}] \\
&= \boldsymbol{A}\underbrace{\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k-1)\tilde{\boldsymbol{x}}^{T}(k-1)]}_{\boldsymbol{P}(k-1)}\boldsymbol{A}^{T} + \underbrace{\boldsymbol{A}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k-1)v(k-1)]\boldsymbol{b}^{T}}_{\boldsymbol{0}} \\
&\quad + \underbrace{\boldsymbol{b}\mathrm{E}[v(k-1)\tilde{\boldsymbol{x}}^{T}(k-1)]\boldsymbol{A}^{T}}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{b}\underbrace{\mathrm{E}[v^{2}(k-1)]}_{\sigma_v^2}\boldsymbol{b}^{T} \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^{T} + \sigma_v^2\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{T}
\end{aligned}$$

Step 2
フィルタリング

$$\boldsymbol{P}^{-}(k) \Rightarrow \boldsymbol{P}(k) \qquad \boldsymbol{P}(k) = \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\tilde{\boldsymbol{x}}^{T}(k)] = \cdots = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^{T})\boldsymbol{P}^{-}(k)$$

すべての情報が揃った！

6.3　カルマンフィルタ　～c. 入力が白色ノイズのSISO系～

初期設定

① 状態推定値の初期値 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$ は $\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\ \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])^T] = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

$\boldsymbol{\Sigma}_0 = k\boldsymbol{I}$ で良いが, kが大きいと収束が速い代わりに初期の振動が大きくなる.

② システム雑音の分散 σ_v^2 と観測雑音の分散 σ_w^2 を設定する.

実験や事前知識により見積もる

実験や事前知識により見積もる

時間更新

事前知識・計測
中間変数
推定値

① 予測ステップ

事前状態推定: $\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T + \sigma_v^2 \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T$

② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $\boldsymbol{g}(k) = \dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c} + \sigma_w^2}$

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\left(y(k) - \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\right)$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{P}^-(k)$

6.3　線形カルマンフィルタ　～f. 注意点～

注意点

1. 時系列モデルやシステムモデルの精度に推定精度が大きく依存する

2. 非線形および非ガウシアンの場合は状態推定が難しくなる

   → EKFやUKF, PFをなどの非線形フィルタを利用することで対処

3. シミュレーション結果と実装時の結果は大きく精度が違う. 実装時の精度は一般に低くなる.

6.3　線形カルマンフィルタ　～f. 注意点～

注意点

4　実装時は逆行列の計算を発生させない工夫が必要.

カルマンゲイン:　$\boldsymbol{G}(k)=\boldsymbol{P}^{-}(k)\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{P}^{-}(k)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{R})^{-1}$

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{P}^{-}(k)\boldsymbol{C}$$
$$\alpha=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{f}+\boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{G}(k)=\boldsymbol{f}\cdot 1/\alpha$$

5　事後誤差共分散行列:　$\boldsymbol{P}(k)=\{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\}\boldsymbol{P}^{-}(k)$

この値が小さくなりすぎると数値計算の精度の問題で, $\boldsymbol{P}(k)$の妥当性が崩れる.

U-D分解フィルタ, SVDフィルタなどの改善手法が存在する.

6.3 カルマンフィルタ ～e. 制御入力がある場合のSISO系～

初期設定

① 状態推定値の初期値 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$ は $\mathcal{N}(\mathbf{0},\ \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])^T] = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

② システム雑音の分散 σ_v^2 と観測雑音の分散 σ_w^2 を設定する.

時間更新

自由系と異なる箇所

① 予測ステップ

事前状態推定: $\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k-1) + \boldsymbol{b}_u u(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T + \sigma_v^2 \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T$

② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $\boldsymbol{g}(k) = \dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c} + \sigma_w^2}$

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\big(y(k) - \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\big)$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{P}^-(k)$

6.3　カルマンフィルタ　～f. 制御入力がある場合のSISO系 非定常過程～

初期設定

① 状態推定値の初期値 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$ は $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])^T] = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

② システム雑音の分散 $\sigma_v^2(0)$ と観測雑音の分散 $\sigma_w^2(0)$ を設定する.

時間更新

定常過程と異なる箇所

① 予測ステップ

事前状態推定: $\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) = \boldsymbol{A}(k-1)\hat{\boldsymbol{x}}(k-1) + \boldsymbol{b}_u(k-1)u(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{A}(k-1)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T(k-1) + \sigma_v^2\boldsymbol{b}(k-1)\boldsymbol{b}^T(k-1)$

② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $\boldsymbol{g}(k) = \dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}(k)}{\boldsymbol{c}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}(k) + \sigma_w^2(k)}$

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\big(y(k) - \boldsymbol{c}^T(k)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\big)$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k))\boldsymbol{P}^-(k)$

6.3　カルマンフィルタ　～d. 入力が白色ノイズのMIMO系～

初期設定

① 状態推定値の初期値 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$ は $\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\ \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])^T] = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

② システム雑音の分散 $\boldsymbol{Q}$ と観測雑音の分散 $\boldsymbol{R}$ を設定する.

時間更新

SISOと異なる箇所

① 予測ステップ

事前状態推定: $\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^T$

② フィルタリングステップ

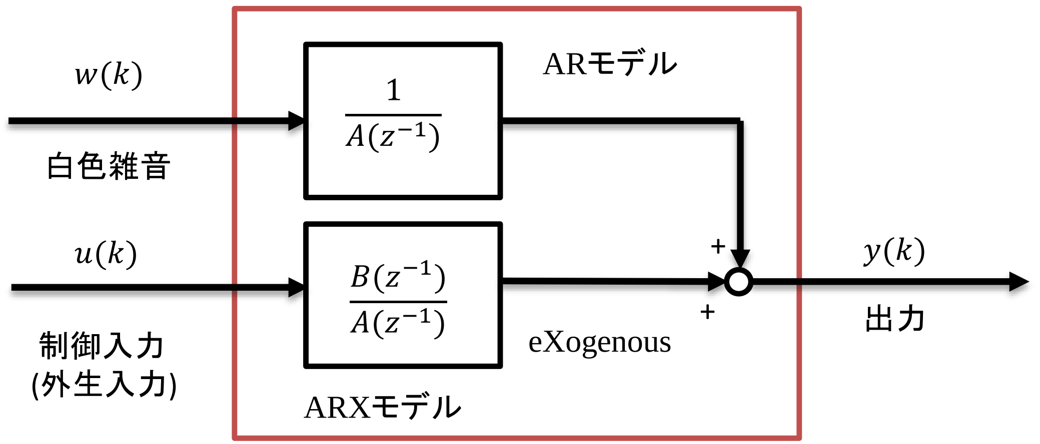
カルマンゲイン: $\boldsymbol{G}(k) = \boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R})^{-1}$

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{G}(k)\big(y(k) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\big)$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{C})\boldsymbol{P}^-(k)$

1.　線形カルマンフィルタ　～a. ARXモデル～

対象とする離散時間線形システム（ARXモデル）



$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}$: 出力yのz変換　　$B(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} b_i z^{-i}$: 入力uのz変換

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^{n} b_i y(k-i) + w(k)$$

$u(k)$:時刻kにおけるシステムへの入力
$y(k)$:時刻kにおけるシステムの出力
$w(k) \sim \mathcal{N}(0, {\sigma_w}^2)$: 正規性白色雑音

パラメータを推定したい！
$\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$,
$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

6.3　線形カルマンフィルタ　～a. ARXモデル～

ARXモデルのブロック線図より　$y(k)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k)+\frac{1}{A(z^{-1})}w(k)$

両辺に$A(z^{-1})$をかけて，　$A(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}$,$B(z^{-1})=\sum_{i=1}^{n}b_i z^{-i}$ を代入すると

$$y(k)\left\{1+\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}b_i z^{-i}\right\}u(k)+w(k)$$

ここで，推移演算子　$z^{-j}y(k)=y(k-j)$,　$(j=1,2,3,\ldots)$　を利用すれば，

$$y(k)+\sum_{i=1}^{n}a_i y(k-i)=\sum_{i=1}^{n}b_i u(k-i)+w(k)$$

6.3　線形カルマンフィルタ　～a. ARXモデル～

これを$y(k)$について整理すると，

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n} b_i u(k-i) + w(k)$$

$$= [-y(k-1) \ \cdots - y(k-n) \ \ u(k-1) \ \cdots u(k-n)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + w(k)$$

$$= \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta} + w(k)$$

6.3　線形カルマンフィルタ　～b. パラメータ推定問題～

パラメータ推定問題の線形回帰モデル

$$\boldsymbol{\theta}(k+1) = \boldsymbol{\theta}(k)$$

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta}(k) + w(k)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ \vdots \\ -y(k-n) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(k) = \boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{b}(k) = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{c}(k) = \boldsymbol{\varphi}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}(k)v(k)$$

$$y(k) = \boldsymbol{c}^T(k)\boldsymbol{x}(k) + w(k)$$

状態空間モデルと対応付ければ，
カルマンフィルタのアルゴリズムが見出せる！

6.3　線形カルマンフィルタ　～c. パラメータ推定アルゴリズム（パラメータ時不変）～

初期設定

① 推定パラメータの初期値

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \boldsymbol{\theta}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \gamma \boldsymbol{I}, \qquad \gamma > 0$$

② システム雑音の分散 σ_v^2 と観測雑音の分散 σ_w^2 を設定する.

時間更新

① 予測ステップ

事前状態推定：$\hat{\boldsymbol{\theta}}^-(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$

事前誤差共分散行列：$\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{P}(k-1)$

② フィルタリングステップ

カルマンゲイン：$$\boldsymbol{g}(k) = \frac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + {\sigma_w}^2}$$

状態推定値：$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{g}(k)\{y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\}$$

事後誤差共分散行列：$$\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{P}(k-1) - \frac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + \sigma_w^2}$$

6.3 線形カルマンフィルタ ～d. パラメータ推定アルゴリズム（パラメータ時変）～

離散時間状態方程式

$$\boldsymbol{\theta}(k+1) = \boldsymbol{\theta}(k) + \boldsymbol{b}v(k)$$

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta}(k) + w(k)$$

時間更新

事前状態推定値: $\hat{\boldsymbol{\theta}}^-(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{P}(k-1) + \sigma_v^2 \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T$

カルマンゲイン: $\boldsymbol{g}(k) = \dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + {\sigma_w}^2}$

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{g}(k)\{y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\}$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k) = \{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\}\boldsymbol{P}^-(k)$

6.3　線形カルマンフィルタ　～e. 特長～

特徴

1. 計算機を用いたオンライン処理に適している

   → カルマンフィルタは漸化式の形式であるため
   過去のデータをすべて記憶する必要がない

2. 非定常時系列(時変システム)に対しても適用できる

3. プロセス雑音の分散σ_v^2と観測雑音の分散σ_w^2が
   厳密な値でなくても動作する

4. 推定問題を状態空間表現することによって，さまざまな問題を
   カルマンフィルタの枠組みで解くことが可能