

電機システム制御特論

レポート課題3

九州工業大学 工学府

機械知能工学専攻 知能制御工学コース

所属： 西田研究室

学籍番号： 17344219

提出者氏名： 二宮 悠二

平成29年5月23日

目 次

1	課題内容	3
2	カルマンフィルタ	3
2.1	離散時間カルマンフィルタ	3
2.2	連続時間カルマンフィルタ	7
3	シミュレーション	9
3.1	カルマンフィルタの設計	9
3.2	検証	10
4	考察・まとめ	10
	参考文献	12

1 課題内容

次のシステムについて考える．

$$\dot{x} = ax + bu + v$$

$$y = x + w$$

ただし， $a = -0.02$ ， $b = 1.351 \times 10^{-3}$ である．また， v と w は共に白色ガウス雑音であり， $E\{v^2\} = E\{w^2\} = 0.7$ である．このとき，システム対するにカルマンフィルタを設計し，コンピュータシミュレーションによりその動作を示せ．

2 カルマンフィルタ

システムが実用される際に，そのパフォーマンスに影響を及ぼすような様々な雑音が存在する．同次元オブザーバはそれ自身が観測雑音に対していくつかのフィルタ機能を持つものの，観測信号にふくまれた雑音成分を取り除くには不十分であることが多い．確率システムに含まれるオブザーバゲインは与えられた雑音に対して最適化される可能性があるのだ．これは雑音などの存在しない確定的な場合を対称としているためである．それに対し，カルマンフィルタは確率的な枠組みで状態推定問題を検討しており，白色ガウス雑音のあるシステムの状態信号の最適な推定を行うことが可能である．**Fig.1** に制御系にカルマンフィルタを組み込んだ様子を示す．

また，本課題にて設計したのは連続時間でのカルマンフィルタである．これは，離散系からの拡張であるため，本稿では離散時間及び連続時間カルマンフィルタの原理について述べる．

2.1 離散時間カルマンフィルタ

未知パラメータ x がある離散系の状態方程式に従って変化している場合を考える．このとき，状態 0 から状態 1 への遷移が次の式で表されるものとする．

$$x_1 = A_0 x_0 + B_0 w_0 \tag{2.1}$$

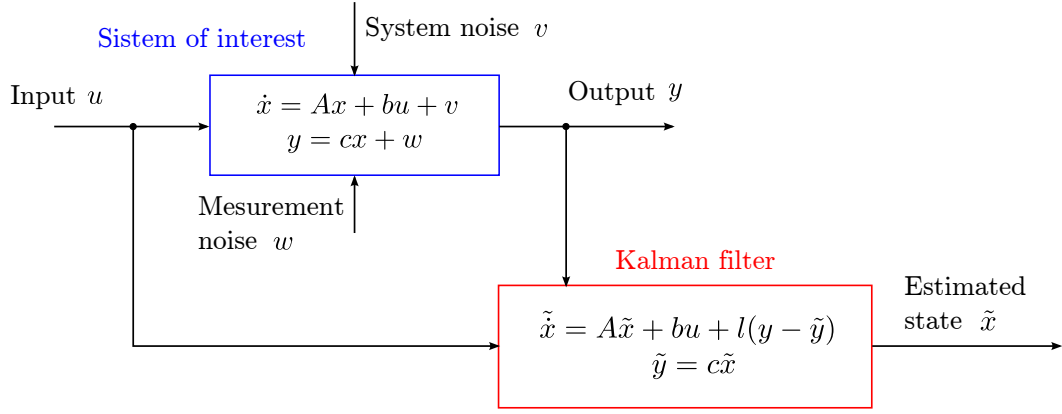


Fig. 1 カルマンフィルタを組み込んだ制御系

ここで、 A_0 は離散系での $(n \times n)$ の推移行列、 B_0 は既知の $(n \times r)$ の行列である。ここで、 w_0 が系に加わる外乱ベクトルで、その平均が \bar{w}_0 、共分散が Q_0 であるとする。すなわち、

$$E(w_0) = \bar{w}_0 \quad (2.2)$$

$$E[(w_0 - \bar{w}_0)(w_0 - \bar{w}_0)^T] = Q_0 \quad (2.3)$$

である。一方、状態量 x_0 についても同様に、平均が \hat{x}_0 、共分散が P_0 であるとする、

$$E(x_0) = \hat{x}_0 \quad (2.4)$$

$$E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0 \quad (2.5)$$

を得る。さらに、 x_0 と w_0 は無相関であるとする、

$$E(x_0 w_0) = 0 \quad (2.6)$$

が成り立つ。

以上より、状態 1 での平均値は次のようになる。

$$\bar{x}_1 = A_0 \hat{x}_0 + B_0 \bar{w}_0 \quad (2.7)$$

さらに, (2.1), (2.7) 式より, 共分散は,

$$\begin{aligned}
M_1 &= E[(x_1 - \bar{x}_1)(x_1 - \bar{x}_1^T)] \\
&= E[(A_0x_0 + B_0w_0 - A_0\hat{x}_0 + B_0\bar{w}_0)(A_0x_0 + B_0w_0 - A_0\hat{x}_0 + B_0\bar{w}_0)^T] \\
&= E[(A_0(x_0 - \hat{x}_0) + B_0(w_0 + \bar{w}_0))(A_0(x_0 - \hat{x}_0) + B_0(w_0 + \bar{w}_0))^T] \\
&= E[A_0(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T A_0^T] + E[B_0(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T B_0^T] \\
&= A_0P_0A_0^T + B_0Q_0B_0^T
\end{aligned} \tag{2.8}$$

となる. ここで, 白色ガウス雑音 v を持った測定値から推定することを考える. このとき次の式が与えられたとする.

$$y = cx + v \tag{2.9}$$

v の平均値は 0, 共分散を R とすると,

$$E(v) = 0 \tag{2.10}$$

$$E[vv^T] = R \tag{2.11}$$

を得る. 状態 1 へ移った後の x_1 の最良推定値 \hat{x} 及びその推定に関する推定誤差の共分散 P_1 は,

$$\hat{x}_1 = \bar{x}_1 + P_1c_1^T R_1^{-1}(y_1 - c_1\bar{x}_1) \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= (M_1^{-1} + c_1^T R_1^{-1} c_1) \\
&= M_1 - M_1c^T(c_1M_1c^T + R_1)^{-1}c_1M_1
\end{aligned} \tag{2.13}$$

と表される. \bar{x}_1 は測定前の x_1 の推定値, \hat{x}_1 は測定後の x_1 の推定値である. 同様に, M_1 は推定前の, P_1 は推定後の測定誤差の共分散である.

以上の操作を多段の仮定に適用したものをカルマンフィルタという. 一般化した空間表現は

次式のようになる．

$$x_{i+1} = A_i x_i B_i w_i \quad (2.14)$$

$$y_i = c_i x_i + v_i \quad (2.15)$$

ただし，

$$E(x_0) = \bar{x}_0 \quad (2.16)$$

$$E(w_i) = \bar{w}_i \quad (2.17)$$

$$E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = M_0 \quad (2.18)$$

$$E[(w_i - \bar{w}_i)(x_j - \bar{w}_j)^T] = Q_i \delta_{ij} \quad (2.19)$$

$$E[(w_i - \bar{w}_i)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = 0 \quad (2.20)$$

$$E(v_i) = 0 \quad (2.21)$$

$$E[v_i v_i^T] = R_i \delta_{ij} \quad (2.22)$$

$$E[(w_i - \bar{w}_i) v_j^T] = 0 \quad (2.23)$$

$$E[(x_0 - \bar{x}_0) v_i^T] = 0 \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

とする．ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数である．このときの状態 x_i の最も確からしい推定は次のようになる．

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + K_i(y_i - c_i \bar{x}_i) \quad (2.26)$$

ただし,

$$\bar{x}_{i+1} = A_i \hat{x}_i + B_i \bar{w}_i \quad (2.27)$$

$$K_i = P_i c_i^T R_i^{-1} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} P_i &= (M_i^{-1} + c_i^T R_i^{-1} c_i)^{-1} \\ &= M_i - M_i c_i^T (c_i M_i c_i^T + R_i)^{-1} c_i M_i \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$M_{i+1} = A_i P_i A_i^T + B_i Q_i B_i^T \quad (2.30)$$

である.

2.2 連続時間カルマンフィルタ

前述の離散系を連続系に拡張する. これは, 添字 i で示された各段階の間隔を小さくすることと実現できる. したがって, (2.14), (2.15) 式は,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t) \quad (2.31)$$

$$y(t) = cx(t) + v(t) \quad (2.32)$$

となる. (2.27)~(2.30) 式は次のようになる. まず (2.26), (2.28) 式より,

$$\hat{x}_{i+1} = \bar{x}_{i+1} + P_{i+1} c_{i+1}^T (R_{i+1} \Delta)^{-1} (y_{i+1} - c_{i+1} \bar{x}_{i+1}) \Delta \quad (2.33)$$

となる. ただし,

$$\Delta = t_{i+1} - t_i \quad (2.34)$$

とする. (2.33) 式に (2.26) 式を代入し, 微小領域についての式を構築すると,

$$\frac{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i}{\Delta} = \frac{A_i - I}{\Delta} \hat{x}_i + \frac{b_i}{\Delta} \bar{w}_i + P_{i+1} c_{i+1}^T (R_{i+1} \Delta)^{-1} (y_{i+1} - c_{i+1} \bar{x}_{i+1}) \quad (2.35)$$

を得る．次に (2.29) 式より，

$$M_i - P_i = M_i c_i^T (R_i \Delta + c_i M_i c_i^T \Delta)^{-1} c_i M_i \Delta \quad (2.36)$$

である．また，(2.29)，(2.30) 式より，

$$\begin{aligned} \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta} = & \Delta \frac{A_i - I}{\Delta} P_i \frac{A_i^T - I}{\Delta} + \frac{A_i - I}{\Delta} P_i + P_i \frac{A_i - I}{\Delta} + \frac{B_i}{\Delta} (Q_i \Delta) \frac{B_i^T}{\Delta} \\ & - M_{i+1} c_{i+1}^T (R_{i+1} \Delta + c_{i+1} M_{i+1} c_{i+1}^T \Delta)^{-1} c_{i+1} M_{i+1} \Delta \end{aligned} \quad (2.37)$$

を得る．ここで， $\Delta \rightarrow 0$ とすると，

$$Q_i \Delta \rightarrow Q(t) \quad (2.38)$$

となる．また，測定誤差の離散過程共分散 R_i は，それと等価な連続白色ガウス雑音のインテンシティを $R(t)$ とし，

$$R_i \Delta \rightarrow R(t) \quad (2.39)$$

と置換する．一方， $\Delta \rightarrow 0$ であれば (2.35)，(2.37) 式は，

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)\bar{w} + P c^T R^{-1} (y - c\hat{x}) \quad (2.40)$$

$$\dot{P} = AP + PA^T + BQB^T - P c^T R^{-1} c P \quad (2.41)$$

となる．ただし， $R(t)$ ， $Q(t)$ はそれぞれ測定誤差 $v(t)$ とプロセスノイズ $w(t)$ を白色ガウス雑音をしたときのインテンシティである．(2.40) 式において

$$P c^T R^{-1} = l \quad (2.42)$$

とおくと， l はオブザーバにおけるフィードバックゲインであり，カルマンフィルタにおいてはこれをカルマンゲインと呼ぶ．

3 シミュレーション

3.1 カルマンフィルタの設計

本課題で与えられたパラメータを用いてカルマンフィルタを設計する．ここで，パラメータはスカラで与えられているので，(2.41) 式に数値を代入すると次のようになる．

$$ap + pa - \frac{1}{r}p^2 = -q \quad (3.1)$$

ここで， q と r はシステムノイズであり，共に 0.7 であるから，

$$-0.04p - \frac{1}{0.7}p^2 = -0.7 \quad (3.2)$$

解の公式を用いてこの式を解くと， $p > 0$ より

$$\begin{aligned} p &= 0.68613\dots \\ &\simeq 0.6861 \end{aligned} \quad (3.3)$$

を得る．以上から，カルマンゲイン l は，(2.42) 式より

$$l = \frac{1}{0.7} \times 0.6861 \quad (3.4)$$

$$= 0.9801\dots \quad (3.5)$$

$$\simeq 0.980 \quad (3.6)$$

したがって，カルマンフィルタは次の式で与えられる．

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= -0.02\tilde{x} + 1.351 \times 10^{-3}u + 0.980(y - \tilde{y}) \\ \tilde{y} &= \tilde{x} \end{aligned} \quad (3.7)$$

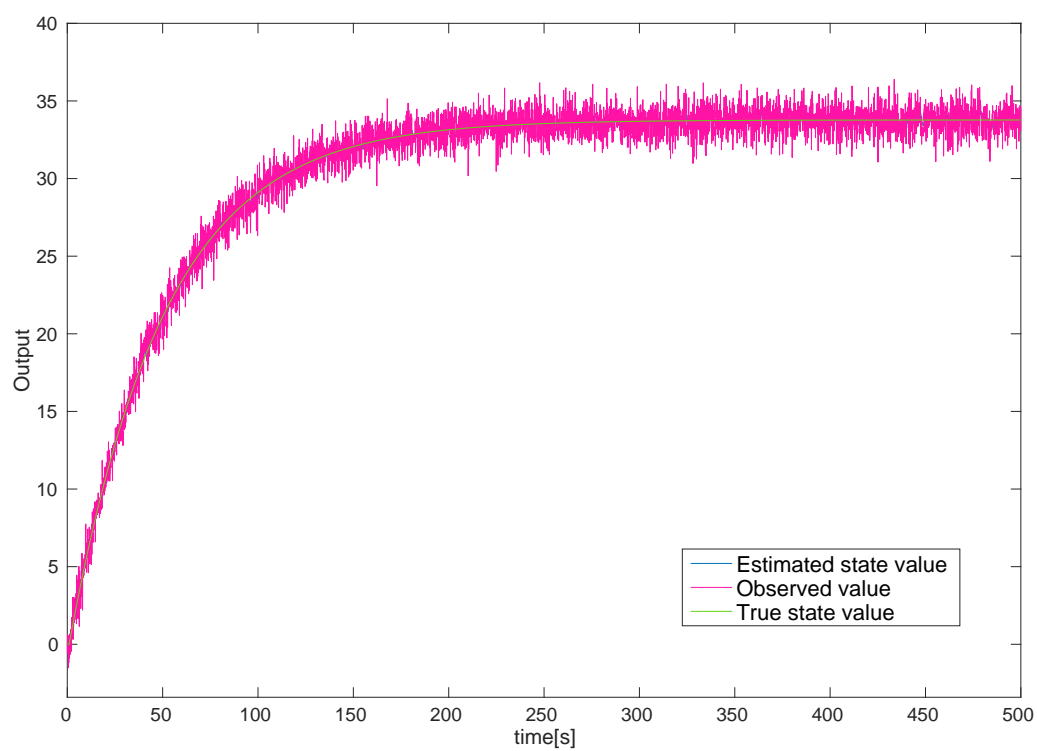
3.2 検証

前節で得たモデルを用いて MATLAB 上でシミュレーションを行い、その結果を出力した。その様子を **Fig.2** に示す。ただし、入力にはステップ入力 $u = 500$ を与え、シミュレーションであるためシステム雑音は $E\{v^2\} = 0$ とした。

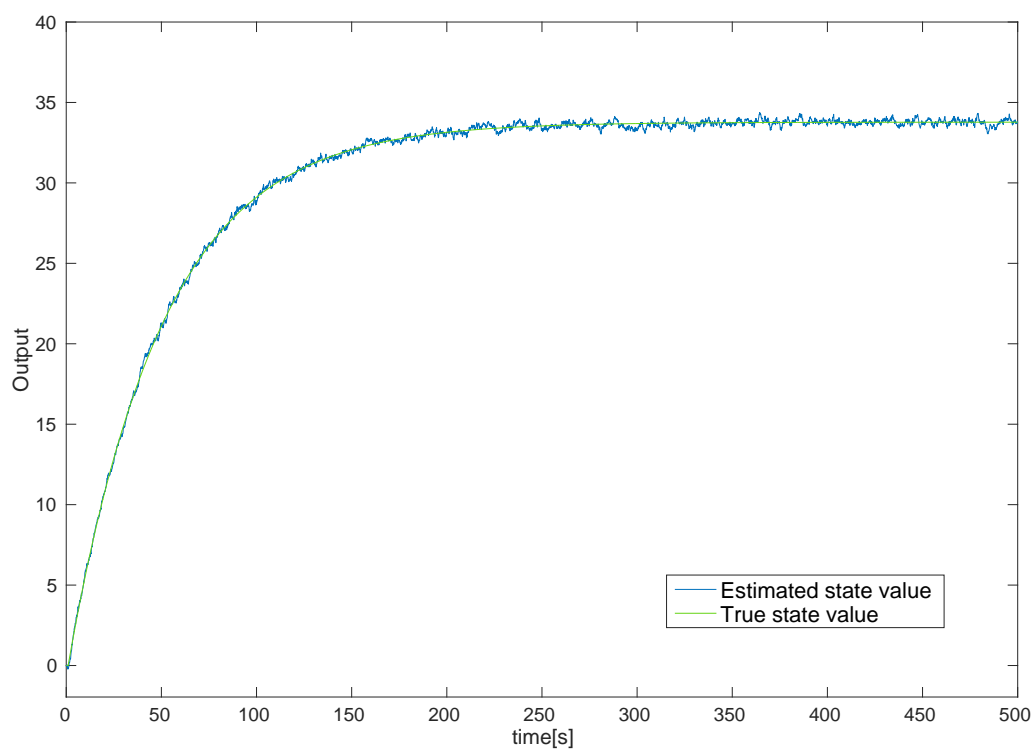
4 考察・まとめ

Fig.2 より測定値と推定値を比較すると、カルマンフィルタを用いることで観測ノイズを含むシステムの出力から雑音成分を除去し、真値に近い値の推定を行えていることが分かる。ここで、観測ノイズが除去できているのは、カルマンフィルタが低域通過性を持つためである [1]。これにより高周波数成分の雑音が除去できている。したがって、観測値に白色雑音を含む線形システムの観測において、カルマンフィルタによるフィルタリングの有用性が確認できた。

本課題では、白色ガウス雑音成分を仮定した線形モデルのカルマンフィルタの設計を行なったが、非線形システムにおける変換では、確率変数の正規性が保たれないために、厳密な状態推定値を得ることが困難な場合がある [1]。このような場合、拡張型カルマンフィルタを設計することで問題に対処することができる。



(a) すべての出力



(b) 真値と推定値の比較

Fig. 2 シミュレーション結果

参考文献

- [1] 足立 修一, 丸田 一郎, ”カルマンフィルタの基礎”, 東京電機大学出版局, pp.8-13, 122-134, 2013.
- [2] 加藤 寛一郎, ”最適制御入門”, 東京大学出版会, pp.129-140, 1996.
- [3] 有本 有, ”カルマン・フィルター”, 産業図書株式会社, pp.89-139, 1994.
- [4] 片山 徹, ”新版 応用カルマンフィルタ”, 朝倉書店, pp.108-123, 2002.
- [5] T.Sakamoto, ”Lecture Note of Advanced Electrical Drive Control System”, pp.44-46, 2017.