6.6　カルマンフィルタ　～非定常系への適用～

初期設定

① 状態推定値の初期値 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$ は $\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\ \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])^T] = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

② システム雑音の分散 $\sigma_v^2(0)$ と観測雑音の分散 $\sigma_w^2(0)$ を設定する.

時間更新

定常過程と異なる箇所

① 予測ステップ

事前状態推定:

$$\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) = \boldsymbol{A}(k-1)\hat{\boldsymbol{x}}(k-1) + \boldsymbol{b}_u(k-1)u(k-1)$$

事前誤差共分散行列:

$$\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{A}(k-1)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T(k-1) + \sigma_v^2\boldsymbol{b}(k-1)\boldsymbol{b}^T(k-1)$$

② フィルタリングステップ

カルマンゲイン:

$$\boldsymbol{g}(k) = \frac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}(k)}{\boldsymbol{c}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}(k) + \sigma_w^2(k)}$$

状態推定値:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\left(y(k) - \boldsymbol{c}^T(k)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\right)$$

事後誤差共分散行列:

$$\boldsymbol{P}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k))\boldsymbol{P}^-(k)$$

6.6　定常カルマンフィルタ　Point6.11 リッカチ方程式

カルマンゲインは常に調整される.

時間が十分経過しても“適応能力(adaptation ability)”を有する.

カルマンゲインがどのような値に収束するのか事前に計算すれば
カルマンフィルタの構成が楽になる.

カギとなるのが“リッカチ方程式”.

時系列データに対するカルマンフィルタ

初期設定

① 状態推定値の初期値 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$ は $\mathcal{N}(\mathbf{0},\ \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])(\boldsymbol{x}(0) - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)])^T] = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

② システム雑音の分散 σ_v^2 と観測雑音の分散 σ_w^2 を設定する.

時間更新

① 予測ステップ

事前状態推定: $\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T + \sigma_v^2\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T$ （6.48）

② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $\boldsymbol{g}(k) = \dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{c} + \sigma_w^2}$ （6.49）

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}(k)\big(y(k) - \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\big)$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{P}^-(k)$ （6.51）

6.6　定常カルマンフィルタ　Point6.11 リッカチ方程式

式(6.48)に式(6.51)(6.49)を代入すると,

$$\boldsymbol{P}^{-}(k) = \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{P}^{-}(k-1) - \frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{P}^{-}(k)}{\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{P}^{-}(k-1)\boldsymbol{c} + \sigma_w^2}\right]\boldsymbol{A}^{T} + \sigma_v^2 \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{T} \qquad (6.91)$$

が得られる(リッカチ方程式(Riccati equation)).
$\boldsymbol{P}^{-}(k)$は正定値対称行列である.

定常状態では, 事前誤差共分散行列は一定値になるので,

$$\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{P}^{-}(k) = \boldsymbol{P}^{-}(k-1) \qquad (6.92)$$

とおき, これを式(6.91)に代入すると,

6.6　定常カルマンフィルタ　Point6.11 リッカチ方程式

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{P} - \frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{c} + \sigma_w^2}\right]\boldsymbol{A}^T + \sigma_v^2\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T \tag{6.93}$$

が得られる（代数リッカチ方程式（ARE:Algebraic Riccati equation））.

式（6.93）の正定値解を$\boldsymbol{P}^*$とすると，定常カルマンゲインは式（6.49）より，

$$\boldsymbol{g}^* = \frac{\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{c} + \sigma_w^2} \tag{6.94}$$

で与えられる.

Point6.12 カルマンフィルタの漸近安定性

時系列を記述する状態方程式において，($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$)が可制御(controllable)で，($\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}$)が可観測(observable)であれば※，$k \to \infty$のとき，$\boldsymbol{P}^{-}(k)$は$\boldsymbol{P}^{*} > 0$に収束し，定常カルマンフィルタは漸近安定になる．

※厳密には($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$)が可安定，($\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}$)が可検出でよい．

6.6　カルマンフィルタ　～f. 制御入力がある場合のSISO系 非定常過程～

例題6.5

$$x(k+1) = x(k) + v(k), \qquad x(0) = 0$$

$$y(k) = x(k) + w(k)$$

$A = b = c = 1$であり，$\sigma_v^2 = 1$なので，代数リッカチ方程式は，

$$p = p - \frac{p^2}{p+r} + 1 \qquad p \cdot \frac{p}{p+r} = 1$$

$$p^2 - p - r = 0$$

式（6.94）より定常カルマンゲインは，

$$g = \frac{p}{p+r} = 0.5$$

このとき，$p = 2$，$r = 2$となる．

ミニ・チュート6　--　可観測性と可制御性

離散時間状態方程式

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \tag{6.98}$$
$$y(k) = c^T x(k) + du(k) \tag{6.99}$$

を考える.

・可観測性（observability）:　式（6.98）（6.99）のモデルが既知である
線形動的システムの状態が、システムの出力から
唯一に決定できることを表す概念である.

可観測性は、cとAのみに依存しシステムの入力に関するbには関係しない.
可観測行列,

$$M = [c \quad A^T c \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} c]$$

のランクがnのとき，可観測であると呼ばれる.

ミニ・チュート6 -- 可観測性と可制御性

・可制御性（controllability）：　任意の状態に制御できる入力が存在することを表す概念

可制御性は，$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{b}$にのみ依存しシステムの出力に関する$\boldsymbol{c}$には関係ない．
可制御行列，

$$N = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]$$

のランクがnのとき，可制御であると呼ばれる．

推定問題における可観測性の概念と制御問題における可制御性の概念は
密接に関係している．

カルマンはこれらを，
推定問題と制御問題の“双対性（dualtiy）”と“分離性（separability）”と呼んだ．

例題6.6

例題6.5で得られた定常カルマンフィルタの性質を調べよ．ただし，$\hat{x}(0) = 0$とする．

この例では，状態はダイナミクスを持たず，

$$\hat{x}^{-}(k) = \hat{x}(k-1)$$

このとき，状態推定値の時間更新式は，

$$\hat{x} = \hat{x}^{-}(k-1) + g(k)(y(k) - \hat{x}^{-}(k-1))$$

となる．例題6.5より，定常カルマンゲイン$g = 0.5$を代入すると，

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{x}^{-}(k-1) + 0.5(y(k) - \hat{x}^{-}(k-1)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} 0.5^{i+1} y(k-i)\end{aligned}$$

例題6.6

この式は，時系列データ$y(k)$を指数平滑することによって状態推定値を計算していることを意味する．

また，

$$\hat{x}(k) = 0.5y(k) + 0.5\hat{x}^{-}(k-1)$$

をz変換すると，

$$(1 - 0.5z^{-1})\hat{x}(z) = 0.5y(z)$$

$$\hat{x}(z) = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}}y(z)$$

$$G(z) = \frac{\hat{x}(z)}{y(z)} = \frac{0.5}{1-0.5z^{-1}} = \frac{0.5z}{z-0.5} \qquad (6.108)$$

が得られる．すなわち，$\hat{x}(k)$は$y(k)$を１次低域通過フィルタ$G(z)$を通したものである．

カルマンフィルタではLPFの構造と係数を試行錯誤なしに数理的に決定し，
それが最適フィルタとなることが保証されている．

6.7.1　カルマンフィルタの状態空間表現

以下では、6.5節で説明した制御入力がある場合の定常カルマンフィルタを対象とする.

式（6.75）より，時刻$(k+1)$における事前状態推定値は，

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k+1)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{b}u(k) \tag{6.109}$$

ここではシステム雑音は直接入力に加わるものと仮定する.
式（6.109）に式（6.78）の状態推定値を代入すると，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k+1)&=\boldsymbol{A}[\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k)+\boldsymbol{g}\left(y(k)-\boldsymbol{c}^{T}\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k)\right)]+\boldsymbol{b}u(k)\\&=\boldsymbol{A}(I-\boldsymbol{g}\boldsymbol{c}^{T})\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k)+[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}]\begin{bmatrix}u(k)\\y(k)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.110}$$

となる.

6.7.1　カルマンフィルタの状態空間表現

次に，出力推定値を，

$$\hat{y}(k) = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}(k) \tag{6.111}$$

と定義し，以下のように変形する．

$$\begin{aligned}\hat{y}(k) &= \boldsymbol{c}^T [\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{g}\left(y(k) - \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\right)] \\ &= \boldsymbol{c}^T (I - \boldsymbol{g}\boldsymbol{c}^T)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{g} y(k) \\ &= \boldsymbol{c}^T (I - \boldsymbol{g}\boldsymbol{c}^T)\hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + [0 \quad \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{g}] \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.112}$$

Point 6.13　カルマンフィルタの状態空間表現

式(6.110)，(6.112)をまとめると，連立差分方程式

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k+1) = \boldsymbol{A}(I - \boldsymbol{g}\boldsymbol{c}^{T})\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k) + [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}]\begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \tag{6.113}$$

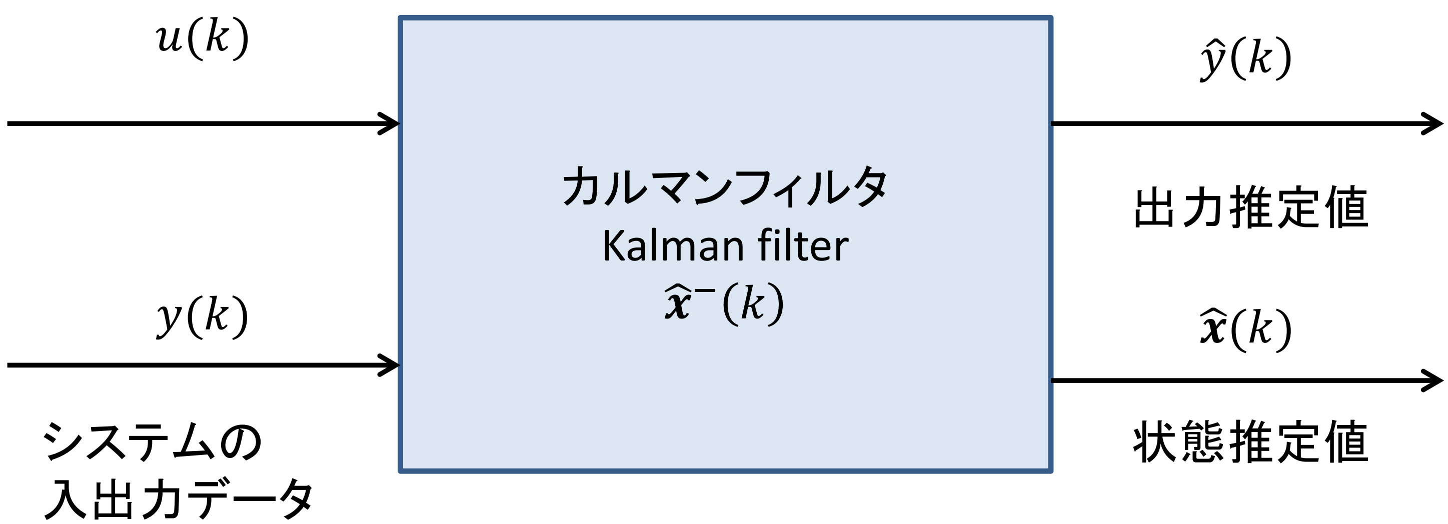
$$\hat{y}(k) = \boldsymbol{c}^{T}(I - \boldsymbol{g}\boldsymbol{c}^{T})\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k) + [0 \quad \boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{g}]\begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \tag{6.114}$$

が得られる.

これは、事前状態推定値$\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k)$を状態変数，出力推定値$\hat{y}(k)$を出力，入出力信号$[u(k) \quad y(k)]^{T}$を入力とする
カルマンフィルタの状態空間状態表現とみなすことができる.

この状態方程式より事前状態推定値$\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(k)$が得られると，式(6.78)を用いて
その時刻での状態推定値が計算できる.

Point 6.13　カルマンフィルタの状態空間表現



図：カルマンフィルタの状態空間表現

6.8　カルマンフィルタのパラメータ推定問題への適用【再掲】

初期設定

① 推定パラメータの初期値

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \boldsymbol{\theta}_0$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \gamma \boldsymbol{I}, \qquad \gamma > 0$$

② システム雑音の分散 σ_v^2 と観測雑音の分散 σ_w^2 を設定する.

時間更新

① 予測ステップ

事前状態推定: $\hat{\boldsymbol{\theta}}^-(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k) = \boldsymbol{P}(k-1)$

② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $\boldsymbol{g}(k) = \dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + {\sigma_w}^2}$

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{g}(k)\{y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\}$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{P}(k-1) - \dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + \sigma_w^2}$

6.8　カルマンフィルタのパラメータ推定問題への適用【再掲】

離散時間状態方程式

$$\boldsymbol{\theta}(k+1)=\boldsymbol{\theta}(k)+\boldsymbol{b}v(k)$$

$$y(k)=\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta}(k)+w(k)$$

時間更新

事前状態推定値: $\hat{\boldsymbol{\theta}}^-(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$

事前誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}^-(k)=\boldsymbol{P}(k-1)+\sigma_v^2\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T$

カルマンゲイン: $\boldsymbol{g}(k)=\dfrac{\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)+{\sigma_w}^2}$

状態推定値: $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\boldsymbol{g}(k)\{y(k)-\boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\}$

事後誤差共分散行列: $\boldsymbol{P}(k)=\{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\}\boldsymbol{P}^-(k)$

6.9　カルマンフィルタの特徴と注意点 【再掲】

特徴

1. 計算機を用いたオンライン処理に適している

→ カルマンフィルタは漸化式の形式であるため
過去のデータをすべて記憶する必要がない

2. 非定常時系列（時変システム）に対しても適用できる

3. プロセス雑音の分散σ_v^2と観測雑音の分散σ_w^2が
厳密な値でなくても動作する

4. 推定問題を状態空間表現することによって，さまざまな問題を
カルマンフィルタの枠組みで解くことが可能

1.　線形カルマンフィルタ　～f. 注意点～　【再掲】

注意点

1. 時系列モデルやシステムモデルの精度に推定精度が大きく依存する

2. 非線形および非ガウシアンの場合は状態推定が難しくなる

   → EKFやUKF, PFをなどの非線形フィルタを利用することで対処

3. シミュレーション結果と実装時の結果は大きく精度が違う. 実装時の精度は一般に低くなる.

1.　線形カルマンフィルタ　～f. 注意点～【再掲】

注意点

4　実装時は逆行列の計算を発生させない工夫が必要.

カルマンゲイン：　$\boldsymbol{G}(k) = \boldsymbol{P}^{-}(k)\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{P}^{-}(k)\boldsymbol{C} + \boldsymbol{R})^{-1}$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{P}^{-}(k)\boldsymbol{C}$$
$$\alpha = \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{G}(k) = \boldsymbol{f} \cdot 1/\alpha$$

5　事後誤差共分散行列：　$\boldsymbol{P}(k) = \{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{\varphi}^{T}(k)\}\boldsymbol{P}^{-}(k)$

この値が小さくなりすぎると数値計算の精度の問題で，$\boldsymbol{P}(k)$の妥当性が崩れる.

U-D分解フィルタ，SVDフィルタなどの改善手法が存在する.