Recursive Method

Theorem 4.2 (26) より

$$v^3(x) = r_G(x), \quad x = s_1, s_2, s_3$$

$$v^2(x) = \operatorname*{Max}_{u\in\{a_1,a_2\}} \left[r_2(u) + \sum_{y\in\{s_1,s_2,s_3\}} v^3(y)p(y|x,u) \right], \quad x = s_1, s_2, s_3$$

$$v^1(x) = \operatorname*{Max}_{u\in\{a_1,a_2\}} \left[r_1(u) + \sum_{y\in\{s_1,s_2,s_3\}} v^2(y)p(y|x,u) \right], \quad x = s_1, s_2, s_3$$

を順に計算していけばよい．

$v^3(x) = r_G(x)$ $(x = s_1, s_2, s_3)$ より

$$v^3(s_1) = r_G(s_1) = 0.3, \quad v^3(s_2) = 1.0, \quad v^3(s_3) = 0.8$$

次に $v^2(x) = \operatorname*{Max}_{u\in\{a_1,a_2\}} \left[r_2(u) + \sum_{y\in\{s_1,s_2,s_3\}} v^3(y)p(y|x,u) \right]$ $(x = s_1, s_2, s_3)$ より

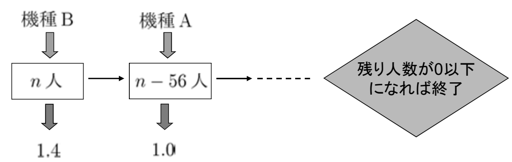
$$\begin{aligned} v^2(s_1) &= \operatorname{Max}\Bigg[\Big(r_2(a_1) + \sum_{y\in\{s_1,s_2,s_3\}} v^3(y)p(y|s_1,a_1)\Big), \\ &\qquad \Big(r_2(a_2) + \sum_{y\in\{s_1,s_2,s_3\}} v^3(y)p(y|s_1,a_2)\Big)\Bigg] \\ &= \operatorname{Max}\Big[\big(1.0 + v^3(s_1)p(s_1|s_1,a_1) + v^3(s_2)p(s_2|s_1,a_1) + v^3(s_3)p(s_3|s_1,a_1)\big), \\ &\qquad \big(0.6 + v^3(s_1)p(s_1|s_1,a_2) + v^3(s_2)p(s_2|s_1,a_2) + v^3(s_3)p(s_3|s_1,a_2)\big)\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Max}\Big[\big(1.0 + v^3(s_1)p(s_1|s_1,a_1) + v^3(s_2)p(s_2|s_1,a_1) + v^3(s_3)p(s_3|s_1,a_1)\big), \\ &\qquad \big(0.6 + v^3(s_1)p(s_1|s_1,a_2) + v^3(s_2)p(s_2|s_1,a_2) + v^3(s_3)p(s_3|s_1,a_2)\big)\Big] \\ &= \operatorname{Max}\Big[(1.0 + 0.3\cdot 0.8 + 1.0\cdot 0.1 + 0.8\cdot 0.1), \\ &\qquad (0.6 + 0.3\cdot 0.1 + 1.0\cdot 0.9 + 0.8\cdot 0.0)\Big] \\ &= \operatorname{Max}\big[1.42,\ 1.53\big] = 1.53; \qquad \pi_2^*(s_1) = a_2 \end{aligned}$$

例題2.1.3（機材割当問題）

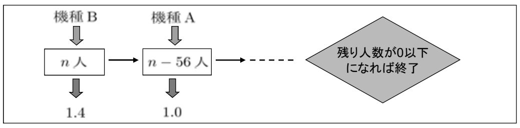
3 種類の航空機 A, B, C を用いて n 人を運ぶとき，どの機種を何機割り当てればよいか，最適な（最も低コストな）割り当て案を動的計画法を用いて求めよ．ただし，各機の定員および運行費は以下の通りとする．

機種	定員	運行費
A	35	1.0
B	56	1.4
C	74	1.8



定式化その1

状態空間	X	:	$X = \{-73, -72, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, n\}$
初期状態	x_1	:	$x_1 = n$
決定空間	U	:	$U = \{A, B, C\}$
推移法則	$f_n = f$	:	$f(x,u) = \begin{cases} x - 35 & (u = A) \\ x - 56 & (u = B) \\ x - 74 & (u = C) \end{cases}$
利得	$r_n = r$	:	$r(x,u) = r(u) = \begin{cases} 1.0 & (u = A) \\ 1.4 & (u = B) \\ 1.8 & (u = C) \end{cases}$
終端利得	r_G	:	$r_G(x) \equiv 0\ , \quad x \in T$
終了集合	T	:	$T = \{-73, -72, \cdots, -1, 0\}$



$$\min \quad \sum_{n=1}^{N} r(u_n)\Big(+\underbrace{r_G(x_{N+1})}_{0}\Big)$$

$$\text{s.t.} \quad (*) \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, u_n) \quad n = 1, 2, \ldots, N \\ \pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N\} \in \Pi \\ N = N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{n | x_{n+1} \in T\} \end{cases}$$

部分問題 : $v(x_n) = \min\left\{ \sum_{m=n}^{N} r(u_m) \,\middle|\, (*) \right\}$

DPによる再帰式

$$\begin{aligned} v(x) &= 0\ , \quad x \in T \\ v(x) &= \min_{u\in U}[r(u) + v(f(x,u))]\ , \quad x \in X \setminus T \end{aligned}$$

まず、次の値が容易にもとまる：

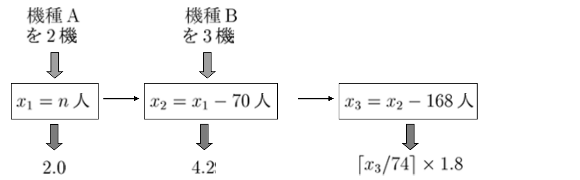
$$v(1) = v(2) = \cdots = v(35) = 1$$
$$v(36) = v(37) = \cdots = v(56) = 1.4$$
$$v(57) = v(58) = \cdots = v(74) = 1.8$$

さらに、先の再帰式は具体的に次のように表されるので、

$$v(n) = \min\{1 + v(n-35)\ ,\ \ 1.4 + v(n-56)\ ,\ \ 1.8 + v(n-74)\}$$

例えば 200 人を運ぶ場合、これに $n = 200$ を代入して計算する。

例題2.1.3 機材割当問題：定式化その２



$N = 2$

X : $X = \{-55, -54, \cdots, 0, 1, \cdots, n\}$

x_1 : $x_1 = n$

$U_n(x)$: $U_1(x) = \{0, 1, \cdots, \lceil x/35 \rceil\}$

: $U_2(x) = \{0, 1, \cdots, \lceil x/56 \rceil\}$

ただし $x \le 0$ の時は $U_n(x) = \{0\}$

f_n : $f_1(x,u) = x - 35u$

: $f_2(x,u) = x - 56u$

r_n : $r_1(u) = 1.0u$

: $r_2(u) = 1.4u$

r_G : $r_G(x) = 1.8\lceil x/74 \rceil$

Minimize $r_1(u_1) + r_2(u_2) + r_G(x_3)$

subject to (i) $x_{n+1} = f_n(x_n, u_n)$, $n = 1, 2$

(ii) $u_n \in U_n(x)$, $n = 1, 2$

再帰式

$$\begin{cases} v^3(x) = r_G(x)\ , & x \in X \\ v^2(x) = \min\limits_{u \in U_2(x)} [r_2(u) + v^3(f(x,u))]\ , & x \in X \\ v^1(x) = \min\limits_{u \in U_1(x)} [r_1(u) + v^2(f(x,u))]\ , & x \in X \end{cases}$$

$X = \{-55, -54, \cdots, 0, 1, \cdots, n\}$

$x_1 = n$

$U_1(x) = \{0, 1, \cdots, \lceil x/35 \rceil\}$

$U_2(x) = \{0, 1, \cdots, \lceil x/56 \rceil\}$

ただし $x \le 0$ の時は $U_n(x) = \{0\}$

$f_1(x,u) = x - 35u$
$f_2(x,u) = x - 56u$

$r_1(u) = 1.0u$
$r_2(u) = 1.4u$

$r_G(x) = 1.8\lceil x/74 \rceil$