2.5.2. 対局ゲーム(組合せゲーム)必勝法

- 2人が交互に手をうつゲーム(引き分けなし)を想定
- 先攻の必勝法の有無を調べたい
- 必勝法があれば、最短のそれを求めたい
  (最長で何手かかるかの最小化)

状態（空間）　その時点におけるゲームの途中状況を表す何らかの要素（の集合）。

決定（空間）　プレーヤーの打つ手を表現する何らかの要素（の集合）。一般には、状況に応じて打てる手は限られるので、決定制約 $U(x)$ で表現。

非決定性推移　先手の場合、各状態に対しある決定をとった後、相手が打つ手によって生じるすべての状態の集合。

コスト関数 1

終端コスト関数 負け状態に対し L（十分大きな数）、勝ち状態に対し 0

終了集合 負け状態と勝ち状態

目的関数 各期で以降のコストの最大値をとり前の期のコストと和をとる

$$r(x_0, f_0(x_0)) + \bigvee_{x_1 \in T(x_0, f_0(x_0))} \Big\{ r(x_1, f_1(x_1)) + \bigvee_{x_2 \in T(x_1, f_1(x_1))} \Big\{ r(x_2, f_2(x_2)) + \cdots + \bigvee_{x_{N-1} \in T(x_{N-2}, f_{N-2}(x_{N-2}))} \Big\{ r(x_{N-1}, f_{N-1}(x_{N-1})) + \bigvee_{x_N \in T(x_{N-1}, f_{N-1}(x_{N-1}))} k(x_N) \Big\} \cdots \Big\}\Big\}$$

（決定が取れない（ゲームが終わった）場合の T は ϕ を返し、$\bigvee_{\phi} = 0$ とする。）

Minimize ⇒ 最小値 ≦ L … 必勝法有 / 最小値 ＞ L … 必勝法無 ⇒ 最適政策：最短必勝法

2.5.2.1. 石取りゲーム

石取りゲームとは・・・

場に積まれた石をルールに従いながら交互に取り合い、最後の1つを取った方が負けとなるゲーム。

石の数　5個 → 4個 → 1個 → 0個

1つ取る　3つ取る　1つ取る　後攻の勝ち

■一度に取れる石は1～3個

■パスはできない。

定式化

ゲーム開始時の石の数を M とする。

状態：自分（先攻）の順番の際に、場に残っている石の数

状態空間：$X = \{0, 1, ..., M\}$

初期状態：$x_0 = M$

終了集合：$X_G = \{0, 1\}$

決定：自分（先攻）が取る石の数

決定空間：$U = \{1, 2, 3\}$　(自ら負ける手はとらないものとする)

決定制約：$U(x) = \{u \in U \mid u < x\}$ $(x \notin Z)$

非決定性推移：

$$T(x, u) = \begin{cases} \{h(h(x,u), u') \mid u' \in U(h(x,u))\} & (U(h(x,u)) \neq \phi) \\ \{0\} & (U(h(x,u)) = \phi) \end{cases}$$

ただし

$$h(x, u) = x - u, \quad x \in X,\ u \in U(x)$$

コスト, 終端コスト：

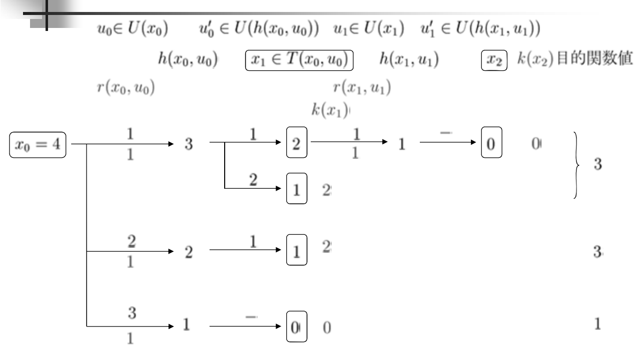
$$r(x, u) = 1 \quad (x \notin Z)$$

$$k(x) = \begin{cases} L & (x = 1) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

ただし

$$L = \left[\frac{M}{2} \right]$$

と定める。($[x]$ は x をこえない最大の整数)



再帰式（2.3参照）

再帰式

$$
\begin{aligned}
v(x) &= k(x) \quad x \in X_G \\
v(x) &= \min_{u \in U(x)} \left[r(x,u) + \bigvee_{y \in T(x,u)} v(y) \right] \quad x \in X \setminus X_G
\end{aligned}
$$

⇩

$$
\begin{cases}
v(0) = 0 \\
v(1) = L \\
v(x) = 1 + \min\limits_{u \in U(x)} \left[\bigvee\limits_{y \in T(x,u)} v(y) \right] \quad x = 2, 3, \cdots
\end{cases}
$$

再帰式をさらに書き下すと

$$
\begin{cases}
v(0) = 0 \\
v(1) = L \\
v(x) = 1 + \min\limits_{u \in U(x)} \left[\bigvee\limits_{y \in T(x,u)} v(y) \right] \quad x = 2, 3, \cdots
\end{cases}
$$

⇩

$$
\begin{cases}
v(0) = 0 \\
v(1) = L \\
v(2) = 1 \\
v(3) = 1 \\
v(x) = 1 + \min\limits_{u \in U(x)} \left[\bigvee\limits_{y \in T(x,1)} v(y),\ \bigvee\limits_{y \in T(x,2)} v(y),\ \bigvee\limits_{y \in T(x,3)} v(y) \right] \quad x = 4, 5, \cdots
\end{cases}
$$

例題2.5.2（石5個）

$$
v(4) = 1 + \min \left[\bigvee_{y \in T(4,1)} v(y),\ \bigvee_{y \in T(4,2)} v(y),\ \bigvee_{y \in T(4,3)} v(y) \right]
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
T(4,1) &= \{h(h(4,1),u') | u' \in U(h(4,1))\} = \{h(3,u') | u' \in U(3)\} = \{1,2\} \\
T(4,2) &= \{h(h(4,2),u') | u' \in U(h(4,2))\} = \{h(2,u') | u' \in U(2)\} = \{1\}
\end{aligned}
$$

また $U(h(4,3)) = U(1) = \phi$ より

$$
T(4,3) = \phi
$$

よって

$$
\begin{aligned}
v(4) &= 1 + \min\left[v(1) \vee v(2),\ v(1),\ v(0)\right] \\
&= 1 + \min\left[L \vee 0,\ L,\ 0\right] = 1
\end{aligned}
$$

$$
\pi^*(4) = 3
$$

必勝法あり（初手３個取る）

例題2.5.1（石4個）

$$
v(5) = 1 + \min \left[\bigvee_{y \in T(5,1)} v(y),\ \bigvee_{y \in T(5,2)} v(y),\ \bigvee_{y \in T(5,3)} v(y) \right]
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
T(5,1) &= \{h(h(5,1),u') | u' \in U(h(5,1))\} = \{h(4,u') | u' \in U(4)\} = \{1,2,3\} \\
T(5,2) &= \{h(h(5,2),u') | u' \in U(h(5,2))\} = \{h(3,u') | u' \in U(3)\} = \{1,2\} \\
T(5,3) &= \{h(h(5,3),u') | u' \in U(h(5,3))\} = \{h(2,u') | u' \in U(2)\} = \{1\}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
v(5) &= 1 + \min\left[v(1) \vee v(2) \vee v(3),\ v(1) \vee v(2),\ v(1)\right] \\
&= 1 + \min\left[L \vee 1 \vee 1,\ L \vee 1,\ L\right] = L + 1
\end{aligned}
$$

$v(5) \geq L$ より

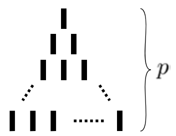
必勝法無し

計算機による結果

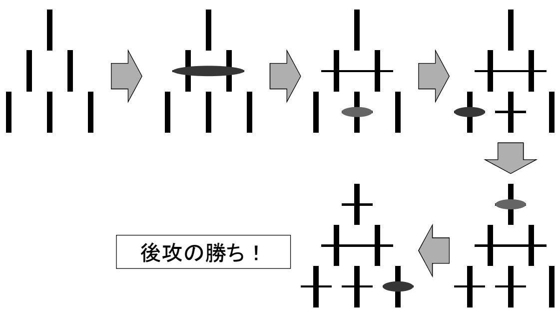
・石の数４個 → 必勝法あり（初手３個取る）
・石の数５個 → 必勝法無し
・石の数６個 → 必勝法あり（初手１個取る）
・石の数７個 → 必勝法あり（初手２個取る）
・石の数８個 → 必勝法あり（初手３個取る）
・石の数９個 → 必勝法無し

2.5.2.2. 棒取りゲーム（ピラミッドゲーム）

p 段ゲーム

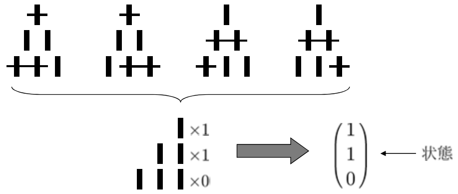


■ 自分の順番では、必ず１本以上の棒を消さなければならない。
■ 複数の棒を消す場合、それらは隣り合う棒でなければならない。



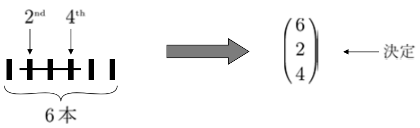
状態について

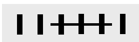
次にあげるゲーム状況は、いずれも同等である。



状態空間： $X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_i = 0, 1, 2, \cdots \\ (i = 1, 2, \cdots, p) \end{array} \right\}$　　初期状態：$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

決定について



また  と  とは同等！

決定空間：

$$U = \bigcup_{n=1}^{p} U_n \quad \text{ただし} \quad U_n = \left\{ (u_1, u_2, u_3) \middle| \begin{array}{l} u_1 = n \\ u_2 < \dfrac{n}{2} + 1 \\ u_2 \le u_3 \le u_1 - u_2 + 1 \\ u_2, u_3 = 1, 2, \cdots \end{array} \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots, p$$

決定制約：

$$U(x) = \bigcup_{n; x_n > 0} U_n$$

ただし、自ら負ける手はとらないものとする。
すなわち、$\Sigma x_i = 1, x_1 = 0$ のとき、$x_n = 1$ なる n に対し、

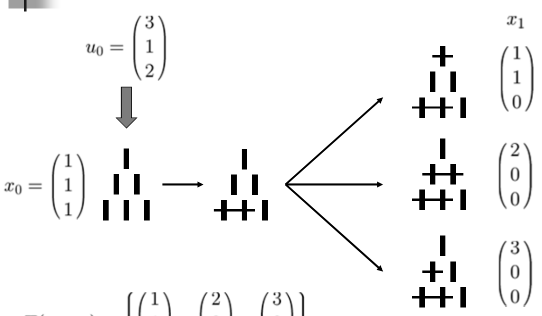
$$U_n \longleftarrow U_n \backslash \left\{ \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ n \end{pmatrix} \right\}$$

例

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = U_1 \cup U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

推移について



$$T(x_0, u_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

非決定性推移：

$$T(x, u) = \begin{cases} \{ h(h(x, u), u') \mid u' \in U(h(x, u)) \} & (U(h(x, u)) \ne \phi) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & (U(h(x, u)) = \phi) \end{cases}$$

$h(x, u) = x'$, $x \in X, u \in U(x)$
ただし

$$x'_i = \begin{cases} x_i - 1 & (\ i = u_1\ ) \\ x_i + 1 & \left(\begin{array}{l} i = u_2 - 1 \ne u_1 - u_3, u_2 - 1 > 0 \\ i = u_1 - u_3 \ne u_2 - 1, u_1 - u_3 > 0 \end{array} \right) \\ x_i + 2 & (\ i = u_2 - 1 = u_1 - u_3\ ) \\ x_i & (\ \text{その他}\ ) \end{cases}$$

コスト関数

$$\text{終了集合}:X_G \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$r(x,u) \;=\; 1 \quad x \in X \setminus X_G$$

$$k(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ L & x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{ただし}\;\; L = \left[\frac{1+2+\cdots+p}{2} \right]$$

	$u_0 \in U(x_0)$ / $r(x_0,u_0)$	$h(x_0,u_0)$	$u_0' \in U(h(x_0,u_0))$	$x_1 \in T(x_0,u_0)$	$k(x_1)$	目的関数値
$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ / 1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\longrightarrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1	2
	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ / 1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\longrightarrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1	2
	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ / 1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\longrightarrow$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	0	1

最小値：1

$$f^*(x_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

計算機による結果

p	必勝法の有無（必ず勝つまでの最短手数）
2	○ (1)
3	×
4	○ (3)
5	○ (7)
6	○ (8)
7	×
8	○ (14)
9	○ (22)
10	○ (23)
11	×
12	○ (33)