平成 29 年 10 月 25 日

確率システム制御特論

第 4 回演習問題

機械知能工学専攻 知能制御工学コース　17344219　二宮 悠二

問題

1. ベイズの定理の証明をせよ.

2. $x_1, x_2, \cdots, x_N$ が平均 μ，分散 σ^2 の正規分布から独立に発生した数値データであるとき，これらの平均値 $\bar{\mu}$，分散 $\bar{\sigma}^2$ の最尤推定量を求めよ（解答例中の数式 ①～⑥ を記述せよ）.

解答

1. ベイズの定理とは，次式で与えられる条件付き確率に関して成り立つ定理である.

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)} \tag{1}$$

この定理が成り立つことを証明する.

(証明)

ある標本空間で定義される二つの事象 A, B について，次のような三つの確率が定義できる.

- 同時確率 $P(A,B)$: A と B が同時に起こる確率.
- 周辺確率 $P(A), P(B)$: 他の事象に関わりのない一つの事象だけの確率
- 条件付確率 $P(A|B)$: B が起きたという条件の元で A が起こる確率.

上記の定義を用いて，条件付確率は次のように定義される.

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)},\ \ P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)} \tag{2}$$

このとき，$P(A) \neq 0$，$P(B) \neq 0$ である．(2) 式をそれぞれ変形すると，次式を得る.

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) \tag{3}$$
$$P(A,B) = P(B|A)P(A) \tag{4}$$

(3)，(4) 式は等しいので，次の関係式を得ることができる.

$$\begin{aligned} P(A|B)P(B) &= P(B|A)P(A) \\ P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \end{aligned} \tag{5}$$

(以上)

2.　まず，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の確率密度は以下のように表せる．

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{6}$$

これより，尤度は次のように書ける．

$$L = \prod_{\alpha=1}^{N} ① = ② \tag{7}$$

① $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_\alpha-\mu)^2/2\sigma^2}$

② $\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^N} \displaystyle\prod_{\alpha=1}^{N} e^{-(x_\alpha-\mu)^2/2\sigma^2}$

これを最大化する μ と σ^2 を求めるためには，次の $J = -\log L$ を最小にする μ と σ^2 を求めればよい．

$$J = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^{N} ③ + \frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 \tag{8}$$

③ $(x_\alpha - \mu)^2$

これを μ と σ^2 で微分して 0 とおくと，それぞれ次のようになる．

$$\frac{\partial J}{\partial \mathrm{u}} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma^2} = ④ = 0 \tag{10}$$

④ $-\dfrac{1}{2\sigma^4} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu)^2 + \dfrac{N}{2\sigma^2}$

これを μ と σ^2 について解いたものを $\bar{\mu}$ と $\bar{\sigma}^2$ とすると，次のようになる．

$$\bar{\mu} = ⑤ \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}^2 = ⑥ \tag{12}$$

⑤ $\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha$

⑥ $\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu)^2$

これより，母平均 μ，母分散 σ^2 の最尤推定量 $\bar{\mu}$ と $\bar{\sigma}^2$ は，それぞれサンプル平均とサンプル分散に

等しいことがわかる．

参考文献

[1] 足立 修一・丸田 一郎，”カルマンフィルタの基礎”，東京電機大学出版局，pp.76-80，2012．