② 計算量とオーダー記法

オーダー記法の性質について、さらに細かく学習しましょう。

オーダー記法とは

- 一般に、アルゴリズムの計算時間を見積もる際には、「O(オーダー)記法」を用います
- 次のような意味をもちます
  - あるプログラムの実行時間 $T(n)$ が $O(g(n))$ である
  - ⇕
  - n が十分に大きい時、$T(n)$ は $g(n)$ に比例する
- これは、nが大きくなった時の、$T(n)$ の増え方に着目しているという点に注意してください

(参考)オーダー記法の本来の定義

- オーダー記法の本来の定義は「漸近的な上界」です
  - あるプログラムの実行時間 $T(n)$ が $O(g(n))$ である

    ⇕

  - 正の定数 n_0 と c が存在し、全ての $n \geq n_0$ について $T(n) \leq cg(n)$ が成り立つ

- 以下のような意味合い
  - 「$T(n)$ の増え方は、$g(n)$ 以下(同じか、それより小さい)」

オーダー記法の考え方

- オーダー記法では、計算時間の「増え方」に着目しているため、一般に以下のように扱います

✔ 計算時間が複数の項の和となる場合は、その中で最も早く増加する項だけを残します

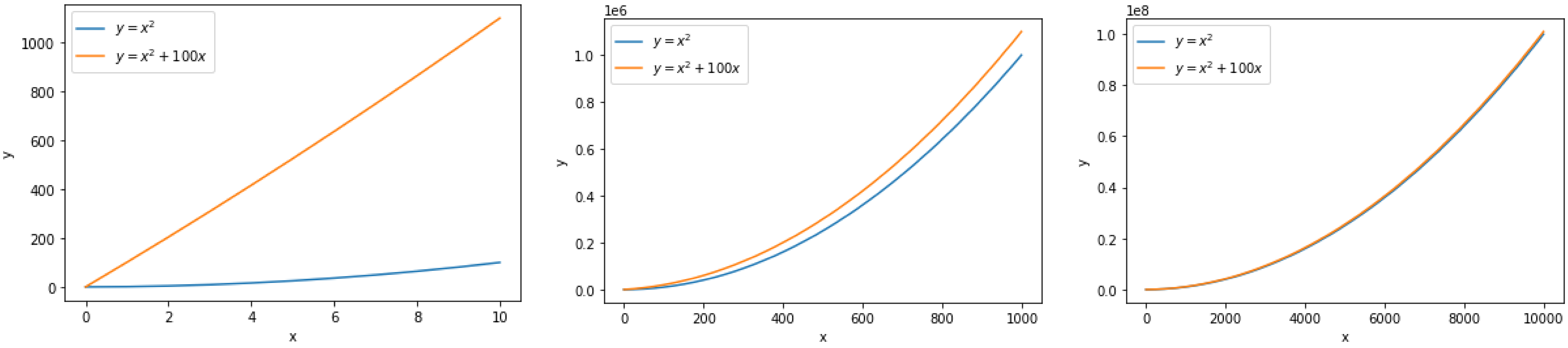
- 多項式の場合は最高次の項のみが有効で、残りは無視します
- 例) $T(n) = n^3 + 2n^2 + \mathrm{n}$ ➡ $O(n^3)$

✔ 計算時間が定数倍されても、オーダーは変わりません

- 各項の係数は、無視します
- 例) $T(n) = 100n^2$ ➡ $O(n^2)$

オーダー記法では、低次項は無視します

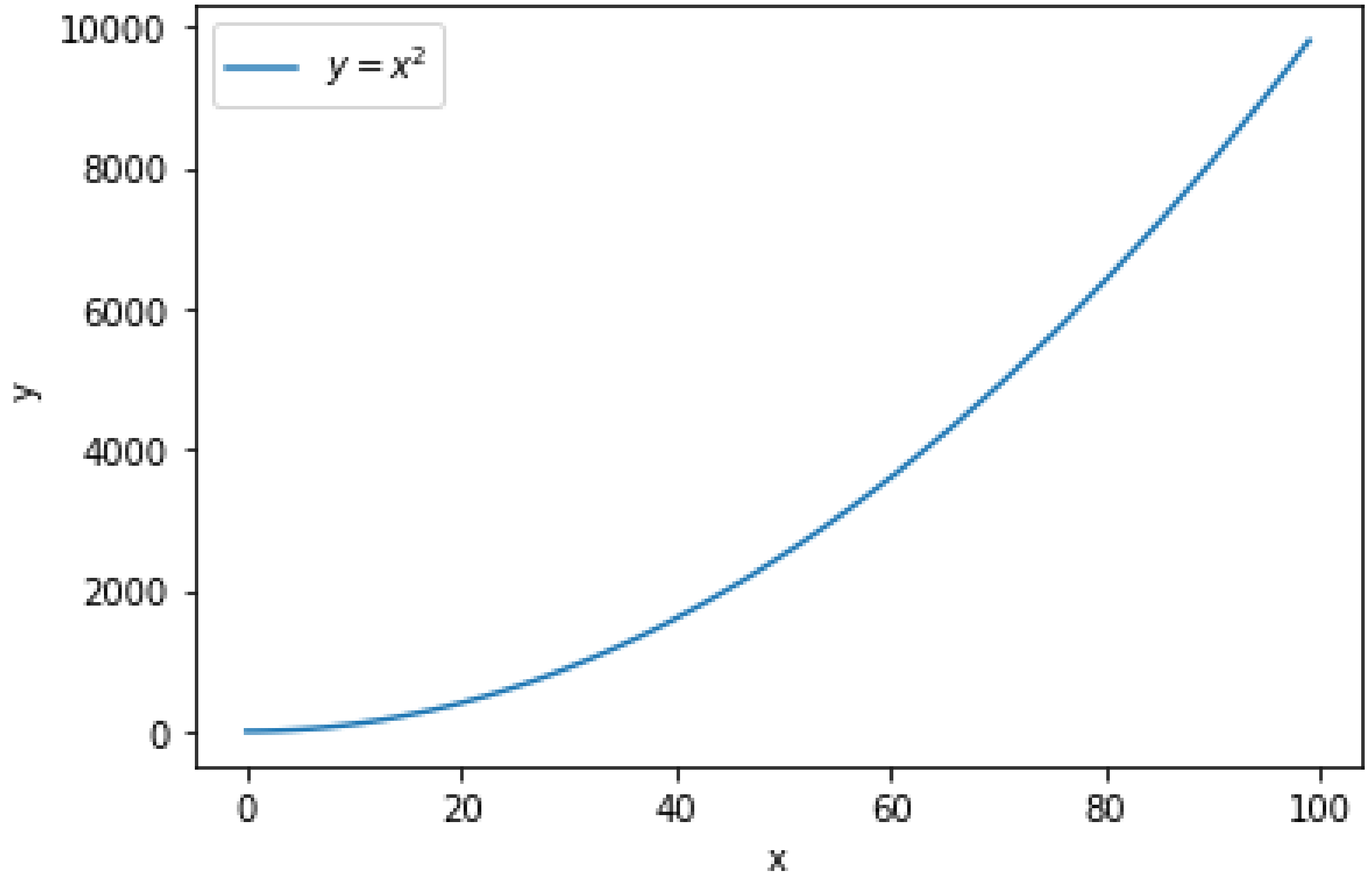
- 低次項があっても、nが大きくなると、グラフの形（増え方）はほとんど変わりません
  - $y = x^2$ ¿ $y = x^2 + 100x$ のグラフを、範囲を変えて描画してみましょう

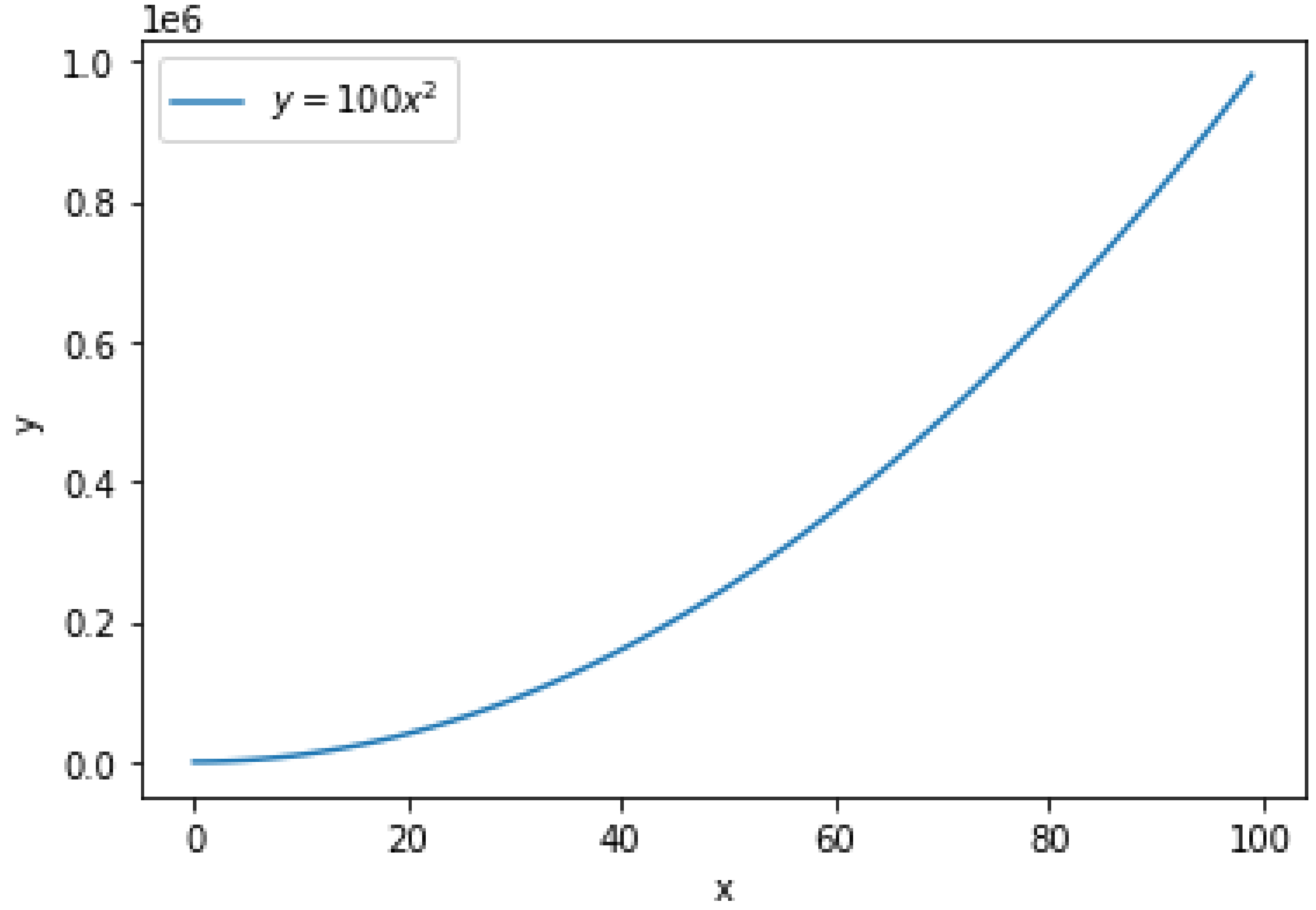


オーダー記法では、係数は無視します

- 係数が変わっても、関数の増え方（＝グラフの形）は変わりません

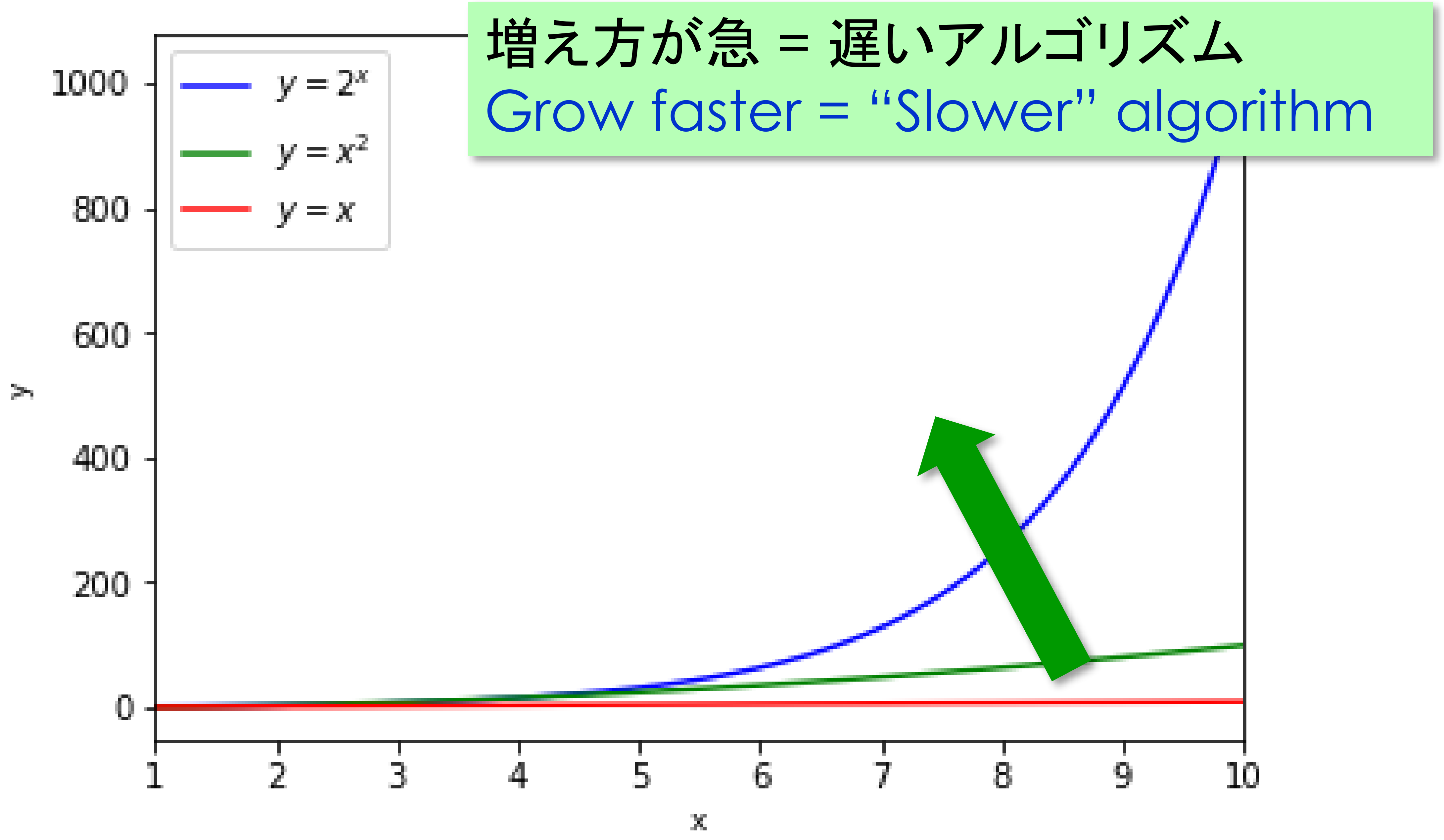
$y = x^2$ と $y = 100x^2$ のグラフを描画してみましょう

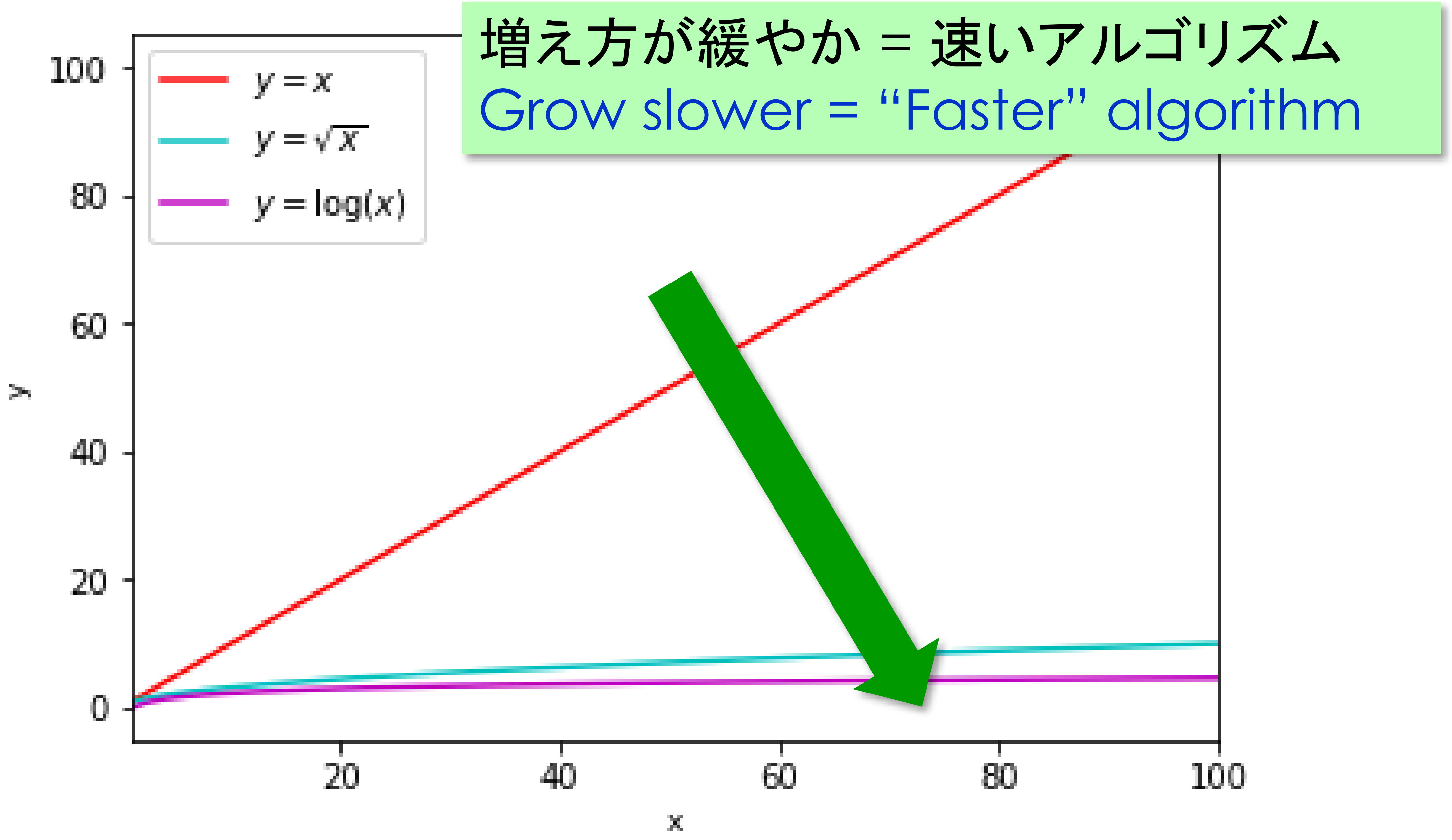




オーダー記法の性質

- 増え方が緩やかものほど、アルゴリズムとしては「速い」とみなします
  - 問題のサイズが大きくなった時、より短い時間で処理が終わる





オーダー記法の性質

- 大きい順に以下のようになることは覚えておきましょう
  - 指数関数　$O(C^n)\ (C > 1)$
  - 多項式（べき関数）　$O(n^c)\ (C > 0)$
  - 対数関数　$O(\log n)$
  - 定数　$O(1)$
- この場合も、計算時間が複数の項の和となる場合は、その中で最も早く増加する項だけを残します
  - 例）　$T(n) = n + \log n$ ➡ $O(n)$

覚えておくべき計算量

オーダー記法	一般的な呼称	意味合い
$O(1)$	定数時間	nに関わらず時間は一定。
$O(\log n)$	対数時間	nの対数に比例して、時間がかかる。 （例：二分探索）
$O(n)$	線形時間	nに比例して、時間がかかる。 （例：線形探索）
$O(n \log n)$	準線形時間	nとnの対数の積に比例して、時間がかかる。 （例：実用的なソート）
$O(n^2)$	二乗時間	nの2乗に比例して、時間がかかる。 （例：遅いソート）
$O(C^n)$	指数時間	定数（2など）のn乗に比例して、時間がかかる。 現実的に解くことが難しいと見なされる。

（参考）対数時間の底は？

- ところで、$O(\log n)$ の対数の底は、なんでしょうか？
- ここでは、対数の底の変換を思い出してください

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

- どのような底を取ったとしても定数倍となるため、オーダー記法では影響がありません
- そのため、一般的に計算量では対数の底を記述しません

（参考）「指数関数的」と「加速度的」

- 「指数関数的」
  - $O(C^n)$　で増えるという意味合いになります
- 「加速度的」
  - $O(n^2)$　で増えるという意味合いになります

- どちらも口語では「急速に増えること」を表現しますが、ぜひ意味合いの違いを覚えておきましょう

時間計算量と空間計算量

- ここまで紹介してきた計算量は、正確には「時間計算量」と呼ばれるものですが、計算に用いる資源に着目した「空間計算量」もあります
- 時間計算量
  - 問題のサイズnに対して、問題を解くのにどれだけの計算ステップ（計算時間）を要するかを表したもの
- 空間計算量
  - 問題のサイズnに対して、問題を解くのにどれだけの記憶容量（メモリ）を要するかを表したもの

平均計算量と最悪計算量

- 計算量に関しては、他にも次のような観点があります
- 平均計算量
  - サイズnの問題の全てのパターンに対して、問題を解く際に、平均してどれだけの計算ステップ(計算時間)を要するかを表したもの
- 最悪計算量
  - サイズnの問題の全てのパターンの中で、問題を解く際に、最も時間がかかる場合にどれだけの計算ステップ(計算時間)を要するかを表したもの