Transformações Geométricas 2D

Sistemas Gráficos/

Computação Gráfica e Interfaces

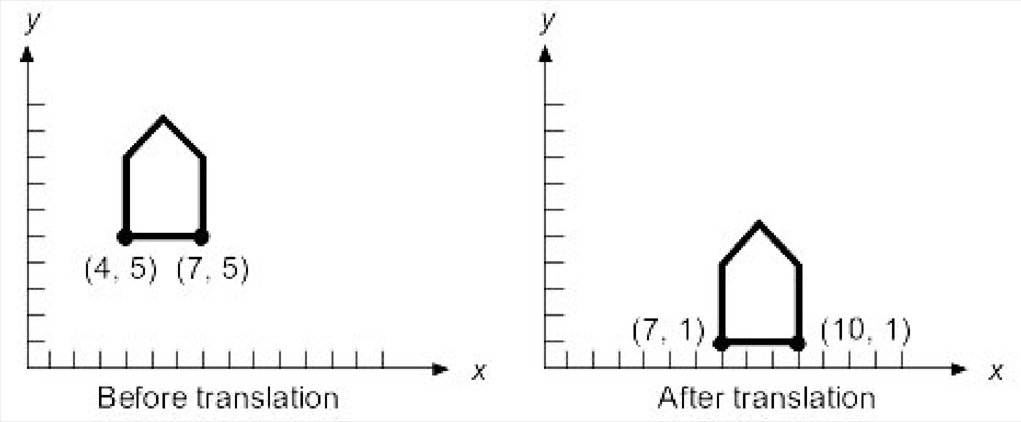
Transformações Geométricas 2D

As transformações geométricas são essenciais na computação gráfica para posicionar, mudar a orientação e escalar objectos na cena criada. O movimento é também implementado por variar os parâmetros de transformação ao longo do tempo.

Transformações:

- Translação
- Escalamento
- Rotação

Translação



$$\begin{cases} x_T = x + T_x \\ y_T = y + T_y \end{cases}$$

Vértices: (4,5) e (7,5)

$T_x = 3$ $T_y = -4$

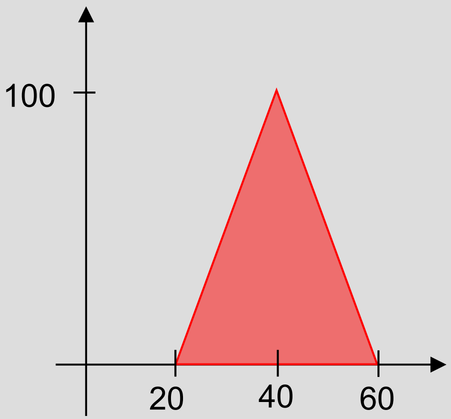
O par de translação denomina-se por *vector de translação.* A cada vértice é aplicado um deslocamento **T**:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Na forma de produto matricial:

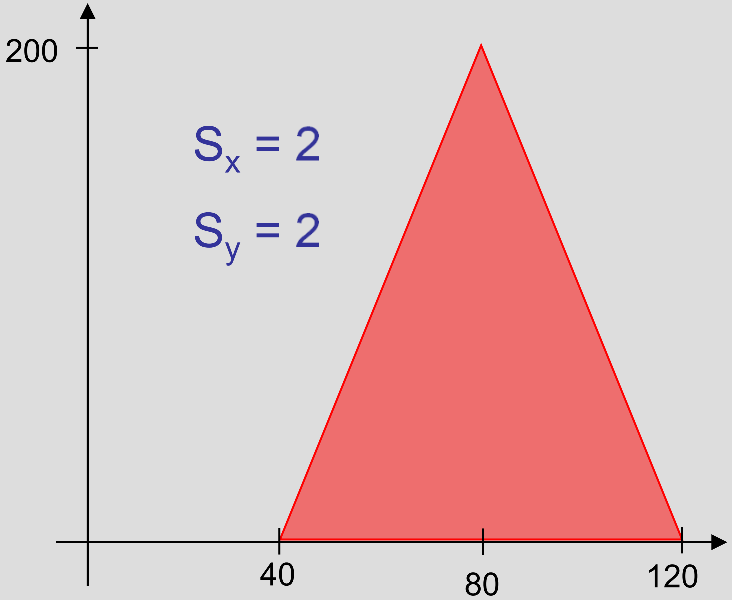
$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento



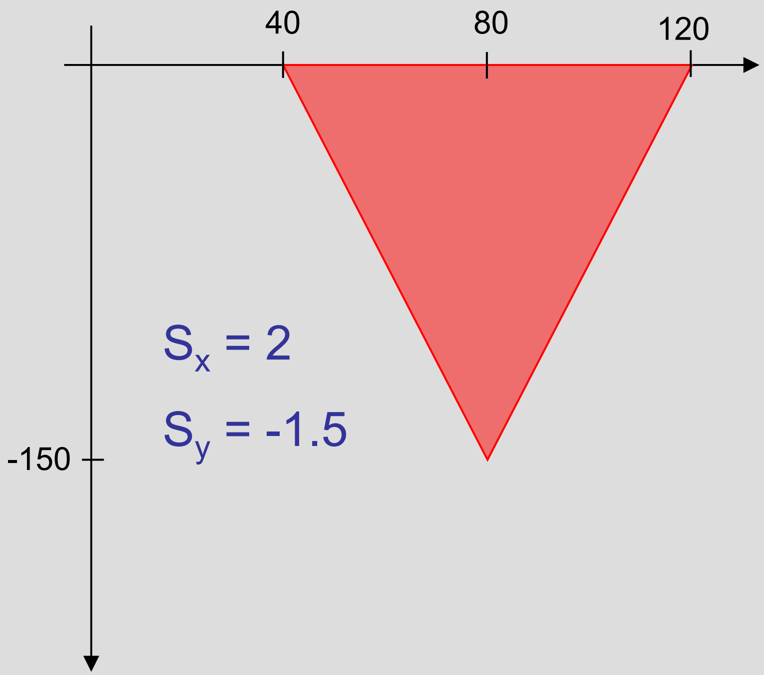
$$\begin{cases} x_S = x * S_x \\ y_S = y * S_y \end{cases}$$

Em relação à origem.



$S_x = 2$

$S_y = 2$



$S_x = 2$

$S_y = -1.5$

Escalamento

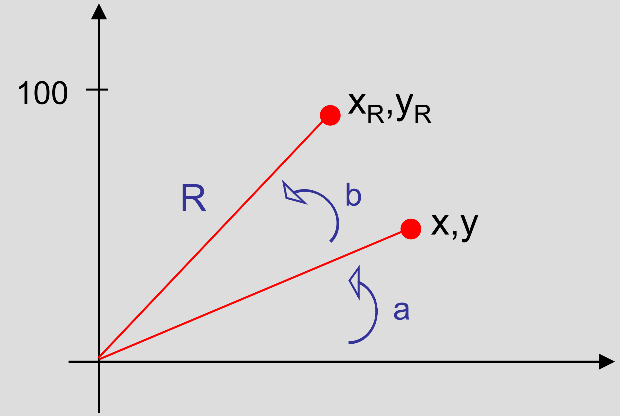
Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Factor de escala:

>1	aumenta o objecto
<1	reduz o objecto
$s_x = s_y$	factor de escala uniforme → não distorce o objecto

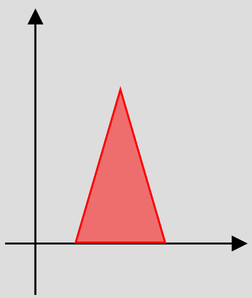
Rotação



$$\begin{cases} x=R.\cos(a) \\ y=R.\text{sen}(a) \end{cases}$$

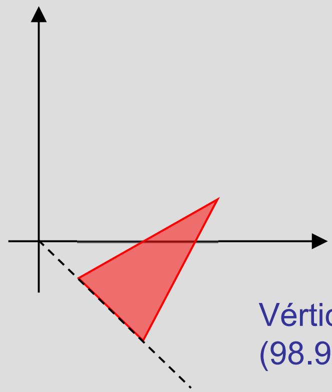
Em torno da origem.

$$\begin{cases} x_R=R.\cos(a+b) = R.\cos(a).\cos(b) - R.\text{sen}(a).\text{sen}(b) = x.\cos(b) - y.\text{sen}(b) \\ y_R=R.\text{sen}(a+b) = R.\text{sen}(b).\cos(a) + R.\text{sen}(a).\cos(b) = x.\text{sen}(b) + y.\cos(b) \end{cases}$$



Vértices: (20,0), (60,0), (40,100)

Rotação de -45º



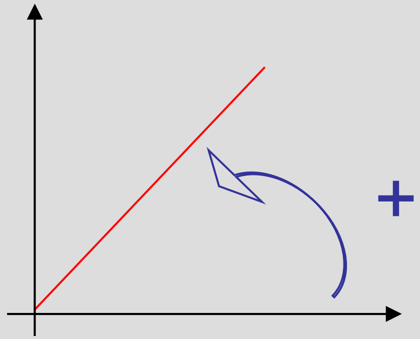
Vértices: (14.14, -14.14), (42.43, -42.43), (98.99, 42.43)

Rotação

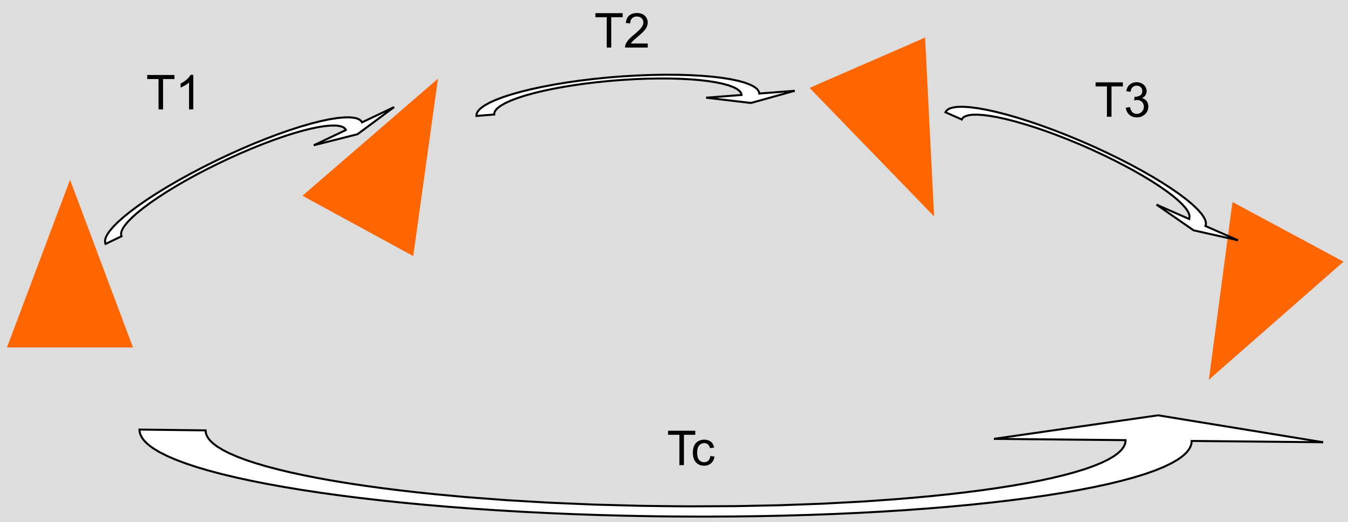
Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & \cos(b) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nota: *b* positivo no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.



Composição/Concatenação de Transformações

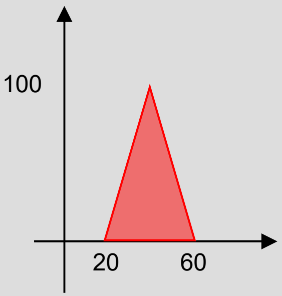


A aplicação de uma sequência de operações

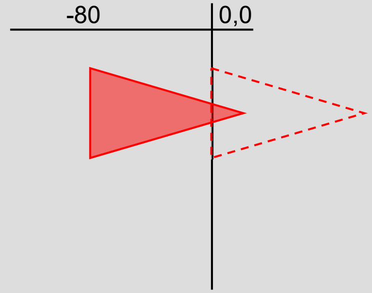
=

1 única transformação: como calcular?

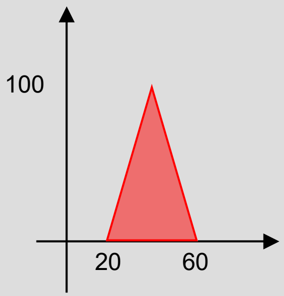
Composição de Transformações



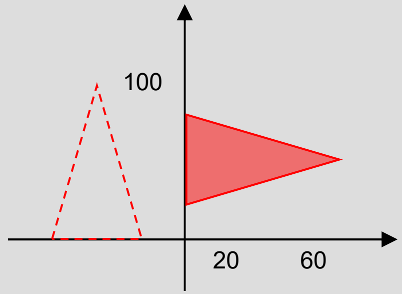
Situação inicial	Após rotação	Após translação
(20,0)	(0,-20)	(-80,-20)
(60,0)	(0,-60)	(-80,-60)
(40,100)	(100,-40)	(20,-40)
	a = - 90º	Tx=-80, Ty=0



Trocando as transformações:



Situação inicial	Após translação	Após rotação
(20,0)	(-60,0)	(0,60)
(60,0)	(-20,0)	(0,20)
(40,100)	(-40,100)	(100,40)
	Tx=-80, Ty=0	a = - 90º



Conclusão: a aplicação das transformações não é comutativa

Coordenadas homogéneas

A sequência anterior, rotação seguida de translação, aplicada a cada vértice pode ser escrita como:

1º
$$\begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) \\ sen(a) & \cos(a) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2º
$$\begin{bmatrix} x_{T2} \\ y_{T2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se as matrizes que representam as transformações fossem da mesma dimensão, poder-se-íam combinar/multiplicar.

No entanto, as transformações anteriores podem também ser escritas como (forma homogénea):

$$\begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = R(a). \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{T2} \\ y_{T2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y). \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} x_{R2} \\ y_{R2} \\ 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y).R(a). \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

O produto de matrizes é:
- **Associativo**
- **Em geral Não comutativo**

$$T(T_x, T_y).R(a) \neq R(a).T(T_x, T_y)$$

Coordenadas homogéneas - resumo

Matriz de Rotação

$$\begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(a)$$

Matriz de Translação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y)$$

Matriz de Escalamento

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y)$$

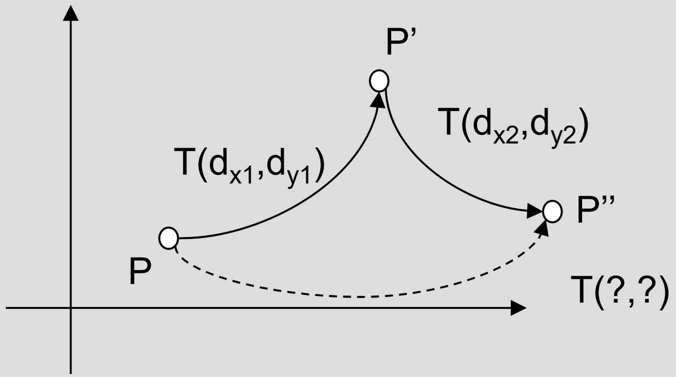
Em coordenadas homogéneas um objecto de *n* dimensões é representado num espaço a *n+1* dimensões.

(x,y) → (x.h, y.h, h)

2D 3D

Consideramos h=1

Transformações - Exemplos



$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) * P$

$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) * P'$

$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) * T(d_{x1}, d_{y1}) * P$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2}+d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y2}+d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T(d_{x2}, d_{y2}) * T(d_{x1}, d_{y1}) = T(d_{x1}+d_{x2},\ d_{y1}+d_{y2})$

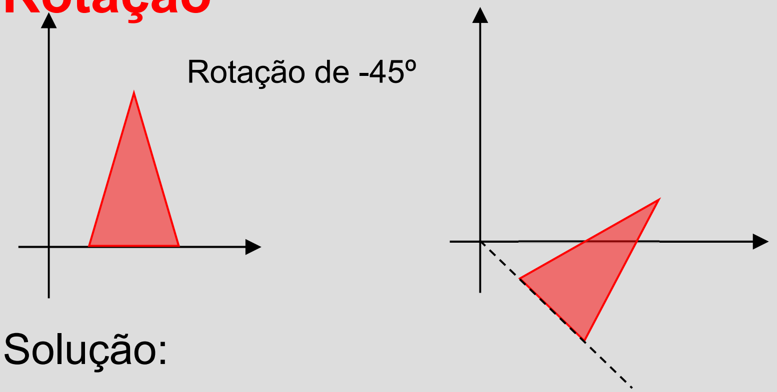
Verificar que:

$S(s_{x2}, s_{y2}) * S(s_{x1}, s_{y1}) = S(s_{x1} * s_{x2},\ s_{y1} * s_{y2})$

$R(a_2) * R(a_1) = R(a_2 + a_1)$

Transformações relativas a um ponto arbitrário (pivot)

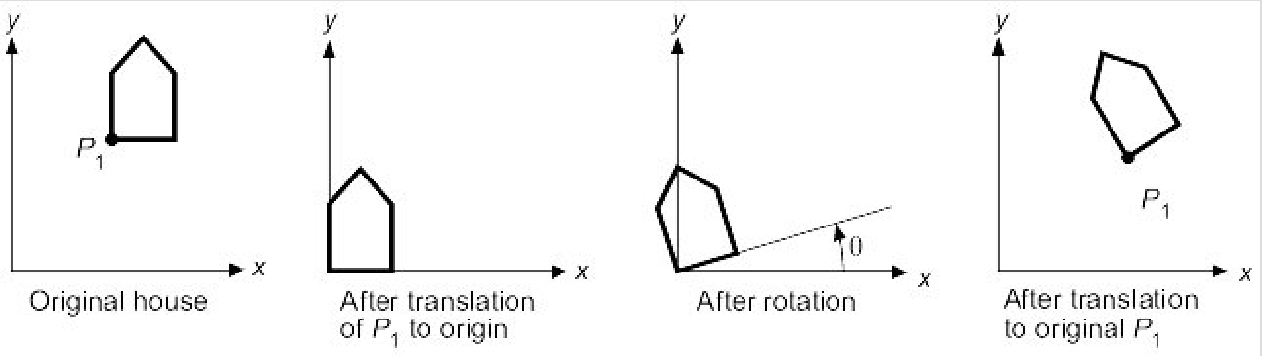
Rotação



A rotação desloca os objectos em torno da origem.

Solução:

- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* coincida com a origem
- Rodar o objecto em torno da origem
- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* volte à posição inicial



$$M = T(d_x, d_y).R(a).T\,(-d_x, -d_y)$$

Transformações relativas a um ponto arbitrário (pivot)

Matriz de transformação

$$M=T(d_x, d_y).R(a).T\ (-d_x, -d_y) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & d_x.(1-\cos(a)) + d_y.\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) & d_y.(1-\cos(a)) - d_x.\sin(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento

- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* coincida com a origem
- Escalar o objecto
- Fazer a translação o objecto de modo que o ponto *pivot* volte à posição inicial

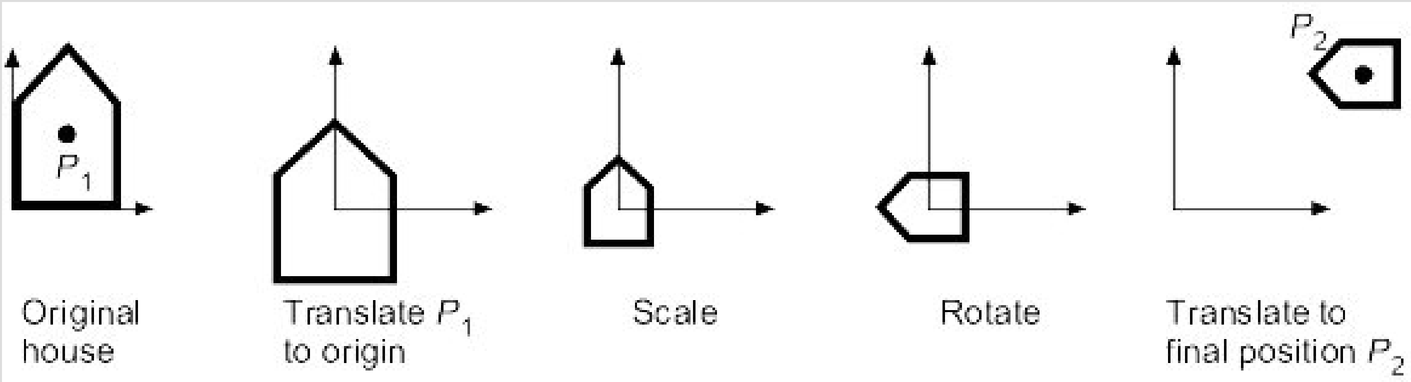
$$M=T(d_x, d_y).S(s_x, s_y).T\ (-d_x, -d_y) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & d_x.(1-s_x) \\ 0 & s_y & d_y.(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

Determinar a matriz de transformação para:

x1=1; y1=2



x2=3; y2=3

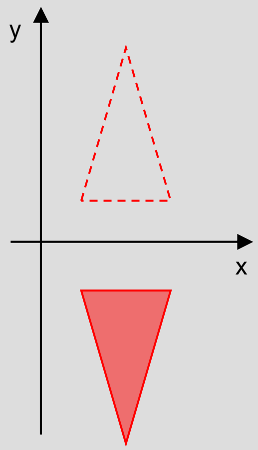
T (-1,-2) S (0.5,0.5) R (90) T (3, 3)

$$M = T(3, 3)\ .\ R(90)\ .\ S(0.5, 0.5)\ .\ T\ (-1, -2)$$

Outras transformações

Reflexão

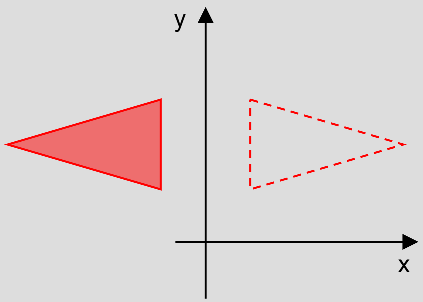
Em relação ao **eixo *x*** corresponde a uma rotação de 180º no espaço 3D em torno do eixo de reflexão, o que se traduz num escalamento S(1,-1):



$$M = S(1, -1)$$

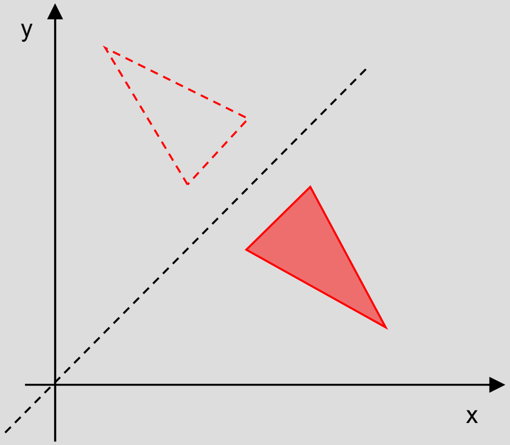
Em relação ao **eixo *y***:

$$M = S(-1, 1)$$



Outras transformações

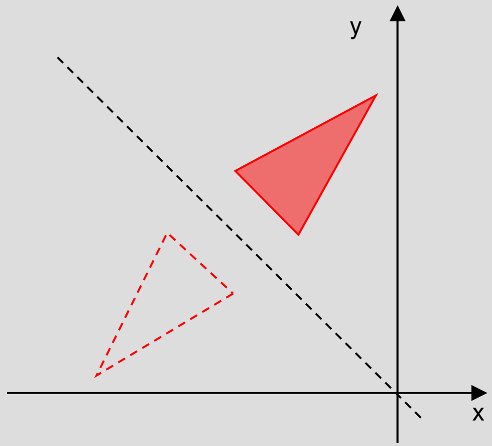
Reflexão em relação à linha y=x



$$M = R(45).S(1,-1).R(-45) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão em relação à linha y=-x

$$M = R(45).S(-1,1).R(-45) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Transformações Inversas

Se uma transformação, possivelmente composta, é dada por uma matriz *M* de dimensões 3x3, então a transformação inversa que coloca o objecto na sua posição inicial (ou seja sem transformação) é dada por M^{-1}.

Uma vez que *M* representa uma ou mais transformações, a matriz inversa deverá existir.

$$\boldsymbol{M.M^{-1} = I}$$

Para algumas transformações é fácil encontrar a matriz inversa:

Translação:

$$T^{-1}(t_x, t_y) = T(-t_x, -t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation:

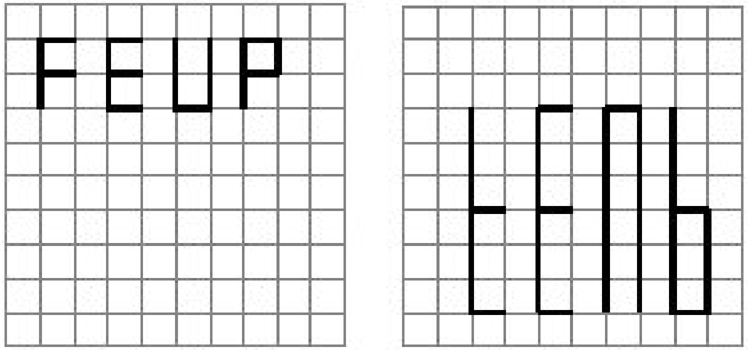
$$R^{-1}(\propto) = R(-\propto) = \begin{bmatrix} \cos(-\propto) & -\sin(-\propto) & 0 \\ \sin(-\propto) & \cos(-\propto) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento:

$$S^{-1}(s_x, s_y) = S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

2. Da figura seguinte,



a)- Determine a matriz de transformação **2D** necessária para passar a letra *F* da situação da esquerda para a da direita.

b)- Comente a afirmação "A matriz encontrada na alínea anterior é aplicável às restantes três letras".

(Pergunta do teste de 23 Maio 2002)