

Transformações Geométricas 3D

Sistemas Gráficos/
Computação Gráfica e Interfaces

Transformações Geométricas 3D

Extensão dos Métodos 2D incluindo agora a coordenada Z.

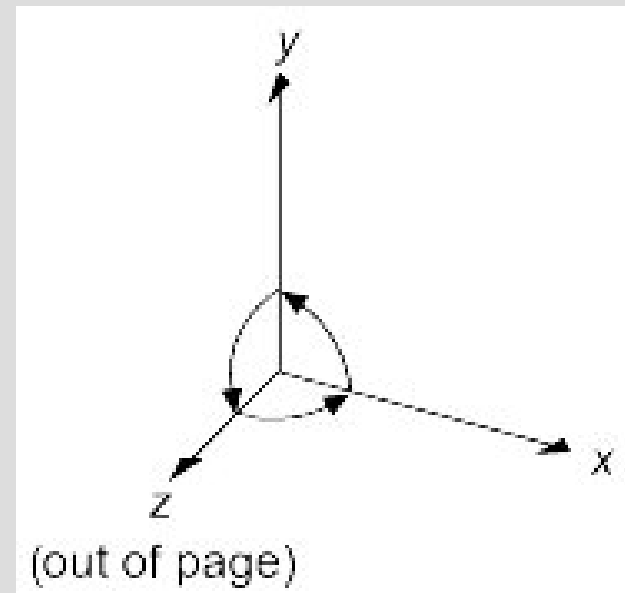
Transformações:

- Translação
- Escalamento
- Rotação

Eixo de rotação	Direcção da rotação positiva
x	y para z
y	z para x
Z	x para y

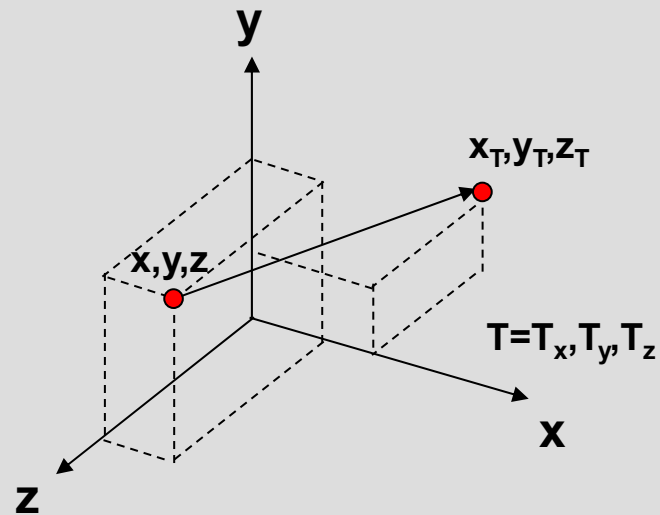
Sistema de coordenadas 3D:

Regra da Mão Direita



Translação

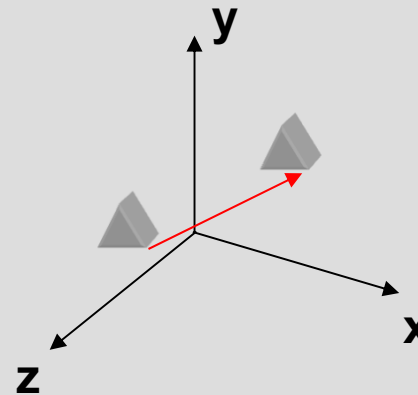
Translação de um Ponto



$$\begin{cases} x_t = x + T_x \\ y_t = y + T_y \\ z_t = z + T_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

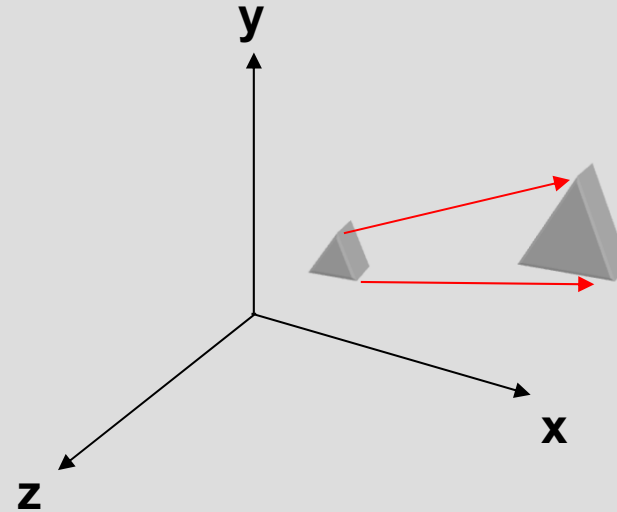
A Translação de um Objeto é efetuada aplicando a operação a cada um dos seus vértices.



Escalamento

Em relação à origem:

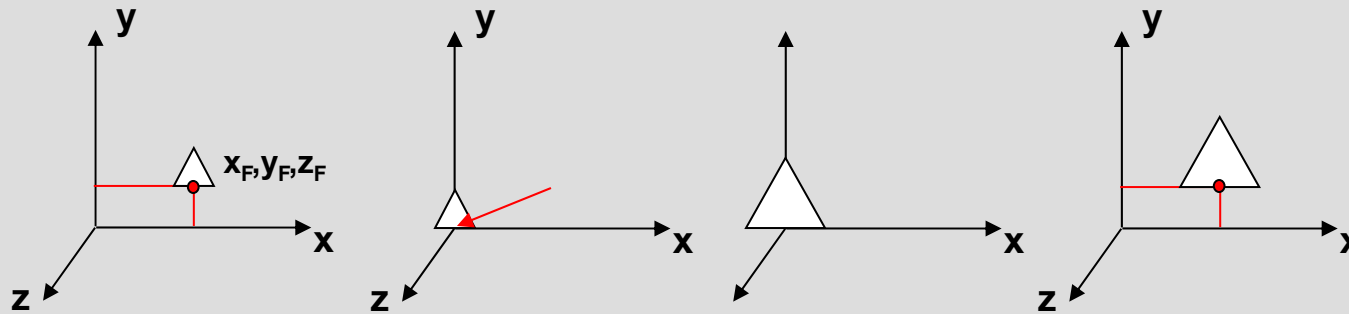
$$\begin{cases} x_s = x \cdot s_x \\ y_s = y \cdot s_y \\ z_s = z \cdot s_z \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento

Em relação a um ponto arbitrário:

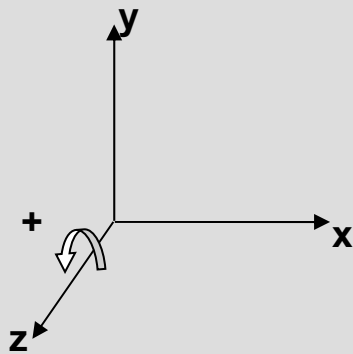


$$M = T(x_F, y_F, z_F) \cdot S(s_x, s_y, s_x) \cdot T(-x_F, -y_F, -z_F)$$

Rotação

- Em 2D o eixo de rotação é perpendicular ao plano XY
- Em 3D o eixo de rotação poderá ser
 - x, y ou z
 - Um eixo colocado arbitrariamente no espaço

Em torno do **eixo z** → z constante

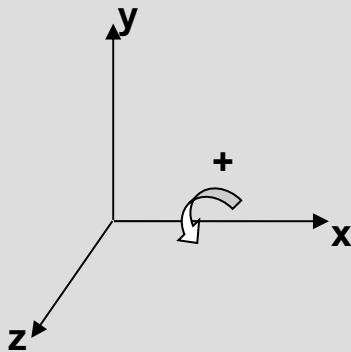


$$\begin{cases} x_{Rz} = x \cdot \cos(a) - y \cdot \sin(a) \\ y_{Rz} = x \cdot \sin(a) + y \cdot \cos(a) \\ z_{Rz} = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{Rz} \\ y_{Rz} \\ z_{Rz} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

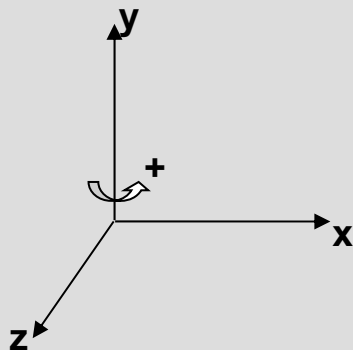
Em torno do **eixo x** \rightarrow x constante



$$\begin{cases} x_{Rx} = x \\ y_{Rx} = y \cos(a) - z \sin(a) \\ z_{Rx} = y \sin(a) + z \cos(a) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{Rx} \\ y_{Rx} \\ z_{Rx} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno do **eixo y** \rightarrow y constante

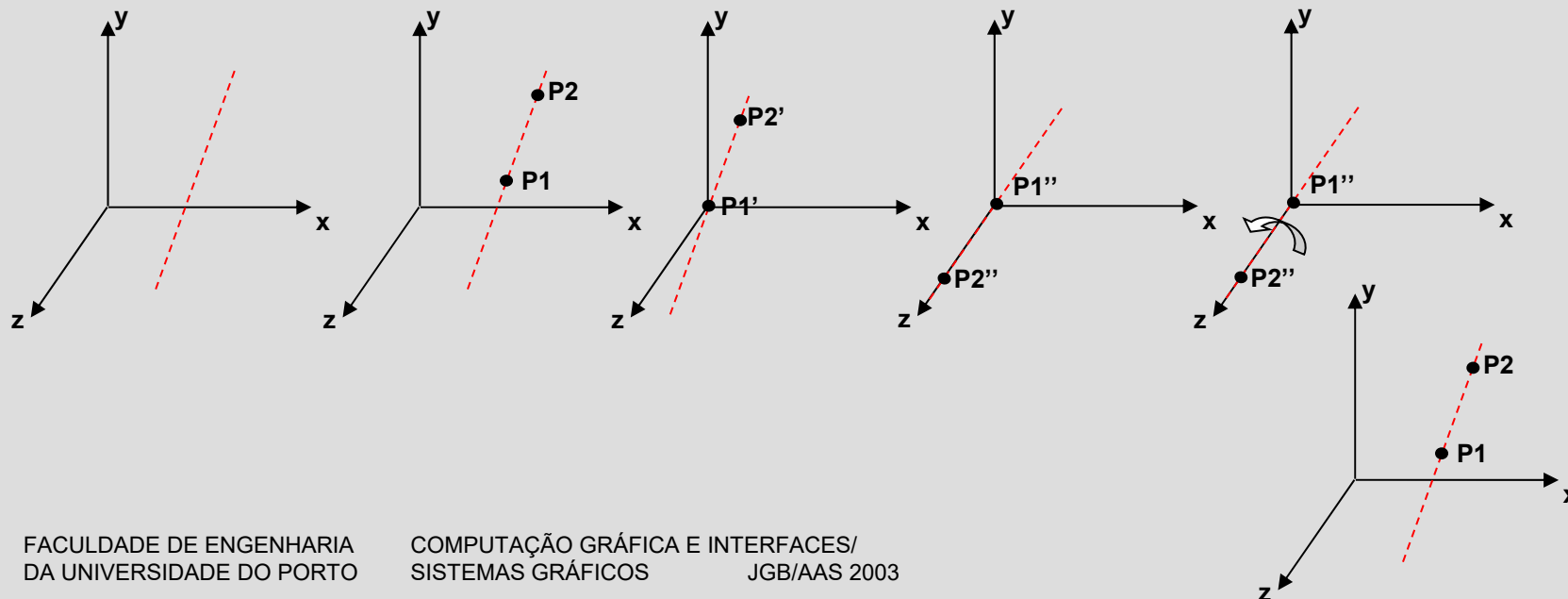


$$\begin{bmatrix} x_{Ry} \\ y_{Ry} \\ z_{Ry} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & 0 & \sin(a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(a) & 0 & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

Rotação em torno de um eixo colocado arbitrariamente no espaço 3D:

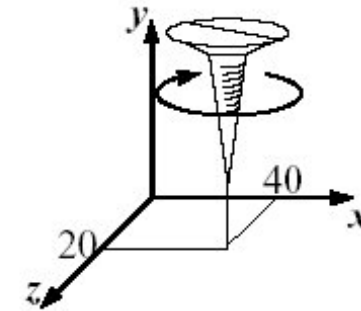
1. Aplicar a translação que coloque o eixo de rotação a passar pela origem do sistema de coordenadas.
2. Rodar o objecto de modo a que o eixo de rotação coincida com um dos eixos de coordenadas.
3. Aplicar a rotação pretendida sobre esse eixo.
4. Aplicar a rotação inversa do ponto 2.
5. Aplicar a translação inversa de 1.



Exercícios

4. Pretende-se realizar a seguinte sequência de transformações geométricas 3D:
1. “Espelho” no plano $y=k$;
 2. Ampliação de S vezes, na dimensão y .
 3. Rotação de $|a|$ no sentido dos ponteiros do relógio, para quem observa de $y=\infty$ para $y=0$.
- a)- Determine a matriz de transformação equivalente.
- b)- Será possível obter o mesmo resultado, com as mesmas operações por outra ordem?

5. Um parafuso encontra-se, no espaço 3D, de tal forma que o seu eixo coincide com a recta $x=40, z=20$. A rosca do parafuso é direita e faz o parafuso avançar 2 unidades por volta.



- a)- Calcule a matriz de transformação geométrica 3D que traduz o movimento do parafuso quando este roda de 10° no sentido indicado na figura
- b)- Diga se seriam suficientes os dados fornecidos se, além dos movimentos enunciados, o parafuso fosse também alvo de um escalamento $S(1, 1.2, 1)$.