第1章　確率(質量)関数からなる統計model

✓ 離散の場合の(確率)密度関数のこと。

<u>Notation</u>　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq \forall i \leq n)\} \qquad (1.1)$$
$$= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$$

・ $x, y \in \mathbb{R}^n$ は以降

$$x = (x_1, \dots, x_n), \ y = (y_1, \dots, y_n) \qquad (1.2)$$

と明示的にかくことにする。

・ また，以降 $c \in \mathbb{R}$ としておく。

<u>Rem.</u>　$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ における和および積を用いることで，
$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる：
和 $x + y \in \mathbb{R}^n$ および スカラー倍 $cx \in \mathbb{R}^n$ は それぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \ cx = (cx_1, \dots, cx_n) \qquad (1.3)$$

で与えられる。ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の零ベクトル $\mathbb{0}$ は $(0, 0, \dots, 0)$ である。
$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ x + \mathbb{0} = x = \mathbb{0} + x$ …(*)をみたす。
また，零ベクトルは存在すれば一意である：
実際，$\exists z \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ x + z = z = z + x$ …(♡)
この時，$\underbrace{z = z + \mathbb{0}}_{(♡)} \underbrace{= \mathbb{0}}_{(*)}$

$\langle x, y\rangle_e := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e^{i}$

$\langle x, y\rangle_{e} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e^{-1}$ は"標準"でない $\mathbb{R}$上の内積である

次に,関数 $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{for any } x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (1.4)$$

で定め,$\mathbb{R}^n$上の(標準)内積という。$\langle x, y\rangle$ を xとyの内積という。

(一般化に→計量と呼ばれるものになる)

また,ベクトル sp $\mathbb{R}^n$ に標準内積 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ を考えたもの $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ を $n=\dim(\mathbb{R}^n)$ ユークリッド sp という。

更に,関数 $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (1.5)$$

により定める 特に,$n=1$の時,$x \in \mathbb{R}$ に対して $\|x\|$ は x の絶対値 $|x|$ に他ならない。

$\| \cdot \|$ を $\mathbb{R}^n$上の norm,$\|x\|$をxの norm という。

Theorem 1.1) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ に対し,次が成り立つ。

(1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (symmetry)

(2) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$ (linearity)

, where $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le n)$

(3) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(4) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

proof) (1) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x\rangle$

(2) ・$\langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i z_i + y_i z_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

・$\langle cx, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (c x_i) y_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c\langle x, y\rangle$

(3) ∵ 各$x \in \mathbb{R}$に対して $x^2 \geq 0$ だから,

$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

(4) ・$x = 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0$ を示す.

$x = 0$ なら,

$\langle x, x\rangle = \langle 0, 0\rangle = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n} = 0$

・$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ を示す。

$\langle x, x\rangle = 0$ なら,

各$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$に対し,

$(0 \leq) x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \langle x, x\rangle = 0$

∴ $x_i^2 = 0$ であり, $x_i = 0$ が分かる

以上により, $x = (0, \ldots, 0)$ である ☒

No.
Date

Theorem 1.2) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とすると，次の(1)〜(5)が成り立つ。

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(3) $\|cx\| = |c|\|x\|$

(4) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.　(Cauchy-Schwartz ineq)
但し，等号成立 iff (xがyの定数倍かyがxの定数倍)
xとyが線型従属であるとき

(5) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$　(三角不等式)

Rem
この theorem の証明方法は，内積$\langle \cdot, \cdot \rangle$ではなくても
非負定値対称型形式なら通る　→ FEMで使う
(2)と，(4)の等号成立は示せないが(一般には)。

(proof)

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ だから $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$

(2) Theorem 1.1(3)を用いる
・$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ を示す
$\|x\| = 0$ なら，$\langle x, x\rangle = 0$ であり，Thm 1.1(3) ⇒ から，$x = 0$
・$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ を示す
$x = 0$ なら，Theorem 1.1(3) ⇐ から，$\langle x, x\rangle = 0$ であり，$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$

(3) $\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx\rangle} \underset{\text{Thm 1.1(2)}}{=} \sqrt{c^2\langle x, x\rangle} = |c|\,\|x\|$

(4)・$\forall t \in \mathbb{R}$,
(*) $\langle x + t\langle x, y\rangle$
である(⇐ Thm 1
これに内積の
イコール
(☆) $\langle x, x\rangle + 2$
とかき直せる
判別式を考
$|\langle x, y\rangle|^2$
となり，
$|\langle x, y$
$|\langle x, y\rangle$
$|\langle$
$|\langle$
が
・さて，
・x

(4)・ $\forall t \in \mathbb{R}$,

(*) $\langle x + t|\langle x, y\rangle| y,\ x + t|\langle x, y\rangle| y\rangle \geq 0$

である (⇐ Thm 1.1 (3))。

イコール!

これに内積の線型性を用いて、($|\langle x, y\rangle| = \langle x, y\rangle$ に注意して)

(☆) $\langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle|^2 t + |\langle x, y\rangle|^2\langle y, y\rangle t^2 \geq 0$

とかき直せる。

判別式を考えれば、

$|\langle x, y\rangle|^4 - |\langle x, y\rangle|^2\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle \leq 0$

となり、

$|\langle x, y\rangle|^2(|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle) \leq 0$

$|\langle x, y\rangle|^2 \geq 0$ だから、

$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$，言い換えれば

$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

$|\langle x, y\rangle|$

が分かったことになる。

・さて、等号成立条件を考える。

・x と y が線型従属、つまり、$\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $ax = y$ ならば、

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle x, ax\rangle| = |a|\,|\langle x, x\rangle| = |a|\,\|x\|\,\|x\| = \|ax\|\,\|x\| = \|x\|\,\|y\|$$

・等号が成立していると仮定する この時、線型従属である

・$y = 0$ ならば、x と y は線型従属である

・$y \neq 0$ ならば、$t = \dfrac{-1}{\langle y, y\rangle}$ とおくと、(☆)式に代入し、

$$\langle x, x\rangle - \frac{2|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = \|x + t|\langle x, y\rangle| y\|^2$$

が分かり、$\|x + t|\langle x, y\rangle| y\|^2 = \dfrac{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = 0$

よって、$x = \dfrac{|\langle x, y\rangle|}{\langle y, y\rangle} y$ が分かった。

何れにしろ、x と y は線型従属である。 ∎

(5) (5)は(4)からすぐに分かる。実際,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$\underset{\substack{\text{Thm1.1}\\(1),(2)}}{=} \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\le \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$$

$$\underset{\substack{\text{Thm1.2}\\(4)}}{\le} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\|+\|y\|)^2$$

以上により, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\square$

続いて, 関数 $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \quad \left(=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}\right) \qquad (1.6)$$

により定める。
d を $\mathbb{R}^n$ 上の Euclidean distance,
$d(x,y)$ を x と y の Euclidean distance という。

Theorem 1.3) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ とすると次が成り立つ。

(1) $d(x,y) \ge 0$

(2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$

(4) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

(Proof) (1) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ Thm1.2(1)

(2) $d(x,y) = 0 \underset{\text{Thm1.2(2)}}{\Leftrightarrow} x-y = 0$

$\Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)\times(y-x)\|$

$= |-1| \, \|y-x\| = d(y,x)$

(4)

$d(x,z) \leq \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\|$ Thm1.2(5)

$\leq \|x-y\| + \|y-z\|$

$= d(x,y) + d(y,z)$ (1.7)

▨

各kで、
$a_k = (a_k^1, \ldots, a_k^n)$
for $1 \le i \le n$
$(a_k^i \in \mathbb{R})$
という表示が出来ている

Euclid distance を用いることにより、$\mathbb{R}^n$ の seq の convergence について定義することができる

Def 1.1) $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし、$a \in \mathbb{R}^n$ とする
$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するという;
次をみたす時、
$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geq K$ (with $k \in \mathbb{N}$),

$$d(a_k, a) < \varepsilon$$

この時、$\lim_{k\to\infty} a_k = a$ または $a_k \longrightarrow a \ (k \to \infty)$
と表し、a を $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ の limit という。

Example 1.1) $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ を resp. $a, b \in \mathbb{R}^n$ に収束する $\mathbb{R}^n$ の seq とする
この時、

$$\lim_{k\to\infty} (a_k + b_k) = a + b \qquad (1.8)$$

を示す

(proof) 点列の収束のdefにより,
$\forall \varepsilon > 0$; fix すると,

$\exists k_1 \in \mathbb{N}$ st.

$$\forall k \geq k_1, \quad d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.9)$$

$\exists k_2 \in \mathbb{N}$ st.

$$\forall k \geq k_2, \quad d(b_k, b) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.10)$$

今, $K = \max\{k_1, k_2\}$ とおくと,
$\forall k \geq K \ (k \in \mathbb{N})$,

$$\begin{aligned} d(a_k + b_k, a + b) &= \|(a_k + b_k) - (a + b)\| \\ &= \|(a_k - a) + (b_k - b)\| \\ &\leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\blacksquare$

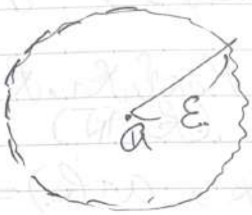
No.
Date

$a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする

$\mathbb{R}^n$の部分集合 $B(a, \varepsilon)$を

$B(a; \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon \}$

でdefし，aを中心，εを半径とする開球という．

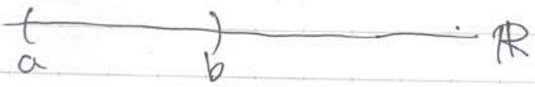


▷ E.g. 1.2
($n=1$ の場合)
一般に，$a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$
の時，$(a,b) \subset \mathbb{R}$を

$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

で定め（有界）open interval という。

$B(a; \varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，$(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$.



▷ Eg. 1.2 (open disk) $n=2$ の場合

$a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，$\varepsilon > 0$ とすると，$B(a, \varepsilon)$は

$B(a, \varepsilon) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2 \}$

この時，$B(a, \varepsilon)$を open disk という

openball を用いて，

▷ Def 1.2 $O \subset \mathbb{R}$
$\forall a \in O$，$\exists \varepsilon >$
をみたす時，Oを $\mathbb{R}$

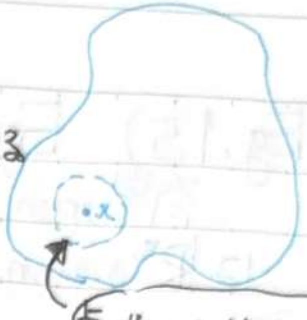
Rem 1.1 について，
前提が Fal

▷ Eg. 1.4) $\mathbb{R}^n$は
Indeed,

Thm 1.4) $\mathbb{R}^n$
$\forall a \in \mathbb{R}^n$
$b \in B(a, \varepsilon$
$d(a, b) <$
よって，$\delta >$

により
ここで，
よって，E
$d(x,$
$\therefore$ $d($
$\therefore$

open ball を用いて、$\mathbb{R}^2$ の open set を次のように定める



Def 1.2　$O \subset \mathbb{R}^2$ とする。

$\forall a \in O$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a, \varepsilon) \subset O$

をみたす時, O を $\mathbb{R}^n$ の open set という

$\forall a$ ["$a \in O$" $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a, \varepsilon) \subset O$]

点の近くが内部までで

たら操作しやすい

たとえば ~~[illegible]~~ 微分とか

Rem 1.1 について。$\emptyset$: 空集合の場合 については、

"前提"が" False だから、$\mathbb{R}^n$ の open set .

Eg. 1.4) $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の open set である

Indeed, $\forall a \in \mathbb{R}^n$; $B(a, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ■

Thm 1.4) $\mathbb{R}^n$ の open ball は $\mathbb{R}^n$ の open set .

∵ $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$; $B(a, \varepsilon)$ が $\mathbb{R}^n$ の open set であることを示す

$b \in B(a, \varepsilon)$ とする：このとき, open ball の def から

$d(a, b) < \varepsilon$.

よって, $\delta > 0$ を $\delta = \varepsilon - d(b, a)$

により, 定めることができる

ここで, $x \in B(b, \delta)$ とすると, $d(x, b) < \delta$ である

よって, Euclidean metric に関する triangle ineq (Thm1.3 (3)) より,

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < \delta + d(b, a) = \varepsilon$$

∴ $d(x, a) < \varepsilon$ だから, $x \in B(a, \varepsilon)$ である

∴ $B(b, \delta) \subset B(a, \varepsilon)$

→ $B(a, \varepsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ の open set . ■

▷Eg.1.5) Eg.1.2とThm1.4より

有界open interval (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$

は$\mathbb{R}$のopen set.

∵)

$$(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

▷Eg1.6) (infinite open interval)

$a \in \mathbb{R}$とし，$(a, \infty), (-\infty, a) \subset \mathbb{R}$を

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

により定め，$(a, \infty), (-\infty, a)$をinfite open interval

という

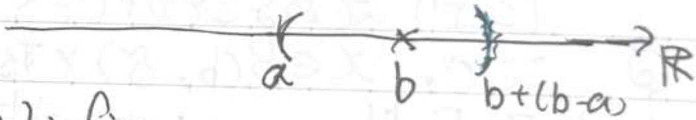
◎infite open interval は$\mathbb{R}$のopen setである

Indeed, $\forall b \in (a, +\infty)$; fix

$a < b$だから，$b - a > 0$, $B(b, b-a) = (a, b+(b-a))$

$\subset (a, +\infty)$

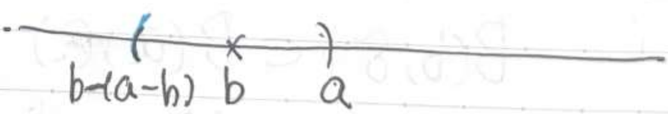
∴ open setのdefから，$(a, +\infty)$は$\mathbb{R}$のopen set



Furthermore, $\forall b \in (-\infty, a)$; fix

$b < a$だから，$a - b > 0$,

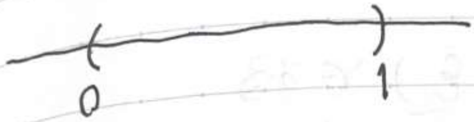
$B(b, a-b) = (b-(a-b), a) \subset (-\infty, a)$



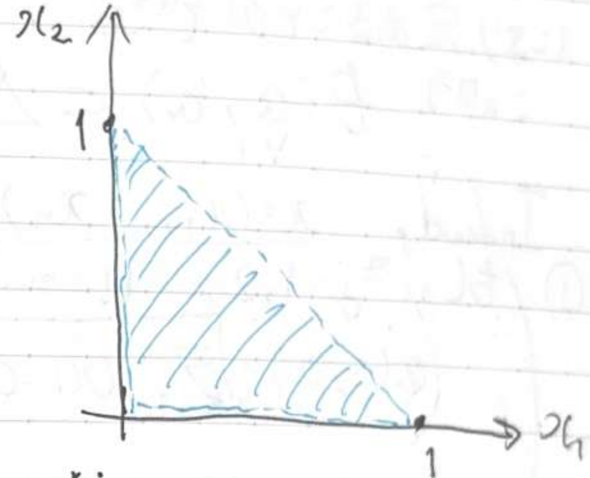
Eg1.7) $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ を

$$\Delta_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \;\middle|\; x_1, x_2, \dots, x_n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i < 1 \right\}$$

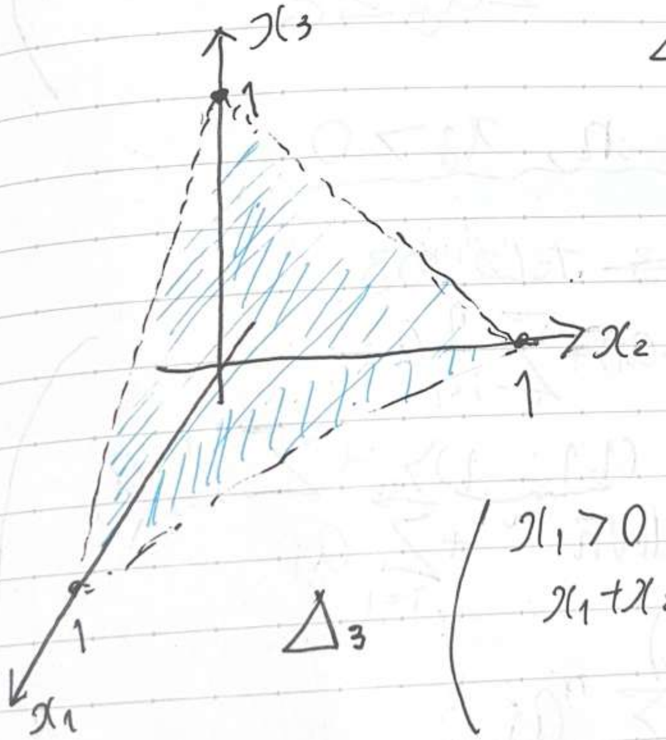
により定める. Δ_n が $\mathbb{R}^n$ の open set である



Δ_1
$(0 < x_1 < 1)$



$\Delta_2 \left(\begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \quad x_1 + x_2 < 1 \end{array} \right)$



$\Delta_3 \left(\begin{array}{l} x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 < 1 \end{array} \right)$

∵ $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\Delta_n$ とする。$\sum_{i=1}^n a_i>0$ だから

この時, $a_1,\dots,a_n,\ 1-\sum_{i=1}^n a_i$

$\varepsilon>0$ を

$$\varepsilon=\min\left\{a_1,a_2,\dots,a_n,\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\sum_{i=1}^n a_i\right)\right\}$$

により定めることができる.

この時 $B(a,\varepsilon)\subset\Delta_n$

Indeed, $x=(x_1,\dots,x_n)\in B(a,\varepsilon)$ とする

① もし, $\exists j=1,2,\dots,n$ s.t. $x_j\le 0$ ならば

$$d(x,a)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)^2}\ge|x_j-a_j|=a_j-x_j\ge a_j\ge\varepsilon$$

これは矛盾

よって, $\forall j=1,2,\dots,n$, $x_j>0$

② $\sum_{i=1}^n x_i<1$ を~~みる~~ たしかめる

$$\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)+\sum_{i=1}^n a_i$$
$$=\langle(x-a),\underbrace{(1,1,\dots,1)}\rangle_{\mathbb{R}^n}+\sum_{i=1}^n a_i$$
$$\underset{C\text{-}S}{\le}\|x-a\|\sqrt{n}+\sum_{i=1}^n a_i$$
$$(\|(1,1,\dots,1)\|=\sqrt{n})$$

B(a, ε) open ball

$$\lneq\sqrt{n}\,\varepsilon+\sum_{i=1}^n a_i$$
$$\le\left(1-\sum_{i=1}^n a_i\right)+\sum_{i=1}^n a_i=1$$

□

1.2 Statistical

§1.2では, finite

ℝ-valued random vari

を考え, それらの族 が

Aが有限; #A

countable; ~~#A~~

at most co

▷ Ω; ≠ φ,

Ω上の probabil

event A が起

pair (Ω, F

@ Ω が finite の

Axiom 1.( )

(1) $0\le P($

(2) $P(\Omega)$

(3) $P(\phi)=$

(4), A_1, A_2

$A_i\cap A_j$

$P(\bigcup$

1.2 Statistical Model (part 1.)

§1.2では, finite or countably infinite set 上の $\mathbb{R}$-valued random variable から定まる確率関数を考え, それらの族からなる statistical model を考える

Aが
有限; $\#A < \infty$ ($\exists m \in \mathbb{N}$, s.t. $A \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{1, 2 \dots m\}$)
countable; 　　　$A \underset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{N}$
→ at most countable

$\Omega \neq \phi$, ~~at~~ at most countably set.
Ω上の probability Pを考えていくことになる
event Aが起こる prob. を$P(A)$とかく
pair (Ω, P)を discrete prob. sp. という

@ Ωが finite の時, "P" の公理 (axiom) を定める

Axiom 1. ( )

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \subset \Omega$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(\phi) = 0$

(4), $A_1, A_2, \dots A_m$ $(\subset \Omega)$ が互いに排反, つまり

$$A_i \cap A_j = \phi \quad (i, j = 1, 2 \dots m,\ i \neq j)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

No.

Date

(Ω, P) 上の $\mathbb{R}$-valued random variable X を考える；

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

今，Ω は finite だから，

$$X(\Omega) = \{X(\omega) ; \omega \in \Omega\}$$

$X(\Omega)$ は $(n+1)$ コの実数 $x_0, \ldots, x_n$ を用いて

$$X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n\}$$

$(0 \leq n \leq \#(\Omega) - 1)$

For any $i = 1, 2, \ldots,$

$$\mu_X(\{x_i\}) = P(X^{-1}(\{x_i\})) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\})$$

とおく

axiom 1.1 から，$\mu_X(\{x_i\}) \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$ で

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_X(\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{n} P(X^{-1}(\{x_i\}))$$

$$X^{-1}(\{x_i\}) \cap X^{-1}(\{x_j\}) = X^{-1}(\{x_i\} \cap \{x_j\}) = X^{-1}(\phi) = \phi$$

$$= P\left(\bigcup_{i=0}^{n} X^{-1}(\{x_i\})\right)$$

$$= P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{n} \{x_i\}\right)\right)$$

$$= P(\Omega) = 1$$

→ (4) も示せてる

$\therefore$ μ_X は，標本空間 $X(\Omega)$ 上の確率

特に，μ_X を X の分布という

また，関数 $p: X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$p(x_i) = \mu_X(\{x_i\}) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

により定め，p を X に対する prob. func. という

この時，$\forall B \subset X(\Omega)$，

$$\mu_X(B) = \sum_{x \in B} p(x)$$

が成り立つ，

ξ は p, P を使って 記号が足りないから 使ってるだけ

▷ (Bernalli trial) ← 結果2種類

T(表) がでるかくりつ… ξ

・$0 \le \xi \le 1$，　F(裏)　〃　$1-\xi$

・Tの時，100点
　Fの時，0点　とする．

これを上の term でかくと，次のようになる

・$\Omega = \{T, F\}$

・$P(\{T\}) = \xi$，$P(\{F\}) = 1-\xi$

とおくて，(Ω, P) は prob. sp.

そして，r.v. $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$X(\{T\}) = 100$，$X(\{F\}) = 0$　で定める

@この時，Xの分布 μ_X を求める．先ず，

$$X(\Omega) = \{0, 100\}$$

$$\mu_X(\{0\}) \underset{\text{by def}}{=} P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{F\}) = 1-\xi$$

$$\mu_X(\{100\}) \underset{\text{by def}}{=} P(X^{-1}(\{100\})) = P(\{T\}) = \xi$$

また，Xに対する prob. func. p は

$$p(0) = 1-\xi, \quad p(100) = \xi$$

No.
Date

Eg 1.9) 公正なサイコロを1回投げる
(素数がでたら100点
いでないと 0 点
を 上記の term を用いて かき下す
$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$: "サイコロの面の数"
$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

(Ω, P) は prob. sp
~~X(2)=~~ そして, r.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ を
$X(2) = X(3) = \dots = X(5) = 100$, $X(1) = X(4) = X(6) = 0$
X の分布 μ_X を求める
$X(\Omega) = \{0, 100\}$
$\mu_X(\{0\}) = P(X^{-1}(\{0\}))$
$= P(\{1, 4, 6\}) = P(\{1\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
$\mu_X(\{100\}) = P(X^{-1}\{100\})$
$= P(\{2, 3, 5\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
$(= \mu_X(\{0, 100\}) - \mu_X\{0\})$
$P(\{0\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{100\}) = \frac{1}{2}$

Ω: countab…
axiom)
(1) $0 \le P($…
(2) $P(\Omega$…
(3) $P(\emptyset$…
(4) $\forall A_1, \dots$
A_m…
$\Rightarrow P$…
$X(\Omega$…
と表すて
$\mu_X($…
μ_X…
が成り
μ…
関数

・Ω: countable な場合も同じ

axiom) Ω: countable set

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$,

(2) $P(\Omega) = 1$,

(3) $P(\phi) = 0$,

(4) $\forall A_1, \dots, A_m \subset \Omega$ が
$A_m \cap A_n = \phi \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)$
$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

と表して,
$$\mu_X(\{x_n\}) = P(X^{-1}\{x_n\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_n\})$$
$\mu_X(\{x_n\}) \geq 0$ であり,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(\{x_n\}) = 1$$
が成り立つ。
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(\{x_n\}) = 1$$

$\mu_X : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$

μ_X を X の分布という（こっちはあくまでも measure")

関数 $p(x_n) = \mu_X(\{x_n\})$
により定める $\mu_X(B) = \sum_{x \in B} p(x)$

Def) $\#\Omega \leq \aleph_0$ ($\Omega \neq \emptyset$). $\Omega \subset \mathbb{R}$

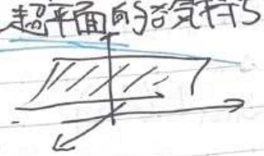
open set $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ を用いて，

$$S = \left\{ p(\cdot, \xi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \ \forall \xi \in \Xi, \\ p(x,\xi) > 0, \ \sum_{x \in \Omega} p(x,\xi) = 1 \end{array} \right\}$$

と表される，r.v.の族 S を Ω 上の n-dim "statistical model" という

例1.10) $n \in \mathbb{N}$，$(n+1)$ コの元から成る有限集合 $\Omega_n \subset \mathbb{R}$ を

（超平面的な気持ちで $(n+1)$ "）



$\Omega_n = \{0, 1, \dots, n\}$

により定め，

$$\Xi_n = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \;\middle|\; \xi_i > 0 \ (\forall i = 1, \dots, n), \ \sum_{i=1}^{n} \xi_i < 1 \right\}$$

とおく．Eg1.7により Ξ_n は $\mathbb{R}^n$ の open set

この時，

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Xi_n$ に対して

$P(0; \xi) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j$，$p(j; \xi) = \xi_j$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

とおくと，$p(\cdot, \xi)$ は prob. の関数を定める

（普通に考えて[illegible]と $P(i, \xi) > 0$ $\forall i$）

$X(\Omega)$ が Ω_n に等しいだけ

よって，

$S_n = \{ p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Xi_n \}$

eg 1.11 (Poisson分布) 可算集

$\Omega = \mathbb{N}$ (∋

により定め，

$\Xi_1 = \{\xi$

$= (0$

は Eg1.6よ

For any $\xi \in \Xi$

$p(x, \xi) = ($

とおくと，$p(\cdot, \xi$

$p(\cdot$

$\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \xi$

∴ ~~$S = \{p$~~

$S = \{p$

とおくと．

eg 1.11 (Poisson分布) 可算集合 $\Omega \subset \mathbb{R}$ を

$$\Omega = \mathbb{N}\ (\ni 0)$$

により定め,

$$\Xi = \{\xi \mid \xi > 0\}$$

$$= (0, \infty)$$

は Eg 1.6 より, $\mathbb{R}$ の open set

For any $\xi \in \Xi$, define

$$p(x, \xi) = e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!} \quad (x \in \Omega)$$ Poisson分布

とおくと, $p(\cdot, \xi)$ は確率関数を定める

$$p(\cdot, \xi) > 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \xi) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!}$$

$$= e^{-\xi} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\xi^x}{x!}}_{= e^{\xi}\ (\because \text{def})} = e^{-\xi} e^{\xi} = 1$$

$\therefore$ $\cancel{S = \{p(\cdot, \xi)\}}$

$$S = \{p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Xi\}$$

とおくと S は Ω 上の 1-dim. statistical model.