第1章 確率関数からなる統計model

(質量) 離散の場合の(確率)密度関数のこと。

<u>Notation</u> 各$n \in \mathbb{N}$に対して、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \cdot (1 \leq {}^\forall i \leq n)\} \quad (1.1)$$
$$= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}.$$

・ $x, y \in \mathbb{R}^n$は以降

$$x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \quad (1.2)$$

と暗黙的にかくことにする。

・また，以降 $c \in \mathbb{R}$ としておく。

<u>Rem.</u> $\mathbb{R}^n$はの$\mathbb{R}$における和および積を用いることで，
$\mathbb{R}$上のベクトル空間となる：
和 $x + y \in \mathbb{R}^n$ および スカラー倍 $cx \in \mathbb{R}^n$ は それぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\ cx = (cx_1, \dots, cx_n) \quad (1.3)$$

で与えられるベクトル空間$\mathbb{R}^n$の零ベクトル0は$(0, 0, \dots, 0)$である。
${}^\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x + 0 = x = 0 + x$ …(*)をみたす。
また，零ベクトルは存在すれば一意である：
実際，${}^\exists \mathcal{L} \in \mathbb{R}^n$ s.t. ${}^\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x + \mathcal{L} = \mathcal{L} = \mathcal{L} + x$ …(♡)
この時，$\underbrace{\mathcal{L} = \mathcal{L} + 0}_{(♡)} \underbrace{= 0}_{(*)}$

第1章　確率関数からなる統計model

(質量)　離散の場合の(確率)密度関数のこと。

<u>Notation</u>　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ (1 \le \forall i \le n)\} \quad (1.1)$$
$$= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$$

・ $x, y \in \mathbb{R}^n$ は 以降

$$x = (x_1, \dots, x_n), \ y = (y_1, \dots, y_n) \quad (1.2)$$

と明示的にかくことにする。

・ また，以降 $c \in \mathbb{R}$ としておく。

<u>Rem.</u>　$\mathbb{R}^n$ はの $\mathbb{R}$ における和および積を用いることで，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる：

和 $x + y \in \mathbb{R}^n$ および スカラー倍 $cx \in \mathbb{R}^n$ は それぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \ cx = (cx_1, \dots, cx_n) \quad (1.3)$$

で与えられる ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の零ベクトル $\mathbb{0}$ は $(0, 0, \dots, 0)$ である：

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x + \mathbb{0} = x = \mathbb{0} + x$ …(*)をみたす。

また，零ベクトルは存在すれば一意である：

実際，$\exists z \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x + z = z = z + x$ …(♡)

この時，$\underbrace{z = z}_{(♡)} + \underbrace{\mathbb{0} = \mathbb{0}}_{(*)}$

第1章　確率(質量)関数からなる統計model

✓ 離散の場合の(確率)密度関数のこと。

Notation 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad (1 \leq {}^\forall i \leq n)\} \tag{1.1}$$
$$= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$$

・ $x, y \in \mathbb{R}^n$ は 以降

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \tag{1.2}$$

と明示的にかくことにする。

・ また，以降 $c \in \mathbb{R}$ としておく。

Rem $\mathbb{R}^n$ はの $\mathbb{R}$ における和および積を用いることで，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる：

和 $x + y \in \mathbb{R}^n$ および スカラー倍 $cx \in \mathbb{R}^n$ は それぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, \ldots, cx_n) \tag{1.3}$$

で与えられる。ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の零ベクトル $\mathbb{0}$ は $(0, 0, \ldots, 0)$ である。

${}^\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x + \mathbb{0} = x = \mathbb{0} + x$ …(*)をみたす。

また，零ベクトルは存在すれば一意である：

実際，${}^\exists z \in \mathbb{R}^n$ s.t. ${}^\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x + z = x = z + x$ …(♡)

この時，$\underbrace{z = z + \mathbb{0}}_{(♡)} \underbrace{= \mathbb{0}}_{(*)}$

$\mathbb{0} \in \mathbb{R}^n$

x を $\mathbb{0}$ として ♡ を使う

$\mathbb{0} = z + \mathbb{0}$ …(♡)

$= z$ （$\mathbb{0}$ だから）

$\langle x, 2y \rangle = 2\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle_e := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e^{i}$

$\langle x, y \rangle_{e} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e^{-1}$ は"標準"でない $\mathbb{R}^n$ 上の内積である

次に，関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{for any } x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (1.4)$$

で定め，$\mathbb{R}^n$ 上の(標準)内積という。$\langle x, y \rangle$ を x と y の内積という。

(物理量に一般化 → 計量 と呼ばれるものになる)

また，ベクトル sp $\mathbb{R}^n$ に標準内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を考えたもの $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を n-dim ($\mathbb{R}$-)ユークリッド sp という。

$\nabla = \sum$

更に，関数 $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (1.5)$$

により定める。特に，$n=1$ の時，$x \in \mathbb{R}$ に対して $\|x\|$ は x の絶対値 $|x|$ に他ならない。

$\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上の norm，$\|x\|$ を x の norm という。

Theorem 1.1) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$，$c \in \mathbb{R}$ に対し，次が成り立つ。

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symmetry)

(2) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$，$\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$ (linearity)

, where $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le n)$

(3) $\langle x, x \rangle \geq 0$

(4) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

proof) (1) $\langle x, y \rangle$

(2) $\langle x+y, z$

$\langle cx$

(3) ・

$\langle x,$

(4) ・ x

・ x

proof) (1) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x \rangle$

(2) ・ $\langle x+y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i z_i + y_i z_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

・ $\langle cx, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (c x_i) y_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c \langle x, y \rangle$

(3) ∵ 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 \geq 0$ だから,

$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

(4) ・ $x = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$ を示す.

$x = 0$ なら,

$\langle x, x \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n} = 0$

・ $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ を示す。

$\langle x, x \rangle = 0$ なら,

各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し,

$0 \leq x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \langle x, x \rangle = 0$

∴ $x_i^2 = 0$ であり, $x_i = 0$ が分かる

以上により, $x = (0, \ldots, 0)$ である ☒

Theorem 1.2) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とすると、次の(1)~(5)が成り立つ。

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(3) $\|cx\| = |c|\|x\|$

(4) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. (Cauchy-Schwartz ineq)
但し、等号成立 iff (xがyの定数倍かyがxの定数倍)
xとyが線型従属であるとき

(5) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式)

Rem
このtheoremの証明方法は、内積$\langle \cdot, \cdot \rangle$ではなくても
非負定値対称双線型形式なら通る ——→ FEMで使う
(2)と(4)の等号成立は示せないが(一般には)。

$\varepsilon(u,u) \geq 0$, $u \in F$
$\varepsilon(u+v, v) = \varepsilon(u,v) + \varepsilon(v,v)$

(proof)

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ だから、$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$

(2) Theorem1.1(3)を用いる
・$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ を示す
$\|x\| = 0$ なら、$\langle x, x\rangle = 0$ であり、Thm1.1(3) ⇒ から、$x = 0$
・$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ を示す
$x = 0$ なら、Theorem1.1(3) ⇐ から、$\langle x, x\rangle = 0$ であり、$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$

(3) $\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx\rangle} \underset{\text{Thm1.1(2)}}{=} \sqrt{c^2\langle x, x\rangle} = |c|\|x\|$

$= \sqrt{c\langle x, cx\rangle} = \sqrt{c\langle cx, x\rangle}$
$= \sqrt{cc\langle x, x\rangle}$

$\|x\|\ \|y\|$

(4) ・ $\forall t \in \mathbb{R}$, $x + t|\langle x, y\rangle| y$, $x + t|\langle x,y\rangle|y\rangle \geq 0$

(*) $\langle x + t|\langle x, y\rangle| y,$ (3)) 。

である (← Thm 1.1 (3))。これに内積の線型性を用いて、$(|\langle x,y\rangle| = \langle x,y\rangle$ に注意して$)$ $|\langle x,y\rangle|^2\langle y,y\rangle t^2 \geq 0$

イコール!

$\langle x, x\rangle + 2|\langle x,y\rangle|^2 t$ + ... $|\langle x,y\rangle|^2 \langle y, y\rangle t^2 \geq 0$

(*) とかき直せる。

$b^2 - 4ac \leq 0$

判別式を考えれば、

$|\langle x, y\rangle|^4 - |\langle x,y\rangle|^2\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle \leq 0$

$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

$= (\|x\|\|y\|)^2$

つまり、

$|\langle x, y\rangle|^2 (|\langle x,y\rangle|^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle) \leq 0$

$|\langle x,y\rangle|^2 \geq 0$ だから、

$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$, 言い換えれば、

$\|x\|\|y\| \geq 0$

$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|\|y\|$

$\|x\| \geq 0$

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

$\langle x, x\rangle = \|x\|^2$

が分かったことになる。

・さて、等号成立条件を考える。

・xとyが線型従属、つまり、$\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $ax = y$ ならば、

$|\langle x,y\rangle| = |\langle x, ax\rangle| = |a|\,|\langle x,x\rangle|$

$= |a|\,\|x\|\,\|x\|$

$= \|ax\|\,\|x\| = \|x\|\|y\|$

・等号が成立していると仮定する。この時、xとyは線型従属である

・$y = 0$ ならば、

・$y \neq 0$ ならば、$t = -\dfrac{1}{\langle y,y\rangle}$ とおくと、(*)式に代入し、

$\langle x, x\rangle - \dfrac{2|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \dfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} = \|x + t|\langle x,y\rangle|y\|^2$

が分かり、$\|x + t|\langle x,y\rangle|y\|^2 = \dfrac{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - |\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} = 0$

よって、$x = \dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,y\rangle} y$ が分かった。

$x + t\langle x,y\rangle y = 0$

$x = -t\langle x,y\rangle y$

$= \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y$

何れにしろ、xとyは線型従属である 　//

(5) (5)は(4)からすぐに分かる. 実際,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$
$$\underset{\substack{\text{Thm1.1}\\(1),(2)}}{=} \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$$
$$\underset{\text{Thm1.2}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$
$$\underset{(4)}{=} (\|x\|+\|y\|)^2$$

2乗上により. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ∎

続いて, 関数 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \quad \left(= \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}\right) \quad (1.6)$$

により定める. $d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$

d を $\mathbb{R}^n$ 上の Euclidean distance,
$d(x,y)$ を x と y の Euclidean distance という。

Theorem 1.3) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ とすると次が成り立つ。

(1) $d(x,y) \geq 0$

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$

(4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Proof) (1)

(2)

(3)

(4)

(Proof) (1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ (Thm 1.2(1))

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (Thm 1.2(2))

$\Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \times (y - x)\|$

$= |-1| \, \|y - x\| = d(y, x)$

(4)

$d(x, z) \leq \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\|$ Thm 1.2(5)

$\leq \|x - y\| + \|y - z\|$

$= d(x, y) + d(y, z)$ (1.7)

▨

各 k で，$a_k = (a_k^1, \ldots, a_k^n)$

for $1 \le i \le n$ $(a_k^i \in \mathbb{R})$ という表示が出来ている

Euclid distance を用いることにより，$\mathbb{R}^n$ の seq. の convergence について定義することができる

Def 1.1) $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし，$a \in \mathbb{R}^n$ とする

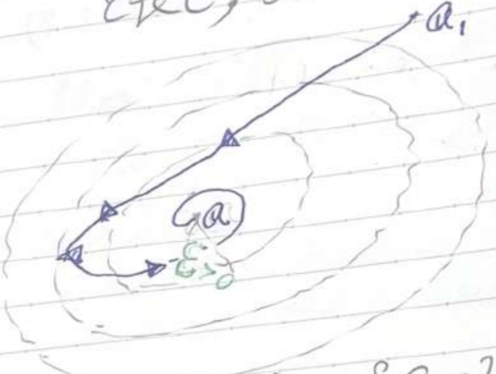
次をみたす時，$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するという；

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists K \in \mathbb{N}$，$\forall k \geq K$ (with $k \in \mathbb{N}$)，

$$d(a_k, a) < \varepsilon$$

この時，$\lim_{k \to \infty} a_k = a$ または $a_k \longrightarrow a \ (k \to \infty)$

と表し，a を $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ の limit という。



Example 1.1) $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ を resp. a，$b \in \mathbb{R}^n$ に収束する $\mathbb{R}^n$ の seq. とする

この時，

$$\lim_{k \to \infty} (a_k + b_k) = a + b \qquad (1.8)$$

を示す

(proof) 点列の収束のdefにより、
$\forall \varepsilon > 0$; fix すると、
$\exists k_1 \in \mathbb{N}$ st
$\forall k \geq k_1$, $d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ (1.9)

$\exists k_2 \in \mathbb{N}$ st
$\forall k \geq k_2$, $d(b_k, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ (1.10)

今、$K = \max\{k_1, k_2\}$ とおくと、
$\forall k \geq K$ $(k \in \mathbb{N})$,

$$
\begin{aligned}
d(a_k + b_k, a + b) &= \|(a_k + b_k) - (a + b)\| \\
&= \|(a_k - a) + (b_k - b)\| \\
&\leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\boxtimes$

$a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする

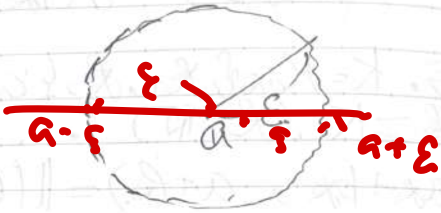
$\mathbb{R}^n$の部分集合 $B(a,\varepsilon)$を

$B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < \varepsilon\}$

でdefし, aを中心, εを半径とする開球という.

▷ E.g. 1.2

($n=1$ の場合)



一般に, $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$

の時, $(a,b) \subset \mathbb{R}$を

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a<x<b\}$

で定め (有界) open interval という.

$B(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$.

$\frac{a+b}{2}$ $\frac{b-a}{2}$

$\underline{\frac{a+b}{2}}$ aのブブン = $\underline{\frac{b-a}{2}}$ ε・のブブン

▷ E.g. 1.2 (open disk) $n=2$の場合

$a=(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$ とすると, $B(a,\varepsilon)$は

$B(a,\varepsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$

この時, $B(a,\varepsilon)$を open disk という

open ball を用いて,

▷ Def 1.2 $O \subset \mathbb{R}$

$\forall a \in O$, $\exists \varepsilon >$

をみたす時, Oを $\mathbb{R}$

Rem 1.1 について,

前提が Fal

▷ Eg. 1.4) $\mathbb{R}^n$ は

Indeed,

Thm 1.4) $\mathbb{R}^n$

$\forall a \in \mathbb{R}^n$

$b \in B(a, \varepsilon$

$d(a,b) <$

よって, $\delta >$

により

ここで,

よって, B

$d(a,$

$\therefore$ $d($

open ball を用いて, $\mathbb{R}^2$ の open set を次のように定める

Def 1.2 $O \subset \mathbb{R}^2$ とする。

$\forall a \in O, \ \exists \varepsilon > 0 \ \text{s.t.} \ B(a, \varepsilon) \subset O$

をみたす時, O を $\mathbb{R}^n$ の open set という

$$\forall a \left[\text{“}a \in O\text{”} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \text{s.t.} \ B(a,\varepsilon) \subset O \right]$$

点の近くが十分までとれて

たら操作しやすい

たてえは ~~微分の~~ 微分とか

Def 1.2 ~~Rem 1.1~~ について, ϕ: 空集合の場合 については,

“前提が” False だから, $\mathbb{R}^n$ の open set.

Eg. 1.4) $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の open set である

Indeed, $\forall a \in \mathbb{R}^n$; $B(a, 1) \subset \mathbb{R}^n$.

1点集合 $\{x\}$: open set ではない

Thm 1.4) $\mathbb{R}^n$ の open ball は $\mathbb{R}^n$ の open set.

(証) $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0$; $B(a,\varepsilon)$ が $\mathbb{R}^n$ の open set であることを示す

$b \in B(a, \varepsilon)$ とする : このとき, open ball の def から

$d(a, b) < \varepsilon$.

よって, $\delta > 0$ を $\delta = \varepsilon - \cancel{d(a,b)}\, d(b, a)$

により, 定めることができる

◎ ここで, $x \in B(b, \delta)$ とすると, $d(x, b) < \delta$ である

よって, Euclidean metric に関する triangle ineq (Thm 1.3 (3)) より,

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < \delta + d(b, a) = \varepsilon$$

$\therefore$ $d(x, a) < \varepsilon$ だから, $x \in B(a, \varepsilon)$ である

$\therefore$ $B(b, \delta) \subset B(a, \varepsilon)$

→ $B(a, \varepsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ の open set. ▨

No.
Date

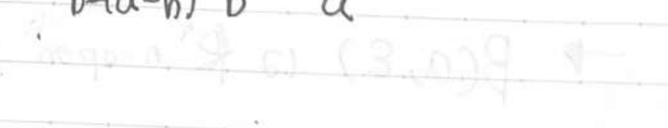
▷Eg.1.5) Eg.1.2とThm1.4より
有限open interval (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$
は$\mathbb{R}$のopen set.

∵
$$(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

▷Eg1.6) (infinite open interval)
$a \in \mathbb{R}$とし, $(a, \infty), (-\infty, a) \subset \mathbb{R}$を
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
により定め, $(a, \infty), (-\infty, a)$をinfite open intervalという

@ infite open interval は$\mathbb{R}$のopen setである
Indeed, $\forall b \in (a, +\infty)$: fix
$a < b$だから, $b - a > 0$, $B(b, b-a) = (a, b+(b-a))$
$\subset (a, +\infty)$
∴ open setのdefより, $(a, +\infty)$は$\mathbb{R}$のopen set

Furthermore, $\forall b \in (-\infty, a)$: fix
$b < a$だから, $a - b > 0$,
$B(b, a-b) = (b-(a-b), a) \subset (-\infty, a)$

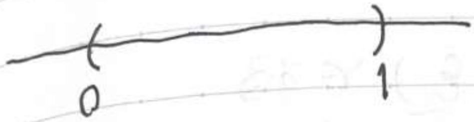


Eg1.7) $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ を

simplex

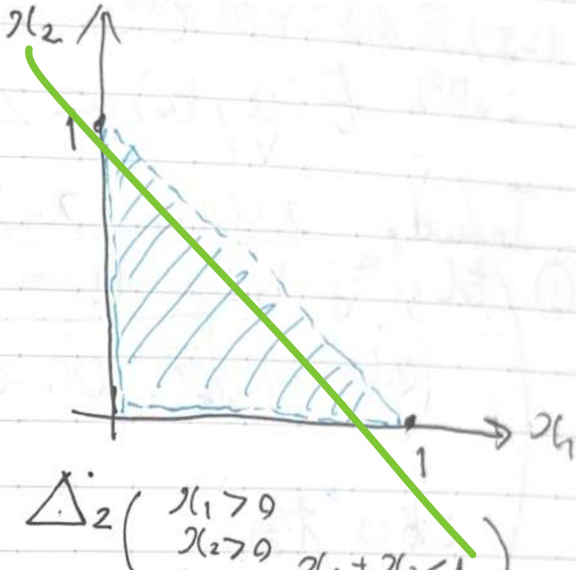
$$\Delta_n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n > 0, \sum_{i=1}^{n} x_i < 1 \}$$

により定める。 Δ_n が $\mathbb{R}^n$ の open set である



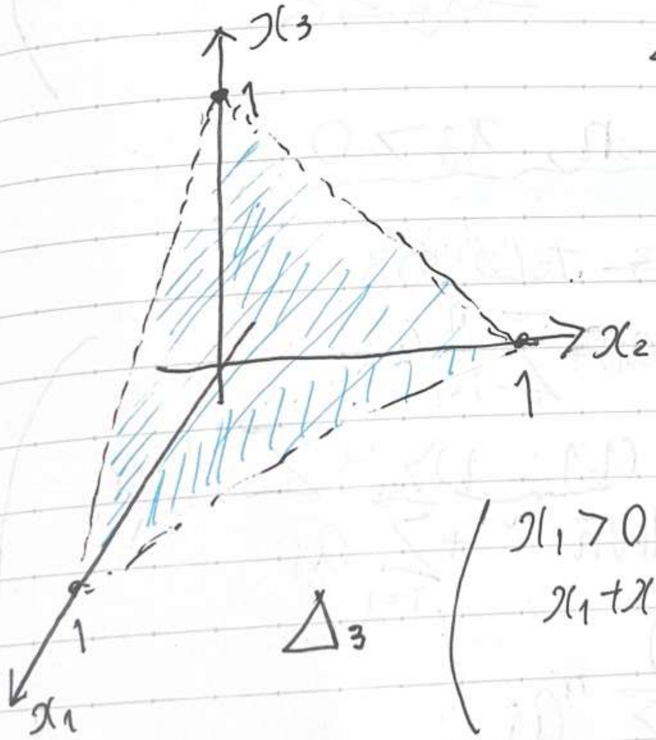
Δ_1

$(0 < x_1 < 1)$



$\Delta_2 \left(\begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{array} \quad x_1 + x_2 < 1 \right)$

$x_1 = -x_2 + 1$



$\Delta_3 \left(\begin{array}{c} x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \end{array} \right)$

No.

Date

㊟ $a=(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Delta_n$ とする。$1-\sum_{i=1}^n a_i > 0$ だから
この時、$a_1, \dots, a_n, 1-\sum_{i=1}^n a_i$
$\varepsilon>0$ を

$$\varepsilon = \min\left\{a_1, a_2, \dots a_n, \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\sum_{i=1}^n a_i\right)\right\}$$

により定めることができる。
この時 $B(a,\varepsilon) \subset \Delta_n$

Indeed, $x=(x_1, \dots x_n) \in B(a,\varepsilon)$ とする

① もし、$\exists j=1,2,\dots,n$ s.t. $x_j \leq 0$ ならば

$$d(x,a)=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2} \geq |x_j - a_j| = a_j - x_j$$
$$\geq a_j \geq \varepsilon$$

これは矛盾

㊟ よって、$\forall j=1,2,\dots,n$, $x_j > 0$

② $\sum_{i=1}^n x_i < 1$ を~~みる~~ たしかめる

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i$$
$$= \langle (x-a), (1,1,\dots,1)\rangle_n + \sum_{i=1}^n a_i$$
$$\underset{\text{C-S}}{\leq} \underbrace{\|x-a\|}_{d(x,a)<\varepsilon}\sqrt{n} + \sum_{i=1}^n a_i$$

$(\|(1,1,\dots 1)\| = \sqrt{n})$

B(a,ε) open ball
$$< \boxed{\sqrt{n}\,\varepsilon} + \sum_{i=1}^n a_i$$
$$\leq \left(1-\sum_{i=1}^n a_i\right) + \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

☑

1.2 Statistical
§1.2では、finite
ℝ-valued random vari
を考え、それらの族が
Aが有限; #A
countable; ~~#A~~
→ at most co

▽ Ω; ≠ φ, ~~at~~
Ω上の probabil
event A が起
pair (Ω, F

◎ Ωが finite の
Axiom 1. ( )
(1) 0 ≤ P(
(2) P(Ω)
(3) P(φ) =
(4), A_1, A_2
$A_i \cap A_j$
$P(\bigcup$

1.2 Statistical Model (part 1.)

§1.2では, finite or countably infinite set 上の $\mathbb{R}$-valued random variable から定まる確率関数を考え, それらの族からなる statistical model を考える

Aが
- 有限; $\#A < \infty$ ($\exists m \in \mathbb{N}$, st $A \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{1, 2 \dots m\}$)
- countable; $A \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{N}$
- → at most countable

$\mu_X : \{\{x_i\}\}_{i=1 \dots m} \to \mathbb{R}$

$P : 2^{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mu_X = P \circ X^{-1}$

▷ Ω; $\neq \phi$, at most countably set.
Ω 上の probability P を考えていくことになる
event A が起こる prob. を $P(A)$ とかく
pair (Ω, P) を discrete prob. sp. という

@ Ω が finite の時, "P" の公理 (axiom) を定める

Axiom 1.( )

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \subset \Omega$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(\phi) = 0$ $\quad P(A^c) = 1 - P(A)$

(4), $A_1, A_2, \dots A_m$ $(\subset \Omega)$ が互いに排反, つまり

$$A_i \cap A_j = \phi \quad (i, j = 1, 2 \dots m, \ i \neq j)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

No.

Date

R-valued random variable X を考える;

(Ω, P) 上の $\mathbb{R}$-valued random variable

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

今, Ω は finite だから,

$X(\Omega) = \{X(\omega) ; \omega \in \Omega\}$

$X(\Omega)$ は $(n+1)$ 個の実数 $x_0, \cdots, x_n$ を用いて

$X(\Omega) = \{x_0, \cdots, x_n\}$ $\left(0 \leq n \leq \#\Omega - 1\right)$

$X^{-1}(a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$

For any $i = 1, 2, \cdots,$

$\mu_X(\{x_i\}) = P(X^{-1}(\{x_i\})) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\})$

とおく

axiom 1.1 から, $\mu_X(\{x_i\}) \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ で

$\sum_{i=0}^{n} \mu_X(\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{n} P(X^{-1}(\{x_i\}))$

$X^{-1}(\{x_i\}) \cap X^{-1}(\{x_j\}) = X^{-1}(\{x_i\} \cap \{x_j\})$

$= X^{-1}(\phi) = \phi$

$\rightarrow$ (4) も示せてる

$= P\left(\bigcup_{i=0}^{n} X^{-1}(\{x_i\})\right)$

$= P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{n} \{x_i\}\right)\right)$

$= P(\Omega) = 1$

$\therefore$ μ_X は, 標本空間 $X(\Omega)$ 上の確率

特に, μ_X を X の分布という

$\mu_X : 2^{X(\Omega)} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\{A \mid A \subset X(\Omega)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

また，関数 $p: X(\Omega) \to \mathbb{R}$ を

$$p(x_i) = \mu_X(\{x_i\}) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

により定め，p を X に対する prob. func. という

この時，$\forall B \subset X(\Omega)$，

$$\mu_X(B) = \sum_{x\in B} p(x)$$

が成り立つ，

▷ (Bernoulli trial) ← 結果2種類

・ $0 \le \xi \le 1$,　T(表)がでる確率 ξ
　　　　　　　F(裏)　〃　$1-\xi$

（ξはp, Pを使って記号が足りないから使ってるだけ）

・ Tの時，100点
　 Fの時，0点　とする.

これを上の term でかくと，次のようになる

・$\Omega = \{T, F\}$

・$P(\{T\}) = \xi$,　$P(\{F\}) = 1-\xi$

とおくと，(Ω, P) は prob. sp.

そして，r.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ を

$X(\{T\}) = 100$,　$X(\{F\}) = 0$　で定める

Q この時，Xの分布 μ_X を求める．先ず，

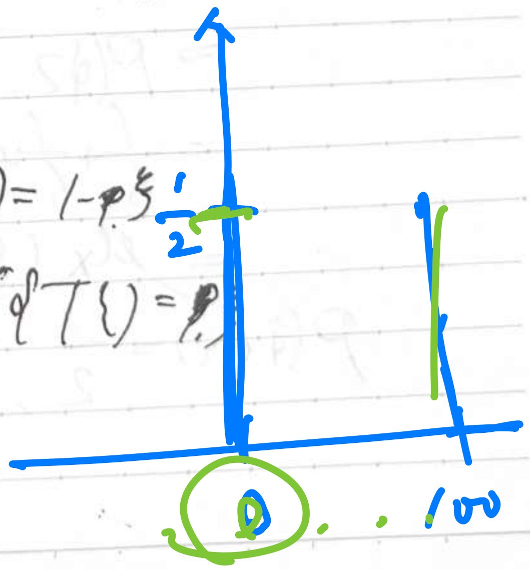
$$X(\Omega) = \{0, 100\}$$

$$\mu_X(\{0\}) \underset{\text{by def}}{=} P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{F\}) = 1-\xi$$

$$\mu_X(\{100\}) \underset{\text{by def}}{=} P(X^{-1}(\{100\})) = P(\{T\}) = \xi$$

また，Xに対する prob. func. p は

$p(0) = 1-\xi$,　$p(100) = \xi$



Eg).9) 公正なサイコロを1回投げる

(素数がでたら100点
いでないと 0 点

を 上記の term を用いて かき下す

$\Omega=\{1,2,\dots,6\}$: "サイコロの面の数"

$P(\{1\})=P(\{2\})=\dots=P(\{6\})=\frac{1}{6}$

(Ω,P) は prob. sp

~~X(2)=~~ そして, r.v. $X:\Omega\to$ 形を

$X(2)=X(3)=\dots=X(5)=100$, $X(1)=X(4)=X(6)=0$

Xの分布 μ_X を求める

$X(\Omega)=\{0,100\}$

$\mu_X(\{0\})=P(X^{-1}(\{0\}))$

$=P(\{1,4,6\})=P(\{1\})+P(\{4\})+P(\{6\})$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$\mu_X(\{100\})=P(X^{-1}\{100\})$

$=P(\{2,3,5\})=P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{5\})$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$(=\mu_X(\{0,100\})-\mu_X\{0\})$

$P(\{0\})=\frac{1}{2}$, $P(\{100\})=\frac{1}{2}$

Ω: countab

Ω

axiom)
(1) $0\le P($
(2) $P(\Omega$
(3) $P(\emptyset$
(4) $\forall A_1,\dots$
A_m
$\Rightarrow P$

$X(\Omega$

と表すて

$\mu_X($

μ_X

が成り

μ

関数

Ω: countable な場合も同じ

axiom) Ω: countable set

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$,

(2) $P(\Omega) = 1$,

(3) $P(\emptyset) = 0$,

(4) $\forall A_1, \ldots, A_m \subset \Omega$ が
$A_m \cap A_n = \emptyset \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)$

$\Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

$\mu_X(A) = \mu_X(\{a_j\}_{j=1}^{\infty})$

$X^{-1}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_X(\{a_j\})$

$\mu_X(\{x_i\})$

$\mu_X(\{x_i\})$

X^{-1}

$X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

と表すと, $\mu_X : 2^{X(\Omega)} \to \mathbb{R}$ を $\mu_X = P \circ X^{-1}$ で定義する

$\mu_X(\{x_n\}) = P(X^{-1}\{x_n\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_n\})$

$\boxed{\mu_X(A) = P \circ X^{-1}(A) \quad \forall A \subset X(\Omega)}$

$\mu_X(\{x_n\}) \geq 0$ であり,

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(\{x_n\}) = 1$

$\mu_X : 2^{X(\Omega)} \to \mathbb{R}$

が成り立つ. $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(\{x_n\})} = 1$

~~$\mu_X : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$~~

μ_X を X の分布という (こっちはあくまでもmeasure)

関数

$p(x_n) = \mu_X(\{x_n\})$

により定める $\mu_X(B) = \sum_{x \in B} p(x)$ $\forall B \subset X(\Omega)$

6と)

ↄ/{5})

$V(x), V(y)|_{y=x}$

Def) $\#\Omega \leq \aleph_0$ $(\Omega \neq \emptyset)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$
open set $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ を用いて、

$$S = \{ p(\cdot, \xi) \mid {}^\forall x \in \Omega, {}^\forall \xi \in \Xi, \ p(x,\xi) > 0, \ \sum_{x \in \Omega} p(x,\xi) = 1 \}$$

分布(リッチん?)

と表される、r.v. の族 S を Ω 上の n-dim "statistical model" という

例1.10) $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)$ コの元から成る有限集合 $\Omega_n \subset \mathbb{R}$ を
(超平面的な気持ちで $(n+1)$ ")

$\Omega_n = \{0, 1, \dots, n\}$
により定め、

$$\Xi_n = \{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi_i > 0 \ ({}^\forall i = 1, \dots, n), \sum_{i=1}^n \xi_i < 1 \} = \Delta_n$$

とおく。Eg 1.7 により Ξ_n は $\mathbb{R}^n$ の open set

この時、$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Xi_n$ に対して

$p(\cdot, \xi)$

$$\sum_{j=0}^{n} p(j, \xi) = 1$$

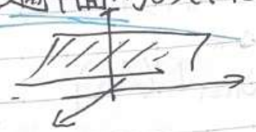
$$P(0; \xi) = 1 - \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad P(j; \xi) = \xi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと、$P(\cdot, \xi)$ は prob. の関数を定める
(← 普通に足していけるってことと $P(i, \xi) > 0$ ${}^\forall i$)
($X(\Omega)$ が Ω_n に含まれるだけ)

よって、$S_n = \{ p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Xi_n \}$
で分けると、S_n は n-dim の統計的 model

$$P(0, \xi) + \sum_{j=1}^n P(j, \xi) = 1 - \sum_{j=1}^n \xi_j + \sum_{j=1}^n \xi_j = 1$$

eg 1.11 (Poisson分布) 可算集合
$\Omega = \mathbb{N}$ (∋ ...
により定め、$\Xi_1 = \{\xi$ ...
$= (0$ ...
は Eg 1.6 より ...
For any $\xi \in \Xi$ ...
$p(x, \xi) =$ ...
とおくと、$p(\cdot, \xi)$ ...
$p(\cdot$ ...
$\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \xi)$ ...
∴ ~~$S = \{p$~~
$S = \{p$ ...
とおくと ...

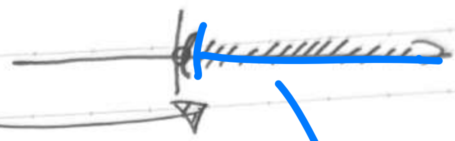


eg 1.11 (Poisson分布) 可算集合 $\Omega \subset \mathbb{R}$ を

$$\Omega = \mathbb{N} \ (\ni 0)$$

により定め

$$\Xi = \{\xi \mid \xi > 0\} = (0, \infty)$$



は Eg 1.6より, $\mathbb{R}$の open set

For any $\xi \in \Xi$, define

$$p(x, \xi) = e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!} \quad (x \in \Omega)$$ Poisson分布

とおくと, $p(\cdot, \xi)$ は確率関数を定める

$$p(\cdot, \xi) > 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \xi) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!} = e^{-\xi} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\xi^x}{x!}}_{= e^{\xi} \ (\because \mathrm{def})} = e^{-\xi} e^{\xi} = 1$$

∴

$$S = \{p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Xi\}$$

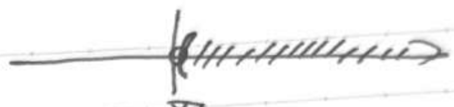
とおくと. SはΩ上の 1-dim statistical model.

eg 1.11 (Poisson分布) 可算集合 $\Omega \subset \mathbb{R}$ を

$$\Omega = \mathbb{N} \ (\ni 0)$$

により定め,

$$\Xi = \{\xi \mid \xi > 0\}$$



$$= (0, \infty)$$

は Eg 1.6より, $\mathbb{R}$の open set

For any $\xi \in \Xi$, define

$$p(x, \xi) = e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!} \quad (x \in \Omega)$$ Poisson分布

とおくと, $p(\cdot, \xi)$は確率関数を定める

$$p(\cdot, \xi) > 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \xi) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!}$$

$$= e^{-\xi} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\xi^x}{x!}}_{= e^{\xi} \ (\because \text{def})} = e^{-\xi} e^{\xi} = 1$$

$\therefore$ ~~S={p(·,ξ)|~~

$$S = \{p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Xi\}$$

とおくと. Sは Ω上の 1-dim. statistical model.

$\Delta + \varepsilon$

$$\simeq \varepsilon + \Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+\varepsilon}{c+d} & \frac{b+\varepsilon}{d+\varepsilon} \end{pmatrix}$$

a_{ij}

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

DLA