

例 1.10 では  $\Omega_n$  上の statistical model  $S_n$  について述べた。  $S_n$  やその部分集合として表される statistical model に属する 十分統量 をつかうける。この例は §2.4 や §2.6 で扱う シンボルの thm を示す際に、重要な役割を果たす。

▶ Fig. 1.17 (十分統量  $F_n$ )  $F_n: \Omega_n \rightarrow \Omega_n$  と  $F_n(0) = 0$  とする 全射 である

$$\begin{aligned} & \langle \Omega_n \rangle \\ & = (12)(356)(47) \\ & \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 6 & 4 \end{array} \end{aligned}$$

ここで、

$$p(0; \xi) = \sum_{i \in F_n^{-1}(0)} p(i; \xi) = p(0; \xi) = 1 - \sum_{j=1}^n \xi_j$$

また、 $j = 1, 2, \dots, n$  のとき、

$$p(j; \xi) = \sum_{i \in F_n^{-1}(j)} p(i; \xi) = p(F_n^{-1}(j); \xi) = \xi_{F_n^{-1}(j)}$$

である

$$r(0; \xi) = \frac{p(0; \xi)}{p(F_n(0); \xi)} = \frac{p(0; \xi)}{p(0; \xi)}$$

$i = 1, 2, \dots, n$  のとき

$$r(i; \xi) = \frac{p(i; \xi)}{p(F_n(i); \xi)} = \frac{p(i; \xi)}{p(F_n^{-1}(F_n(i)); \xi)} = \frac{p(i; \xi)}{p(i; \xi)} = 1$$

よって、 $r(\cdot; \xi)$  は  $\xi$  に依存しないので、

$F_n$  は  $S_n$  に対する 十分統量 である

Fig. 1.18 (十分統量)

$$S_{m,n} = \{p(\cdot, \eta) \in S_{m,n} \mid$$

$(S_{m,n} = \{p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Omega_{m,n}\})$  により定まる  $t$ -f.d. であるとき、 $S_{m,n}$  は

$$\text{Indeed, } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \\ \left( \frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_2}{m}, \dots, \frac{\xi_m}{m} \right)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \xi_1$$

$$p(\cdot, \xi) = p(\cdot, \dots)$$

とすると、 $S_{m,n} = \{$

次: 写像  $F_{m,n}: \Omega_{m,n} \rightarrow \Omega_n$

$$F_{m,n}(0) = 0, \quad F_{m,n}(\star)$$

$$\Omega_{m,n}: \begin{array}{c} 0, 1 \\ \downarrow \\ \Omega_n: 0 \end{array}$$

$$\Omega_n: 0$$

$$\Omega: \dots$$

Eg 1.18 (十分統計量  $f_{m,n}$ ) 先ず,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{m,n} \subset S_{mn}$

$$S_{mn} = \{p(\cdot, \eta) \in S_{mn} \mid \begin{matrix} \eta_1 = \dots = \eta_m, \dots \\ \eta_{m+1} = \dots = \eta_{2m} \\ \eta_{m(n-1)+1} = \dots = \eta_{mn} \end{matrix} \}$$

$$(S_{mn} = \{p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Xi_{mn}\})$$

1.2.5 のために,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{mn})$  とおき

$S_{m,n}$  は  $\Omega_{mn}$  上の  $n$ -dim statistical model.

ここで,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Xi_n$  に対し

$$\left( \underbrace{\frac{\xi_1}{m}, \dots, \frac{\xi_1}{m}}_{m \text{ 回}}, \underbrace{\frac{\xi_2}{m}, \dots, \frac{\xi_2}{m}}_{m \text{ 回}}, \dots, \underbrace{\frac{\xi_n}{m}, \dots, \frac{\xi_n}{m}}_{m \text{ 回}} \right) \in \Xi_{mn}$$

$$\underbrace{a_i = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}_{n \text{ 回}} < 1 \quad (\xi \in \Xi_n \text{ から}) \quad \text{であり,}$$

$$p(\cdot, \xi) = p(\cdot, \underbrace{\dots}_{\star}) \left( \underbrace{p_{mn}(\cdot, \xi)}_{\star} \right) \text{ cf. (1.56)}$$

$$\text{よって, } S_{m,n} = \{p(\cdot, \xi) \mid \xi \in \Xi_{n,1}\}$$

$$\text{写像 } F_{m,n}: \Omega_{mn} \rightarrow \Omega_n \text{ と}$$

$$F_{m,n}(0) = 0, \quad F_{m,n}(i) = j \quad \begin{matrix} i = (j-1)m+1, \dots, jm, \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

( $\star m$  は 勿論止まっている数)

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_{mn}: & 0 & 1, 2, \dots, m, m+1, & \dots, & 2m, m+m, \dots, & (n-1)m+1, \dots, nm \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_n: & 0 & 1 & & 2 & & n \end{array}$$

② よう,  $F_{m,n}$  は surj である. 実際  $x \in \Omega_n$  であるとき,  
 $x \in \Omega_n$  とすれば,  
 $F_{m,n}(xm) = x$ .



ここで,  $Q(\cdot; \xi)$  の def から,

$$Q(0; \xi) = \sum_{i \in F_{m,n}^{-1}(0)} \tilde{p}(i; \xi) = \tilde{p}(0; \xi) = 1 - \sum_{j=1}^n \xi_j$$

(Fig. 8.8 の  $F_{m,n}$  の逆写像  $0 \in \mathbb{Z}_m$  は  $0$  のみ)

$$= 1 - \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m Q((j-1)m+k; \xi) \right) = \xi_0$$

$$Q(j; \xi) = \sum_{i \in F_{m,n}^{-1}(j)} \tilde{p}(i; \xi) = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \tilde{p}(i; \xi) = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \frac{\xi_j}{m} = \xi_j$$

(Fig. 8.8 の  $F_{m,n}$  の逆写像  $j \in \mathbb{Z}_m$  は  $j$  のみ)

Recall

$$\tilde{p}(\cdot; \xi) = p(\cdot, \frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_1}{m}, \dots, \frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_2}{m}, \dots, \frac{\xi_2}{m}, \frac{\xi_3}{m}, \dots, \frac{\xi_3}{m}, \dots, \frac{\xi_n}{m}, \frac{\xi_n}{m}, \dots)$$

(Fig. 8.8 の  $F_{m,n}$  の逆写像  $j \in \mathbb{Z}_m$  は  $j$  のみ)

$i \neq 0$  の場合の  $Q(0; \xi)$  は

$$r(0; \xi) = \frac{\tilde{p}(0; \xi)}{Q(F_{m,n}(0); \xi)} = \frac{\tilde{p}(0; \xi)}{Q(0; \xi)} = 1$$

$i = (j-1)m+1, \dots, jm$ ,  $j=1, \dots, n$  のとき

$$r(i; \xi) = \frac{\tilde{p}(i; \xi)}{Q(F_{m,n}(i); \xi)} = \frac{\tilde{p}(i; \xi)}{Q(j; \xi)} = \frac{\frac{\xi_j}{m}}{\xi_j} = \frac{1}{m}$$



Eg 1.14 (+分統量  $F_m$ ) Eg 1.18 と一般化 (vector?)  
 Eg 1.18 は  $m_1 = m_2 = \dots = m_n$  だった

まず,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \subset \mathbb{L}$ ,  
 $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$

とおく。更に,  $S_M \subset S_m$

$$S_M = \{p(\cdot; \eta) \in S_m \mid \eta_1 = \dots = \eta_{m_1}, \dots, \eta_{m_1 + \dots + m_{n-1} + 1} = \dots = \eta_m\}$$

により定める。この時, Eg 1.18 と同様に,  
 $S_M$  は  $\Omega_m$  上の  $n$ -dim statistical model である

$$a_i = \left( \underbrace{\frac{\xi_1}{m_1}, \frac{\xi_1}{m_1}, \dots, \frac{\xi_1}{m_1}}_{m_1 \text{ 回}}, \underbrace{\frac{\xi_2}{m_2}, \frac{\xi_2}{m_2}, \dots, \frac{\xi_2}{m_2}}_{m_2 \text{ 回}}, \dots, \underbrace{\frac{\xi_n}{m_n}, \frac{\xi_n}{m_n}, \dots, \frac{\xi_n}{m_n}}_{m_n \text{ 回}} \right) \in \Omega_m$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=(m_1+\dots+m_{j-1})}^{m_1+\dots+m_j} a_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\xi_j}{m_j} \times m_j \right) = \sum_{j=1}^n \xi_j = 1$$

$$\tilde{p}(\cdot; \xi) = p(\cdot; \underbrace{\frac{\xi_1}{m_1}, \frac{\xi_1}{m_1}, \dots, \frac{\xi_1}{m_1}}_{m_1 \text{ 回}}, \dots, \underbrace{\frac{\xi_n}{m_n}, \frac{\xi_n}{m_n}, \dots, \frac{\xi_n}{m_n}}_{m_n \text{ 回}})$$

$$S_M = \{\tilde{p}(\cdot; \xi) \mid \xi \in \Xi_n\}$$



次に、写像  $F_M: \Omega_m \rightarrow \Omega_n$  を

$$F_M(0) = 0, \quad F_M(i) = 1 \quad (i = 1, \dots, m_1)$$

$$F_M(i) = j \quad (i = m_1 + \dots + m_{j-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_j; \\ j = 2, \dots, n)$$

(  $\Delta$  上 )

同様,  $f_m$  は surj. である  
 Indeed, 各  $k \in \mathbb{N}$  に対して,  
 $l \in m_1 + \dots + m_k$  として,  
 $f_m(m_1 + \dots + m_k) = l$

ここで,  $g$  の def から,

$$g(0; \xi) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{p}(i; \xi) = \tilde{p}(0; \xi) = 1 - \sum_{j=1}^n \xi_j$$

また,

$$E(1|\xi) = \sum_{i \in \text{Fin}(\mathbb{N})} \tilde{p}(i; \xi) = \sum_{i=1}^{m_1} p(i; \xi) = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{m_1} = \xi_1$$

同様に,  $j=2, \dots, n$  のとき

$$P(i; \xi) = \sum_{i \in F_m^{-1}(i; \xi)} \tilde{P}(i; \xi) = \sum_{i \in m_1 + \dots + m_{d+1}} \tilde{P}(i; \xi) = \sum_{i \in m_1 + \dots + m_{d+1}} \frac{m_i}{m} = \frac{m}{m} = 1$$

$$r(0; \xi) = \frac{\tilde{p}(0; \xi)}{\mathcal{Z}(F_m(0; \xi))} = \frac{\tilde{p}(0; \xi)}{\mathcal{Z}(0; \xi)} = 1 \quad (1.56)$$

$$i = 1, \dots, m_i \text{ のとき,}$$

$$r(i; \xi) = \frac{\tilde{p}(i; \xi)}{\tilde{z}(F_m(i; \xi))} = \frac{\tilde{p}(i; \xi)}{\tilde{z}(1; \xi)} = \frac{\frac{\gamma_1}{m_1}}{\frac{\gamma_1}{m_1}} = 1$$

$$(\leq m_1 + \dots + m_{j-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_j, j=2, \dots, n, \sigma \in$$

$$r(i|\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{P}(i|\mathcal{E})}{\sum_{j \in \mathcal{I}} \mathcal{P}(j|\mathcal{E})} = \frac{\mathcal{P}(i|\mathcal{E})}{\sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{1}{n_j}} = \frac{1}{n_j}$$

よって,  $\gamma(\cdot; \varepsilon)$  は  $\varepsilon$  に  
 $\frac{1}{\varepsilon}$  は  $S_m$  に属する

第2章 Fish 計量

2.1 Riemann 計量  
Euclidean sp  $\mathbb{R}^n$  の Euclidean sp  
 $\mathbb{R}^n$  の 2 点  $x, y \in \mathbb{R}^n$  の距離 (8.1.1).  
統計的 model  $S$  は  $\mathbb{R}^n$  の点の集合  
確率関数  $p(\cdot; \theta) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$   
Euclidean metric

よって Euclidean metric  
を用いてみる。  
しかし、これは  $S_n$

しかし、これはS  
(たまたま差と  
考慮して至

\$2.5で述べる  
Fisher計量

§2.  $\tau$  は, Riemann metric

よって,  $\eta(\cdot; \xi)$  は  $\xi$  に依存しない  $\pi$ ,  
 $F_{\text{FM}}$  は  $S_{\text{FM}}$  に関する十分統計量である

## 第2章 Fisher 計量

### 2.1 Riemann 計量

Euclidean sp  $\mathbb{R}^n$  の Euclidean metric  $d$  を用いると,  
 $\mathbb{R}^n$  の 2 点  $x, y \in \mathbb{R}^n$  の metric  $d(x, y)$  とは定まることである  
であった (§1.1). 一方, Def 1.3 で定めた  
統計的 model  $S$  は  $\mathbb{R}^n$  の open set の点  $\xi \in S$  をパラメータとするので,  
確率関数  $\eta(\cdot; \xi) \in S$  と点  $\xi$  と同一視できる  
よって, Euclidean metric を用いると, 2つの確率関数  $\eta$  の間の距離を測る  
ことができる。

しかし,  $S$  が確率関数からなるという性質を何れ反映にも  
(たとえば差を測るのではなく, 確率関数の位置を  
考慮して差を考える)  $\times$

§2.5 で述べるように, 統計的 model に対しては  
Fisher 計量 とうものと考えられて, 確率関数  $\eta$  の間の距離を定める

§2.1 では, そのための準備として, Euclidean sp open set の  
Riemann metric について述べる。



先ず,  $p, q \in \mathbb{R}^n$  且,  $p \neq q$  是結ぶ  $C^1$ -級曲線が  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  と考える. すなわち,  $\gamma$  は有界閉区間  $[a, b]$  で  $def$  された  $\gamma(a)=p, \gamma(b)=q$  且みたす  $\mathbb{R}^n$  への写像であり,

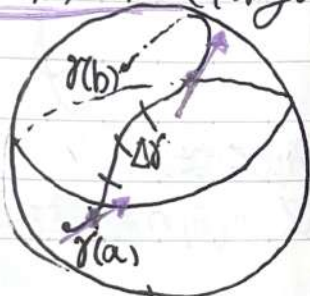
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておく,  $[a, b]$  で  $def$  された  $n$  個の  $\mathbb{R}$ -valued 関数  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  は全て 1 階微分可能であり, その導関数は連続である. このとき, 弧積分で与えるように,  $\gamma$  の長さとは定積分

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

により与えられる. 但し,  $\|\cdot\|$  は  $\mathbb{R}^n$  標準内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  により定められるノルムである.

$t_0 \in [a, b]$  に対して,  $\gamma(t_0)$  と  $\gamma$  の  $t=t_0$  における接ベクトル (tangent vector) という

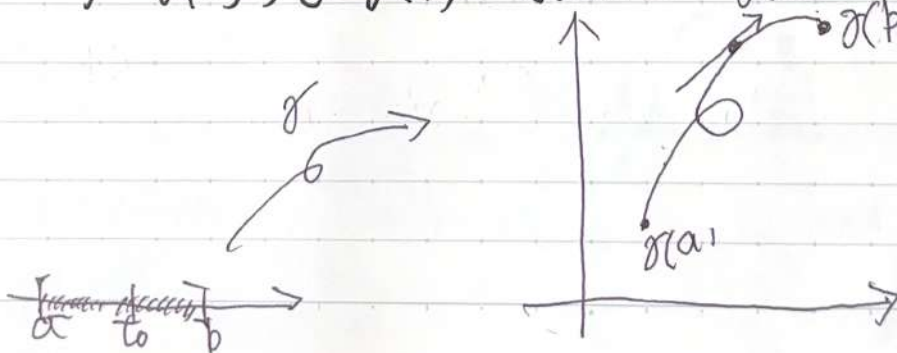


$$(\int \|\gamma'\|) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

更に, 次の成り立つ  
Prop 2.1)

$$d(p, q) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad (2.3)$$

$p = \gamma(a), q = \gamma(b)$  であつた.  $\gamma(t_0)$   $\gamma(b)$   $\mathbb{R}^n$



①) 先ず,  $p=q$  の場合を考える。この時,  $d(p, q) = 0$  となるので, (2.3) が成り立つ。

2) 次に,  $p \neq q$  とする。  $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$  のとき,

$$\int_a^b \langle \gamma'(t), v \rangle dt = \int_a^b \langle \gamma(t), v \rangle dt$$

$$\left( \begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle \gamma(t+s), v \rangle - \langle \gamma(t), v \rangle}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\langle \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s}, v \right\rangle \\ &= \left\langle \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s}, v \right\rangle \\ &= \langle \gamma'(t), v \rangle \end{aligned} \right)$$

$$a_n \rightarrow a_{\infty} \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow \langle a_n, v \rangle \rightarrow \langle a, v \rangle$$

$$\text{Indeed, } |\langle a_n, v \rangle - \langle a, v \rangle| = |\langle a_n - a, v \rangle| \leq \|a_n - a\| \|v\|$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \langle \gamma(t), v \rangle \right]_a^b \\ &= \langle q, v \rangle - \langle p, v \rangle = \langle q - p, v \rangle \end{aligned}$$

これ Cauchy-Schwarz inequality.

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), v \rangle &\leq |\langle \gamma'(t), v \rangle| \leq \|\gamma'(t)\| \cdot \|v\| \\ &= \|\gamma'(t)\| \cdot 1 = \|\gamma'(t)\| \end{aligned}$$

これより,

$$\int_a^b \langle \gamma'(t), v \rangle dt \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\text{結局, } \langle q - p, v \rangle = \left( \int_a^b \langle \gamma'(t), v \rangle dt \right) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$



$p \neq q$  より,  $u \in \mathbb{R}^n$  と

$$u = \frac{q-p}{\|q-p\|}$$

により定めることが出来る。この時,  $\|u\|=1$  である。  
この  $u$  を (2.7) に代入すると, (2.3) が得られる

□

(2.3) 番号成立 条件を導く

先ず,  $p=q$  の時 (2.3) において番号が成立するのは  
 $\forall t \in [a, b]$  に対して,  $\gamma'(t)=0$  となることである

この時,

$$\gamma(t) = p (= q) \quad (t \in [a, b])$$

となり,

$$\left( \begin{aligned} d(p, q) &= d(p, p) = 0 \quad \text{"成立" となる} \\ \int_a^b \|\gamma'(t)\| &= 0 \quad \leadsto \quad \forall t \in [a, b], \|\gamma'(t)\| = 0 \\ &\quad \gamma'(t) = 0 \end{aligned} \right)$$

$\gamma$  は 1 点を表す (  $p=q$  ) 恒等写像の例

次に  $p \neq q$  の場合, (2.3) において番号が成立するのは  
Cauchy-Schwarz 不等式を用いて, (2.5) の右辺が  
各  $t \in [a, b]$  に対して,  $\gamma'(t)$  が (2.8) の  $\gamma$  の正交成分に  
なることである。この時, ある  $C^1$  級の単調増加関数  
 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  存在して,

$$\gamma(t) = \frac{\varphi(b) - \varphi(t)}{\varphi(b) - \varphi(a)} p + \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} q$$

となり,  $\gamma$  は  $p$  と  $q$  の凸組合せを表す

② たいはつ  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 $\gamma(t) = t$  ておくと  
 $\gamma(t) = \frac{b-a}{b-a} p + \frac{t-a}{b-a} q$   
~~高次 Lagrange 補間~~

$\gamma'(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma'(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$   
 $\gamma'(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma'(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma'(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma'(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$C = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$C = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$C = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$

$\gamma(t) = \frac{1}{\int_a^b \psi(s) ds - \int_a^t \psi(s) ds} \times \|q-p\| \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} \cdot \gamma'(t)$





よて,  $\mathbb{R}^n$  の任意の 2 点を結ぶ "最短線" (曲) として  
 $\gamma(t) = t$  を考えれば、それは最短である

最短線, すなわち, 長さの最も短い曲は存在しており  
 その長さは 2 点間の距離となる

上で述べたことの結局,

(1) 2 点間の距離はその 2 点を結ぶ "最短線" 長さである

(2) 曲線, 長さの曲の積分, 被積分関数は  $\sqrt{H(\dot{\gamma})}$  である

(3) リルムは内積を用いて定められている

よて,  $\mathbb{R}^n$  の任意の各点において (標準内積とは異なる)  
 $\mathbb{R}^n$  の内積である

Def 2.1)  $D \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$  : open set とし,

各  $p \in D$  に対して,  $\mathbb{R}^n$  の内積  $g_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられている  
 とき,  $p$  から,  $g_p$  への対応を  $g$  とし,  $g \in D$  の Riemann 計量とする。

Rem.) Def 2.1 にあて.  $\forall C^\infty$ -map  $X, Y: D \rightarrow \mathbb{R}^n$

1. に対して  $g(X, Y): D \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^\infty$  になる

$g$  は  $C^\infty$  である

★以下同様. したがって, 曲線も Riem. metric も  $C^\infty$  である

Riem metric  $\varepsilon$  (7.2) 由  $\gamma$  の長さを定めてやる  
 $D (\neq \emptyset) \subset \mathbb{R}^n$ : open,  
 $g: D \rightarrow \text{Riem metric}$   
 $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  の曲線  
 $\gamma \in D$  の曲線

$$\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

に決める。なお、曲線の長さは <sup>parameter</sup> ~~parameter~~ 付け  
 を変えても変らない、i.e.

$$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b] \in$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi'(s) > 0 \quad (s \in [\alpha, \beta])$$

なる変数変換  $\varphi$  と  $\gamma$  の合成により得られる  
 $D$  内の曲線  $\gamma \circ \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow D$  を考え、  
 $\gamma \circ \varphi$  の長さを計算

Indeed,

$$\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

$$\stackrel{t = \varphi(s)}{=} \int_\alpha^\beta \sqrt{g_{\gamma(\varphi(s))}(\gamma'(\varphi(s)) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s), \gamma'(\varphi(s)) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s))} \cdot \frac{dt}{ds} ds$$

$$\frac{dt}{ds} = \varphi'(s)$$

$$(\gamma \circ \varphi)'(s) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{t=\varphi(s)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) = \gamma'(\varphi(s)) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s)$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$$

$$= \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$



8753, 7053

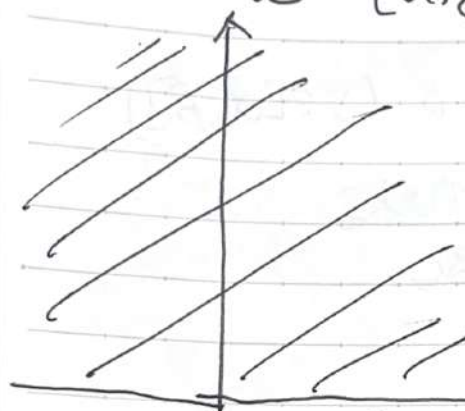
Riem. metric と曲線長について例を2考ける

例 2.1 (Euclidean metric)  
各  $p \in \mathbb{R}^n$  に対し,  $g_p \in \mathbb{R}^n$  の標準内積 (1.4) である。  
この  $g$  を  $\mathbb{R}^n$  の Euclidean metric とする。

Euclidean metric を考えれば,  
 $\mathbb{R}^n$  の内の曲線  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  の長さは (2.2) に  
与えられる。

例 2.2 (Poincaré metric)  $D \subset \mathbb{R}^2$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$



したがって,  $(x, y) \in D$  に対して,  
$$g_{(x, y)}(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{y^2} \quad (v, w \in \mathbb{R}^2)$$
  
とおく。但し,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  
 $\mathbb{R}^2$  の標準内積である。

このとき,  $g$  は  $D$  の Riem. metric である。 ( $g_{(x, y)}$  にて  $\frac{1}{y^2}$  は定数)  $g \in D$  の Poincaré metric.

$(D, g)$  を Poincaré 上半平面 とする。

$\gamma: [a, b] \rightarrow D$  を  $D$  内の曲線とし,  
成すを用いて,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in [a, b]) \quad (2.15)$$

と表しておく。このとき,  $L(\gamma)$  を  $\gamma$  の長さとすると, (2.11), (2.14)

(2.5),

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{y(t)} dt \quad \text{である} \quad (2.16)$$

Indeed,

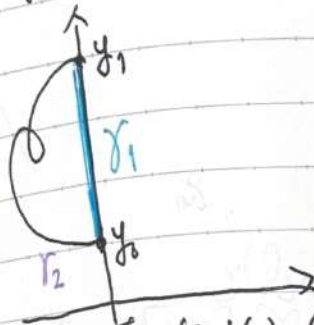
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}{g^2(t)}} dt = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{g(t)} dt$$

Poincaré 上半平面  $(D, g)$  内、積分長と最短性について述べる。  
 先ず、 $0 < y_0 < y_1 < 1$ ,  $D$  の 2 点  $(0, y_0)$  と  $(0, y_1)$   
 を結ぶ ~~最短経路~~  $D$  内、曲線  
 $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow D$  と

$$\gamma_1(t) = (0, (y_1 - y_0)t + y_0) \quad (t \in [0, 1]) \quad (2.17)$$

により定める。すなわち、 $\gamma_1$  は  $(0, y_0)$  と  $(0, y_1)$  を結ぶ直線である。



このとき、(2.16), (2.17) により

$$L(\gamma_1) = \int_0^1 \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ (y_1 - y_0) \end{pmatrix} \right\|}{(y_1 - y_0)t + y_0} dt = \int_0^1 \frac{(y_1 - y_0)}{(y_1 - y_0)t + y_0} dt$$

$$= [\log |(y_1 - y_0)t + y_0|]_0^1 = \log y_1 - \log y_0 = \log \left( \frac{y_1}{y_0} \right)$$

一方、 $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow D$  と  $(0, y_0) < (0, y_1)$  を結ぶ  $D$  内の任意曲線  $\gamma_2$   
 (2.15) を表すとき、このとき、

$$L(\gamma_2) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = [\log y(t)]_0^1 = \log \left( \frac{y_1}{y_0} \right)$$



(2.18) と (2.19) から, 7.7,

$$L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$$

$\forall \gamma_2$ :  $\gamma_1, \gamma_2$  を結ぶ任意の曲線

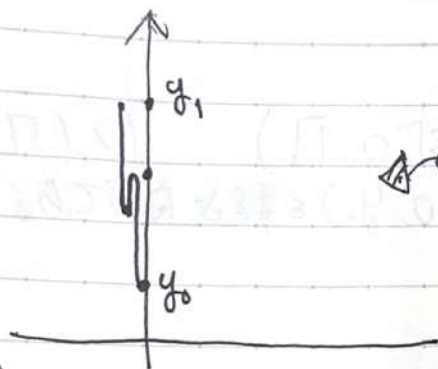
となり, 線分  $\gamma_1$  は  $(0, y_0)$  と  $(0, y_1)$  を結ぶ最短経路である  
更に, (2.19) の計算より,  $(0, y_0)$  と  $(0, y_1)$  を結ぶ  
最短経路は直線に限る

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (y'(t))^2$$

$$(x'(t))^2 = 0 \rightarrow x'(t) = 0$$

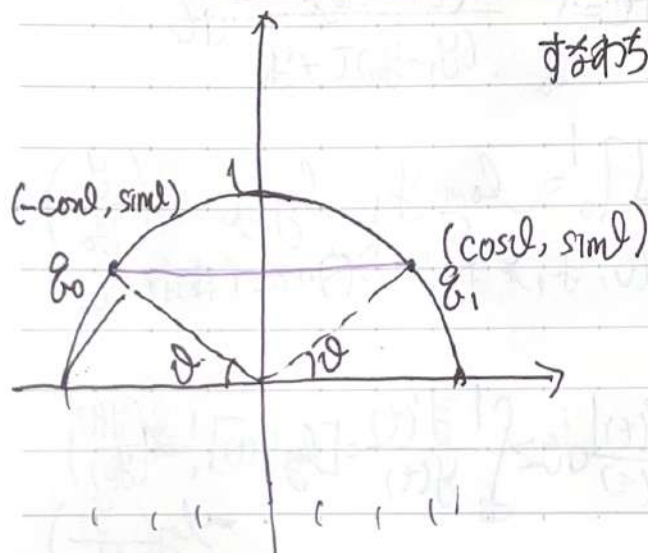
$$x(t) = C \quad (C: \text{const})$$

$$= x(0)$$



$y'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 1]$   
の条件がこゝには要する。  $\square$

次に,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  とし,  $D$  の 2 点  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  と  $(-\cos \alpha, \sin \alpha)$  を結ぶ ~~最短経路~~  $D$  内の曲線  $\gamma_3: [0, 1] \rightarrow D$  と  
 $\gamma_3(t) = ((1-2t)\cos \alpha, \sin \alpha)$



すなわち,  $\gamma_3$  は  $p_0$  と  $p_1$  を結ぶ経路である  
この際, (2.16), (2.21) より,

$$L(\gamma_3) = \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} (1-2t)\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right\| dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2t \cos \alpha}{\sin \alpha} dt = \frac{2}{\tan \alpha}$$

一方,  $(\cos \alpha, \sin \alpha) = g_0 \in (-\cos \alpha, \sin \alpha) = g_1$

結局  $D$  内の曲線  $\gamma_4: [0, 1] \rightarrow D$

$$\gamma_4(t) = (\cos(\alpha + (\pi - 2\alpha)t), \sin(\alpha + (\pi - 2\alpha)t)) \quad (t \in [0, 1])$$

1-2) 定める (Fig 23), i.e

$\gamma_4$  は  $(\cos \alpha, \sin \alpha) \in (-\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{R}^2$  の  
原点を中心として  $\pi$  回転する

この時, (2.16), (2.23) より

$$L(\gamma_4) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\cos^2(\alpha + (\pi - 2\alpha)t) + \sin^2(\alpha + (\pi - 2\alpha)t)}}{\sin(\alpha + (\pi - 2\alpha)t)} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi - 2\alpha}{\sin(\alpha + (\pi - 2\alpha)t)} dt$$

$$\Delta \left[ \begin{aligned} \tan \frac{\eta}{2} &= \frac{\sin \frac{\eta}{2}}{\cos \frac{\eta}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \eta}{\cos^2(\frac{\eta}{2})} = \frac{\sin \eta}{2(\cos \eta + 1)} \\ \tan x' &= \frac{1}{\cos x} \\ \left( \log \tan \left( \frac{\alpha + (\pi - 2\alpha)t}{2} \right) \right)' &= \frac{\cos(\alpha + (\pi - 2\alpha)t)}{\cos^2(\frac{\alpha + (\pi - 2\alpha)t}{2})} \\ &= \frac{\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2(\frac{\alpha + (\pi - 2\alpha)t}{2})} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\frac{\alpha + (\pi - 2\alpha)t}{2})} \end{aligned} \right]$$

$$= \left[ \log \tan \left( \frac{\alpha + (\pi - 2\alpha)t}{2} \right) \right]_0^1 \frac{1}{\sin(\alpha + (\pi - 2\alpha)t)}$$

$$= -2 \log \tan \frac{\alpha}{2}$$

そこで, function  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  defined as

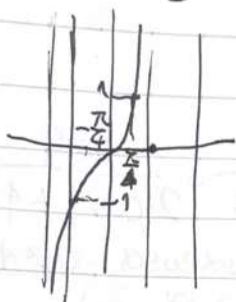
$$f(\alpha) = \underbrace{\frac{1}{\tan \alpha}}_{=\gamma_3} + \underbrace{\log \tan \frac{\alpha}{2}}_{=-\gamma_4} \quad (\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}))$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{\tan \alpha}$$



$$\begin{aligned}
 f'(\vartheta) &= \frac{(\cos \vartheta)' \sin \vartheta - \cos \vartheta (\sin \vartheta)'}{\sin^2 \vartheta} + \frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\vartheta}{2})} \times \frac{1}{2}}{\tan(\frac{\vartheta}{2})} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{-\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{\left[ \sin(\frac{\vartheta}{2}) \cos(\frac{\vartheta}{2}) \right]} \times \frac{1}{2} \sin \vartheta \\
 &= \frac{-1 + (2 \sin \vartheta) \times \frac{1}{2}}{\sin^2 \vartheta} \\
 &= \frac{-1 + \sin \vartheta}{\sin^2 \vartheta} < 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(\vartheta) = 0 + \log e^0 = 0$$

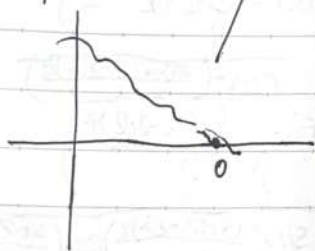


$$f'(\vartheta) > 0 \quad \text{for } \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

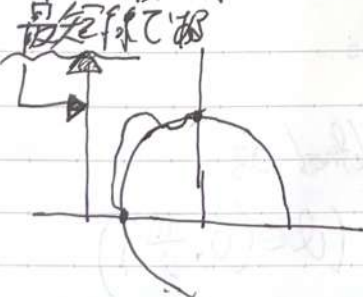
$$(2.22), (2.24) \text{ 対}$$

$$L(\gamma_3) - L(\gamma_4) > 0$$

$$\Rightarrow L(\gamma_4) < L(\gamma_3)$$



つまり、経路  $\gamma_3$  は  $(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$  と  $(-\cos \vartheta, \sin \vartheta)$  を  
結ぶ最短経路ではない。実は  $\gamma_4$  が  $\gamma_0$  と  $\gamma_1$  を結ぶ  
最短経路である



測地線の方程式の  
導出

(cf. p.70 Riemann 幾何学)  
酒井

であ  
る

で  
し

2p

▷ Riem metric は、各点ごとに '正定値' 実対称行列  
と対応させることができる

まず、 $A \in n\text{-dim}$  実対称行列とする。i.e.

$A$  は全ての成分が実数の  $n\text{-dim}$  正方行列であり、  
 $A$  の転置行列である  $A^t$  は  $A$  に等しい、

$$(a_{ij} = a_{ji} \quad i, j \in \{1, \dots, n\})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

$$x^t A x > 0$$

となる時、 $A$  は正定値であるという。

また、 $\mathbb{R}^n$  の基底ベクトル  $e_1, \dots, e_n$  とする。この時

$$e_1 = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-1}), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

すなわち、 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $e_i \in \mathbb{R}^n$  は第  $i$  成分が 1 であり、  
その他の成分は全て 0 である

さて、 $D(\neq \emptyset) : \mathbb{R}^n$  の open set,  $g \in D$  の Riem metric とし、  
 $p \in D$ ,  $v, w \in \mathbb{R}^n$  とする  $v, w$  を成分を用いて、

$$v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$$

と表しておく

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$$

である。よって、内積の線形性より、

$$g_p(v, w) = g_p\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j g_p(e_i, e_j)$$

である

よって、

$$g_{ij}(p) = g_p(e_i, e_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{である}$$

$$g_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j g_{ij}(p) \quad \text{である}$$

236

条件)



また,  $g_{ij}(p)$  は関数  $g_{ij}: D \rightarrow \mathbb{R}$  と定め,  
 $g$  が  $C^\infty$ -級であるとは, 各  $g_{ij}$  が  $C^\infty$ -級であるとは  
 $g_{ij}$  が  $C^\infty$ -級であることである。

更に, 内積  $g_p$  対称性から,

各  $(i, j)$ -成分が  $g_{ij}(p)$  の  $n$ -dim 正対称行列  $(g_{ij}(p))$  は  
 実対称行列であり,

$$(g_{ij}(p) = g_p(e_i, e_j) = g_p(e_j, e_i) = g_{ji}(p))$$

内積  $g_p$  の正値性より,  $(g_{ij}(p))_{n \times n}$  は正定値である

$$g_{ij}(p) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(p) & \cdots & g_{1n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(p) & \cdots & g_{nn}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n g_{1i}(p)x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n g_{ni}(p)x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n g_{1i}(p)x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n g_{ni}(p)x_i \end{pmatrix}$$

$$(x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} g_{11}(p) & \cdots & g_{1n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(p) & \cdots & g_{nn}(p) \end{pmatrix} (x_1 \cdots x_n)^T = \star$$

$$= (x_1 \cdots x_n) \left( \sum_{i=1}^n g_{1i}(p)x_i, \dots, \sum_{i=1}^n g_{ni}(p)x_i \right)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n g_{1i}(p)x_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n g_{ni}(p)x_n^2 \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \left( \sum_{i=1}^n g_{1i}(p)x_i, \dots, \sum_{i=1}^n g_{ni}(p)x_i \right)$$

$$= (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \star \end{pmatrix}$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n g_{1i}(p)x_i x_i + \cdots + \sum_{i=1}^n g_{ni}(p)x_n x_i \right)$$