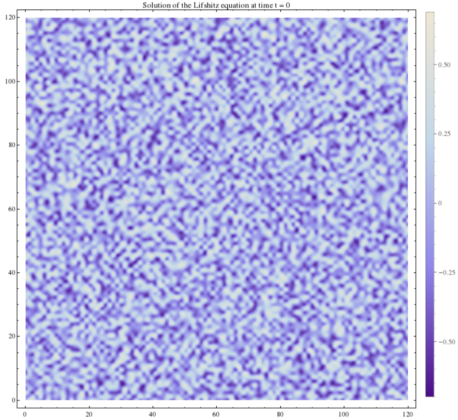
Étude du point de Lifshitz par le groupe de renormalisation non perturbatif.

Nicolas Macé
Responsable de stage : Dominique Mouhanna

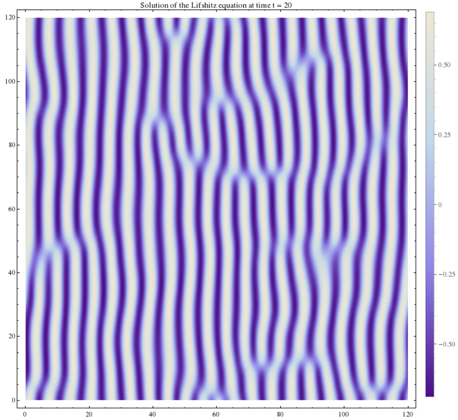
Stage du 13 janvier au 7 mars 2014 au
Laboratoire de physique théorique de la matière condensée (LPTMC)
UMPC

Présentation du modèle de Lifshitz



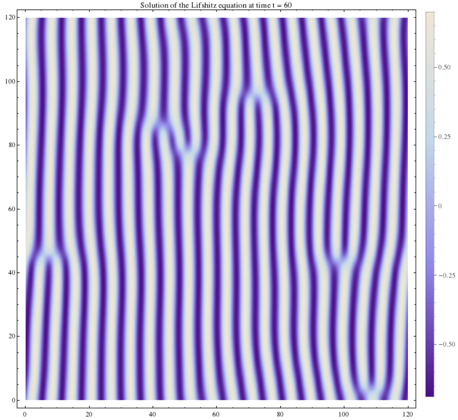
Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.

Présentation du modèle de Lifshitz

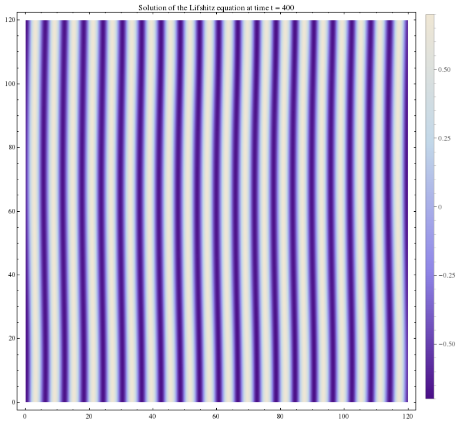


Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.

Présentation du modèle de Lifshitz



Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.



Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.

Intérêt expérimental

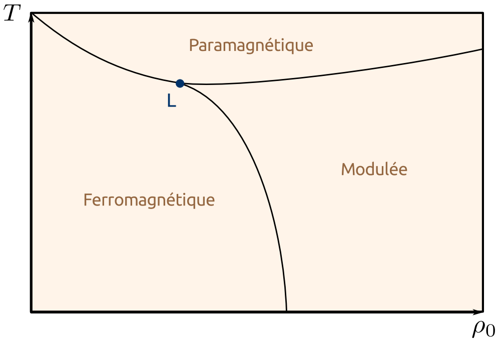
Description de nombreux systèmes : cristaux magnétiques (MnP), ferroélectriques, cristaux organiques (TTF-TCNQ),...

Intérêt théorique

Un exemple de système anisotropique “fort” : les exposants critiques dépendent de la direction.

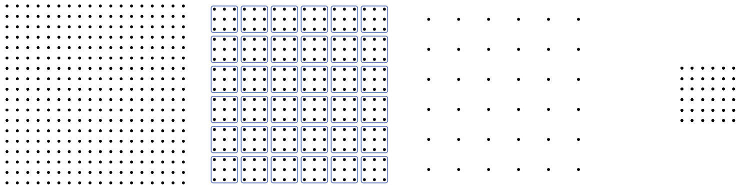
Hamiltonien de Lifshitz

$$H[\phi] = \int_x \frac{1}{2}(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2}(\partial_/\!\!/ \phi)^2 + \frac{\sigma_0}{2}(\partial_/\!\!/^2 \phi)^2 + U(\rho),\ \rho \overset{\text{déf}}{=} \frac{\phi^2}{2}$$



En champ moyen $\rho_0^{\text{Lif}} = 0 \rightarrow$ ajout d'un terme d'ordre $\partial_/\!\!/^4$.

Problème à N corps $\rightarrow$ fluctuations à toutes les échelles
Renormalisation : considérer le problème échelle par échelle.

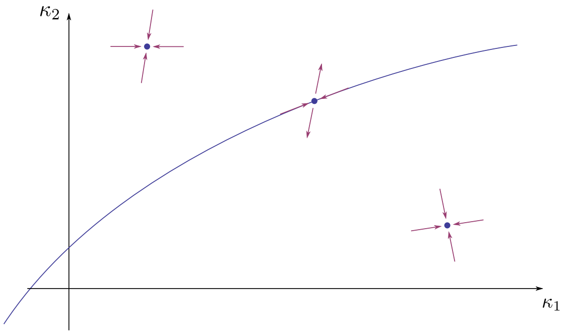


(a) Réseau initial (b) Blocs de spin (c) Moyennage (d) Rescaling

$$H[\phi(x_i)] \rightarrow \tilde{H}[\tilde{\phi}(x_b)] \rightarrow \left.\begin{array}{r} x' = x/S \\ \phi' = S^{\Delta}\phi \end{array}\right\} H'[\phi'(x_i')]$$

$H'[\phi']$: décrit le système à l'échelle $\lambda = 3a$.

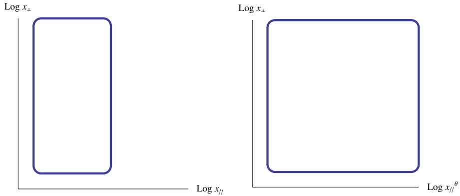
Flots et exposants critiques



$T = T_c$ (et $\rho_0 = \rho_{0c}$) $\rightarrow$ point fixe sur la surface critique

Voisinage du point fixe : lois d'échelle $\rightarrow$ exposants critiques

$$H[\phi] = \sum_{i,\alpha} \kappa_\alpha O_\alpha[\phi(x_i), \nabla\phi(x_i), ...] \rightarrow H'[\phi'] = \sum_{i',\alpha} \kappa'_\alpha O_\alpha[\phi'(x'_i), ...]$$



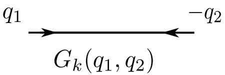
Blocs de spin avant et après introduction de θ.

Directions inéquivalentes $\Longrightarrow$ échelles inéquivalentes $S_{/\!/}$, $S_\perp$.
On introduit θ tel que $S_{/\!/} = S_\perp^\theta$.

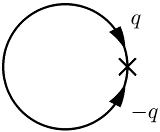
Résultats du champ moyen

$$\theta_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2},\ d_c^> = 4 + \frac{m}{2}$$

Équation de Wetterich : évolution exacte de $\Gamma_k[\phi]$, action effective à l'échelle $k \propto S^{-1}$.



$$\partial_t \bar{\Gamma}_k = \frac{1}{2}$$



$$G_k(q_1, q_2; \phi) = \left(\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k\right)^{-1}_{q_1, q_2} \qquad \partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) G_k(q, -q; \phi)$$

$$H[\phi] = \int_x \frac{1}{2}(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2}(\partial_{/\!/} \phi)^2 + \frac{\sigma_0}{2}(\partial_{/\!/}^2 \phi)^2 + U(\rho)$$

Symétries $\Longrightarrow$ forme générale de l'action effective de Lifshitz :

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x U(\rho) + \frac{1}{2}Z_\perp(\rho)(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{1}{4}Y_\perp(\rho)(\partial_\perp \rho)^2 + \ldots \\ + \frac{1}{2}\rho_0(\rho)(\partial_{/\!/} \phi)^2 + \ldots + \frac{1}{2}Z_{/\!/}(\rho)(\partial_{/\!/}^2 \phi)^2 + \ldots$$

Pour calculer les exposants critiques la structure impulsionnelle importe peu $\rightarrow$ simplifications.

Forme définitive de l'Ansatz :

$$\Gamma_k[\phi_i] = \int_x \frac{Z_\perp}{2}(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2}(\partial_{/\!/} \phi)^2 + \frac{Z_{/\!/}}{2}(\partial_{/\!/}^2 \phi)^2 + U(\rho).$$

Prise en compte de potentiel complet.

Équations de flot du modèle

- $$k\partial_k u_k(\rho) = -d_m u_k(\rho) + (\theta\eta_{/\!/} + d_m - 4\theta)\rho u_k'(\rho) + 8 v_m v_{d-m}\left(l_0^{dm}\left(u_k'(\rho) + 2\rho u_k''(\rho)\right) + (n-1) l_0^{dm}\left(u_k'(\rho)\right)\right)$$
- $$k\partial_k \rho_0 = -\theta\left(2 - \eta_{/\!/}\right)\rho_0 - 64\frac{v_{d-m}v_m}{m}\rho u^{(2)}(\rho)^2 m_{1,2202}$$

Approximation du potentiel local : $\theta \simeq \theta_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2}$, $\eta_{/\!/,\perp} \simeq \eta_{\mathrm{cm}} = 0$.

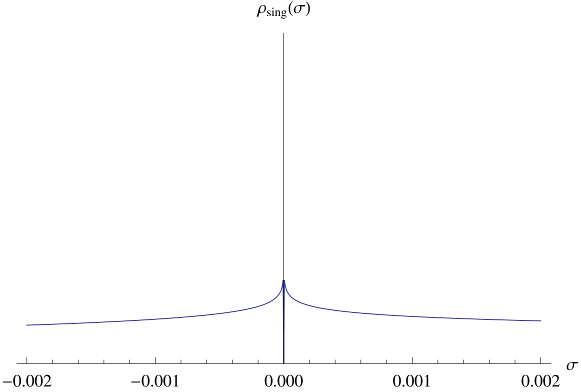
Voisinage du point de Lifshitz $\rightarrow$ résolution des équations de point fixe : $\partial_k u = 0$, $\partial_k \rho_0 = 0$.

Équations de point fixe :

- $0 = u(\rho) - a\rho u'(\rho) + b(\rho_0)\left(\frac{1}{1+\rho_0+u'(\rho)+2\rho u''(\rho)} + \frac{n-1}{1+\rho_0+u'(\rho)}\right)$
- $\rho_0 = 64\frac{v_{d-m}v_m}{m}\rho u^{(2)}(\rho)^2 m_{1,2202}$

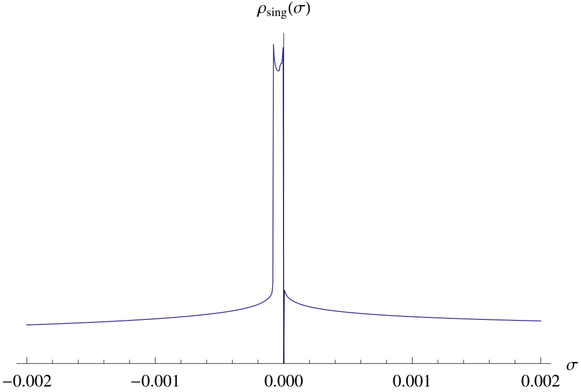
Conditions initiales :
$u'(0) = \sigma$
$u\ (0) = nb(\rho_0)/(1+\sigma)$

Singularité à $\rho_{\text{sing}}(\sigma) < \infty$, sauf si $\sigma = \sigma_c$, température critique.



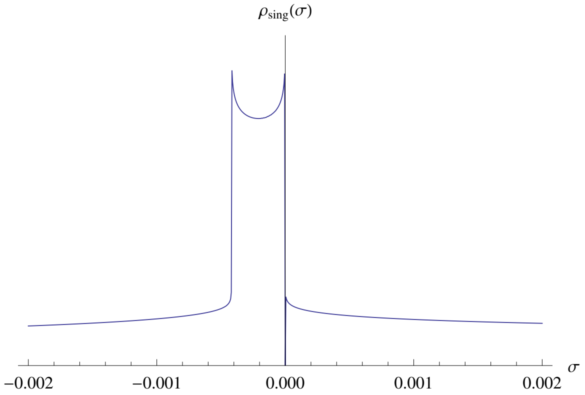
- d=4.500

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.



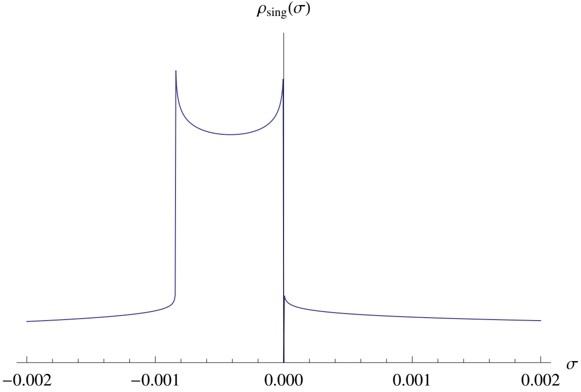
- d=4.499

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.



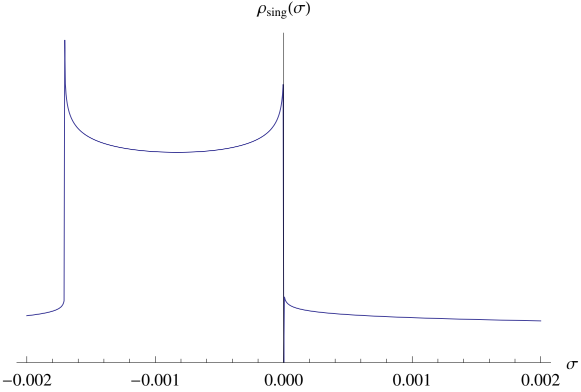
- d=4.495

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.



- d=4.490

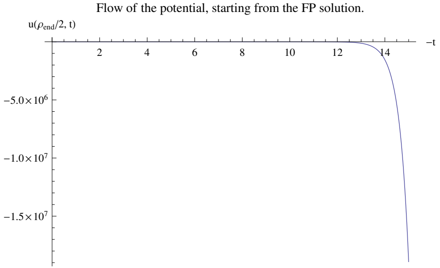
Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.

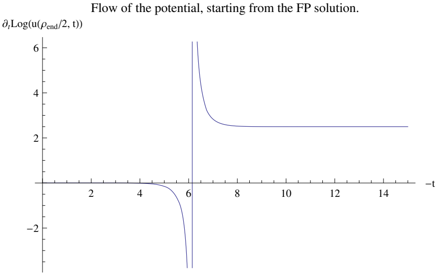


- d=4.480

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.

Flot du potentiel





$$u_t(\rho) = u(\rho) + \delta u_{/\!/}(\rho) e^{t/\nu_{/\!/}} + \delta u_\perp(\rho) e^{t/\nu_\perp}$$

$$t \overset{\text{déf}}{=} \log k$$

	nos résultats	dév. perturbatif	Wilson-Polchinski
$\nu_{/\!/}$	0.399	0.392	0.317
$\nu_\perp$	0.799	0.798	0.634

- Calcul des exposants critiques d'un modèle non trivial, par une méthode originale.
- Prise en compte du potentiel complet.
- Prochain objectif : prise en compte des dimensions anormales.