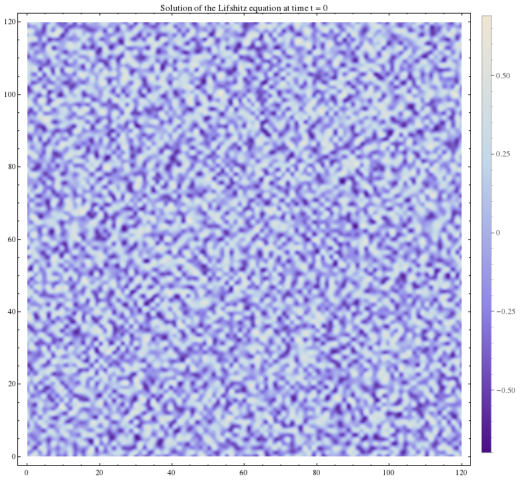
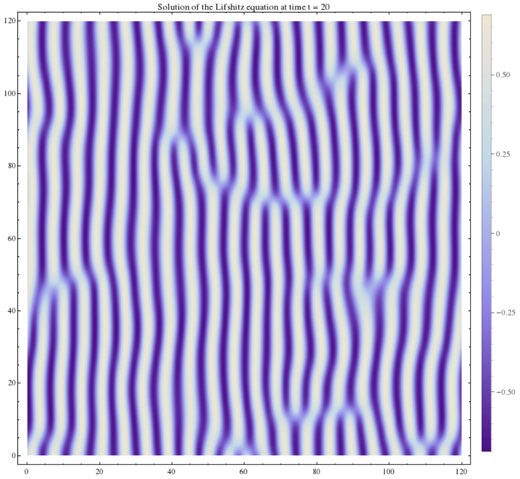
Étude du point de Lifshitz par le groupe de renormalisation.

Nicolas Macé
Responsable de stage : Dominique Mouhanna

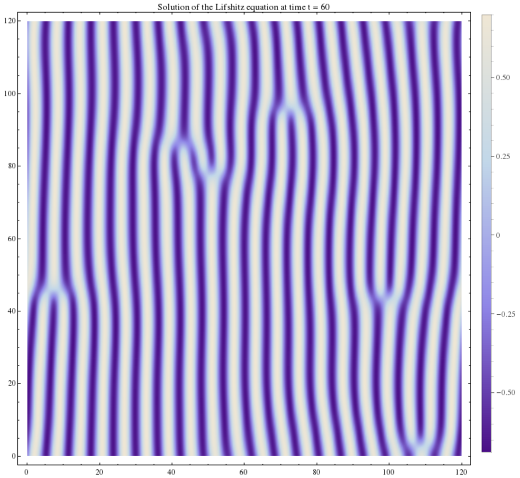
Stage du 13 janvier au 7 mars 2014 au
Laboratoire de physique théorique de la matière condensée (LPTMC)
UMPC



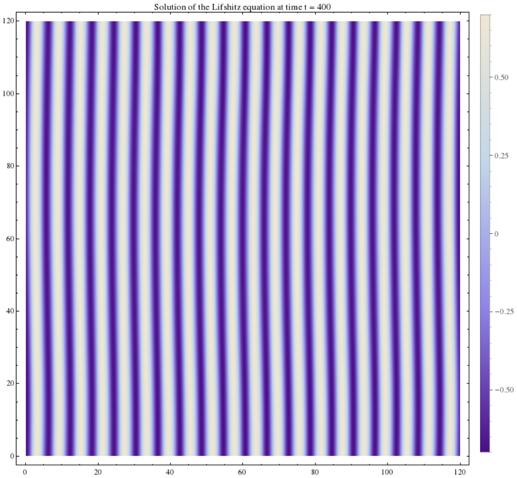
Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.



Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.



Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.



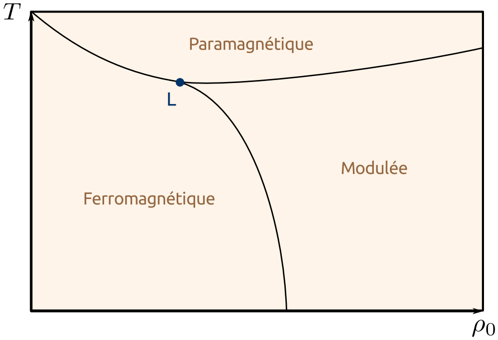
Modèle de Lifshitz : champ $\phi(x)$ à n composantes, anisotrope.
Phase de Lifshitz : $\phi(x)$ périodique dans m directions de l'espace de dimension d.

Intérêt expérimental

Description de nombreux systèmes : cristaux magnétiques, ferroélectriques, mélanges binaires...

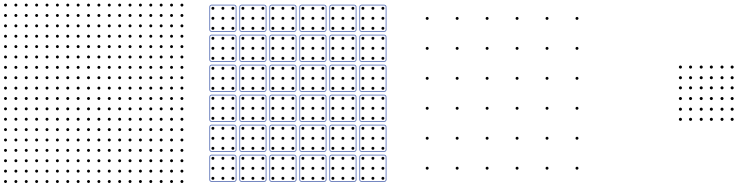
Intérêt théorique

Un exemple de système anisotropique "fort" : les exposants critiques dépendent de la direction.



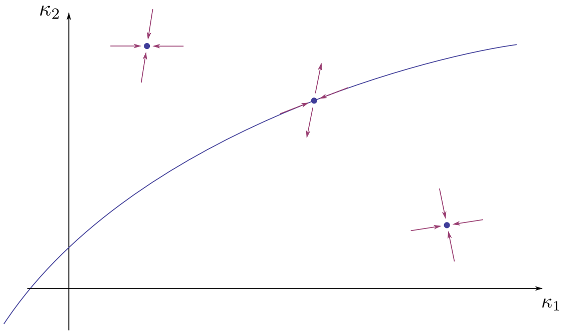
Hamiltonien de Lifshitz

$$H[\phi] = \int_x \frac{1}{2}(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2}(\partial_{/\!/} \phi)^2 + \frac{\sigma_0}{2}(\partial_{/\!/}^2 \phi)^2 + U(\rho),\ \rho \overset{\text{def}}{=} \frac{\phi^2}{2}$$



(a) Réseau initial (b) Blocs de spin (c) Moyennage (d) Rescaling

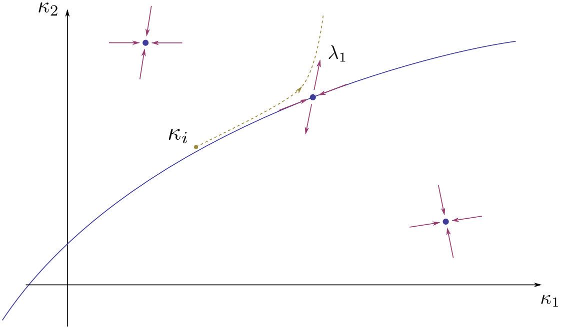
$$H[\phi(x_i)] \rightarrow \tilde{H}[\tilde{\phi}(x_b)] \rightarrow \left.\begin{array}{r} x' = x/S \\ \phi' = S^{\Delta}\phi \end{array}\right\} H_S[\phi'(x_i')]$$



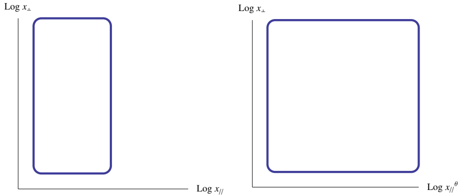
Représentation schématique des flots dans l'espace des couplages.

$$H[\phi] = \sum_{i,\alpha} \kappa_\alpha O_\alpha[\phi(x_i), \nabla\phi(x_i), ...] \to H_S[\phi'] = \sum_{i',\alpha} \kappa'_\alpha O_\alpha[\phi'(x'_i), ...]$$

L'idée de la renormalisation



$$\xi \propto |T - T_c|^{-\nu}$$

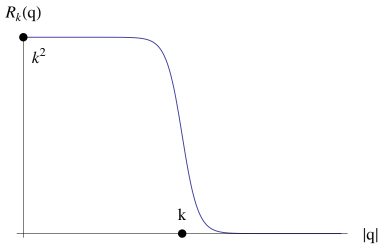


Blocs de spin avant et après introduction de θ.

Directions inéquivalentes $\Longrightarrow$ échelles inéquivalentes $S_{/\!/}$, $S_\perp$.
On introduit θ tel que $S_{/\!/} = S_\perp^\theta$.

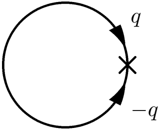
Résultats du champ moyen

$$\theta_{\text{cm}} = \frac{1}{2},\ d_c^> = 4 + \frac{m}{2}$$

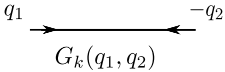


Dépendance en impulsion typique du régulateur $R_k(q)$.

$$\partial_t \bar{\Gamma}_k = \frac{1}{2}$$



$$\partial_t \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) G_k(q, -q)$$



$$G_k(q_1, q_2) = \left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1}_{q_1, q_2}$$

$$H[\phi] = \int_x \frac{1}{2}(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2}(\partial_{/\!/} \phi)^2 + \frac{\sigma_0}{2}(\partial_{/\!/}^2 \phi)^2 + U(\rho)$$

Symétries $\implies$ forme générale de l'action effective de Lifshitz :

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x U(\rho) + \left(\frac{1}{2} Z_\perp(\rho)(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{1}{4} Y_\perp(\rho)(\partial_\perp \rho)^2 + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2}\rho_0(\rho)(\partial_{/\!/} \phi)^2 + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2} Z_{/\!/}(\rho)(\partial_{/\!/}^2 \phi)^2 + \ldots\right)$$

Pour calculer les exposants critiques la structure impulsionnelle importe peu $\rightarrow$ simplifications.

Forme définitive de l'Ansatz :

$$\Gamma_k[\phi_i] = \int_x \frac{Z_\perp}{2}(\partial_\perp \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2}(\partial_{/\!/} \phi)^2 + \frac{Z_{/\!/}}{2}(\partial_{/\!/}^2 \phi)^2 + U(\rho).$$

Équations de flot du modèle

- $$\partial_t u_t(\rho) = -d_m u_t(\rho) + (\theta\eta_{/\!/} + d_m - 4\theta)\rho u_t'(\rho) + 8 v_m v_{d-m} \left(l_0^{dm} \left(u_t'(\rho) + 2\rho u_t''(\rho) \right) + (n-1) l_0^{dm} \left(u_t'(\rho) \right) \right)$$
- $$\partial_t \rho_0 = -\theta \left(2 - \eta_{/\!/}\right) \rho_0 - 64 \frac{v_{d-m} v_m}{m} \rho u^{(2)}(\rho)^2 m_{1,2202}$$
- $$\eta_\perp = 32 v_{d-m} v_m \rho u^{(2)}(\rho)^2 m_{1,2202}$$
- $$\eta_{/\!/} = \eta_\perp \left[m_{1,3100} - \frac{1}{2} k_{1,2100} - \frac{2}{m} \left(6 s_{1,4102} - 6 v_{1,31002} + w_{1,2102} \right) + \frac{2}{m(m+2)} \left(24 t_{1,5104} - 36 z_{1,4104} + 6 u_{1,3104} + 8 y_{1,3104} - x_{1,2104} \right) \right]$$

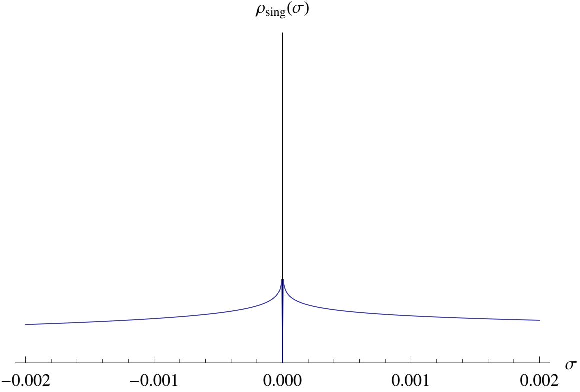
Approximation du potentiel local : $\theta \simeq \theta_{\text{cm}} = \frac{1}{2}$, $\eta_{/\!/,\perp} \simeq \eta_{\text{cm}} = 0$.

Point de Lifshitz décrit par un point fixe → résolution des équations de point fixe

$$0 = u(\rho) - a\rho u'(\rho) + b(\rho_0)\left(\frac{1}{1+\rho_0+u'(\rho)+2\rho u''(\rho)} + \frac{n-1}{1+\rho_0+u'(\rho)}\right)$$
$$u'(0) = \sigma$$
$$u\,(0) = nb(\rho_0)/(1+\sigma)$$

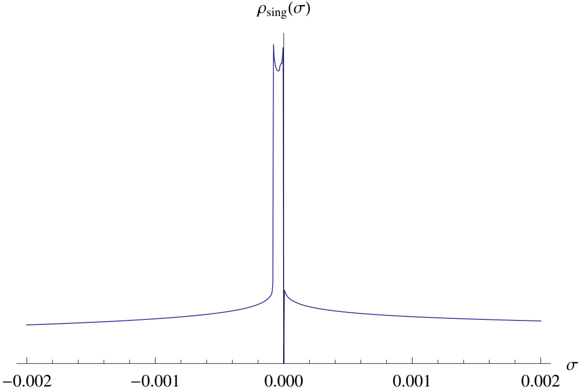
Stratégie de résolution

- Commencer à $d = d_c^>$ $(\sigma^{\mathrm{Lif}} = 0,\ \rho_0^{\mathrm{Lif}} = 0)$.
- $d \to d - \delta d$.
- Trouver σ^{Lif}.
- Trouver ρ_0^{Lif}.
- Revenir à l'étape (2).



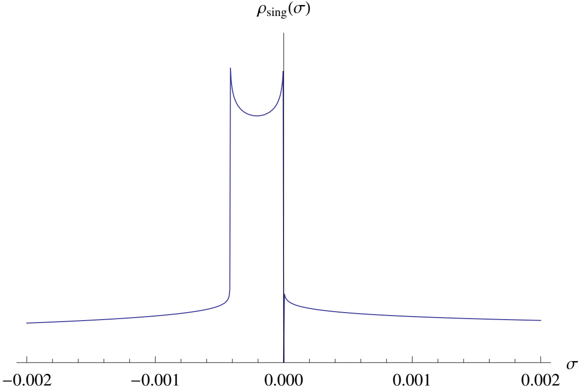
- d=4.500

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.



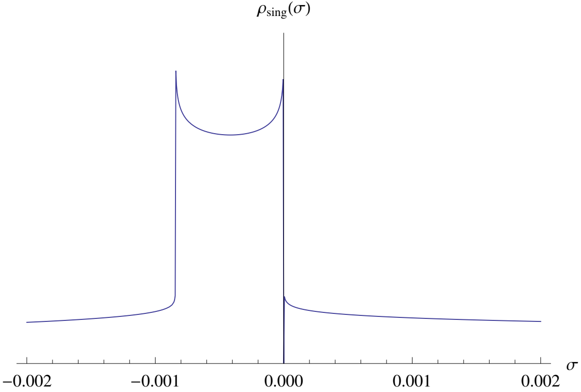
- d=4.499

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.



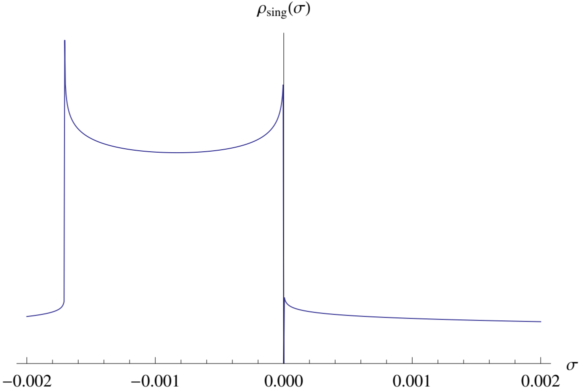
- d=4.495

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.



- d=4.490

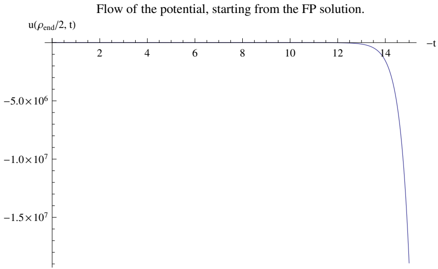
Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.

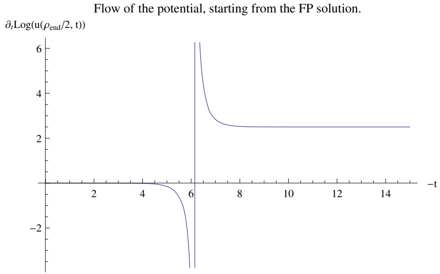


- d=4.480

Position de la singularité ρ_{sing} en fonction de la condition initiale σ.

Flot du potentiel





$$u_t(\rho) = u(\rho) + \delta u_{/\!/}(\rho) e^{t/\nu_{/\!/}} + \delta u_\perp(\rho) e^{t/\nu_\perp}$$

	nos résultats	développement perturbatif	Wilson-Polchinski
$\nu_{/\!/}$	0.399	0.392	0.317
$\nu_\perp$	0.799	0.798	0.634

- Calcul des exposants critiques d'un modèle non trivial, par une méthode originale.
- Prise en compte du potentiel complet.
- Pour aller plus loin : test avec d'autres formes de régulateurs, prise en compte des dimensions critiques.