使用解耦自然正交补的串联多体系统动力学建模

S.K. Saha
Department of Mechanical Engineering,
I.I.T., Delhi, Hauz Khas,
New Delhi, 110 016, India
email: saha@mech.iitd.erent.in

本文推导了在串联运动链（*serial kinematic chain*）中由刚体组成的串联多体系统的受约束动力学方程。首先本文得到了解耦刚体的运动的牛顿-欧拉方程；然后，通过和连接体对应的解耦自然正交补矩阵(*DeNOC Matrices*)，得到运动的欧拉-拉格朗日独立方程。*DeNOC*本质上是已经介绍过的自然正交补（*Natural Orthogonal Complement*，*NOC*）矩阵的解耦形式。其中使用后者（*NOC*）可以分别得到迭代的n阶（n是系统的自由度）逆运动学算法和n^3阶的正运动学算法；而使用前者（*DeNoC*）可以得到上述两个问题的迭代n阶算法。n阶算法不仅运算效率较高，而且还有较好的数值稳定性。特别在正运动学和仿真中，系统的加速度通过动力学方程得到，然后再进行数值积分得到速度和位移。上述算法还通过一个三连杆-三自由度平面机械臂和一个六自由度的*Stanford Arm*进行了演示。

1 定义

参考多体串联系统或者串联机械臂Fig. 1,具有一个固定的"基座"和n个由#1，...，#n编号的运动刚体，由n个一自由度的运动副或称关节（平动或者转动关节）耦合，在图中由1，...，n进行标记。第i个关节将第i个刚体和第(i-1)个刚体耦合。参见第i个刚体运动的Fig. 2，定义下面的量。

$\boldsymbol{t}_i$和$\boldsymbol{n}_i$：第i个关节的六维向量twist和wrench，即：

$$\mathbf{t}_i \equiv \begin{bmatrix} \omega_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{w}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中的ω_i和$\mathbf{v}_i$是第i个关节质心C_i的三维的角速度和线速度，分别在Fig. 2中所示。而$\boldsymbol{n}_i$和$\boldsymbol{f}_i$分别是作用在质心C_i上的力矩和力的三维矢量。

$\mathbf{\Omega}_i$和$\mathbf{M}_i$：第i个刚体的6×6的角速度和质量矩阵，记作

$$\mathbf{\Omega}_i \equiv \begin{bmatrix} \omega_i\times\mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \omega_i\times\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & m_i\mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中的$\omega_i\times\mathbf{1}$是和ω_i关联的3×3的叉乘张量,将其作用于一个三维笛卡尔矢量$\boldsymbol{x}$将得到叉积矢量，即$(\omega_i\times\mathbf{1})\mathbf{x}\equiv\omega_i\times\mathbf{x}$。此外，$\boldsymbol{I}_i$和$m_i$分别是关于质心$C_i$的$3\times3$惯性张量和第i个刚体的质量，$\mathbf{1}$和$\mathbf{O}$是三维的单位矩阵和零矩阵。因此，$\mathbf{1}$和$\mathbf{O}$的维度应该理解为与它们出现的矩阵表达式的维数相匹配的维数。

$\boldsymbol{t}$和$\mathbf{w}$：广义的twist和wrench的6n维的向量，即：

$$\mathbf{t} \equiv \left[\mathbf{t}_1^T,\ldots,\mathbf{t}_n^T\right]^T \quad \text{and} \quad \mathbf{w} \equiv \left[\mathbf{w}_1^T,\ldots,\mathbf{w}_n^T\right]^T \tag{3}$$

其中的$\boldsymbol{t}_i$和$\mathbf{w}_i$在Eq. 1中定义。

$\mathbf{\Omega}$和$\mathbf{M}$：广义的角速度和质量的$6n\times6n$维矩阵，记作：

$$\mathbf{\Omega} \equiv \text{diag}\left[\mathbf{\Omega}_1,\ldots,\mathbf{\Omega}_n\right] \quad \text{and} \quad \mathbf{M} \equiv \text{diag}\left[\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_n\right] \tag{4}$$

其中的$\mathbf{\Omega}_i$和$\mathbf{M}_i$在Eq. 2中定义。

$\dot{\boldsymbol{\theta}}$：n维的关节速率的independent的矢量，记作：

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \left[\dot\theta_1,\ldots,\dot\theta_n\right] \tag{5}$$

其中的θ_i是第i个关节的位移，如Fig. 3中所示。

原文：S. Saha, 'Dynamics of Serial Multibody Systems Using the Decoupled Natural Orthogonal Complement Matrices', Journal of Applied Mechanics-transactions of The Asme - J APPL MECH, vol. 66, Dec. 1999, doi: 10.1115/1.2791809. 本文介绍了使用DeNOC方法进行串联系统动力学建模方法，这里主要翻译2至4章节，介绍DeNOC方法的主要内容。对于译者缺少知识储备的部分保留原文。

2 使用DeNoC进行动力学建模

对于一个如Fig. 1中所示的串联机械系统，使用DeNOC矩阵得到运动的动力学模型的步骤在下面给出：

2.1 计算运动的无约束牛顿-欧拉（Newton-Euler）方程.

a) 由Fig. 2,运动的牛顿欧拉方程为：

$$\boldsymbol{I}_i\dot\omega_i + \omega_i\times\boldsymbol{I}_i\omega_i = \boldsymbol{n}_i \tag{6a}$$

$$m_i\mathbf{v}_i = \mathbf{f}_i \tag{6b}$$

其中$\mathbf{n}_i$和$\mathbf{f}_i$是关于质心C_i和作用于质心C_i的力矩和力。由Eq. 1和Eq. 2的定义，上述的六个标量方程可以写作如下紧凑形式：

$$\mathbf{M}_i\dot{\mathbf{t}}_i + \dot{\mathbf{M}}_i\mathbf{t}_i = \mathbf{w}_i \tag{7}$$

其中6维向量$\dot{\mathbf{t}}_i$和6×6的矩阵$\dot{\mathbf{M}}_i$分别是$\mathbf{t}_i$和$\mathbf{M}_i$关于时间的微分，上述微分量定义为：

$$\dot{\mathbf{t}}_i \equiv \begin{bmatrix} \dot\omega_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{M}}_i \equiv \begin{bmatrix} \omega_i\times\mathbf{I}_i & \mathbf{O} \\ O & \mathbf{O} \end{bmatrix} \tag{8}$$

b) 对于$i=1,\ldots,n$,写出Eq. 7,可以得到整个系统的6n个非耦合标量方程，由下面的形式给出：

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{M}}\mathbf{t} = \mathbf{w} \tag{9}$$

其中的$\dot{\mathbf{t}}$和$\dot{\mathbf{M}}$分别是广义twist和广义质量的微分，即：

$$\dot{\mathbf{t}} \equiv \left[\dot{\mathbf{t}}_1^T,\ldots,\dot{\mathbf{t}}_n^T\right]^T \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{M}} \equiv \text{diag}\left[\dot{\mathbf{M}}_1,\ldots,\dot{\mathbf{M}}_n\right] \tag{10}$$

其中的$\dot{\mathbf{t}}_i$和$\dot{\mathbf{M}}_i$在Eq. 8中定义。

2.2 运动学约束推导.

a) 下面推导由运动副决定的运动约束（如由第i个旋转关节耦合的第#i个和第#j个连杆之间的速度约束），如Fig. 3中所示，运动学约束可以表述为：

$$\omega_i = \omega_j + \dot\theta_i\mathbf{e}_i \tag{11a}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j + \omega_j\times\mathbf{r}_j + \omega_i\times\mathbf{d}_i \tag{11b}$$

上述六个标量方程可以写作以下紧凑形式:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{B}_{ij}\mathbf{t}_j + \mathbf{p}_i\dot{\theta}_i \tag{12}$$

其中的6×6矩阵$\mathbf{B}_{ij}$和六维向量$\mathbf{p}_i$由下面的式子定义:

$$\mathbf{B}_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{ij}\times\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{p}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i\times\mathbf{d}_i \end{bmatrix} \tag{13}$$

$\mathbf{c}_{ij}\times\mathbf{1}$是和向量$\mathbf{c}_{ij}$关联的叉积张量，和Eq. 2中定义的类似。如Fig. 3中所示，向量$\mathbf{c}_{ij}$由$\mathbf{c}_{ij} \equiv -\mathbf{d}_i - \mathbf{r}_j$给出。值得一提的是矩阵$\mathbf{B}_{ij}$和向量$\mathbf{p}_i$有以下理解:

- 对于两个刚性连接的运动物体#i和#j,矩阵$\mathbf{B}_{ij}$将twist从#j迁移到#i,因此矩阵$\mathbf{B}_{ij}$称为*twist*迁移矩阵（*twist propagation matrix*）,它具有以下性质:

$$\mathbf{B}_{ij}\mathbf{B}_{jk} = \mathbf{B}_{ik}, \quad \mathbf{B}_{ii} = \mathbf{1}, \quad \text{and} \quad \mathbf{B}_{ij}^{-1} = \mathbf{B}_{ji} \tag{14}$$

  矩阵$\mathbf{B}_{ij}$即为 [1]中的状态转移矩阵。

- 向量$\mathbf{p}_i$和第i个关节有关。因此，$\mathbf{p}_i$是关节速度迁移矩阵（*joint-rate propagation vector*），依赖于关节的种类。例如，Eq. 13是针对Fig. 3中的旋转关节；对于伸缩关节，向量$\mathbf{p}_i$的表达式为:

$$\mathbf{p}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} \tag{15}$$

  其中的$\mathbf{e}_i$是平行于线运动的单位向量。相对应地，Eq. 12的$\dot{\theta}_i$将意味着线速度。这里不再讨论其他种类的关节，如球形和螺旋关节，因为它们可以被视作伸缩关节和旋转关节的组合。

b) 对$i = 1,\ldots,n$的Eq.12，可以紧凑地写作:

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\dot{\theta}, \quad \text{其中} \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_l\mathbf{N}_d \tag{16}$$

在Eq.16中，$\mathbf{N}$是 [2]中介绍的$6n\times n$的NOC矩阵，其分解形式$\mathbf{N} = \mathbf{N}_l\mathbf{N}_d$在这里被称作解耦自然正交补矩阵(*decoupled natural orthogonal complement*) [3]，其中的$6n\times 6n$的下三角矩阵$\mathbf{N}_l$和$6n\times n$的分块对角阵$\mathbf{N}_d$由下面的式子给出:

$$\mathbf{N}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{n1} & \mathbf{B}_{n2} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \text{and}$$
$$\mathbf{N}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中使用了矩阵$\mathbf{B}_{ij}$的前两个性质。另外，$\mathbf{O}$和$\mathbf{0}$分别是6×6零矩阵和六维零向量。矩阵$\mathbf{N}_l$和$\mathbf{N}_d$是 [4]中的空间算子(*spatial operator*)，它们分别是分别是 "anti-causal"和 "memory-less"的非递归算子。

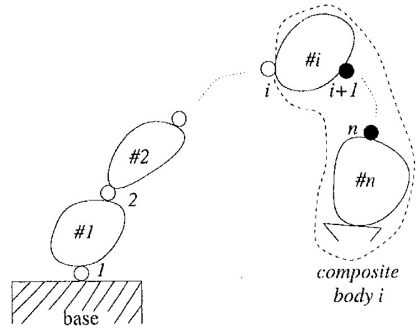

Fig. 1 串联**n**体机械臂示意图

2.3 将运动学约束代入运动的牛顿-欧拉方程**.** 在Eq.9前左乘$\mathbf{N}^T$，即:

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{M}\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{M}}\mathbf{t}) = \mathbf{N}^T\left(\mathbf{w}^E + \mathbf{w}^I\right) \tag{18}$$

其中$\mathbf{w}$由$\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}^E + \mathbf{w}^I$替换——$\mathbf{w}^E$和$\mathbf{w}^I$分别是广义的外部力和内部所受约束力。由于受约束的力矩和力不做功，因此$\mathbf{t}^T\mathbf{w}^I$项被消去，即$\mathbf{t}^T\mathbf{w}^I = \dot{\theta}^T\mathbf{N}^T\mathbf{w}^I = \mathbf{0}$。这说明对于独立的$\dot{\theta}$，$\mathbf{N}^T\mathbf{w}^I = \mathbf{0}$，因此，Eq. 18被重写为:

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{M}\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{M}}\mathbf{t}) = \mathbf{N}^T\mathbf{w}^E \tag{19}$$

注意,为了消除Eq. 9中耦合的牛顿-欧拉方程中的受约束的wrench，像Eq.16中一样将广义twist(即$\mathbf{t}$)写作独立广义速度的线性变换是很重要的。

2.4 将运动学约束代入运动的牛顿-欧拉方程**.** 将$\mathbf{t}$的表达式Eq. 16及其关于时间的微分（即$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{N}\ddot{\theta} + \dot{\mathbf{N}}\dot{\theta}$）代入Eq. 19，得到的结果为下面的受约束的运动的动力学方程:

$$\mathbf{I}\ddot{\theta} + \mathbf{C}\dot{\theta} = \tau \tag{20}$$

其中:

$\mathbf{I} \equiv \mathbf{N}^T\mathbf{M}\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_d^T\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{N}_d$: $n\times n$的广义惯量矩阵(generalized inertia matrix,GIM)

$\mathbf{C} \equiv \mathbf{N}^T(\mathbf{M}\dot{\mathbf{N}} + \dot{\mathbf{M}}\mathbf{N}) \equiv \mathbf{N}_d^T\tilde{\mathbf{M}}'\mathbf{N}_d$: $n\times n$的convective inertia matrix [1]

$\tau \equiv \mathbf{N}^T\mathbf{w}^E \equiv \mathbf{N}_d^T\tilde{\mathbf{w}}^E$: n维的取决于驱动力、重力和耗散的广义力向量

$\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{M}}'$和$\tilde{\mathbf{w}}^E$的表达式和研究系统的复合体有关，并将在之后的章节中推导。注意Eq. 20本质上是从解耦的牛顿-欧拉方程(如Eq. 9)中得到的运动的欧拉-拉格朗日方程。此外，如在 [2]中介绍的那样，自然正交补矩阵$\mathbf{N}$的使用不允许对Eq. 20中的表达式(即矩阵$\mathbf{I}$,$\mathbf{C}$和向量τ)进行进一步的简化。因此在这一步的动力学分析中需要使用计算机算法。或者如在5.1和5.2章中给出的方法，根据在Eq. 16中的解耦自然正交补矩阵，得到矩阵$\mathbf{I}$, $\mathbf{C}\tau$中每一元素的解析的迭代表达式，上述方法的计算复杂度是n阶的（即$\mathcal{O}(n)$），并给出了很多物理理解(如在Eqs. 14, 17, 23b,50之后)。

3 I,C和τ的解析表达式

接下来推导$\mathbf{I}$,$\mathbf{C}$和τ的表达式。这些表达式是统一的反向和正向动力学递推算法的基础。和其他方法不同（如 [5]等），其中的free-body图和牛顿-欧拉方程用于得到反向动力学算法，而欧拉-拉格朗日方程用于得到前向动力学。这里仅使用一套方程，即Eqs. 20, 24,29和30

[1] **C**矩阵对应着科氏力和离心力

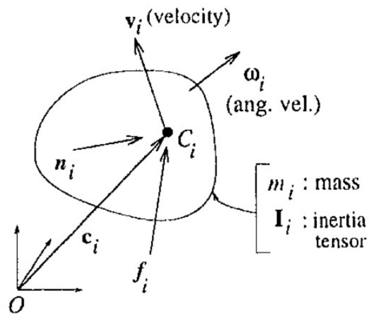

Fig. 2 第i个刚体的**Free-body**图

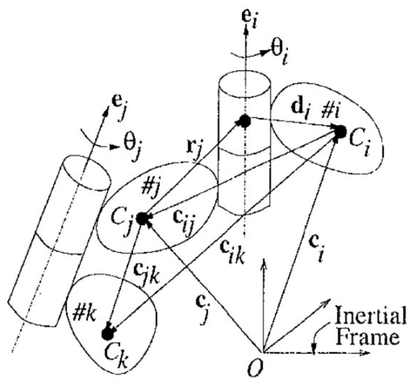

Fig. 3 耦合系统示意图

3.1 I矩阵的推导. 对NOC使用DeNOC的表达式（即$\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_l\mathbf{N}_d$,如在Eq. 17中）代入矩阵$\mathbf{I} \equiv \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{N}$，正如Eq. 20后给出的那样，可以得到

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{N}_d^T\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{N}_d, \quad \text{where} \quad \tilde{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{N}_l^T\mathbf{M}\mathbf{N}_l \tag{21}$$

其中的$6n \times 6n$对称矩阵$\tilde{\mathbf{M}}$由下面的式子给出：

$$\tilde{\mathbf{M}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{B}_{21}^T\tilde{\mathbf{M}}_2 & \cdots & \mathbf{B}_{n1}^T\tilde{\mathbf{M}}_n \\ \tilde{\mathbf{M}}_2\mathbf{B}_{21} & \tilde{\mathbf{M}}_2 & \cdots & \mathbf{B}_{n2}^T\tilde{\mathbf{M}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{M}}_n\mathbf{B}_{n1} & \tilde{\mathbf{M}}_n\mathbf{B}_{n2} & \cdots & \tilde{\mathbf{M}}_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

其中的6×6矩阵$\tilde{\mathbf{M}}_i, i = 1, \ldots, n$,定义为

$$\tilde{\mathbf{M}}_i \equiv \mathbf{M}_i + \sum_{k=i+1}^{n} \mathbf{B}_{ki}^T\mathbf{M}_k\mathbf{B}_{ki} \tag{23a}$$

注意Eq. 23a中对于索引$k = i+1, \ldots, n$的求和，一个利用Eq. 23a对于$i = 1, \ldots, n$求和的算法显然需要n^2阶的计算复杂度。然而，观察Eq. 23a并利用Eq. 14中$\mathbf{B}_{ij}$的前两个性质可以发现上述的求和式可以迭代地计算，即对于$i = n, \ldots, 1$，有：$\sum_{k=i+1}^{n} \mathbf{B}_{ki}^T\mathbf{M}_k\mathbf{B}_{ki} \equiv \mathbf{B}_{i+1,i}^T\tilde{\mathbf{M}}_{i+1}\mathbf{B}_{i+1,i}$，因为在系统中没有第(n+1)个连杆，有$\tilde{\mathbf{M}}_{n+1} \equiv \mathbf{O}$。因此，Eq. 23a具有如下的迭代关系：

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \mathbf{M}_i + \mathbf{B}_{i+1,i}^T\tilde{\mathbf{M}}_{i+1}\mathbf{B}_{i+1,i} \quad \text{where} \quad \tilde{\mathbf{M}}_n \equiv \mathbf{M}_n. \tag{23b}$$

6×6矩阵$\tilde{\mathbf{M}}_i$是复合体i(*composite body*)的质量矩阵，即$\tilde{\mathbf{M}}_i$表征着由（n-i+1）个刚性连接的物体的质量和惯量属性，即刚体#i,...,#n,正如Fig. 1中使用虚线画出的部分那样。Eq. 20中正定矩阵GIM(即I)中元素的表达式由下面的式子给出：
对于$i = 1, \ldots, n$和$j = 1, \ldots, i$

$$i_{ij} = i_{ji} = \mathbf{p}_i^T\tilde{\mathbf{M}}_i\mathbf{B}_{ij}\mathbf{p}_j \tag{24}$$

3.2 C矩阵的推导. 对自然正交补及其时间导数使用DeNOC的表达式，即$\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_l\mathbf{N}_d$和$\dot{\mathbf{N}} \equiv \dot{\mathbf{N}}_l\mathbf{N}_d + \mathbf{N}_l\dot{\mathbf{N}}_d$。如Eq. 20后定义，矩阵$\mathbf{C}\left[\equiv \mathbf{N}^T(\mathbf{M}\mathbf{N} + \mathbf{M}\mathbf{N})\right]$是convective inertia的广义矩阵,它由下面的式子得到：

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{N}_d^T\tilde{\mathbf{M}}'\mathbf{N}_d, \quad \text{where} \quad \tilde{\mathbf{M}}' \equiv \mathbf{N}_l^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{N}}_l + \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{\Omega} + \dot{\tilde{\mathbf{M}}} \tag{25}$$

上式中已经代入了下面的式子

$$\dot{\mathbf{N}}_d \equiv \mathbf{\Omega} \quad \text{and} \quad \dot{\tilde{M}} = \mathbf{N}_l^T\dot{\mathbf{M}}\mathbf{N}_l \tag{26}$$

上式中的$6n \times 6n$矩阵$\mathbf{\Omega}$已经在Eq. 4中定义。在Eq. 25中分块对角阵$\mathbf{M}$[2]和$\mathbf{\Omega}$的乘积计算较为简便。而矩阵A和B的表达式在下面给出：

$$\mathbf{N}_l^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{N}}_l \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{21}^T\tilde{\mathbf{H}}_{21} & \cdots & \mathbf{B}_{n1}^T\tilde{\mathbf{H}}_{n,n-1} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{21} & \cdots & \mathbf{B}_{n2}^T\tilde{\mathbf{H}}_{n,n-1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{H}}_{n-1,1} & \cdots & \mathbf{B}_{n2}^T\tilde{\mathbf{H}}_{n,n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{and}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{M}}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{M}}_1 & \tilde{\mathbf{M}}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{M}}_n \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 & \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_2 & \cdots & \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_n & \tilde{\mathbf{M}}_n & \cdots & \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_n \end{bmatrix}, \tag{27}$$

其中 [3] 的6×6矩阵$\dot{\tilde{\mathbf{M}}}_i$和$\tilde{\mathbf{H}}_{ij}$,$i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, i-1$由下面的式子计算。

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \dot{\mathbf{M}}_i + \tilde{\mathbf{M}}_{i+1} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{H}}_{ij} \equiv \tilde{\mathbf{M}}_i\dot{\mathbf{B}}_{ij} + \mathbf{B}_{i+1,i}^T\tilde{\mathbf{H}}_{i+1,i} \tag{28}$$

其中$\dot{\tilde{\mathbf{M}}}_{n+1} = \dot{\tilde{\mathbf{H}}}_{n+1,n} = \mathbf{O}$，因此$n \times n$矩阵$\mathbf{M}$的元素$c_{ij}$，$i, j = 1, \ldots, n$，为：

$$c_{ij} = \begin{cases} \mathbf{p}_i^t\left(\mathbf{B}_{ji}^T\tilde{\mathbf{M}}_j\mathbf{\Omega}_j + \mathbf{B}_{j+1,i}^T\tilde{\mathbf{H}}_{j+1,j} + \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_j\right)\mathbf{p}_j & \text{if} \quad i \le j \\ \mathbf{p}_i^t\left(\tilde{\mathbf{M}}_i\mathbf{B}_{ij}\mathbf{\Omega}_j + \tilde{\mathbf{H}}_{ij} + \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_i\right)\mathbf{p}_j & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{29}$$

3.3 $\boldsymbol{\tau}$矩阵的推导. 对于广义力和力矩的向量τ, 由Eq. 20后的表达式，对于$i = 1, \ldots, n$

$$\tau_i = \mathbf{p}_i^T\tilde{\mathbf{w}}_i^E, \quad \text{where} \quad \tilde{\mathbf{w}}_i^E = \mathbf{w}_i^E + \mathbf{B}_{i+1,i}^T\tilde{\mathbf{w}}_{i+1}^E \tag{30}$$

其中$\tilde{\mathbf{w}}_i^E$是六维向量，组成了6n维向量$\tilde{\mathbf{w}}^E$，即：

$$\tilde{\mathbf{w}}^E \equiv \left[\left(\tilde{\mathbf{w}}_1^E\right)^T, \ldots, \left(\tilde{\mathbf{w}}_n^E\right)^T\right] \tag{31}$$

注意在Eq. 30中，当末端执行器没有任何外力矩和外力的的时候，$\tilde{\mathbf{w}}_n^E = \mathbf{0}$.

References

[1] Rodriguez, G., 1987, “Kalman filtering, smoothing, and recursive robot arm forward and inverse dynamics,” IEEE Journal on Robotics and Automation, **3**(6), pp. 624–639.

[2] Angeles, J. and Lee, S. K., 1988, “The Formulation of Dynamical Equations of Holonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement,” Journal of Applied Mechanics, **55**(1), pp. 243–244.

[3] Saha, S., 1997, “A decomposition of the manipulator inertia matrix,” IEEE Transactions on Robotics and Automation, **13**(2), pp. 301–304.

[4] Rodriguez, G. and Kreutz-Delgado, K., 1992, “Spatial operator factorization and inversion of the manipulator mass matrix,” IEEE Transactions on Robotics and Automation, **8**(1), pp. 65–76.

[5] Siciliano, B. and Villani, L., 1996, “Adaptive compliant control of robot manipulators,” Control Engineering Practice, **4**(5), pp. 705–712.

[2]在Eq. 25中为$\tilde{\mathbf{M}}$，而在Eq. 22的式子中矩阵$\tilde{\mathbf{M}}$不是分块对角阵

[3]$\dot{\tilde{\mathbf{M}}}$矩阵的表达式可能有作者笔误