数学に関する個人的まとめ

森 勇稀[1)]

更新日：2022 年 7 月 14 日

1） 博士 (工学) mori19931223@gmail.com

目次

第 1 章　はじめに

1.1 この文書で使用する数学

ここでは、本文書で使用している種々の数学的知識について、高校数学までを前提としながら、大学数学を振り返る。この章においては必要な公式を振り返りやすくするために定義および命題[1)]を囲んだ。また、証明はできる限り記述したが、より一般的な証明や拡張についてはそれぞれの分野の教科書を参照されたい。

大学での数学講義は集合論、線形代数、および微分積分学の 3 分野から始まる場合が多い。これらの分野は本文書の内容に対しても非常に重要な基礎であるが、行列の基本変形など本文書の範囲では不要な部分も存在する。ここでは、数学の基礎部分である集合論、線形代数について必要な部分に絞って述べる。次に、本文書で多用するテンソル、ベクトル解析、およびクォータニオンについて述べる。テンソルは線形代数を拡張した概念で、特に材料力学や流体力学などの連続体力学に多く現れる。ベクトル解析はベクトル場の微分積分などを扱う分野で、空間上の流れを扱う流体力学では非常に重要である。クォータニオンは、数学的には複素数を拡張した数の一種であるが、本文書では主に固体粒子や物体の姿勢を示す値として扱われる。

1.2 アインシュタインの縮約記法 (総和規約)

本文書では、いわゆる**アインシュタインの縮約記法**と呼ばれる記法を用いていない。これは、以下のようなルールで記述を行う方法である。

定義： アインシュタインの総和記法 (本文書では使用しない)

添字 $i, j, k, ...$、と、それが取りうる文字 $x, y, z, ...$ に対し、以下のような規約を設ける。

- 同じ項に同じ添字が 1 度現れる場合には、通常の意味である (和を取らない)。
- 同じ項に同じ添字が 2 度現れる場合には、それが取りうる値全ての和をとる。
- 同じ項に同じ添字が 3 度以上現れてはいけない。

この中で重要なのは、2 度現れる文字に対して和を取るという部分であり、この規則によって総

1)　定義から導かれる事実を、数学では定理、命題、補題、系などと呼ぶ。これらは重要性によって呼び分けられており、最も重要なものを「定理」、それに準じるものを「命題」などと呼ぶようである。本章は基本的な事実ばかりを述べており、「定理」と呼ぶほどではないと考えたため、基本的に「命題」に統一している。

和記号 $\sum$ の記述を削減できる。この記法を用いれば、例えば 3 次元でのベクトルの内積は以下の数式における最右辺のような形で記述できる。

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = \sum_{i=x,y,z}^{3} v_i w_i = v_i w_i \tag{1.1}$$

この記法は、特にテンソル演算を多用する連続体力学や量子力学などの分野では非常に有効な記法である。もちろん、流体力学も連続体力学の範疇であるため、このような記法を用いて記述している文書は非常に多い。しかし、剛体の力学においてはほとんど使用しないという点、および同じ添字であっても 2 度登場するか否かで意味が変わるため、初学者にとっては読みにくいと考えられるという点から、本文書ではこの記法を採用していない。項を足し合わせる際には、Σ を明記するか、または全ての項を書き下している。

第 2 章　集合と写像

2.1 集合論

2.1.1　集合

数学において**集合** (Set) は最も基礎的な概念とも言われており、様々な概念が集合を元に記述される。集合は直感的に分かる通り「何かの集まり」である[1)]。集合の要素は数である必要はないし、含まれる要素の個数も有限でなくてもよい。まず、集合における、高校数学までの基礎的な用語の定義を以下にまとめる。

定義： 集合の用語

- 集合 A に集合 B が含まれることを「集合 B は集合 A の**部分集合**である」と言い、$B \subseteq A$ と書く。
- 集合 A の部分集合 B が A 自体を含まない場合、「集合 B は集合 A の**真部分集合**である」と言い、$B \subset A$ と書く。
- 要素 a が集合 A に含まれている場合、「a は集合 A の**要素**である」と言い、$a \in A$ と書く。
- 要素を一つも持たない集合を**空集合**と呼び、$\varnothing$ などと表す。

ただし、真部分集合と部分集合を同一に扱っている場合もあり、部分集合を $B \subset A$ と書いてある場合もある。包含関係を示す記号には逆方向 ($\ni$, $\supseteq$,$\supset$) なども存在するが意味はこれらは文字を入れ替えただけである。

集合を数式によって表現する方法は二通りあり、まず 1 つ目は要素を列挙する方法である。この方法では、1 から 6 までの自然数を要素に持つ集合 A は以下のように表現される。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{2.1}$$

集合自体には順序という概念が存在しないため、要素の順番を入れ替えて記述してもよい。もう一

1)　これは直感的ではあるが、数学的にはかなり曖昧な定義である。実は先述のような直感的な集合の定義では矛盾が生じる場合があることが知られている (ラッセルのパラドックス)。これを回避するため、集合という概念そのものを厳密に定義する試みが 100 年ほど前に公理的集合論という数学上の分野で行われた。その結果、上述の矛盾を引き起こすようなものは「集合ではない」として排除され、クラス (類) という新たな概念に分類される。また、公理的集合論では選択公理と呼ばれる公理が存在し、これを採用する数学理論、採用しない数学理論が展開される。このように集合論の公理的構成は興味深いものではあるが、本文書で扱う部分においては前述の直感的な理解で問題ない。

つの方法は、集合に入る要素の条件を記述する方法で、同じ集合は例えば以下のように表すことができる。

$$A = \{x|x\text{は整数かつ}1 \le x \le 6\} \tag{2.2}$$

ここで、仕切り記号「|」の前が要素を示し、後が条件を示す。ただ、上記の方法では日本語が含まれているため、もう少しスマートに記述し

$$A = \{x|x \in \mathbb{Z} \text{ and } 1 \le x \le 6\} \tag{2.3}$$

とも記述できる。ここで、$\mathbb{Z}$ は自然数全体の集合を示す。更に、「x が整数 (もしくは実数) である」という条件は頻繁に用いるため、以下のように仕切り記号の前においてもよいことになっている。

$$A = \{x \in \mathbb{Z}|1 \le x \le 6\} \tag{2.4}$$

集合という概念は広く、様々な集合を考えることができるが、特に理工学において重要な集合は前述した自然数全体の集合 $\mathbb{Z}$、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ および複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ である。

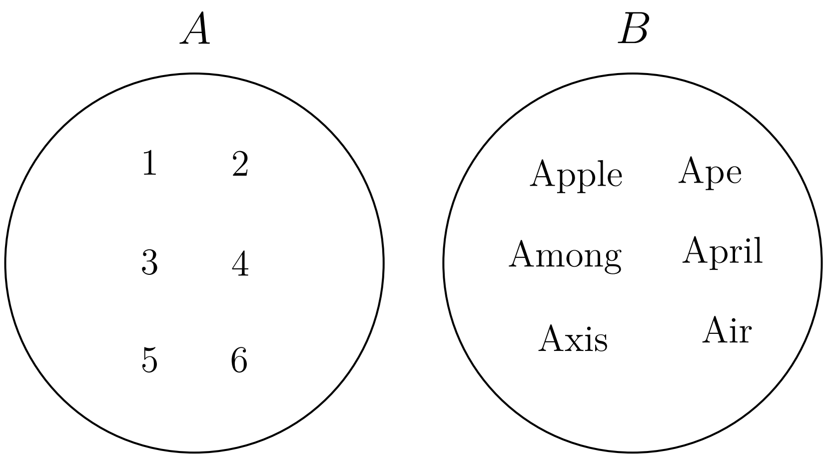

図 2.1　集合の例。集合は要素が数である必要もないし、要素が無限にあってもよい。

2.1.2　集合の操作

集合に何らかの操作を行い、新たな集合を作ることはしばしば用いられる操作である。**和集合** (union) および**共通部分**[2] (intersection) は、高校までの数学にあるとおりである。

定義： 和集合・共通部分

集合 A と集合 B の少なくともどちらか一方に含まれる要素の集合を**和集合**と呼び、$A \cup B$ と書く。

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ or } x \in B\} \tag{2.5}$$

2)　共通部分を積集合と呼ばないのは、後述する直積集合との混乱を避けるためである。intersection の訳として、交叉集合などとも呼ばれる。

同様に、集合 A と集合 B のどちらにも含まれる要素の集合を**共通部分**と呼び、$A \cap B$ と書く。

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\} \tag{2.6}$$

$\cup$ は cup、$\cap$ は cap と呼ばれ、英語で韻を踏んでいる。例えば $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ に対しては

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\} \tag{2.7}$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \tag{2.8}$$

となる。これらの操作では、自然数の集合と自然数の集合からは同じく自然数の集合が作られるが、更に「自然数のペア」を作ったり、「集合の集合」を作ったりする操作も考えられる。**冪集合** (power set) は、端的に言えば集合 A から要素を取り出す「取り出し方」全ての集合である。

定義： 冪集合

集合 A の**冪集合**とは集合 A の部分集合全ての集合であり、2^A などと書く。

$$2^A = \{S | S \subseteq A\} \tag{2.9}$$

冪集合においては、A が要素数 n の有限集合の場合に冪集合の要素数が 2^n になる。例えば $A = \{1, 2, 3\}$ の場合、

$$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \tag{2.10}$$

のようになる。これに対し、**直積集合** (Cartesian set) は、集合同士の「ペア」の集合を示す。

定義： 直積集合

集合 A と集合 B の**直積集合**とは A と B の要素ペアの集合であり、$A \times B$ と表す。

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ and } b \in B\} \tag{2.11}$$

直積集合は、例えば $A = \{1, 2, 3\}$、$B = \{2, 4, 6\}$ の場合

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\} \tag{2.12}$$

などのように書き下せる。しかし、このような有限集合間の直積集合より、実数集合 $\mathbb{R}$ の直積集合の方が物理的に重要である。なぜなら、3 次元空間上の点 (x, y, z) は、3 つの実数のペアとして

表せるため、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ という集合に含まれるためである。このような同じ集合同士の直積集合はよく現れるため、$\mathbb{R}^3$ などと省略して記述する。

2.2 写像

2.2.1 写像と関数

写像 (map) は、集合の要素を結びつける対応関係のことである。写像という概念を説明する方法はいくつかあるが、ここでは「写像とは**関数** (function) のことである」と説明する。例えば、中学校や高校で学ぶ関数

$$f(x) = x^2 \tag{2.13}$$

を考える。中学校や高校では明記していないが、一般的にこの関数に与える x は実数であり、その場合得られる値 $f(x)$ も実数である。これはつまり、関数 $f(x)$ は実数と実数を結びつける対応関係と考えることもできるということを示している。このように関数を写像として捉える時、以下のように表現する。

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

これは、「f は実数の集合 $\mathbb{R}$ から実数の集合 $\mathbb{R}$ への写像で、元 x が x^2 に写される」という意味である。

定義： 写像

集合 A から集合 B への**写像** f は、以下のように表される。

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \tag{2.15}$$

ここで、A を**定義域**、B を**終域**と呼ぶ。また、$f(x)$ のことを**値**と言い、$f(x)$ がとり得る値全ての集合を**値域**と呼ぶ。

定義域および値域は、高校数学までに関数に対して学んだ用語と同一の意味である。ここで注意すべきなのは、値域と終域が同一であるとは限らないことである。例えば、上記の写像 $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像であり、その定義域と終域は $\mathbb{R}$ であるが、値域は $\mathbb{R}$ ではない。なぜなら得られる値は非負であるため、値域は実数全体のうち非負の部分だけになるためである。この場合、値域は $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ のように与えられ、$\mathbb{R}^+$ などのように表現される。

2.2.2 全射・単射

写像はその性質によって全射、単射などと呼ばれる。まず、**単射** (injective) とは像が重ならないこと、すなわち得られる値に対してその元となった値を必ず 1 つだけ求められるというものである。

定義： 単射

定義域を A、値域を B としたとき、写像 f が A に含まれる任意の値 $a_1, a_2 (a_1 \neq a_2)$ に対して

$$f(a_1) \neq f(a_2) \tag{2.16}$$

であるとき、f が**単射**であると言う。

この定義は直感的でないかもしれないが、後に全射とともに図で説明する。これに対し、**全射** (surjective) の定義は単純で、値域が終域と同一であることを示す。

定義： 全射

定義域を A、値域を B とした写像 f に対し、その値域が終域と一致する時、すなわち、任意の B の要素 b に対し、

$$f(a) = b \tag{2.17}$$

となる A の要素 a が存在する時、f が**全射**であると言う。

全射と単射は重要な性質であるが、対になっているものではない。すなわち、全射であり単射でもある写像というものもあるし、全射でも単射でもない写像もある。このうち、全射かつ単射である写像は集合論において非常に重要であるため、**全単射** (bijective) という名前で呼ばれる。単射・全射について、自然数の集合および実数関数の例を、以下の表に示す。

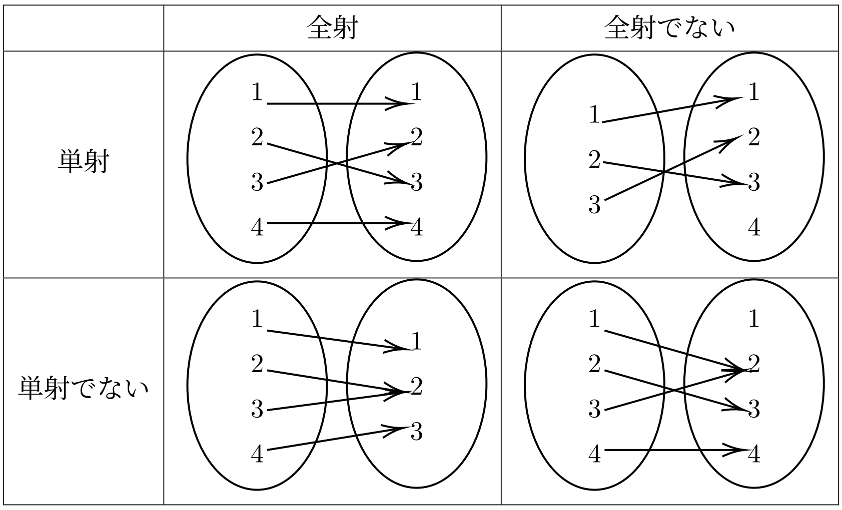

図 2.2　数個の自然数による集合における全射・単射の例

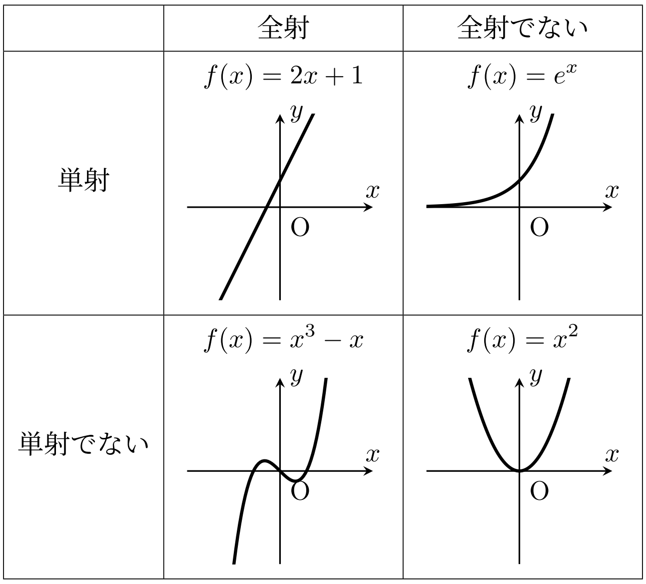

図 2.3　実数関数における単射・全射の例。ここでは定義域および終域を $\mathbb{R}$ とした。このような $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の実数関数の場合、横に引いた線と関数の交点数が 0 の部分があるなら全射ではなく、2 つ以上の部分があるなら単射ではない。

2.2.3　多変数関数・多価関数

以下では実数の集合 $\mathbb{R}$ 内での写像 (関数) を主に扱う。ここまでの関数は 1 つの実数を受け取り 1 つの実数を出す関数であった。これに対して、本文書では受け取る値や出す値が 2 つ以上存在する場合もある。**多変数関数**は受け取る値 (変数) が複数ある関数である。

定義： 多変数関数

n 個の変数 $x_1, x_2, ...x_n$ を受け取る関数 ($n \geq 2$) を**多変数関数**と呼ぶ。この時、「n 個の実数を受け取り 1 つの実数を返す関数 f」を

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{2.18}$$

のように表現し、f の持つ変数を明示する際には

$$f(x_1, x_2, ...x_n) \tag{2.19}$$

と表記する。

このような多変数関数は、物理的にはよく現れる。例えば 3 次元空間上の各点におけるなんらかの値を $f(x, y, z)$ などと記述することは非常に多い。このような場合、ベクトル $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$ を用いて関数を $f(\boldsymbol{v})$ と記述することもできる (ベクトルについては後述する)。逆に、複数の値を返す関数もあり、これは**多価関数**と呼ばれる。多価関数は、厳密には関数ではないと考えられる場合もある。なぜなら変数の値を決めても返す値が 1 つに定まらないためである。ただし、これらの値をペアとして (直積集合として) 並べることで、関数のように表現できる。

定義： 多価関数

n 個の数 $x_1, x_2, ...x_n$ を返す関数 ($n \geq 2$) を**多価関数**と呼ぶ。この関数 f は

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \tag{2.20}$$

のように表現し、f の返す値を並べて

$$f(x) = (y_1, y_2, ..., y_n) \tag{2.21}$$

などと表記することもできる。

多価関数は、例えば三角関数の逆関数

$$f(x) = \sin^{-1} x \tag{2.22}$$

などが考えられる。これは、$x = 0$ の際に

$$f(0) = (... - 2\pi, \pi, 0, \pi, 2\pi, ...) \tag{2.23}$$

となるように、無限個の値をとる多価関数である。ただ、本文書で扱う内容としてはこのような形の多価関数よりも、ベクトル値を返すという意味での多価関数が重要である。例えば、3 次元空間上の点 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ における速度を表す関数 $f(\boldsymbol{p})$ は速度ベクトル $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ を返す多変数・多価

関数である。すなわち、$f(\boldsymbol{p})$ 自体がベクトルであるので、これを表すために f を太字にして以下のようにも表すことができる。

定義： 3 次元空間上の多変数・多価関数

3 次元空間上のベクトル $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ を変数とし、ベクトル $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ を返す関数は、3 変数、3 価の関数で、

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) &= \boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{2.24}$$

のように表すことができる。これは 1 つのベクトルを変数に、1 つのベクトルを返す関数とも考えられる。

このようなベクトルを得たり、ベクトルを返したりする関数は物理学上非常によく現れる。特に本文書ではテンソルの導入に使用する。

第 3 章　ベクトル

3.1 ベクトルとは何か

3.1.1　ベクトルと座標系、普遍性

物理学では観測値の普遍性が重要である。例えば A さんが目の前にある鉄塊の温度を計測した時、その温度が隣りにいる B さんが計測した温度と異なっていてはいけない。同様に、A さんが右を向いて計測した温度と左を向いて計測した温度が異なっていてもいけない。数学的には、これは「座標系によって値が変化しない」と表現される。このように、座標系によって値が変化しないもののうち、温度のように大きさのみを持つものを**スカラー** (scalar) と呼ぶ。さて、温度と同様に、速度についても考える。速度も、物理的な対象であるのだから、座標系によって変化しないべきだろう。このような、座標系によって値が変化しないもののうち、方向を持ったものを**ベクトル**と呼ぶ。ただし、ベクトルはスカラーと異なり、向きを持っているため、いくつか考慮しなければならない問題がある。以下のように A さんと B さんが別の立場からある物体の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を観察した場合を考えよう。 このとき、A さんはこの速度を「左から右には 4 m/s、前から奥に

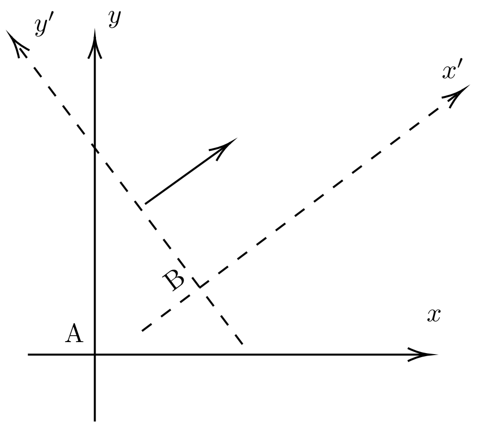

図 3.1　異なる座標でのベクトル表現

は 3 m/s で移動していた」などと表現するだろう。もちろん、明示的に x, y 軸を導入するなら、(4 m/s, 3 m/s) のように表現されるだろう。これに対し、B さんは、「左から右に 5 m/s で移動していた」もしくは (5 m/s, 0 m/s) と表現するだろう。したがって、同じ速度を観測しているのに、(4 m/s, 3 m/s) と (5 m/s, 0 m/s) という、異なる表現が出てきてしまう。これを、「座標系によらないもの」として表現するにはどうすればよいだろうか？実際には、このベクトルを値で表現するに

は、「A さんの座標系で $(4\ \mathrm{m/s}, 3\ \mathrm{m/s})$ と表される量」や「B さんの座標系で $(5\ \mathrm{m/s}, 0\ \mathrm{m/s})$ と表される量」と記述するしかない。より数学的に表現するには、A さんの座標系を指定する量として基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y \tag{3.1}$$

などと表現する。これを、我々は A さんの座標系で考えていることを前提として

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

とも記述しているのである。このように、ベクトルは座標系によって変化しない量として定義されるが、その中身を記述するには何らかの座標系を用いて記述するしか無い量でもある。本文書でも多くの場合成分表記によってベクトルを表現するが、座標系には常に注意を払わなければならない。また、本文書では基本的に A さんや B さんのように直交する長さ 1 のベクトルで構成される座標系 (デカルト座標系) を用いる場合がほとんどであるが、基底は直交していなくても良いし、長さが 1 でなくてもよい。

3.2 空間ベクトル

線形代数[1)]においては、高校数学までに学んだ[2)] ここでは**ベクトル** (vector) という概念を抽象化していく。まず、高校数学までに学んだ平面上、もしくは空間上のベクトルは、以下のように数を並べることによって「矢印」に相当するものを表現できるものであった。

定義： 空間ベクトル

3 次元空間において、x, y, z 軸をとる。この空間上のベクトル $\boldsymbol{v}$ は x, y, z 方向の成分を並べ、

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と表す事ができる。

1) 『線形』と『線型』のどちらが正しいか、という議論はしばしば巻き起こる。斎藤正彦先生の『線型代数入門』『線型代数学』に代表されるように、数学分野では『線型』が使用される場合が多い。ただ、近年ではどの分野でも『線形』が使用される場合が増加しているようである。本文書では『線形』に統一することとした。

2) 余談ではあるが、2021 年現在の指導要領では、行列は高校数学の範囲外となっている。更に、2022 年度以降の指導要領ではベクトルおよび複素数平面が数学 C に移行することになっている。そのため、ここでは「理系の」と限定した。

3.2.1 数ベクトルと空間ベクトル

上述のように、3 次元空間上のベクトルは、3 つの数字を並べることで表現できるのであった。しかし、実際にはこのような「数を並べたもの」と「空間上の矢印」は同じ概念ではないはずである。数学においては、「数を並べたもの」を**数ベクトル**と呼び、3 つの数字を並べる際には 3 次元数ベクトルと呼ぶ。これに対し、物理上では 3 次元空間内の矢印を**空間ベクトル**[3)] もしくは**幾何ベクトル**と呼ぶ。このように、空間ベクトルと (3 次元) 数ベクトルは元々別の概念であるが、物理学上では空間ベクトルを 3 次元数ベクトルを用いて表現することで、様々な理論を効率よく展開することが可能になっている。以下では空間ベクトルと 3 次元数ベクトルをある程度同一視して議論を行う。ここではまず空間ベクトルについて議論し、その後 n 次元数ベクトル、そして数ベクトルでないベクトルに話題を広げる。

3.2.2 空間ベクトルの和と定数倍

高校数学で学ぶように、空間ベクトルの和や定数倍は成分を用いて以下のように計算できる。これは何かから導かれる公式というよりも、ベクトルが満たすべき定義である。実際の定義はベクトル空間を用いて行われるため、後に厳密な定義を行うが、ここではベクトルの和や定数倍がベクトルの定義の一部であるとだけ考えて話を進める。

定義： 空間ベクトルの和・定数倍

ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$、およびスカラー a に対して、ベクトルの定数倍および和は以下のようになる。

$$a\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} av_x \\ av_y \\ av_z \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

3.2.3 空間ベクトルの内積

空間ベクトルの**内積** (inner product) については高校数学で扱っている内容である。

3）　空間ベクトルとベクトル空間は全く別の概念であることに注意したい。

定義： 空間ベクトルの内積

空間ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して、**内積**は $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ と表され、

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \tag{3.6}$$

と計算される。

線形代数においては内積とはある種の法則を満たす演算全ての総称であり、上述の算出はその特殊な 1 つ (標準内積) であるとされるが、ここではこの標準内積のことを内積と呼ぶ。これは、2 つの空間ベクトルから 1 つのスカラーを得る演算であるとも言え、$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の多変数関数 $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ であるとも捉えることができる。以下、高校数学で学ぶ内積の性質を列挙する。証明は高校の教科書にあるため、ここでは省略する。

命題： 内積の性質

空間ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$、およびスカラー k に対して、以下の等式が成立する。

- 内積の交換法則

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} \tag{3.7}$$

- 内積の分配法則

$$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2) \tag{3.8}$$

$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{w}) \tag{3.9}$$

- 内積の定数倍

$$k(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) = (k\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot (k\boldsymbol{w}) \tag{3.10}$$

ベクトルの内積は**双線形性**と呼ばれる重要な性質を持っている[4)]。これは、片方のベクトルが固定された時にもう片方に対して線形性、すなわち定数倍と分配法則が成立することを示している。

命題： 内積の双線形性

ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$、およびスカラー a, b に対して、以下の等式が成立する。

$$(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{w} = a(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{w}) \tag{3.11}$$

4) これは実数上での話であり、複素数まで範囲を拡張すると、内積は半双線形性という性質を持つことになる。これは、片方のベクトルに対しては係数が複素共役になるというものである。

$$\boldsymbol{v} \cdot (a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2) = a(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1) + b(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2) \tag{3.12}$$

【証明】 内積の分配法則と定数倍を用いれば直ちに求められる。 □

この関係は当たり前のことを言っているだけのように思えるが、重要な性質でもある。先程述べたように、内積を多変数関数 $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ と書き表せば、双線形性は以下のように表される。

$$\begin{aligned} f(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) &= af(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + bf(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) \\ f(\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2) &= af(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + bf(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

また、内積を用いることで、ベクトルの長さを定義できる。

定義： ベクトルの長さ (ノルム)

空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さは**ノルム** (norm)(特に限定する場合は L2 ノルム) と呼ばれ、$\|\boldsymbol{v}\|$ と表される。$\|\boldsymbol{v}\|$ は以下のように定義される。

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.14}$$

これはベクトルの長さ (大きさ) の定義であるが、これが 3 次元空間での 2 点間の距離と同一であることがわかる。

3.2.4 空間ベクトルのクロス積

ベクトルの内積に加え、ベクトルの**クロス積** (cross product, vector product) もよく用いられる。ベクトルのクロス積は空間ベクトルの場合にのみ定義される演算であり、一般の n 次元数ベクトルや、数ベクトルでないベクトルに対して拡張された際には**外積** (exterior product[5]) と呼ばれる。そのため、空間ベクトルを主に扱う高校数学の発展的内容などではこれをベクトルの外積とも呼ぶが、外積はより広い概念を指すため、注意が必要である。

定義： ベクトルのクロス積

空間ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して、**クロス積**は $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ と表され、

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_x w_z - v_z w_x \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

と計算される。

5) 外積を outer product と呼ぶ場合もあるが、これは日本限定の用法であり、通常英語で outer product と言うと後述する直積のことを指す。

すなわち、クロス積は 2 つの空間ベクトルから 1 つの空間ベクトルを作る演算である。クロス積の性質を列挙する。

命題： クロス積の性質

ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$、およびスカラー k に対して、以下の等式が成立する。

- クロス積の交代法則

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v} \tag{3.16}$$

- クロス積の分配法則

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_2) \tag{3.17}$$

$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{w}) \tag{3.18}$$

- クロス積の定数倍

$$k(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (k\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \times (k\boldsymbol{w}) \tag{3.19}$$

分配法則と定数倍の式が内積と同様であるから、クロス積も内積と同様に双線形性を持っている。

命題： クロス積の双線形性

$$\begin{aligned} (a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{w} &= a(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{v} \times (a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2) &= a(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_1) + b(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

クロス積の定義から分かるように、同じベクトル同士のクロス積を考えると 0 になる。

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.21}$$

3.2.5　ベクトル三重積

3 つのベクトルに対し、内積とクロス積を組み合わせた**三重積** (triple product) は様々な分野で利用されるため、特別に名前が付けられている。ベクトル三重積は内積・クロス積の組み合わせによって 2 種類存在し、それぞれベクトル三重積、スカラー三重積と呼ばれる[6)]。

スカラー三重積 (scalar triple product) は、その名の通り 3 つのベクトルからスカラーを得る積である。

6)　括弧の位置と 2 つの積がそれぞれ 2 通りあるため、全部で 8 通り考えられるが、そのうち計算にならないもの (スカラーとベクトルのクロス積など) を除くと、2 通りがスカラー三重積、2 通りがベクトル三重積になる。

定義： スカラー三重積

三次元数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、**スカラー三重積** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ は、

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \tag{3.22}$$

である。

スカラー三重積は、3 つのベクトルについてベクトル成分を並べた行列の行列式としても計算できる。

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \tag{3.23}$$

スカラー三重積は、文字の入れ替えについて以下のような性質を持つ。

命題： スカラー三重積の性質

スカラー三重積は、ベクトルを円環状に入れ替える操作に対して値が変化しない。

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \tag{3.24}$$

上述以外の入れ替え、すなわち 3 つのベクトルのうち 2 つを入れ替える操作については値の符号が反転する。

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \tag{3.25}$$

【証明】 行列の基本変換と行列式の関係性を使用すれば簡単に求められる。まず、行列式の値は 2 列の交換に対して符号が反転することから、後者が証明される。前者は更に 2 つの列を交換することで変換できるため、符号が打ち消し合い、行列式の値が変化しない。また、煩雑ではあるが各成分を直接計算しても証明できる。 □

これに対し、**ベクトル三重積** (vector triple product) は、3 つのベクトルから 1 つのベクトルを生成する演算である。

定義： ベクトル三重積

三次元数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して**ベクトル三重積**は、

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) \\ a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x) \\ a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

と表される。

ベクトル三重積については、あまり一般的に使用されている記号はない。ベクトル三重積には bac-cab(バック-キャブ) 公式と呼ばれる以下の性質がある。

命題： bac-cab(バック-キャブ) 公式

三次元数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対する**ベクトル三重積**は、以下のようにクロス積を用いない形に変形できる。

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{3.27}$$

【証明】 成分ごとに計算を行う。x 成分について、

$$(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))|_x = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) = a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z \tag{3.28}$$

と、

$$(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}))|_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z \tag{3.29}$$

の成分が一致する。y, z 成分についても同様である。 □

上述の性質を用いることでベクトル三重積におけるベクトル交換に対する性質が得られる。

命題： スカラー三重積のヤコビ恒等式

三次元数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対する**ベクトル三重積**は、

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \tag{3.30}$$

を満たす。

【証明】 bac-cab 公式を用いると、

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) = 0 \tag{3.31}$$

□

上記のように 3 項を円環状に交換した和が 0 となる式を一般的に**ヤコビの恒等式**と呼ぶ。また、この式を変形すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= -\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= -\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

となり、左辺が 0 でないことから、ベクトル三重積については結合則が成立しないこと、すなわち

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \tag{3.33}$$

ということが分かる。

3.2.6　テンソル積 (直積)

2 つのベクトルの積としては内積・外積の他に**テンソル積** (直積, outer product) も存在する。これは 2 つのベクトルから行列を作る演算と考えられる。

定義： テンソル積

2 つの三次元数ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対し、**テンソル積** $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ は

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_x w_x & v_x w_y & v_x w_z \\ v_y w_x & v_y w_y & v_y w_z \\ v_z w_x & v_z w_y & v_z w_z \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

である。

一般のベクトルに対してはテンソル積と直積は同じ概念ではなく、テンソル積のうち特殊なものを直積と呼ぶ。しかし、本文書では同じものを指すと考えてよい。一般のベクトルに対しての議論をここに付記しておくと、実際にはテンソル積はベクトル空間同士の積を示す。すなわち、ベクトル空間 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ に対してテンソル積によってベクトル空間 $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ は基底 $B_v = \{\boldsymbol{e}_{v1}, \boldsymbol{e}_{v2} \ldots, \}, B_w = \{\boldsymbol{e}_{w1}, \boldsymbol{e}_{w2} \ldots, \}$ 同士の直積 $B_v \times B_w$ によって生成される空間である。このことからベクトル空間 $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{e}_{v1} \otimes \boldsymbol{e}_{w1}$ などの基底を持つ空間である。このことから、$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ の元 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対するテンソル積を定義できて、これも同様の基底を持つ。このことから分かるように、三次元数ベクトル空間の元同士のテンソル積は 9 つの基底を持つため、行列のように書く場合が多い。また、このように元同士のテンソル積は集合における直積のように各成分の組み合わせを取って 9 つの値を得ることから、集合論からの類推で直積と呼ばれる[7)]実際には、テンソル積のうち基底間に何らかの規則を設けたものが内積、およびクロス積であると考えたほうが統一的である。

3.2.7　三次元数ベクトルに対する積の微分公式

ここまでに紹介した内積、クロス積、そしてテンソル積について、各成分に対し、積の微分公式を使用することによって、積の微分公式が成立することが簡単に示される。

7） ただ、英語では集合の直積は direct product なのに対し、テンソル積は outer product であり、direct product とは呼ばないようである。これは日本語への翻訳時の何らかの誤植なのかもしれない？

命題： 三次元数ベクトルに対する積の微分

ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して、以下の式が成立する。

$$\frac{d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \tag{3.35}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \tag{3.36}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\otimes\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\otimes\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \tag{3.37}$$

【証明】 内積については、

$$\begin{aligned}\frac{d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})}{dt} &= \frac{d}{dt}(v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)\\ &= w_x\frac{dv_x}{dt} + v_x\frac{dw_x}{dt} + w_y\frac{dv_y}{dt} + v_y\frac{dw_y}{dt} + w_z\frac{dv_z}{dt} + v_z\frac{dw_z}{dt}\\ &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\end{aligned} \tag{3.38}$$

より、成立する。クロス積については、その x 成分について、

$$\begin{aligned}\left.\frac{d(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})}{dt}\right|_x &= \frac{d}{dt}(v_y w_z - v_z w_y)\\ &= v_y\frac{dw_z}{dt} + w_z\frac{dv_y}{dt} - v_z\frac{dw_y}{dt} - w_y\frac{dv_z}{dt}\\ &= v_y\left.\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right|_z + w_z\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_y - v_z\left.\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right|_y - w_y\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_z\\ &= \left.\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)\right|_x\end{aligned} \tag{3.39}$$

より成立する。y, z 成分も同様である。テンソル積については、$x\otimes y$ 成分について考えると、

$$\begin{aligned}\left.\frac{d(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})}{dt}\right|_{x\otimes y} &= \frac{d}{dt}(v_x w_y)\\ &= v_x\frac{dw_y}{dt} + w_y\frac{dv_x}{dt}\\ &= v_x\left.\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right|_y + w_y\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_x\\ &= \left.\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\otimes\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\otimes\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)\right|_{x\otimes y}\end{aligned} \tag{3.40}$$

より成立する。他の 8 成分についても同様である。 □

3.3 n 次元数ベクトル

上述のように空間ベクトルの定義と種々の演算について述べたが、そのほとんどは n 次元数ベクトルにも適用できる。4 次元以上の数ベクトルはグラフィカルには想像しずらいものになってしまうが、その構造は何も変わらない。

定義： n 次元数ベクトル

n 次元数ベクトル $\boldsymbol{v}$ は n つの数を並べ、

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

と表される。

3.3.1 数ベクトル空間

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表したように、ベクトル全体の集合というものも考えられる。3 次元数ベクトルは上述したように 3 つの成分によって表現することができる。前述したように数のペアは直積集合を用いて表されるため、全ての (実)3 次元数ベクトルは、$\mathbb{R}^3$ の要素として考えることができる。よって、3 次元数ベクトル全体の集合は $\mathbb{R}^3$ と表され、これを 3 次元**数ベクトル空間**と呼ぶ。ベクトルを空間上の矢印として考え、その拡張として n 次元空間での矢印を考えると、数ベクトルのみがベクトルであるように感じられるが、数学においてはさらに矢印としてのベクトルから線形性という概念のみを抽出し、抽象化される。そのため、数ベクトル空間とはベクトル空間の一種となる。詳しいベクトル空間の定義等については後述する。

3.4 ベクトル空間

3.4.1 ベクトル空間の定義

前述したように、数学における**ベクトル空間**とは、線形性を持つものの集合である。以下にベクトル空間の定義を示す。

定義： ベクトル空間

ベクトル空間 (vector space) とは、以下の法則を満たす 2 つの演算 (定数倍および和) が定義された集合 V である。
定数倍演算 $(\cdot)$ はスカラーと V 上のベクトルの演算であり、V 上のベクトルを返す。すなわち、

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \tag{3.42}$$

である。以降では定数倍演算については演算子を表示せず、$k\boldsymbol{a}$ などと表示する。
和演算 $(+)$ はベクトルとベクトルの演算で、ベクトルを返す。

$$+ : V \times V \to V \tag{3.43}$$

また、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を V 上の元とし、k, l を $\mathbb{R}$ 上の元、すなわち実数とする。

- 和の結合法則
$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{3.44}$$
- 和の交換法則
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{3.45}$$
- ゼロ元の存在
V 上の元に $\boldsymbol{0}$ が存在して、すべての $\boldsymbol{a}$ に対して、
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{3.46}$$
を満たす。
- 逆元の存在
各々の $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a}'$ が存在し、
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{3.47}$$
を満たす。
- 定数倍の分配法則
$$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} \tag{3.48}$$
- 定数の分配法則
$$(k + l)(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a} \tag{3.49}$$
- 定数倍とスカラー乗法の関係
$$k(l\boldsymbol{a}) = (kl)(\boldsymbol{a}) \tag{3.50}$$
- 単位元による定数倍

実数の単位元 1 による定数倍が

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{3.51}$$

を満たす。

以上の定義を満たす集合 V がベクトル空間である。そして、ベクトル空間である集合の元 $\boldsymbol{a} \in V$ がベクトルと呼ばれる。すなわち、数学的な定義ではベクトル空間というものが先に存在し、その元としてベクトルが定義される。

定数倍演算と和演算については、演算の定義の中でそれぞれが集合内で閉じていること (定数倍演算や和演算の結果が必ず集合内に入ること) を記述したが、これらを満たすべき条件として独立して書くことで、10 個の条件とした記述も存在する。

これまで扱ってきた数ベクトル空間が上述の定義を満たすことは簡単に確認できる。数ベクトルの場合にはゼロ元はゼロベクトル $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$ であり、逆元は $-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2, \dots)$ である。

3.4.2 ベクトル空間の例

さて、ベクトル空間の定義には成分表示などが存在しない。つまり、数ベクトルのように実数を並べて表示するもの以外のベクトル空間が考えられる。その例を以下に示す。

ベクトル空間の例として、多項式の集合がある。ここではその部分空間である二次以下の多項式の集合を考える。二次以下の多項式の集合 V_2 は以下のように定義される

$$V = \{a_1x^2 + a_2x + a_3 | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{3.52}$$

この集合がベクトル空間であることを確認しよう。以下では、

$$\boldsymbol{a} = a_1x^2 + a_2x + a_3 \tag{3.53a}$$

$$\boldsymbol{b} = b_1x^2 + b_2x + b_3 \tag{3.53b}$$

$$\boldsymbol{c} = c_1x^2 + c_2x + c_3 \tag{3.53c}$$

とする。また、加算演算を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3) \tag{3.54}$$

と定義し、定数倍演算を

$$k\boldsymbol{a} = k(a_1)x^2 + (ka_2)x + (ka_3) \tag{3.55}$$

と定義する。

- 和の結合法則

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (a_1 + b_1 + c_1)x^2 + (a_2 + b_2 + c_2)x + (a_3 + b_3 + c_3) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{3.56}$$

- 和の交換法則

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)x^2+(a_2+b_2)x+(a_3+b_3)=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{3.57}$$

- ゼロ元の存在

$$\boldsymbol{0}=0x^2+0x+0=0 \tag{3.58}$$

　は V 上の元であり、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=(a_1+0)x^2+(a_2+0)x+(a_3+0)=\boldsymbol{a} \tag{3.59}$$

　を満たすため、この集合のゼロ元である。

- 逆元の存在

　$\boldsymbol{a}$ に対して、

$$\boldsymbol{a}'=(-a_1)x^2+(-a_2)x+(-a_3) \tag{3.60}$$

　は V 上の元で、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}=(a_1-a_1)x^2+(a_2-a_2)x+(a_3-a_3)=\boldsymbol{0} \tag{3.61}$$

　を満たすため、$\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{a}$ の逆元である。

- 定数倍の分配法則

$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k(a_1+b_1)x^2+k(a_2+b_2)x+k(a_3+b_3)=\\(ka_1+kb_1)x^2+(ka_2+kb_2)x+(ka_3+kb_3)=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{3.62}$$

- 定数の分配法則

$$\begin{aligned}(k+l)(\boldsymbol{a})=(k+l)(a_1)x^2+(k+l)(a_2)x+(k+l)(a_3)=\\(ka_1)x^2+(ka_2)x+(ka_3)+(la_1)x^2+(la_2)x+(la_3)=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}\end{aligned} \tag{3.63}$$

- 定数倍とスカラー乗法の関係

$$k(l\boldsymbol{a})=(kl)(a_1)x^2+(kl)(a_2)x+(kl)(a_3)=(kl)(\boldsymbol{a}) \tag{3.64}$$

- 定数倍の単位元の存在

$$1\boldsymbol{a}=(1)(a_1)x^2+(1)(a_2)x+(1)(a_3)=\boldsymbol{a} \tag{3.65}$$

以上より、ベクトル空間の定義をすべて満たすので、この集合 V はベクトル空間であり、この観点から見れば二次多項式 $a_1x^2+a_2x+a_3$ はベクトルである。

　このように、数ベクトル空間以外のベクトル空間も存在する。ただ、上述の確認作業でわかる通り、これは各次数の係数を並べた $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ という数ベクトルで完全に表すことができるため、係数列を数ベクトル空間として扱えば数ベクトル空間と同等の扱いができる。実は、次元が n であるベクトルは n 次の同一視できる (同型である) ということが知られている。一般のベクトル空間における次元とは何か、同型とは何かということについては後述する。

3.4.3 ベクトル空間の特徴

ここでは、ベクトル空間の特徴について整理する。まず、数ベクトルでは当然であるが、ベクトル空間の定義にはないいくつかの性質を導出する。一つ目は、ゼロ元と逆元の一意性である。

命題： ゼロ元、逆元の一意性

ベクトル空間 V におけるゼロ元はただ 1 つだけ存在する。また、V 上のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対する逆元はただ 1 つだけ存在する。

【証明】 まず、ゼロ元について考える。ゼロ元が 2 つ存在すると仮定し、それぞれ $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ とすると、ゼロ元の定義より

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 \tag{3.66}$$

$$\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 \tag{3.67}$$

が成立する。よって、

$$\mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1 \tag{3.68}$$

となり仮定に反するため、ゼロ元はただ 1 つだけ存在する。

次に、逆元について考える。あるベクトル $\boldsymbol{a}$ に対する逆元が 2 つ存在すると仮定し、それぞれ $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}'_1 &= \boldsymbol{a}'_1 + \mathbf{0} \\ &= \boldsymbol{a}'_1 + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}'_2) \\ &= (\boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}'_2 \\ &= \mathbf{0} + \boldsymbol{a}'_2 \\ &= \boldsymbol{a}'_2 \end{aligned} \tag{3.69}$$

が成立する。よって、

$$\boldsymbol{a}'_1 = \boldsymbol{a}'_1 \tag{3.70}$$

となり仮定に反するため、逆元はただ 1 つだけ存在する。 □

次に、ゼロ元とゼロの定数倍について以下の性質を証明する。

命題： ゼロの定数倍

任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し、

$$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \tag{3.71}$$

【証明】 $0\boldsymbol{a}$ に対する逆元を $\boldsymbol{b}$ とすると、

$$\begin{aligned} 0\boldsymbol{a} &= 0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} \\ &= 0\boldsymbol{a} + (0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= 0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{3.72}$$

となるため、証明された。 □

これを用いれば逆元が元のベクトルの -1 倍であることが証明できる。

命題： 逆元の性質

任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し、逆元 $\boldsymbol{a}'$ は

$$\boldsymbol{a}' = (-1)\boldsymbol{a} \tag{3.73}$$

である。

【証明】 あるベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} &= (1 + (-1))\boldsymbol{a} \\ &= 0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{3.74}$$

が成立する。よって、$(-1)\boldsymbol{a}$ は逆元の成立を満たす。また逆元はただ一つだけしか存在しないため、

$$\boldsymbol{a}' = (-1)\boldsymbol{a} \tag{3.75}$$

である。 □

よって、以降では逆元のことは $(-1)\boldsymbol{a}$ もしくは $-\boldsymbol{a}$ と記す。

以上の性質は、数ベクトルを扱ってきた人にとってはまったく当たり前のことを、成分などを使わずにもう一度証明しただけであるので、記憶する必要などはないものである。また、これらの議論は群論と呼ばれる数学分野での議論をベクトル空間に適用したものであり、さらに抽象化した議論も可能である。

3.4.4　部分ベクトル空間

先ほどあげた二次多項式の例を考える。

$$V = \{a_1x^2 + a_2x + a_3 | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{3.76}$$

このとき、$a_1 = 0$ と制限すれば、一次多項式の集合

$$V_1 = \{a_2x + a_3 | a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{3.77}$$

ができる。逆に、二次多項式の集合 V は、三次多項式のうち特別なものであることもわかる。このように、ある集合の中に内包される集合を部分集合と呼ぶということは、集合論で扱った。この部分集合がベクトル空間であるとき、これを**部分ベクトル空間**と呼ぶ。

定義： 部分ベクトル空間

ベクトル空間 V に対し、その部分集合 W が同じ演算[a]によりベクトル空間となるとき、W を V の**部分ベクトル空間** (vector subspace) や**部分線形空間**と呼ぶ。

[a] ここまで定数倍や加算は自明な演算子のみを扱っていたため気にしていなかったが、ベクトル空間には複数の定数倍演算や加算演算が考えられる場合がある。そのような場合、元の集合と部分集合で違う演算が使用される場合には、部分空間とは呼ばない。

W については、もちろん定義通りベクトル空間であることを確認してもいいが、実際には V がベクトル空間であることを利用すると、W の中で和と定数倍が閉じていること確認すればベクトル空間であることを確認できる。

命題： 部分ベクトル空間の条件

ベクトル空間 V の部分集合 W を考える。

- ゼロ元の含有 $\mathbf{0}$ が W に含まれる。
- 和に対して閉じている
  任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ に対し、
  $$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W \tag{3.78}$$
  が成立する。
- 定数倍について閉じている
  任意の $\boldsymbol{v} \in W$ と $k \in \mathbb{R}$ に対し、
  $$k\boldsymbol{a} \in W \tag{3.79}$$
  が成立する。

の 3 つが成立することと、W が部分ベクトル空間であることは同値である。

【証明】 W が部分ベクトル空間であるときを考える。

- ゼロ元の含有
  W はベクトル空間であるからゼロ元が存在しており、またゼロ元は V にただ一つしか存在しないのだから、V のゼロ元が W にも含まれており、 $\mathbf{0}$ が W に含まれる。
- 和、定数倍に対して閉じている

W は部分ベクトル空間だから、V に対する定数倍演算、和演算と同じ演算子によってベクトル空間となっている、したがって、演算の定義から和と定数倍が

$$\cdot : \mathbb{R} \times W \to W \tag{3.80}$$

$$+ : W \times W \to W \tag{3.81}$$

を満たす。よって、それぞれの演算について閉じている。

よって、W が V 部分ベクトル空間であれば、上記の 3 条件を満たす。

つぎに、逆を考える。すなわち、上記の 3 条件を満たすとき、W が部分ベクトル空間であることを確認する。W は V の部分集合であるから、あとは W がベクトル空間であることを確認すればよい。

まず、演算子については、下 2 つの条件から定数倍と和について閉じているため、

$$\cdot : \mathbb{R} \times W \to W \tag{3.82}$$

$$+ : W \times W \to W \tag{3.83}$$

となるため、問題ない。

以降で、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を W 上の元とし、k, l を $\mathbb{R}$ 上の元、すなわち実数とする。このとき、ベクトル空間の 8 条件を確認する。

- 和の結合法則・交換法則和について閉じているのだから、$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ なども W 内の元となる。また、V 内で和の結合法則や交換法則が成立しているのだから、W 内においても和の結合法則や交換法則が成立する。

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{3.84}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{3.85}$$

- ゼロ元の存在

  これは上の 3 条件のうち、第 1 条件そのものであるから、当然成立する。

- 逆元の存在

  V 上では逆元が存在するから、W 上のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対する逆元 $\boldsymbol{a}'$ が W 上にあることを調べればよい。ここで、先述した命題より逆元が $(-1)\boldsymbol{a}$ であるから、第三条件から $k = -1$ とすれば逆元は W 上にあることがわかる。よって、W 上のベクトルに対する逆元は W 上に存在する。

- 定数倍の分配法則・定数の分配法則・定数倍とスカラー乗法の関係・単位元による定数倍

  和と同様に、定数倍についても閉じているのだから、、$k()\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ なども W 内の元となる。また、V 内で和の結合法則や交換法則が成立しているのだから、W 内においても和の結合法則や交換法則が成立する。

$$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} \tag{3.86}$$

$$(k+l)(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a} \tag{3.87}$$

$$k(l\boldsymbol{a}) = (kl)(\boldsymbol{a}) \tag{3.88}$$

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{3.89}$$

よって、8 つの条件が成立するから、3 つの条件が満たされるとき、W は V 上の部分ベクトル空間である。

よって、最終的に命題が示された。 □

この証明は多少回りくどいが、一度証明してしまえば (証明できることを知ってしまえば)、以降はどのようなベクトル空間に対しても証明することなく使用できて便利である。これが数学における抽象化の利点であるだろう。

3.4.5　ベクトルの線形結合

3 次元数ベクトルにおける線形独立や一次独立と呼ばれる関係は、高校数学などにおいても頻出する。ここでは、一般化されたベクトル空間の元に対する線形独立性を定義する。まず、準備として線形結合について定義する。

定義： ベクトルの線形結合

ベクトル空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ とスカラー $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots a_n\boldsymbol{v}_n \tag{3.90}$$

をベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ の**線形結合** (一次結合、linear combination) と呼ぶ。

ベクトルの一次結合を考える場合、主にベクトルを固定した時にスカラー値を変化させるとどうなるかを考える。例えば、3 次元数ベクトルに対し、単位ベクトルの一次結合

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{3.91}$$

を考える。この時、スカラー値 a_1, a_2, a_3 を変化させると 3 次元数ベクトル空間全体を表すことができる。このようにスカラー値を変化させた時にどのくらいの空間を表せるかということは線形代数において非常に重要な観点であり、表される空間は「張られる」空間と呼ぶ。

定義： 張られる空間

ベクトル空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ に対し、スカラー値を変えた線形結合全体の集合、すなわち

$$W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots a_n\boldsymbol{v}_n \mid a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}\} \tag{3.92}$$

をベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ によって**張られる空間**と呼ぶ。

このように定義された空間は、元のベクトル空間の部分ベクトル空間となる。

命題： 張られる空間の部分ベクトル空間性

ベクトル空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ よって張られる空間 W は V の部分ベクトル空間である。

【証明】 まず W が V の部分集合であることを示す、V はベクトル空間であるから、その元に対して定数倍や和をとったものも V の元である従って、W 上の元は全て V に含まれる。よって W は V の部分集合である。また、一次結合の全てのスカラー値を 0 とすれば W にゼロ元が含まれていることを確認できる。次に W が和と定数倍について閉じていることを示す。W 上の 2 つの元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots x_n\boldsymbol{v}_n \tag{3.93}$$

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots y_n\boldsymbol{v}_n \tag{3.94}$$

これらの和は

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{v}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{v}_2 + \ldots (x_n + y_n)\boldsymbol{v}_n \tag{3.95}$$

であるから、和は W に含まれる。同様に、$\boldsymbol{x}$ の定数倍は

$$k\boldsymbol{x} = (kx_1)\boldsymbol{v}_1 + (kx_2)\boldsymbol{v}_2 + \ldots (kx_n)\boldsymbol{v}_n \tag{3.96}$$

であるから、W に含まれる。従って、W は V の部分ベクトル空間である。 □

このように、ベクトルの線形結合によって部分ベクトル空間を生成することができることがわかった。ここで、ベクトルによってある空間を張りたい時、どんなベクトルが必要なのかを考える。直感的には 3 次元空間を張るには 3 つのベクトルが必要だが、どんな 3 つのベクトルでも良いわけではない。例えば

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \tag{3.97}$$

という一次結合では3次元空間全体を表すことはできない。また、4つ以上のベクトルがあっても3次元空間全体を表現できる。例えば

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{3.98}$$

でも3次元空間全体を表現できる。このとき、最終項のベクトルが無駄であることは想像できる。ではある空間が与えられた時、どんなベクトルが、最低いくつあれば無駄なく空間全体を表現できるのだろうか？この問題を解決するために、ベクトル群に対して線形独立性と呼ばれる性質を定義する。

定義： ベクトルの線形独立性

ベクトル空間 V に対し、その有限部分集合 $B=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots\boldsymbol{v}_n\}$ が以下を満たすとき、B に含まれる n 本のベクトルは**線形独立** (一次独立、linearly independent) であるという。

$$a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\ldots a_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}\text{ならば}a_1=a_2=\cdots=a_n=0 \tag{3.99}$$

また、$B=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots\boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立でないとき、B に含まれる n 本のベクトルは**線形従属** (一次従属、linearly dependent) であるという。

言い換えれば、$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ という自明な場合を除いては線形結合が $\boldsymbol{0}$ にならないようなベクトルの組を線型独立であるという。線型独立の定義はいささかとっつきにくいが、線形代数の根幹をなす重要な概念である。

後に証明するが、一次独立なベクトルの組がある空間を張る時、そのベクトルの数が最小限必要なベクトルの数であり、この数を空間の次元と呼ぶ。

以下で、線型独立、線形従属の持つ幾つかの性質について述べる。まずは、ベクトル群に無駄があるなら（線形従属なら）それを他のベクトルで表せるというものである。

命題： 線形従属なベクトル組の性質

ベクトル空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots\boldsymbol{v}_n$ において、ある1つのベクトルが他のベクトルの線型結合で表すことができることは、$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots\boldsymbol{v}_n$ が線形従属であることの必要十分条件である。

【証明】 をベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots\boldsymbol{v}_n$ において、ある1つのベクトル $\boldsymbol{v}_i$ $(1\le i\le n)$ が他のベクトルの線型結合で表すことができるとき、$\boldsymbol{v}_i$ が

$$\boldsymbol{v}_i=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}+a_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n \tag{3.100}$$

と表されるとすると、これを移項して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{v}_i + a_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{3.101}$$

であるのだから、これは $a_i \neq 0$ で一次結合が $\boldsymbol{0}$ になることを示しているため、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ は線形従属である。

また、逆に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が線形従属である時、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}\text{かつ}a_1, a_2 \ldots, a_n\text{に}0\text{でないものが少なくとも}1\text{つある} \tag{3.102}$$

が成立する。$a_1, a_2 \ldots, a_n$ の中で 0 でないもの 1 つを $a_i (1 \leq i \leq n)$ とすると、上式を a_i で割り、

$$\frac{a_1}{a_i}\boldsymbol{v}_1 + \frac{a_2}{a_i}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_i + \cdots + \frac{a_n}{a_i}\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{3.103}$$

が得られる。これを移項すれば

$$\boldsymbol{v}_i = -\frac{a_1}{a_i}\boldsymbol{v}_1 - \frac{a_2}{a_i}\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}\boldsymbol{v}_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}\boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - \frac{a_n}{a_i}\boldsymbol{v}_n \tag{3.104}$$

となる。これは $\boldsymbol{v}_i$ を他のベクトルの線型結合で表していることに他ならない。よって、命題は示された。 □

また、この逆として線型独立に関する性質も得られる。

命題： 線形独立なベクトル組の性質

ベクトル空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ において、どのベクトルも他のベクトルの線型結合で表すことができないことは、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であることの必要十分条件である。

【証明】 これは前述した定理の逆である。すなわち、

$$\text{ある 1 つのベクトルが他のベクトルの線型結合で表すことができる} \iff \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n\text{が線形従属} \tag{3.105}$$

の対偶を取ることで正しいことが確認できる。 □

線型独立なベクトル組が無駄のない組であり、線形従属なベクトル組には無駄があるという直観からわかるように、線形従属なベクトルの組にベクトルを付け足しても線形従属である。

命題： 線形従属なベクトル組への付け足し

はベクトル空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が線形従属であるとき、この組にベクトル $\boldsymbol{v}_{n+1}$ を付け足した組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_{n+1}$ も線形従属である。

【証明】 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が線形従属である時、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}\text{かつ}a_1, a_2 \ldots, a_n\text{に0でないものが少なくとも1つある} \tag{3.106}$$

が成立する。よって、これに係数を $a_{n+1} = 0$ として $\boldsymbol{v}_{n+1}$ を加えれば

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots a_n\boldsymbol{v}_n + 0\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{0}\text{かつ}a_1, a_2 \ldots, a_{n+1}\text{に0でないものが少なくとも1つある} \tag{3.107}$$

も成立する。従って、ベクトル組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_{n+1}$ も線形従属である。 □

この対偶から、以下も成立する。

命題： 線形独立なベクトル組からの省き

ベクトル空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であるとき、ベクトル $\boldsymbol{v}_n$ を省いた $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_{n-1}$ も線形独立である。

【証明】 これは前命題の対偶である。 □

上記 2 つの命題は帰納法的に利用できるため、線形従属なベクトル組にどれだけベクトルを付け足しても線形従属のままだし、逆に線型独立なベクトルからどれだけベクトルを省いても線型独立のままである。

3.4.6 ベクトル空間の基底

前節まででベクトルによって張られる空間と、線形独立なベクトル組について述べた。これらを利用すると、ある空間を張るために必要な無駄のないベクトル組が得られる。これを基底と呼ぶ。

定義： ベクトル空間の基底

ベクトル空間 V に対し、ベクトル組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が

- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が V を張る
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が線形独立

を満たす時、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}$ は V の**基底** (basis) であるという。

例えば、三次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ に対しては

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{3.108}$$

というベクトル組は基底である。注意すべきことに、あるベクトル空間に対して基底となるベクトル組は一つとは限らない。例えば三次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ に対しては

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.109}$$

というベクトル組も基底である。有限次元ベクトル空間には、必ず基底が存在することが証明できる（要証明！）。無限次元のベクトル空間に対しては、選択公理を採用すれば基底の存在を証明できる。

3.4.7 ベクトルの次元

基底の取り方は複数あると述べたが、その取り方によらず、ベクトルの個数は一定であることが知られている。この個数をベクトル空間の次元と呼ぶ。

第 4 章　行列

4.1 行列とは

行列は、単純には数字を縦横に並べただけのものである。ただ、行列に対して様々な演算を組み込むことで、数学や物理学上非常に有用な概念となる。

定義： 行列

行列は数字を縦横にいくつか並べたものである。以下のように、縦に m 個、横に n 個数字を並べた行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

を $m \times n$ 行列と呼び、特に $m = n$ の行列を (n 次の) **正方行列**と呼ぶ。並べられた数字を**成分**と呼び、a_{ij} を (i, j) 成分などと呼ぶ。

一般的に、1 つ目の添字が行番号を、2 つ目の添字が列番号を示す場合が多い。

4.2 3 次正方行列

物理的には 3×3 の正方行列 (3 次正方行列) が非常に重要である。これは後述する 2 階のテンソルを表現することができるためである。3×3 の正方行列は以下のように 9 つの成分を縦横に並べたものである。

定義： 3 次正方行列

3 次正方行列は数字を 9 つ並べたものである。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

4.2.1 行列の和とスカラー倍

3 次正方行列のスカラー倍および和は単純に、各成分のスカラー倍と和によって計算される。

定義： 3 次正方行列のスカラー倍

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の定数 k 倍は各成分を k 倍し、

$$k\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

と定義される。

定義： 3 次正方行列の和

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の和は各成分を足し合わせ

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

とする。

4.2.2 行列積

行列積は、いくつかの種類が考えられる。ただし、普通行列積と言う際には以下の積を示す。

定義： 3 次正方行列の積

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の積 $\boldsymbol{AB}$ は

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

のように計算する。これは、$\boldsymbol{AB}$ の (i, j) 成分を $(\boldsymbol{AB})_{ij}$ と書くとすれば、

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj} \tag{4.6}$$

とも書ける。

このような一見複雑な形の積が行列積として広く用いられている理由は、この形がベクトルの一次変換の合成として現れるためである。すなわち、ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}'$ に一次変換する行列 $\boldsymbol{A}$ を考えると、これは

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \tag{4.7}$$

を満たす。これに対して $\boldsymbol{v}'$ を更に変換し $\boldsymbol{v}''$ に変換する行列 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}' \tag{4.8}$$

となる。すると、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}''$ の関係は

$$\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) \tag{4.9}$$

となるはずである。この時、もしこれを

$$\boldsymbol{v}'' = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{v} \tag{4.10}$$

とできれるのであれば、$\boldsymbol{BA}$ を計算すれば $\boldsymbol{v}'$ を経ることなく $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}''$ に変換できる。このように、$\boldsymbol{B}$ による変換と $\boldsymbol{A}$ による変換を組合わせた変換が $\boldsymbol{BA}$ による変換と等しくなるような $\boldsymbol{BA}$ の計算手法が、この行列積である。

(a) 行列積の結合則

行列積は、結合則が成立する。

命題： 3 次正方行列積の結合則

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の積は、どちらを先に計算しても同じであるため、括弧を付けなくてもよい。

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{ABC} \tag{4.11}$$

【証明】 (i, j) 成分について $((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_{ij}$ と $(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_{ij}$ が一致することを示せばよい。まず、$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ について、

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} \tag{4.12}$$

より、

$$((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_{ij} = \sum_{s=1}^{3} ((\boldsymbol{AB})_{is} c_{sj}) = \sum_{s=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} (a_{ik} b_{ks})\, c_{sj} \right) = \sum_{s=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} (a_{ik} b_{ks} c_{sj}) \tag{4.13}$$

である。これに対し、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ については

$$(\boldsymbol{BC})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} c_{kj} \tag{4.14}$$

より

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_{ij} = \sum_{s=1}^{3}(a_{is}(\boldsymbol{BC})_{sj}) = \sum_{s=1}^{3}\left(a_{is}\sum_{k=1}^{3}(b_{sk}c_{kj})\right) = \sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(a_{is}b_{sk}c_{kj}) \tag{4.15}$$

ここで足し合わせの添字 k, s を置き換えれば $(k = s, s = k)$、

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}(a_{ik}b_{ks}c_{sj}) \tag{4.16}$$

これは $((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_{ij}$ と足し合わせの順番が異なるだけの全く同じ値である。よって、$((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_{ij} = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_{ij}$ が示された。これがすべての (i, j) 成分に成立するため、

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \tag{4.17}$$

が示される。 □

(b) 行列積の分配則

行列積には分配法則も成立する。

命題： 3 次正方行列積の分配則

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ について、以下の等式が成立する。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} \tag{4.18}$$

【証明】 左辺の (i, j) 成分について

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}))_{ij} = \sum_{k=1}^{3}(a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})) = \sum_{k=1}^{3}(a_{ik}b_{kj}) + \sum_{k=1}^{3}(a_{ik}c_{kj}) = (\boldsymbol{AB})_{ij} + (\boldsymbol{AC})_{ij} \tag{4.19}$$

より、成立する。 □

(c) 行列積の交換

行列積では注意すべきことに可換則 (交換法則) が成立しない。

命題： 3 次正方行列積の交換

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について、$\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$ は等しいとは限らない。すなわち

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{4.20}$$

である。

ここで、$\not\equiv$ は「等しいとは限らない」という意味で用いた。この特徴は、$\boldsymbol{A}$ による変換の後 $\boldsymbol{B}$ による変換をするのと、$\boldsymbol{B}$ による変換の後 $\boldsymbol{A}$ による変換をするのでは結果が異なるというふうに捉えることもできる。たとえば、$\boldsymbol{A}$ を「ベクトルを x 軸を中心に 90 度回転させる変換」、$\boldsymbol{B}$ を「ベクトルを y 軸に対して 90 度回転させる変換」と考え、y 方向の単位ベクトルを変換させることを考えれば、変換の順番によって結果が変わることがわかる[1)]。

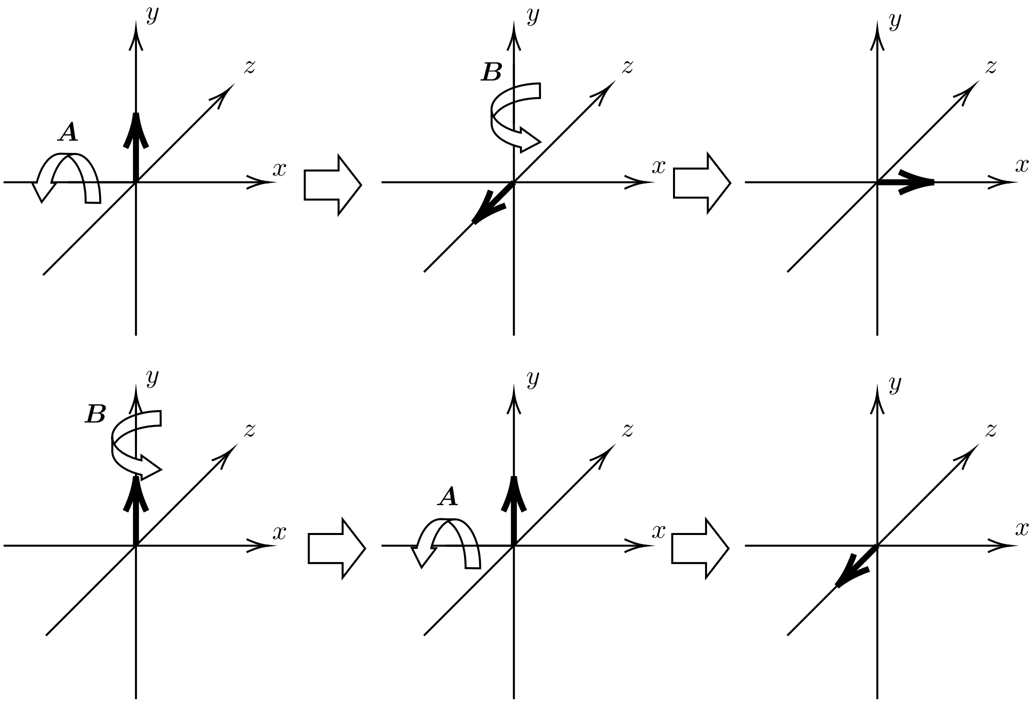

図 4.1　行列による一次変換の非可換性。A と B の変換を逆にすると結果が変わる。

4.2.3　複内積 (フロベニウス内積)

上述の行列積が最もよく用いられる積であるが、他の積も存在する。**フロベニウス内積** (Frobenius inner product) は、以下のようにベクトルの内積を行列に拡張したような積である。

1)　ここではこれらの変換が一次変換 (線形変換) であることを示さずに例を挙げたが、これらの変換は

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} \tag{4.21}$$

で表すことができる一次変換である。

定義： フロベニウス内積

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について、**フロベニウス内積**は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} &= \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}(a_{ij}b_{ij}) \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}\end{aligned} \tag{4.22}$$

フロベニウス内積は行列積の持たなかった可換性を持つなどの特徴がある。この積によってベクトルのノルムを自然に拡張した行列のノルム (フロベニウスノルム) が導かれる。

定義： フロベニウスノルム

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の**フロベニウスノルム**は、以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}} &= \sqrt{\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} a_{ij}^2} \\ &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2}\end{aligned} \tag{4.23}$$

4.2.4 アダマール積

アダマール積 (Hadamard product) は単純な各成分同士の積である。

定義： アダマール積

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について、**アダマール積**は以下のように定義される。

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

これは非常にわかりやすい積であるが、本文書ではほとんど扱わない。

4.2.5 転置

行列の転置 (transpose) は、行列を対角線でひっくり返す操作、およびその操作でできた行列のことである。

定義： 転置

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の**転置** $\boldsymbol{A}^\top$ は以下のように表される。

$$\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

すなわち、(i, j) 成分に対しては

$$(\boldsymbol{A}^\top)_{ij} = a_{ji} \tag{4.26}$$

である。

転置行列は他に ${}^t\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^T$、$\boldsymbol{A}^\mathrm{T}$、$\boldsymbol{A}^\intercal$ のように様々な記法がある。工学分野では右上に書く場合が多い。

(a) 転置の線形性

転置は、線形性を持つ操作である。

命題： 転置の線形性

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ および定数 s, t について、以下の等式が成立する。

$$(s\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B})^\top = s(\boldsymbol{A})^\top + t(\boldsymbol{B})^\top = (s\boldsymbol{A})^\top + (t\boldsymbol{B})^\top \tag{4.27}$$

【証明】

$$\big((s\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B})^\top\big)_{ij} = sa_{ji} + tb_{ji} \tag{4.28}$$

$$\big(s(\boldsymbol{A})^\top + t(\boldsymbol{B})^\top\big)_{ij} = sa_{ji} + tb_{ji} \tag{4.29}$$

$$\big((s\boldsymbol{A})^\top + (t\boldsymbol{B})^\top\big)_{ij} = sa_{ji} + tb_{ji} \tag{4.30}$$

より成立する。 □

(b) 転置の転置

また、転置がひっくり返す操作であったことからわかるように、転置行列を更に転置すればもとの行列に戻る。

命題： 転置の転置

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ について、以下の等式が成立する。

$$(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A} \tag{4.31}$$

【証明】

$$\left(\left(\boldsymbol{A}^\top\right)^\top\right)_{ij} = \left(\boldsymbol{A}^\top\right)_{ji} = a_{ij} \tag{4.32}$$

より成立する。 □

(c) 転置と逆行列

また、転置と行列積の間に以下の関係があることは重要である。

命題： 行列積と転置

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について、以下の等式が成立する。

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top \tag{4.33}$$

【証明】

$$\begin{aligned}\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top\right)_{ij} &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{ji} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{3} (\boldsymbol{A}^\top)_{kj} (\boldsymbol{B}^\top)_{ik} = \sum_{k=1}^{3} (\boldsymbol{B}^\top)_{ik} (\boldsymbol{A}^\top)_{kj} = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top\end{aligned} \tag{4.34}$$

□

(d) 対称行列・反対称行列

転置行列 $\boldsymbol{A}^\top$ がもとの行列 $\boldsymbol{A}$ とどのような関係にあるかによって、特別な呼称がいくつか存在する。

定義： 対称行列

3 次対称行列 $\boldsymbol{A}$ について、転置行列がもとの行列と等しいとき、すなわち

$$\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A} \tag{4.35}$$

のとき、行列 $\boldsymbol{A}$ を**対称行列** (symmetric matrix) と呼ぶ。

対称行列は、対角線に対して成分が線対称になっている行列である。

定義： 反対称行列

3 次対称行列 $\boldsymbol{A}$ について、転置行列が元行列の -1 倍であるとき、すなわち

$$\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{A} \tag{4.36}$$

のとき、行列 $\boldsymbol{A}$ を**反対称行列** (antisymmetric matrix) もしくは歪対称行列 (skew-symmetric) と呼ぶ。

この行列は、日本語では交代行列とも呼ぶが、この英訳 alternative matrix はほとんど利用されていないようである。各行、各列の総和が 0 になるように $-1, 0, 1$ を並べた行列 alternating sign matrix や行列と引数を並べた行列 alternant matrix などが存在するが、これらは反対称行列とは別物である。英語では antisymmetric matrix などを使用するのが安全だろう。

4.2.6　行列式

行列式 (determinant) と呼ばれる値は線形代数において非常に重要な値であり、その英語名からも分かる通り行列の性質を「決める」値とされる。ただ、n 次正方行列に対する行列式の定義は置換行列を用いて定義されたり、更に抽象的に群論などを用いて定義されたりするため、初学者にとっては敷居が高い。ここではまず 3×3 行列の行列式に絞って議論をすすめる。

定義： 3 次正方行列の逆行列 (サラスの公式)

3 次正方行列の $\boldsymbol{A}$ の**行列式** $|A|$ は、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| = \det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned} \tag{4.37}$$

と計算される。

この式は行列を対角方向、および逆対角方向に見ていくことで図的に計算を覚えられる。ただこの図による記憶法は 4 次以上の行列には応用できないことに注意する。

(a)　行列積の行列式

行列式の重要な性質を以下に述べる。

命題： 行列式と行列積

3 次正方行列の $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について、

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \tag{4.38}$$

が成立する。

【証明】 この証明は 3 次正方行列に限ってもかなり面倒である。とりあえずは齋藤「線型代数学」に証明を譲ることにする。 □

(b) 行列積の線形性

また、行列式は単純な線形性を持たない。すなわち一般的には行列式の中身を外に出す事はできない。

$$|a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}| \not\equiv a|\boldsymbol{A}| + b|\boldsymbol{B}| \tag{4.39}$$

その代わり、行列式は一つの行や一つの列の成分に対しての線形性を持つ。この性質を多重線形性と言う。これは、行列をベクトルを並べたものと考えれば、テンソルの多重線形性と同じ性質を示すことがわかる。他にも行列式は固有値との関係性など非常に重要な性質を持っているが、ここでは一度議論を切り上げて、n 次正方行列の議論に譲る。

4.2.7 特別な行列

一般的に、積などの二項演算においてはゼロ元 0 と単位元 1 が重要である。行列積においてもこれらの相当する 2 つの行列が特別な行列として定義される。

(a) 単位行列

単位行列は積に対して影響を及ぼさない行列であり、対角線上に 1 が並んだ行列である。

定義： 単位行列

3 次正方行列における単位行列 $\boldsymbol{I}$ は、以下の行列である。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

(i, j) 成分については

$$(\boldsymbol{I})_{i,j} = \delta_{ij} \tag{4.41}$$

が成立する。

δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、

$$\delta_{ij} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{4.42}$$

である。単位行列についてはいくつかの性質があるが、以下のようなものが重要である。

命題： 単位行列の性質

単位行列 $\boldsymbol{I}$ は、3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し以下のような性質を持つ。

- 積への無影響

$$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A} \tag{4.43}$$

- 転置

$$\boldsymbol{I}^\top = \boldsymbol{I} \tag{4.44}$$

- 行列式

$$|\boldsymbol{I}| = 1 \tag{4.45}$$

- 逆行列

$$\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.46}$$

【証明】 積に対して、

$$(\boldsymbol{IA})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij} \tag{4.47}$$

$$(\boldsymbol{AI})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij} \tag{4.48}$$

より成立する。

転置に対しては、ほぼ自明であるが、

$$(\boldsymbol{I}^\top)_{ij} = (\boldsymbol{I})_{ji} = \delta_{ji} = \delta_{ij} \tag{4.49}$$

より成立する。

行列式に対して、3 次正方行列では定義に従って計算すれば自明である (第一項のみが 1、その他が 0)。

逆行列に対して、

$$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{I} \tag{4.50}$$

となる行列 $\boldsymbol{A}$ として、行列 $\boldsymbol{I}$ がある。よって、行列 $\boldsymbol{I}$ は正則で、逆行列が存在し、逆行列が $\boldsymbol{I}$ 自身である。 □

(b) 零行列

単位行列と同様に、零行列が存在する。

定義： ゼロ行列

3 次正方行列におけるゼロ行列 $\boldsymbol{O}$ は、以下の行列である。

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

(i, j) 成分については

$$(\boldsymbol{O})_{i,j} = 0 \tag{4.52}$$

が成立する。

ゼロ行列は実数における 0 と同様に、積に対して以下の性質を持つ。

命題： 単位行列の性質

ゼロ行列 $\boldsymbol{O}$ は、3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し以下のような性質を持つ。

- 積
$$\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{AO} = \boldsymbol{O} \tag{4.53}$$
- 転置
$$\boldsymbol{O}^\top = \boldsymbol{O} \tag{4.54}$$
- 行列式
$$|\boldsymbol{O}| = 0 \tag{4.55}$$
- ゼロ行列の逆行列は存在しない。

【証明】 積に対して、

$$(\boldsymbol{OA})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} 0 \times \ a_{kj} = 0 \tag{4.56}$$

$$(\boldsymbol{AO})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \times 0 = 0 \tag{4.57}$$

より成立する。

転置に対しては、ほぼ自明であるが、

$$(\boldsymbol{O}^\top)_{ij} = (\boldsymbol{O})_{ji} = 0 = (\boldsymbol{O})_{ij} \tag{4.58}$$

より成立する。

行列式に対して、3 次正方行列では定義に従って計算すれば自明である (第一項のみが 1、その他が 0)。

逆行列に対しては、行列式が 0 であるため、$\boldsymbol{O}$ は正則ではなく、逆行列が存在しない。 □

4.2.8 逆行列

$\boldsymbol{A}$ の**逆行列** (matrix inverse)[2)]とは、$\boldsymbol{A}$ に掛け合わせると単位行列になるような行列である。

定義： 逆行列

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し、以下の等式

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.59}$$

を満たす 3 次正方行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する時、$\boldsymbol{A}$ を**正則行列** (Invertible matrix) と呼び、$\boldsymbol{A}^{-1}$ を $\boldsymbol{A}$ の**逆行列**と呼ぶ。

「存在する時」と書いたように、任意の行列 $\boldsymbol{A}$ に対し逆行列は存在するとは限らない。これは、実数において 0 に逆数が存在しないこととも似ているが、行列においては零行列以外にも $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在しない場合がある。例として、

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

には逆行列がない。3 次正方行列に限って言えば、以下の逆行列に関する命題が成立する。

命題： 3 次正方行列の逆行列

3 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ は、

$$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0 \tag{4.61}$$

2） matrix inverse という言葉は英語では実はあまり使われておらず、よく使用されているのは『$\boldsymbol{A}$ の逆 (inverse of $\boldsymbol{A}$)』である。

である時、かつその時に限り、$\boldsymbol{A}$ は正則であり逆行列を持つ。この時逆行列は

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

である。

【証明】 この証明には余因子行列や行列の基本変形を使う必要があるため、一度省略し、n 次正方行列で議論することとする。 □

(a) 右逆行列と左逆行列

逆行列の定義では $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ の両方が条件となっている。では、片方のみを満たすような逆行列 (仮に右逆行列、左逆行列と言うこととする) は存在するだろうか？実際には、片方のみ考えればもう片方も必ず満たすことが証明できる。つまり、右逆行列であり左逆行列でないような逆行列は存在しない。

命題： 右逆行列と左逆行列の同一性

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ となる行列 $\boldsymbol{B}$ が存在すれば、$\boldsymbol{A}$ は正則であり、$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ が成立し、$\boldsymbol{B}$ は逆行列である。

【証明】 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ となる行列 $\boldsymbol{B}$ が存在するとき、行列式は

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{I}| = 1 \tag{4.63}$$

である。また、行列式の性質から

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \tag{4.64}$$

であるから、

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 1 \tag{4.65}$$

これは $|\boldsymbol{A}| = 0$ では成立し得ないため、$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ であり、$\boldsymbol{A}$ は正則である。よって、$\boldsymbol{A}$ には逆行列が存在する。ここで逆行列の定義

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{4.66}$$

を考え、右から $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ を両辺にかけると

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \tag{4.67}$$

となるが、ここで前提条件 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ から左辺が

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{I} \tag{4.68}$$

となることから、

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I} \tag{4.69}$$

が成立する。よって、

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I} \tag{4.70}$$

が成立することから、$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ の逆行列である。(後述する逆行列の一意性から、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ である。) □

(b) 逆行列の一意性

また、逆行列に関しては一意性が示される。

命題： 逆行列の一意性

正則行列 $\boldsymbol{A}$ に対して逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ はただひとつ存在する。

【証明】 正則行列 $\boldsymbol{A}$ に対し、2 つの異なる逆行列 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が存在すると仮定して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BA} &= \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{CA} &= \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{4.71}$$

としたとき、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) \\ &= (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{IC} = \boldsymbol{C} \end{aligned} \tag{4.72}$$

となり、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ が等しくなり、矛盾する。よって背理法より導かれる。 □

4.2.9 逆行列の逆行列

また、逆行列の逆行列は元の行列に戻る。

命題： 逆行列の逆行列

正則行列 $\boldsymbol{A}$ に対し、その逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ も正則であり、

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \tag{4.73}$$

が成立する。

【証明】 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が $\boldsymbol{A}$ の逆行列であることから、

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.74}$$

が成立する。この式は「$\boldsymbol{A}^{-1}$ に対する逆行列が $\boldsymbol{A}$ である」とを読み替えることができる。よって、$\boldsymbol{A}^{-1}$ には逆行列が存在するため、$\boldsymbol{A}^{-1}$ は正則であり、その逆行列は $\boldsymbol{A}$ である。 □

(a) 行列積の逆行列

また、逆行列は転置行列と同様に積の逆行列に対して以下の関係を持つ。

命題： 行列積と逆行列

正則行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{4.75}$$

が成立する。

【証明】 これは、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ に $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ をかけて見れば確認できる。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{4.76}$$

より、

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} \tag{4.77}$$

が成立するため、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ には逆行列が存在し、逆行列 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}$ は $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ である。 □

(b) 逆行列の転置、行列式

上述の性質を利用すると逆行列と転置の可換性が証明される。

命題： 逆行列と転置

正則行列 $\boldsymbol{A}$ に対し、転置 $\boldsymbol{A}^\top$ も正則であり、

$$(\boldsymbol{A}^\top)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^\top \tag{4.78}$$

が成立する。

【証明】 定義式 式 (4.59) を転置した

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^\top = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^\top = \boldsymbol{I}^\top = \boldsymbol{I} \tag{4.79}$$

を変形すると

$$\boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{A}^{-1})^\top = (\boldsymbol{A}^{-1})^\top \boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{I} \tag{4.80}$$

となることから、$\boldsymbol{A}^\top$ には逆行列 $(\boldsymbol{A}^{-1})^\top$ が存在する。 □

また、逆行列と行列式は可換であるように見ることができる。

命題： 逆行列と行列式

正則行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \tag{4.81}$$

が成立する。

【証明】 逆行列の定義より、

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{4.82}$$

であるが、左辺の行列式は

$$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}| \tag{4.83}$$

であり、右辺は

$$|\boldsymbol{I}| = 1 \tag{4.84}$$

であるので、

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}| = 1 \tag{4.85}$$

となる。よって、

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}|^{-1} \tag{4.86}$$

となる。 □

4.3 n 次正方行列

4.3.1 疎行列の逆行列

以上は数学的な行列に対する扱いである。数学的には行列が正則であれば逆行列が計算できる。ただし、大規模疎行列に対しては基本的に逆行列を計算することは困難である。これは、まず第一に逆行列の算出がそれ自体難しい問題であり、計算負荷が高いためである。第二に、疎行列の逆行

列が疎行列だとは限らないためである。例えば、小さな 3 重対角行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.87}$$

に対して、その逆行列は

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{1189} \begin{pmatrix} 204 & 35 & 6 & 1 \\ 35 & 210 & 36 & 6 \\ 6 & 36 & 210 & 35 \\ 1 & 6 & 35 & 204 \end{pmatrix} \tag{4.88}$$

となり、全ての成分がゼロではなくなっている。より大きな 100×100 の帯行列に対しては、非ゼロの値が以下の図のように分布する。

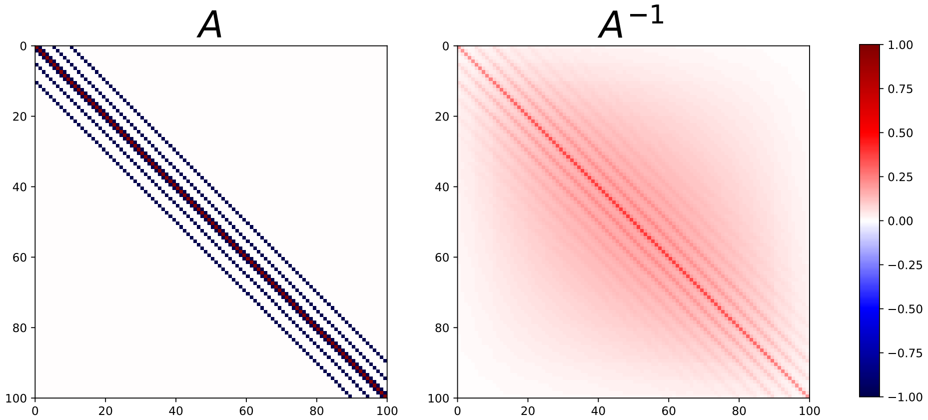

図 4.2　100×100 の疎行列に対する逆行列のプロット。元の行列は対角成分が 6、それ以外の成分が -1 の行列になっている。逆行列では非ゼロ成分が全体に分布していることがわかる。ちなみにここでは逆行列がある程度綺麗な形をしているが、対角成分の値を変えると、突如奇妙な模様となる。

したがって、もともとは高々 700 個程度の値しか保持しなくてよかったものが、逆行列ではほぼ 10,000 個の値を保持しなくてはならなくなってしまう。これは更に大きな疎行列では深刻な問題で、そもそも逆行列を保持するメモリの確保すら困難になる。更に、第三として逆行列自体が必要になる場合はほとんどないためである。例えば行列で表される方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求める時、解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ である。これを見ると逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めなくてはならないようにも思えるが、実際に必要なのは $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$ なのであって、$\boldsymbol{A}^{-1}$ そのものではない。このようなことから、疎行列の解法では逆行列を求めずに解を求める手法が開発されている。したがって、大規模疎行列では逆行列を直接計算することは原則として行わない。

4.4 一般の行列

第 5 章　テンソル

誤解を恐れずに言えば、本文書で扱う範囲内では 0 階のテンソルがスカラー、1 階のテンソルがベクトル、そして 2 階のテンソルが行列であると思ってもらって差し支えない。ただし、実際にはテンソルはある種の関数、(変換操作、写像と言ってもよい) に対する呼称である。テンソルの定義や表現方法には様々なアプローチがあり、ある種の関数としての扱いや、座標変換に対する変換規則を用いた定義、および数学的な多重線形性代数的な扱いなどがある。ここではテンソルの定義や性質について、関数としての扱いを用いて述べる。

5.1 テンソルの定義

前述したように、テンソルは一種の関数として定義される。まず、いくつかの値を受け取り、これに対しいくつかの値を返すもの (対応、操作) を関数とする。これはプログラミング言語における関数とよく似ている。この中でも、受け取る変数が 1 つであるものを 1 変数関数、返す値が 1 つであるものを 1 価の関数と呼ぶ。ここでは、多変数、1 価の関数を扱うため、これを関数と呼ぶ。すると、この関数は以下のように表すことができる。

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \tag{5.1}$$

ただし、ここで変数や返り値として表した x および λ は何でもよく、スカラーでも、ベクトルでも、行列でも良い。n 階のテンソルは、n つのベクトルを受け取り、スカラー値を返す関数である。このような関数は以下のように記述される。

$$F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \lambda \tag{5.2}$$

ただし、このような形の関数全てがテンソルであるわけではない、テンソルはこの形の関数のうち、「多重線形性」という性質をもつ関数のことを示す。この定義を具体的に 0〜2 階のテンソルについて見ていこう。

5.2 0〜2 階のテンソル

5.2.1　0 階のテンソル

0 階のテンソルは、0 つのベクトルを得て 1 つのスカラー値を返す関数である。ただ、0 つのベクトルというのは不可解であるので、(他の n 階テンソルと整合するように)1 つのスカラーを得て 1

つのスカラー値を返す関数とする。すると、この関数は以下のように記述される。

$$F(x) = \lambda \tag{5.3}$$

これは 1 変数 1 価の関数であり、我々がよく目にする、普通の関数の形をしている。ただし、このような形の関数が全てテンソルであるわけではない。0 階のテンソルでは、この関数に線形性という性質を要求する。線形性とは、全ての入力値と任意の (a,b) に対して以下のような式が満たされることを示す。

$$F(ax+by) = aF(x) + bF(y) \tag{5.4}$$

このような性質を持つ関数 $F(x)$ はどのようなものがあるだろうか？まず、適当な関数について線形性を持つか考えてみよう。

$$F(x) = 2x \tag{5.5}$$

という 1 次関数はどうだろうか？これは、線形性を満たす。なぜなら、

$$F(ax+by) = 2(ax+by) = a(2x) + b(2y) = aF(x) + bF(y) \tag{5.6}$$

となり、 式 (5.4) が成立するからである。よって、$F(x) = 2x$、つまり与えられたスカラーを 2 倍して返す関数は、0 階のテンソルである。では、

$$F(x) = 2x - 1 \tag{5.7}$$

はどうだろうか？これは、

$$F(ax+by) = 2(ax+by) - 1 = a(2x-1) + b(2y-1) + (a+b-1) = aF(x) + bF(y) + (a+b-1) \tag{5.8}$$

となり、余分な項が出てしまうため、線形ではない[1)]。よって、$F(x) = 2x-1$ は 0 階のテンソルではない。次に、

$$F(x) = x^2 \tag{5.9}$$

という二次関数はどうだろうか？この関数は、線形ではない。なぜなら、

$$F(ax+by) = (ax+by)^2 = a^2F(x) + b^2F(y) + 2abxy \tag{5.10}$$

となり、 式 (5.4) を満たさないからである。ここまで見たように、今挙げた例の中では $F(x) = 2x$ のみが線形性を満たしている。実は、このような線形性を満たすスカラー関数は任意の実数 c を用いて以下の形しか存在しないことが証明できる。

$$F(x) = cx \tag{5.11}$$

1） $a+b-1=0$ の際には 式 (5.4) 成立するが、線形性は任意の (a,b) について成立しなければならないので、これは線形であるとは言わない

以下に証明を述べる。$y=0, b=0, x=1$ とすると、

$$F(a) = aF(1) \tag{5.12}$$

となる。この関係が任意の a について成立するということは、a を x に置き換えて

$$F(x) = xF(1) \tag{5.13}$$

も成立することになる。したがって、$F(1)=c$ とすれば

$$F(x) = cx \tag{5.14}$$

となり、$F(x)$ が決定する。以上が証明である。

よって、0 階のテンソルとは、x を cx に変換する関数、つまりスカラー値 c をかけ合わせる関数として定義される。この関数について、関数の特徴を決めている量 (関数を決定するために決めなければならない量) は、明らかに c である。これが、スカラー値 c が 0 階のテンソルであると言われる所以である。しかし、上述したように、正確には 0 階のテンソルとはスカラー値 c そのものではなく、「c をかけ合わせる」という操作 (関数) のことを示す。同様のことを 1 階のテンソルについて見ていこう。

5.2.2　1 階のテンソル

1 階のテンソルは、1 つのベクトルを得て 1 つのスカラー値を返す関数である。すると、この関数は以下のように記述される。

$$F(\boldsymbol{v}) = \lambda \tag{5.15}$$

この関数について、0 階のテンソルと同様に線形性を考えてみる。すなわち、全ての入力値と任意の (a,b) に対して以下のような式が満たされる。

$$F(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}) = aF(\boldsymbol{v}) + bF(\boldsymbol{w}) \tag{5.16}$$

0 階のテンソルの際と同様に、適当な関数について線形性が満たされるか考えてみよう。まず、ベクトルを受け取りスカラーを返す関数といえば、ベクトルの長さを返す関数、

$$F(\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{5.17}$$

がある。これは、線形性を満たさない。なぜなら、

$$F(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}) = \|a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}\| = \sqrt{(av_x+bw_x)^2+(av_y+bw_y)^2+(av_z+bw_z)^2} \tag{5.18}$$

はどう頑張っても $aF(\boldsymbol{v})+bF(\boldsymbol{w}) = a\|\boldsymbol{v}\|+b\|\boldsymbol{w}\|$ にはならないからである。これはベクトルを図示すればもっと単純であり、2 つのベクトル $a\boldsymbol{v}$ と $b\boldsymbol{w}$ の足し合わせである $a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}$ の長さは $a\boldsymbol{v}$ と $b\boldsymbol{w}$ の長さの和より小さいか同じである (三角不等式)。よって、この関数は 1 階のテンソルではな

い。ベクトルに対してスカラーを返す関数としては、他にも内積がある。例えば、入力されたベクトルに対し $\boldsymbol{q} = (1, 2, 3)$ を内積としてかけあわせる関数

$$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = v_x + 2v_y + 3v_z \tag{5.19}$$

などが考えられる。これは、線形性を満たす。なぜなら、

$$\begin{aligned} F(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) &= (av_x + bw_x) + 2(av_y + bw_y) + 3(av_z + bw_z) \\ &= a(v_x + 2v_y + 3v_z) + b(w_x + 2w_y + 3w_z) = aF(\boldsymbol{v}) + bF(\boldsymbol{w}) \end{aligned} \tag{5.20}$$

となるからである。よって、与えられたベクトルに対して $\boldsymbol{q}$ を内積としてかけ合わせる関数は、1 階のテンソルである。

0 階のテンソルと同様に 1 階のテンソルもこのような内積関数しか存在しないことを示すことができる。0 階のテンソルの際には、$x = 1$ を代入することでただ一通りの形しか無いことが示されたが、ここではまず座標系を固定し、各軸方向の成分でベクトルを表す。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z \tag{5.21}$$

ここで、$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は、それぞれの軸方向の単位ベクトルである。

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

すると、線型性より、

$$F(\boldsymbol{v}) = v_xF(\boldsymbol{e}_x) + v_yF(\boldsymbol{e}_y) + v_zF(\boldsymbol{e}_z) \tag{5.23}$$

となる。さて、0 階のテンソルの際に $F(1) = c$ としたように、ここでの $F(\boldsymbol{e}_x), F(\boldsymbol{e}_y), F(\boldsymbol{e}_z)$ も定数である。よって、これを

$$F(\boldsymbol{e}_x) = f_x, F(\boldsymbol{e}_y) = f_y, F(\boldsymbol{e}_z) = f_z \tag{5.24}$$

とおけば、

$$F(\boldsymbol{v}) = v_xf_x + v_yf_x + v_zf_x = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} \tag{5.25}$$

となる。これはつまり、1 階のテンソルとは入力ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し、$\boldsymbol{f}$ を内積としてかけ合わせる関数のことであるということを示している。これを 0 階のテンソルと同様に見れば、1 階のテンソルを特徴付けている量は $\boldsymbol{f}$ であり、このことから 1 階のテンソルベクトルである、と言われる。ただし、実際には 1 階のテンソルとは入力されたベクトルに対し、$\boldsymbol{f}$ をかけ合わせる操作のことを示す。この意味で、$\boldsymbol{v}$ はベクトルであり、$\boldsymbol{f}$ は 1 階のテンソルを示す量とも言える。

5.2.3　2 階のテンソル

次に、2 階のテンソルについて見ていこう。2 階のテンソルは、2 つのベクトルを得て 1 つのスカラー値を返す関数である。すると、この関数は以下のように記述される。

$$F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \lambda \tag{5.26}$$

これは 2 変数関数である。多変数関数の場合、線形性を拡張した、多重線形性 (2 変数の場合は双線形性とも呼ばれる) という概念がテンソルに課される。これは以下のように記述される。

$$\begin{aligned} F(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) &= aF(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + bF(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) \\ F(\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2) &= aF(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + bF(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) \end{aligned} \tag{5.27}$$

すなわち、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ のどちらももう片方を固定したときに線形性があるということを示している。ここでもいくつかの関数について双線形性を考えてみよう。2 つのベクトルから 1 つのスカラー値を返す関数といえば、まずはこの 2 つのベクトルの内積を返す関数

$$F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \tag{5.28}$$

があるだろう。内積については 1 階のテンソルでも考えたが、1 階のテンソルでは片方のベクトルが固定されていたのに対し、ここでは両方のベクトルが変数 (引数) となっているため、考え方が異なることに注意する。この関数は、双線形性を持つ。すなわち、

$$\begin{aligned} F(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) &= (a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{w} = a\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w} + b\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{w} = aF(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + bF(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) \\ F(\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2) &= \boldsymbol{v} \cdot (a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \cdot a\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \cdot b\boldsymbol{w}_2 = aF(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + bF(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) \end{aligned} \tag{5.29}$$

となる。よって、2 つのベクトルに対しその内積を返す関数は、2 階のテンソルである。これだけを見ると、2 階のテンソルと行列の関係性は見えてこないが、これについては後述する。2 階のテンソルとは、このような内積の形だけであろうか？実は他にもある。例えば、多少突飛な例だが、「それぞれの x 座標だけを抜き出し、その積を返す」関数も、2 階のテンソルになる。つまり、

$$F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v_x w_x \tag{5.30}$$

という関数である。これはたしかに、双線形性

$$\begin{aligned} F(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) &= av_{1x}w_x + bv_{2x}w_x = aF(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + bF(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) \\ F(\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2) &= v_x a w_{1x} + v_x b w_{2x} = aF(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + bF(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) \end{aligned} \tag{5.31}$$

を満たす。よって、内積を表す関数も、x 座標だけの積を返す関数も、2 階のテンソルであった。では 2 階のテンソルを 0 階、1 階のテンソルのように統一して表現するためには、どのような表記が必要だろうか？ 2 階のテンソルの表現を探すため、1 階のテンソルと同様にそれぞれのベクトルを成分に分解する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_x \boldsymbol{e}_x + v_y \boldsymbol{e}_y + v_z \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{w} &= w_x \boldsymbol{e}_x + w_y \boldsymbol{e}_y + w_z \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{5.32}$$

すると、まず $\boldsymbol{w}$ を固定した際の線形性より

$$F(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = v_x F(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{w}) + v_y F(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{w}) + v_z F(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{w}) \tag{5.33}$$

が得られる。更に $\boldsymbol{w}$ についても線形性を用いると、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = v_x w_x F(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x) + v_x w_y F(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y) + v_x w_z F(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z) \\ + v_y w_x F(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x) + v_y w_y F(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_y) + v_y w_z F(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) \\ + v_z w_x F(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x) + v_z w_y F(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y) + v_z w_z F(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_z) \end{aligned} \tag{5.34}$$

となる。1 階のテンソルの時よりは自明ではないが、これを変形すると

$$F(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x) & F(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y) & F(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z) \\ F(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x) & F(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_y) & F(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) \\ F(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x) & F(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y) & F(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{F} \boldsymbol{w} \tag{5.35}$$

とできる。よって、0 階、1 階のテンソルと同様に、2 階のテンソルとは、2 つのベクトル $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ を入力値としてスカラー値 $\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$ を返す関数である。このテンソルを特徴づけているのは $\boldsymbol{F}$ であり、これは 3×3 の行列である。このことから、2 階のテンソルとは行列である、と言われている。しかし実際には、2 階のテンソルとはこの関数 (操作) そのものを示す。先程の内積を示す関数は、この行列表記を用いると

$$F(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{E} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \tag{5.36}$$

となる。すなわち、内積を表す 2 階のテンソルは、単位行列 $\boldsymbol{E}$ で表現されることがわかった。同様に、x 座標を抜き出して積を与える関数は、

$$F(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = v_x w_x \tag{5.37}$$

となるので、上述の行列によって表現されるということがわかる[2)]。さて、今得られた

$$\lambda = F(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{F} \boldsymbol{w} \tag{5.38}$$

を変形すると、

$$\lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \boldsymbol{w} \tag{5.39}$$

ともできる。このことから、2 階のテンソルは 1 つのベクトルを入力した際に 1 つのベクトルを返す関数であるとも言える。

2)　実際には、テンソルとは座標によらない演算を示す。つまり、この関数は他の座標系では別の行列成分で表される。その場合、$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ の成分も表記が変わるため、結果として返っていくスカラー値は変化しない。残念ながら、どのような座標系でも行列成分が変化しないテンソル (等方テンソル) は、単位行列で表されるものしか無いことが知られているため、ここでは座標系によって形が変化してしまうテンソルの中で、単純なものを選び、例に挙げた。

5.3 テンソル積

さて、2 階のテンソルまでの概念を導入したので、多少脇道になるが、テンソル積について再度考察を行う。1 階のテンソル、つまり 1 つのベクトルを得て 1 つのスカラーを返す関数を 2 つ考え、これを F,G とする。つまり、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \\ G(\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{5.40}$$

である。今、上述の 2 つのテンソルは、1 つの「2 つのベクトルを得て 2 つのスカラー値を返す」関数として考えることができる。これについて、例えば 2 つの出力されるスカラー値の積を取れば、これを「2 つのベクトルを得て 1 つのスカラー値を返す」関数、つまり 2 階のテンソルとして考えられるのではないか？というのがテンソル積である。すなわち、テンソル積とは 2 つの 1 階のテンソルを組み合わせることで 1 つの 2 階のテンソルを作る演算である。これを実際に見てみよう。いま、出来上がるテンソル積を $H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ とすれば、

$$H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v})G(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{w}) \tag{5.41}$$

である。2 階のテンソル $H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ は、多重線形性より

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = v_xw_xH(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x) + v_xw_yH(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y) + v_xw_zH(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z) \\ +v_yw_xH(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x) + v_yw_yH(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_y) + v_yw_zH(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) \\ +v_zw_xH(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x) + v_zw_yH(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y) + v_zw_zH(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_z) \end{aligned} \tag{5.42}$$

であり、$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{w})$ は

$$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{w}) = (v_xf_x + v_yf_x + v_zf_x)(w_xg_x + w_yg_x + w_zg_x) \tag{5.43}$$

である。よって、これらの係数を比較すれば、$H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ を表す行列 $\boldsymbol{H}$ は、

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_x) & H(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y) & H(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z) \\ H(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_x) & H(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_y) & H(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z) \\ H(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x) & H(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y) & H(\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_xg_x & f_xg_y & f_xg_z \\ f_yg_x & f_yg_y & f_yg_z \\ f_zg_x & f_zg_y & f_zg_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g} \tag{5.44}$$

である。これは前述した 1 階のテンソル積に他ならない。すなわち、1 階のテンソル積とは 2 つの 1 階のテンソルが返す 2 つスカラー値について、その積であるスカラー値を返すような 2 階のテンソルを導く積である。ここで注意すべき点は、テンソル積によって表される 2 階のテンソルのみが 2 階のテンソルであるとは限らないことである。なぜなら、テンソル積は 2 つのベクトル、すなわち 6 つの値を用いて 9 つの値で構成される 2 階のテンソルを作っているため、作ることができる 2 階のテンソルに制限がかかるためである。

5.4 高階のテンソル

本文書では 2 階以上のテンソルは出てこないが、以上の議論を拡張していくことで更に階数の大きいテンソルを考えることができる。すなわち、n 階のテンソルとは、n 個のベクトルを受け取って 1 つのスカラー値を返す関数

$$F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = a \tag{5.45}$$

であり、かつそれぞれのベクトルに対し多重線形性、すなわち 1 つのベクトル以外全てのベクトルを固定した際に線形になる性質

$$F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \alpha\boldsymbol{v'}_i + \beta\boldsymbol{v''}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \alpha F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v'}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + \beta F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v''}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \tag{5.46}$$

があるものとして定義される。これまでの議論のように特徴量を算出すると、n 階のテンソルは 3^n 個の成分によって表すことができる (これはもはや行列などのように表すことが困難である)。

参考文献

索引