目　录

第 1 章 姿态更新算法

1.1 姿态更新的等效旋转矢量法

在捷联惯导系统中，惯性测量组合直接固联于载体，而制导和控制需要在导航坐标系中进行，因此必须通过坐标变换把测量值转换到导航坐标系,因此捷联姿态算法的优劣直接影响对载体的导航精度。由于有限转动的不可交换性，在捷联姿态系统中不可避免的存在着不可交换误差（俗称圆锥误差），基于等效旋转矢量的捷联姿态算法,是减小不可交换误差的有效方法。本文档将主要介绍双子样等效旋转矢量的姿态算法。

1.1.1 姿态四元数与旋转矢量

1、姿态四元数的基本理论：

确定两坐标系之间的方位关系问题是力学中的刚体定点转动理论，目前在工程实践中多采用四元数法。但刚体作有限转动时，刚体的空间角位置与旋转轴次序无关，对于小角度的转动我们近似认为是可交换的，这样，四元数中不可避免地引入了不可交换性误差。

四元数是一个由四个元构成的数，其超复数形式为：

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

在刚体定点转动理论中，根据欧拉定理，动坐标系相对于参考坐标系的方位，等效于动坐标系绕某一个等效转轴转动一个角度 θ。如果用 u 表示等效转轴方向的单位向量，则动坐标系的方位完全由 u 和 θ 两个参数确定。则用 μ 和 θ 可以构造一个四元数

$$\mathbf{q} = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2}$$

姿态四元数也可以直观地理解，四元数的四个元素就是该等效旋转矢量的方向和转动大小。定义 **μ** 的大小和方向是使参考坐标系绕 **μ** 转动一个角度 μ，就能与所选坐标系重合。可以表示成如下的四元数：

$$\mathbf{q}_b^R = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu/2) \\ (\mu_x/\mu)\sin(\mu/2) \\ (\mu_y/\mu)\sin(\mu/2) \\ (\mu_z/\mu)\sin(\mu/2) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix}, \mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$$

这个四元数的范数为：

$$\|\mathbf{q}\| = {q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = 1$$

称作“规范化”四元数，也叫变换四元数。这样我们就把三维空间和一个四维空间联系起来。用四维空间的性质和运算规则来研究三维空间中的刚体定点转动问题。三维空间的一个矢量可以看作标量为零的四元数。假定矢量 $\mathbf{r}^b$ 绕通过定点 o 某一轴转动了一个角度 θ，如转动后的矢量用 $\mathbf{r}^R$ 表示，则四元数用于矢量投影变换的公式如下：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}^R \end{bmatrix} = \mathbf{q}_b^R \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}^b \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_b^{R*}$$

化简后可得：

$$\begin{bmatrix} x^R \\ y^R \\ z^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^{\ 2}+q_1^{\ 2}-q_2^{\ 2}-q_3^{\ 2} & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_2^{\ 2}-q_3^{\ 2}+q_0^{\ 2}-q_1^{\ 2} & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_3^{\ 2}-q_2^{\ 2}-q_1^{\ 2}+q_0^{\ 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix}$$

显然，如果知道了姿态四元数的四个元，则可以求出方向余弦矩阵（姿态矩阵）的九个元素。反过来，如果知道了姿态矩阵的九个元素，也可以相应的求出姿态四元数的四个元。

2、姿态四元数的微分方程

姿态四元数的微分方程为：

$$\dot{\mathbf{q}}_b^R = \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^R \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \end{bmatrix}$$

所以四元数微分方程的解为：

$$\mathbf{q}_b^R(t_{k-1}) = [\underset{4\times4}{\mathbf{I}}\cos\frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\Theta\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}]\mathbf{q}_b^R(t_k)$$

$$\Delta\theta^2 = \Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2$$

$$\Delta\Theta \approx \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

3、等效旋转矢量的基本理论

等效旋转矢量法也是建立在刚体矢量旋转思想基础上的，与四元数的不同在于：在姿态更新周期内，四元数法计算姿态四元数，而旋转矢量法先计算姿态变化四元数，再计算姿态四元数。等效旋转矢量法分两步来完成：

(1)旋转矢量的计算。旋转矢量描述了飞行器姿态的变化

(2)四元数的更新。四元数描述了飞行器相对参考坐标系（选导航坐标系）的实时方位

一个坐标系转到另一个坐标可以通过多次转动来完成（欧拉角法），也可以通过绕一个定义在参考坐标系中的矢量单次转动来实现。这个矢量就是等效旋转矢量，具有三个元素，旋转矢量的方向给出了转轴的方向，旋转矢量的模为转动角度的大小。

4、旋转矢量与四元数的关系

这两者的联系，可以直接从它们的概念中获得。当描述转动的旋转矢量为$\phi=\varphi\vec{n}$，即动坐标系沿$\vec{n}$转过角度φ时，对应的四元数记为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \frac{\phi}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

1.1.2 等效旋转矢量的微分方程（Bortz 方程）

$$\dot{\phi}_{Rb}^{b}=\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}+\frac{1}{2}\phi_{Rb}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}+\frac{1}{\|\phi_{Rb}^{b}\|^{2}}\left(1-\frac{\|\phi_{Rb}^{b}\|\sin\|\phi_{Rb}^{b}\|}{2(1-\cos\|\phi_{Rb}^{b}\|)}\right)\phi_{Rb}^{b}\times\left(\phi_{Rb}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}\right)$$

由于姿态更新周期一般都很短，ϕ 很小，ϕ 的高次项可略去不计，得到工程中常用的近似方程：

$$\dot{\phi}_{Rb}^{b}\approx\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}+\frac{1}{2}\phi_{Rb}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}+\frac{1}{12}\phi_{Rb}^{b}\times\left(\phi_{Rb}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}\right)$$

1.1.3 等效旋转矢量求解

四元数法求解中用到了角速度矢量的积分。当不是定轴转动时，即角速度矢量的方向在空间变化时，将使计算产生误差，称为转动不可交换误差。

为消除转动不可交换误差，必须对角速度矢量积分进行修正，修正的方法是采用等效旋转矢量法把角速度矢量积分等效为等效旋转矢量，利用等效旋转矢量的概念将四元数微分方程转化为等效旋转矢量微分方程（Bortz 方程）。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}=\int_{t}^{t+\Delta t}\omega dt \qquad \rightarrow \qquad \phi=\int_{t}^{t+\Delta t}(\omega+\sigma)dt$$

求解 Bortz 方程，根据角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 求解出等效旋转矢量 ϕ，用 ϕ 代替四元数求解中的 $\Delta\theta$，则可消除计算中四元数的不可交换误差。

进一步近似：$\dot{\phi}_{Rb}^{b}=\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}+\frac{1}{2}\phi_{Rb}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}$

对微分方程右边进行积分以更新旋转矢量

$$\phi_{Rb}^{b}(t_k)=\phi_{Rb}^{b}(t_{k-1})+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(\tau)+\frac{1}{2}\phi_{Rb}^{b}(\tau)\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(\tau)\right]d\tau$$

被积函数难以进一步化简，只能作不同的假设处理，假设在相邻两个积分周期内 $\left[t_{k-2},t_k\right]$ 内，b 系相对于 R 系的旋转角速度向量随时间线性变化（双子样假设）。

$$\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(t)=\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot(t_k-t_{k-1})$$

解算系数 **a**，**b**，代入旋转矢量积分式可得旋转矢量的更新方程为：

$$\phi_{Rb}^{b}(t_k)=\Delta\boldsymbol{\theta}_k+\frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

↑二阶圆锥误差补偿项

1.1.4 姿态更新的等效旋转矢量法

已知量：

- $\mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)}$ ：上一历元的姿态四元数
- $\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}$ ：上一历元的陀螺角增量输出
- $\Delta\boldsymbol{\theta}_{k}$ ：当前历元的陀螺角增量输出

更新步骤：

- 高频更新 b 系（等效旋转矢量法）

$$\phi_k = \phi_{b(k-1)b(k)} = \Delta\boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\|\phi_k\|}{2} \\ \frac{\phi_k}{\|\phi_k\|}\sin\frac{\|\phi_k\|}{2} \end{bmatrix}$$

载体坐标系姿态的变化很快，陀螺仪角增量输出也很快，因此要采用足够小的更新周期 h，高频更新。程序中每一历元都要更新一次 b 系的姿态变化。

- 低频更新 n 系（等效旋转矢量法）

$$\zeta_k = \zeta_{n(k-1)n(k)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\boldsymbol{\omega}_{en}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right) dt \approx \left(\boldsymbol{\omega}_{en,k-1/2}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie,k-1/2}^n\right)\left(t_k - t_{k-1}\right)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \omega_e \cdot \cos\varphi & 0 & -\omega_e \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} \frac{V_E}{R_N + h} & -\frac{V_N}{R_M + h} & -\frac{V_E \cdot \tan\varphi}{R_N + h} \end{bmatrix}^T$$

R_M：子午圈半径，R_N：卯酉圈半径，φ：当地纬度，h：当地海拔高

V_E，V_N 是载体在东方向、北方向的投影速度。

本文档的算法基于先姿态更新，再速度更新、位置更新，所以$[t_{k-1},t_k]$周期内的中间速度，是由 t_{k-2} 和 t_{k-1} 时刻的速度线性外推得到的。同理得到 $\varphi_{(k-1/2)}$ 和 $h_{(k-1/2)}$

接下来求得导航坐标系的姿态四元数

$$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\|\zeta_k\|}{2} \\ -\frac{\zeta_k}{\|\zeta_k\|}\sin\frac{\|\zeta_k\|}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{8}\|\zeta_k\|^2 \\ -\frac{1}{2}\zeta_k \end{bmatrix}$$

- 计算当前时刻的姿态四元数

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \otimes \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

- 对更新后的姿态四元数进行归一化处理

$$q_i = \frac{\hat{q}_i^{\ 2}}{\sqrt{\hat{q}_0^{\ 2} + \hat{q}_1^{\ 2} + \hat{q}_2^{\ 2} + \hat{q}_3^{\ 2}}} \text{（}i = 0,1,2,3\text{)}$$

- 四元数转姿态矩阵 C_b^n，完成姿态更新

1.1.5 程序实现

- 1、每个历元都更新 b 系的姿态变化四元数，每 200 个历元更新 n 系的姿态变化四元数，再根据上一历元的姿态四元数，得到每个历元的姿态四元数。（本程序实际上每个历元都更新 n 系姿态变化四元数）
- 2、姿态四元数转换为欧拉角
- 3、输出这个历元的姿态
- 4、处理下一个历元的数据

第 2 章 速度更新算法

速度更新算法的关键是比力转换算法。比力转换算法处理惯性敏感元件数据，以计算在速度算法修正间隔期内，在导航坐标系中的总的比力增量的积分。把导航坐标系中的比力增量加上重力增量以及坐标系旋转效应，加上先前的速度值以修正速度。

速度更新是指根据速度微分方程（式 2-1），推导当前时刻速度与前一时刻速度之间的递推关系（式 2-2）。推导 n 系下的速度更新算法：

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times\mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n \qquad (2\text{-}1)$$

对上式进行时间积分可得

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_k^{n-1} + \Delta\mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_k^{n-1} & (\text{上一历元的速度}) \\ \Delta\mathbf{v}_{f,k}^n = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b dt & (\text{比力积分项}) \\ \Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\mathbf{g}_l^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times\mathbf{v}_e^n\right]dt & (\text{重力/哥氏积分项}) \end{cases} \qquad (2\text{-}2)$$

2.1 重力/哥氏积分项

因为在积分周期内，被积函数数值随时间变化缓慢，计算所需的位置和速度均采用中间时刻的位置和速度。

$$\Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n = \left\{\left[\mathbf{g}_l^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times\mathbf{v}_e^n\right]_{t_{k-1/2}}\right\}\cdot\left(t_k - t_{k-1}\right)$$

中间时刻的位置和速度，通过初始时刻和前一历元初始时刻的位置和速度外推得到。所以：

$$\left.\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right|_{t_{k-1/2}} = \begin{bmatrix}\omega_e\cdot\cos\varphi_{t_{k-1/2}} & 0 & -\omega_e\cdot\sin\varphi_{t_{k-1/2}}\end{bmatrix}^T$$

$$\left.\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right|_{t_{k-1/2}} = \begin{bmatrix}\dfrac{V_E}{R_N+h} & -\dfrac{V_N}{R_M+h} & -\dfrac{V_E\cdot\tan\varphi}{R_N+h}\end{bmatrix}^T$$

本程序实际上没考虑内插或外推，直接采用上一历元的位置结果和速度结果进行计算。

2.2 比力积分项

2.2.1 n 系比力积分项

$$\Delta\mathbf{v}_{f,k}^{n}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b dt \ =\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)}\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\mathbf{f}^b dt$$

↑缓变项　　↑快速变化项

将 n 系变换矩阵简化处理

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}+\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k-1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}+\mathbf{I}\right)$$

$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 是 t_k 时刻的 n 系变化姿态阵，因为相邻两个历元的 n 系之间的相对姿态变化是个小角度，所以可以用 Bortz 方程计算，在小角度假设下取至一阶近似：

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}\approx\mathbf{I}-(\zeta_{k-1,k}\times)$$

$\zeta_{k-1,k}$ 表示 t_{k-1} 时刻的 n 系转动到 t_k 时刻 n 系所对应的等效旋转矢量

$$\zeta_{k-1,k}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\boldsymbol{\omega}_{en}^n+\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)dt\approx\left(\boldsymbol{\omega}_{en,k-1/2}^n+\boldsymbol{\omega}_{ie,k-1/2}^n\right)\left(t_k-t_{k-1}\right)$$

所以比力积分项可整理成：

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v}_{f,k}^{n}&=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}+\mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\mathbf{f}^b dt\\&=\left[\mathbf{I}-(0.5\zeta_{k-1,k}\times)\right]\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\mathbf{f}^b dt\end{aligned}\tag{2-3}$$

2.2.2 b 系比力积分项

b 系比力积分项就是式 2-3 的 $\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\mathbf{f}^b dt$ ，记作 $\Delta\mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$ 假设 t_{k-1} 时刻的 b 系转动到 t_k 时刻的 b 系的等效旋转矢量是一个小角度，并且假设在[t_{k-2}, t_k]时段内角速度观测量和比力观测量均随时间线性变化，导出速度更新的双子样算法。

b 系比力积分项为：

$$\Delta\mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}=\Delta\mathbf{v}_k+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\mathbf{v}_k+\frac{1}{12}(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\mathbf{v}_k+\Delta\mathbf{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)$$

↑当前历元陀螺输出　　↑当前历元加表输出

2.2.3 程序实现

- 1、取当前历元陀螺仪和加表的输出，和上一历元陀螺仪和加表的输出，计算 b 系比力积分项
- 2、根据上两个历元的位置和速度结果，计算当前中间时刻的 $\boldsymbol{\omega}_{en,k-1/2}^n$、$\boldsymbol{\omega}_{ie,k-1/2}^n$、

$\mathbf{g}_l^n$ 、 $v_{k-1/2}^n$

- 3、计算 n 系的比力积分项
- 4、计算比力积分项
- 5、计算重力/哥氏积分项
- 6、取上一历元的速度解算结果，加上速度修正项（比力积分项、重力/哥氏积分项），更新速度

第 3 章 位置更新算法

3.1 公式推导

以大地坐标表示位置，位置求导得到速度，则有：

$$\dot{\mathbf{r}}^n=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\lambda}\\ \dot{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{R_M+h} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(R_N+h)\cos\varphi} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_N\\ V_E\\ V_D\end{pmatrix}$$

所以首先更新高程，假设积分周期内V_D为时间线性变化，则有：

$$h(t_k)=h(t_{k-1})-\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_D dt$$

$$h(t_k)=h(t_{k-1})-\frac{1}{2}(v_D(t_k)+v_D(t_{k-1}))(t_k-t_{k-1})$$

PS：从公式显然可以看出，先更新速度，再更新位置。

接着更新纬度，积分周期内可先忽略R_M随纬度和时间的变化，认为是常值，R_M用$\varphi(t_{k-1})$计算。高程 h 在积分周期内简化为常值，h 取积分周期内的平均高程。

$$\varphi(t_k)=\varphi(t_{k-1})+\frac{1}{2}\frac{v_N(t_k)+v_N(t_{k-1})}{R_M(\varphi(t_{k-1}))+\bar{h}}(t_k-t_{k-1})$$

最后更新经度

$$\lambda(t_k)=\lambda(t_{k-1})+\frac{1}{2}\frac{v_E(t_k)+v_E(t_{k-1})}{(R_N(\bar{\varphi})+\bar{h})\cos(\bar{\varphi})}(t_k-t_{k-1})$$

$$\bar{\varphi}=\frac{1}{2}(\varphi(t_k)+\varphi(t_{k-1}))$$

3.2 程序实现

- 1、由速度更新结果和上一历元的位置解算结果，更新高程
- 2、计算子午圈半径，计算平均高程，更新纬度
- 3、计算平均纬度，和平均纬度下的卯酉圈半径，更新经度

附录

A1 大地测量基础知识

本程序基于 WGS84 地球椭球参数

- 长半轴 a=6.3781370e6 m；
- 短半轴 b=6356752.3142m；
- 地球引力常数（含大气层）GM=3.986004418×10^{14} m^3/s^2；
- 地球自转角速度ω =7.292115×10^{-5} rad/s。
- 扁率 1/f =298.257223563；
- 椭球正常重力位 U0=62636860.8497 m^2/s^2；
- 赤道正常重力 g=9.7803267714m/s^2
- 第一偏心率平方 e^2 =0.00669437999013；
- 第二偏心率平方 e'^2= 0.006739496742227

地球椭球面上的几种曲率半径

- 子午圈曲率半径

$$R_M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

- 卯酉圈曲率半径

$$R_N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

地球椭球附近一点的正常重力为：

$$g_1 = 9.7803267715\times(1.0+0.0052790414\times\sin^2\varphi_{k-1}+0.0000232718\times\sin^4\varphi_{k-1})$$

$$g_2 = (-0.000003087691089+0.000000004397731\times\sin^2\varphi_{k-1})\times h_{k-1}$$

$$g3 = 0.000000000000721\times h^2{}_{k-1}$$

$$g_{k-1} = g_1+g_2+g_3$$

A2 姿态表达式的相互转换

欧拉角转换为方向余弦矩阵

- 欧拉角

$$\boldsymbol{\phi}_{nb} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{nb} \\ \boldsymbol{\lambda}_{nb} \\ \boldsymbol{\psi}_{nb} \end{bmatrix}$$

- 姿态矩阵/方向余弦矩阵

$$\boldsymbol{C}_b^n = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\varphi s\psi + s\varphi s\theta c\psi & s\varphi s\psi + c\varphi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\varphi c\psi + s\varphi s\theta s\psi & -s\varphi c\psi + c\varphi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\varphi c\theta & c\varphi c\theta \end{pmatrix}$$

四元数转换为方向余弦矩阵

- 四元数

$$q_b^n = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- 方向余弦矩阵

$$C_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2 \end{bmatrix}$$

欧拉角转换为四元数

- 欧拉角

$$\boldsymbol{\phi}_{nb} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{nb} \\ \boldsymbol{\lambda}_{nb} \\ \boldsymbol{\psi}_{nb} \end{bmatrix}$$

- 四元数

$$q_b^n = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$

- 四元数的归一化

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0 + \hat{q}_1 + \hat{q}_2 + \hat{q}_3}}$$

方向余弦矩阵转换为欧拉角

- 方向余弦阵

$$\boldsymbol{C}_b^n = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\varphi s\psi + s\varphi s\theta c\psi & s\varphi s\psi + c\varphi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\varphi c\psi + s\varphi s\theta s\psi & -s\varphi c\psi + c\varphi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\varphi c\theta & c\varphi c\theta \end{pmatrix}$$

- 欧拉角

$$\varphi_{nb} = \tan^{-1}\frac{C_{32}}{C_{33}}(-\pi < \varphi < \pi)$$

$$\theta_{nb} = \tan^{-1}\frac{-C_{31}}{\sqrt{C_{32}^2 + C_{33}^2}}(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$$

$$\psi_{nb} = \tan^{-1}\frac{C_{21}}{C_{11}}(-\pi < \psi < \pi)$$