次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$$

説明

与えられた積分は区間が非有界であるため、
狭義リーマン積分の値は存在しない。

ただし、$[0,1)$上では $\left|\frac{1}{1+x^n}\right| \leq 1$ が、
$[1,\infty)$ 上では $\left|\frac{1}{1+x^n}\right| \leq \frac{1}{x^n}$ が成り立つ。
$\left|\frac{1}{1+x^n}\right|$ の優関数はそれぞれの範囲の上で
可積分であるので、与えられた積分は
広義リーマン積分において有限の値に収束する。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$$

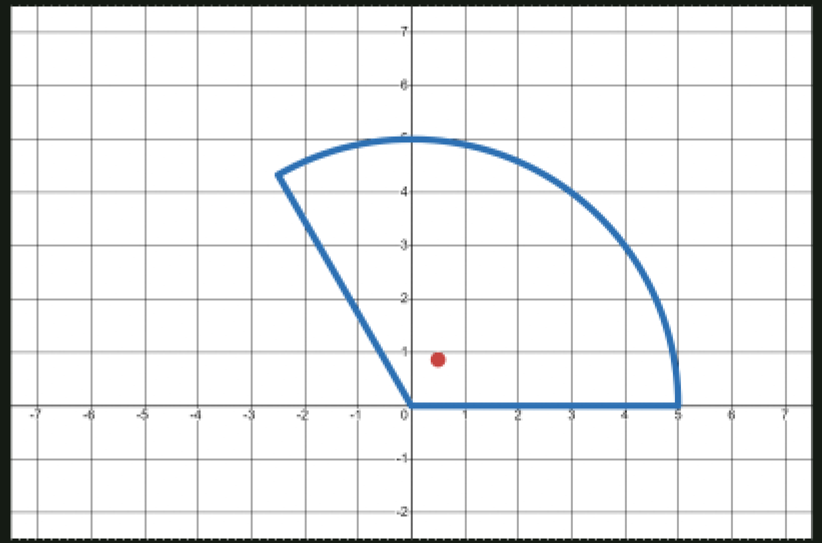
<u>解答Ⅰ（0）</u>

$R \in (1,\infty), \alpha = e^{\frac{\pi}{n}i}$ に対して、複素平面上の単純閉曲線Cを次のC_0, C_1, C_2の和として定める。

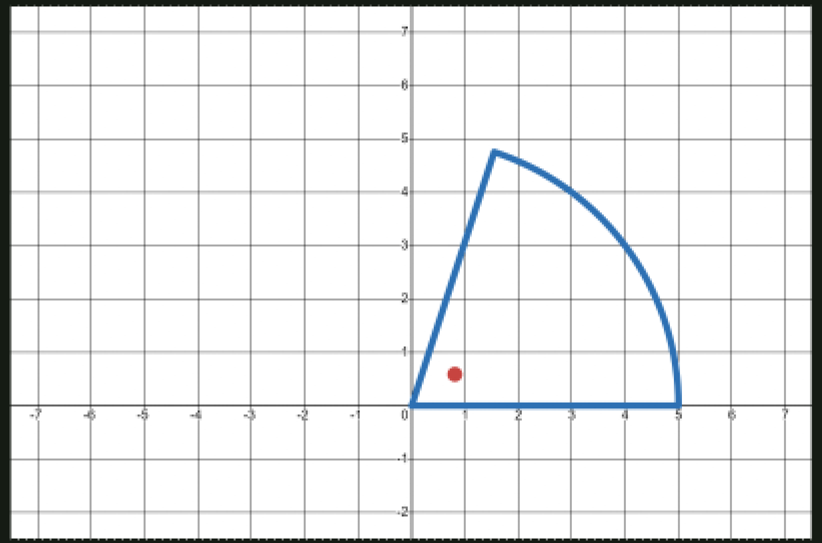
$$C_0 : z(t) = t \quad (t \in [0,R])$$

$$C_1 : z(t) = Re^{it} \quad (t \in [0, 2\operatorname{Arg}(\alpha)])$$

$$C_2 : z(t) = \alpha^2 t \quad (t \in [0,R])$$



$n=3$ のとき



$n=5$ のとき

以下、$f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ とする。

2以上の任意のnに対して $1+\alpha^n = 0$ であって、$0 < |\alpha| < R, 0 < \operatorname{Arg}(\alpha) < 2\operatorname{Arg}(\alpha)$ であるから、αはC内部に存在するfの特異点である。
また、C内部にはfの他の特異点は存在しない。

従って、留数定理により次の関係が成り立つ。

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f,\alpha)$$

上記の関係は任意の $R \in (1,\infty)$ に対して従うので、$R \to \infty$ のときを考えれば十分である。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$$

解答1（1）

Cは三つの部分曲線からなるので、
以下のような計算により先の周回積分は
三つの積分の和として表せる。

$$\begin{aligned}
&\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^R f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\,\mathrm{Arg}(\alpha)} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right) \\
&\quad + \int_R^0 f\left(\alpha^2 t\right)\left(\alpha^2\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

$$\int_0^R f(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \quad (R \to \infty)$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{2\,\mathrm{Arg}(\alpha)} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\int_0^{2\,\mathrm{Arg}(\alpha)} \frac{iRe^{it}}{1+\left(Re^{it}\right)^n}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{2\,\mathrm{Arg}(\alpha)} \left|\frac{iRe^{it}}{1+\left(Re^{it}\right)^n}\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\,\mathrm{Arg}(\alpha)} \frac{R}{\left|1+\left(Re^{it}\right)^n\right|}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{2\,\mathrm{Arg}(\alpha)} \frac{R}{R^n-1}\,\mathrm{d}t \\
&\to 0 \quad (R \to \infty)
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad (n\in\mathbb{Z}_{\geq 2})$$

解答1（2）

$$\begin{aligned}
&\int_R^0 f\left(\alpha^2 t\right)\left(\alpha^2\,\mathrm{d}t\right)\\
&= -\alpha^2\int_0^R \frac{1}{1+\left(\alpha^2 t\right)^n}\,\mathrm{d}t\\
&= -\alpha^2\int_0^R \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t\\
&\to -\alpha^2\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \quad (R\to\infty)
\end{aligned}$$

$$\therefore \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \to \left(1-\alpha^2\right)\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \quad (R\to\infty)$$

ところで、$1+z^n=(z-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-1-k}z^k$ より

αはfの1位の極と言える。

従って、$\mathrm{Res}(f,\alpha)$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,\alpha) &= \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)\\
&= \lim_{z\to\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-1-k}z^k\right)^{-1}\\
&= \frac{1}{n\alpha^{n-1}} = -\frac{\alpha}{n}
\end{aligned}$$

以上より、$\left(1-\alpha^2\right)\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{n}\alpha\pi i$

を満たし、$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ が従う。

解答1 補足1

【留数の明示公式】

点aがfのm位の極であるとき、次が成り立つ。

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

解答1 補足2

$$\begin{aligned}-\frac{2}{n}\alpha\pi i\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}&=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{2i\cdot\alpha}{\alpha^2-1}\\&=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{2i}{\alpha-\alpha^{-1}}\\&=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{2i}{e^{\frac{\pi}{n}i}-e^{-\frac{\pi}{n}i}}\\&=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$$

解答2

与えられた積分に対して次の置換を行う。

$$t = x^n, \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{1}{1+t}\cdot\left(\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

さらに次の置換を行う。

$$u = \frac{t}{1+t},\ \frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{1}{n}-1}(1-u)\left(\frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{1}{n}-1}(1-u)^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

これは $\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$ に等しい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}\\ &= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\end{aligned}$$

解答2 補足

【ガンマ関数】

$\Re z > 0$ なる複素数zに対して、$\Gamma(z)$ を次のように定める。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

【ベータ関数】

$\Re x, \Re y > 0$ なる複素数 x, y に対して、$B(x, y)$ を次のように定める。

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t$$

【ガンマ関数とベータ関数】

任意の $\Re x, \Re y > 0$ なる複素数 x, y に対して、次の関係が成り立つ。(証明略)

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y)$$

【ガンマ関数の相反公式(相補公式)】

$0 < \Re z < 1$ なる複素数zに対して、次の関係が成り立つ。(証明略)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$