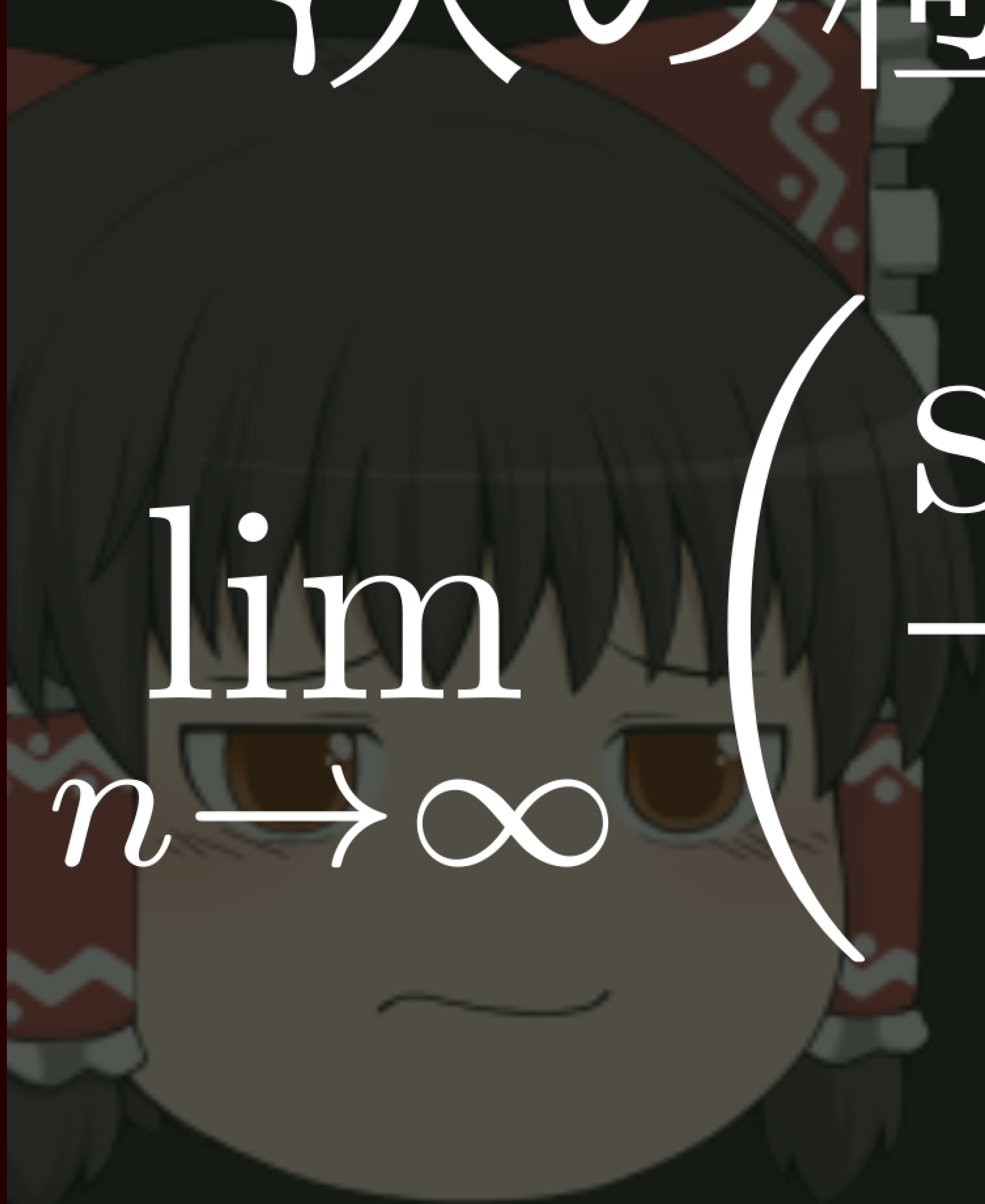

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \quad (x\in\mathbb{R})$$

説明

xは固定されている。

与えられた極限は、次のa_nの極限として考られる。

$$a_0 = 1$$

$$a_n = a_{n-1}\cdot\frac{\sin(x)}{x} \quad (n\geq 1)$$

上記は初項1かつ公比$\dfrac{\sin(x)}{x}$の等比数列である。

公比の絶対値が1未満であれば極限は収束する。

解答

定義域全体で公比の絶対値は常に1未満である。

証明

$0<z<1$ として考える。

$$\begin{aligned}0 &< \int_0^z \frac{w^2}{\sqrt{1-w^2}\left(1+\sqrt{1-w^2}\right)}\mathrm{d}w\\ &= \int_0^z \frac{1-\sqrt{1-w^2}}{\sqrt{1-w^2}}\mathrm{d}w\\ &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\mathrm{d}w - \int_0^z \mathrm{d}w\\ &= \sin^{-1}(z) - z\end{aligned}$$

$z=\sin(x)$ とすると $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ での成立が言え、

$|\sin(x)|\leq 1$ より $x>1$ ならば自明に成り立つ。

偶関数であるから $x<0$ の場合も同様に言える。

解答（I）

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| < 1 \text{ より、}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n = 0$$

結論

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n = 0 \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

補足

問題の極限はxが特定の非零実数に固定されて0に収束する。即ち、これは各点収束を意味する。

厳密な証明

問題の状況は次のように表せる。(ϵN論法)

$\forall\epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \in \mathbb{N};\ n > N \implies \left|\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n\right| < \epsilon$$

$\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| < 1$ より、$N = \dfrac{\ln(\epsilon)}{\ln|\sin(x)| - \ln|x|}$ なる

N を用いて上記の成立を認められる。

$$N = \frac{\ln(\epsilon)}{\ln|\sin(x)| - \ln|x|} \iff \epsilon = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^N$$

$$n > N \implies \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^n < \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^N$$

$$\iff \left|\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n\right| < \epsilon$$

補足(一様収束性はあるのか)

$f_n(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^n,\ f(x) = 0$ としたとき、

$I = (0, \infty)$ 上の f_n の極限は、xに依らずには

f に収束しない。即ち f_n は f に一様収束しない。

【一様収束の定義】

$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall x \in I,$

$\forall n \in \mathbb{N};\ n > N \implies |f_n - f| < \epsilon$

$\epsilon^{\frac{1}{N+1}} < \dfrac{\sin(x)}{x}$ を仮定すれば

$\epsilon < \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{N+1}$ が言えるので、$n = N + 1$

として定義の不成立を認められる。