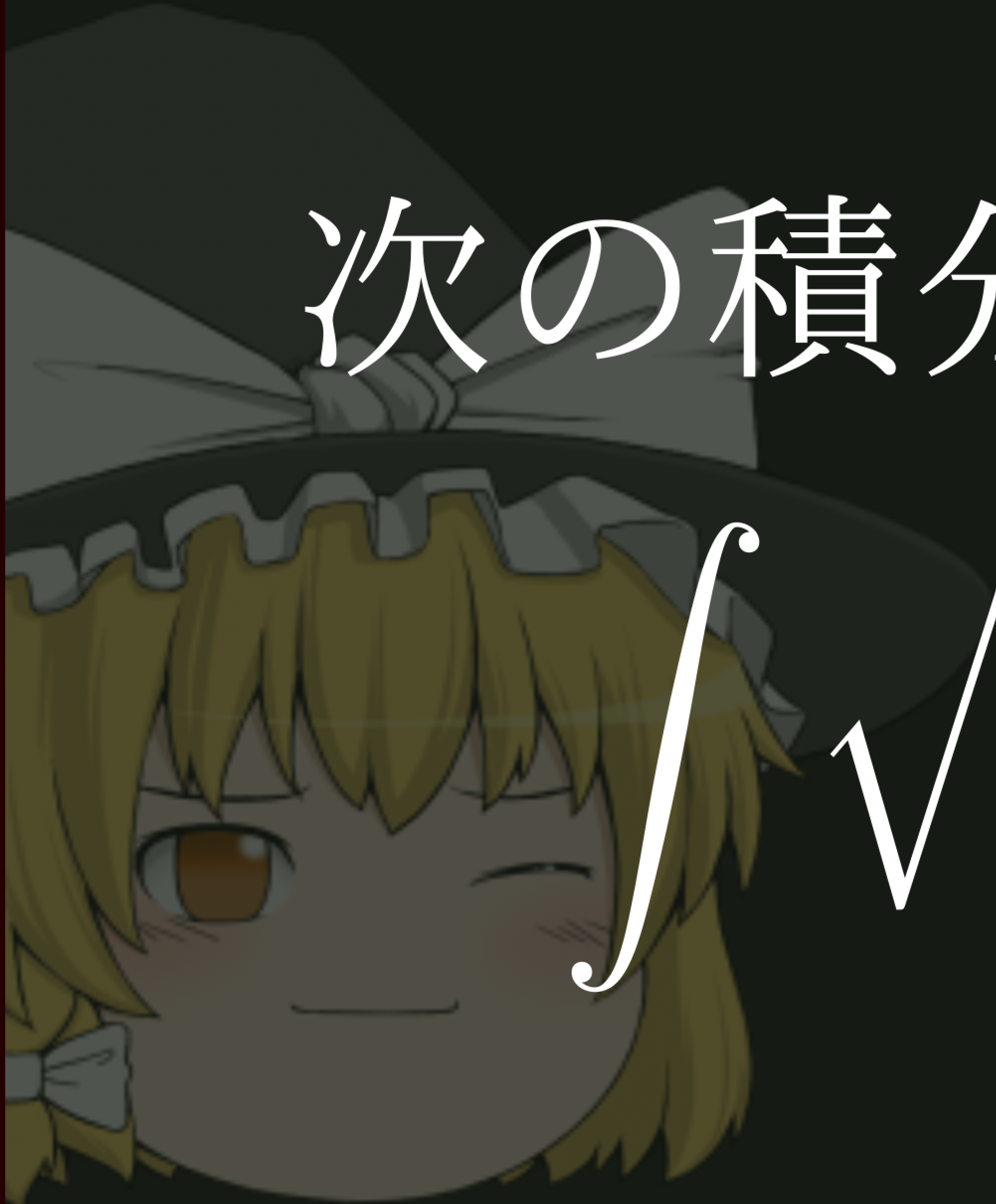

次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

解答

与えられた積分を I とする。

I に対して、次の置換を行う。

$$\sqrt{x} = (\tan(\theta))^2$$

このとき、$\mathrm{d}x = 4\,(\tan(\theta))^3\,(\sec(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta$ である。

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1+(\tan(\theta))^2} \cdot 4\,(\tan(\theta))^3\,(\sec(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int (\sec(\theta))^3\,(\tan(\theta))^3\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int (\sec(\theta))^2\left((\sec(\theta))^2-1\right)(\sec(\theta)\tan(\theta)\,\mathrm{d}\theta)
\end{aligned}$$

さらに、I に対して置換を行う。

$$\sec(\theta) = u$$
$$\left(\sec(\theta)\tan(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}u\right)$$

$$\begin{aligned}
I &= 4\int u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u \\
&= 4\int \left(u^4-u^2\right)\mathrm{d}u \\
&= 4\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right)+\mathrm{C} \\
&= \frac{4}{15}u^3\left(3u^2-5\right)+\mathrm{C} \\
&= \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+\mathrm{C}
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

補足

解答で行った二つの置換を見てみる。

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= (\tan(\theta))^2 \\ \sec(\theta) &= u\end{aligned}$$

特に二行目に注目すると、

$$\begin{aligned}u &= \sec(\theta) \\ &= \sqrt{(\sec(\theta))^2} \\ &= \sqrt{1+(\tan(\theta))^2} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

とわかり、被積分関数をそのまま置き換えたことと同じである。

おまけ

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{1+\sqrt{x}} \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} \\ \mathrm{d}x &= 4u\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

結論

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+\mathrm{C}$$