実数x, yの方程式 (kは実定数)

$$\begin{cases} x = y^2 + k \\ y = x^2 + k \end{cases}$$

次の等式を満たす実数x, yを全て答えよ。(kは定数)

$$\begin{cases} x = y^2 + k \\ y = x^2 + k \end{cases}$$

説明

1つ目の式のyを2行目のもので置き換えると、
次の関係が得られる。

$$x^4 + 2kx^2 - x + k^2 + k = 0$$

しかし、上の等式を満たすようなxを
見つけることは容易ではない。
xとyは対称なのでyについても同様に言える。

解答 (0)

二式の和や差から基本対象式を得る。

$$\begin{aligned} x - y &= y^2 - x^2 \\ (x-y)(1+x+y) &= 0 \end{aligned}$$

$x = y$ と $1 + x + y = 0$ の場合に分けて考える。

$x = y$ の場合

$$\begin{aligned} x^2 - x + k &= 0 \\ x &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4k}\right) \end{aligned}$$

$1 - 4k \geq 0$ すなわち $\frac{1}{4} \geq k$ ならば解が存在する。

次の等式を満たす実数x, yを全て答えよ。（kは定数）

$$\begin{cases} x = y^2 + k \\ y = x^2 + k \end{cases}$$

解答（1）

$1 + x + y = 0$ の場合

$$x + y = x^2 + y^2 + 2k$$
$$x + y = (x + y)^2 - 2xy + 2k$$
$$-1 = 1 - 2xy + 2k$$
$$xy = 1 + k$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = 1 + k \end{cases}$$

xとyの基本対象式を得た。

これらはzの方程式 $z^2 + z + 1 + k = 0$ の解と考えることができる。

これを解くと

$$z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3 - 4k}\right)$$

であるので、

$$x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3 - 4k}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(-1 \mp \sqrt{-3 - 4k}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

$-\frac{3}{4} \geq k$ ならば解が存在する。

次の等式を満たす実数x, yを全て答えよ。(kは定数)

$$\begin{cases} x = y^2 + k \\ y = x^2 + k \end{cases}$$

<u>結論</u>

$k > \frac{1}{4}$ の場合

実数解は存在しない。

$\frac{1}{4} \geq k > -\frac{3}{4}$の場合

$$\begin{aligned}(x, y) = &\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4k}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4k}\right)\right), \\ &\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4k}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4k}\right)\right)\end{aligned}$$

$-\frac{3}{4} \geq k$ の場合

$$\begin{aligned}&(x, y) \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4k}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4k}\right)\right), \\ &\quad \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4k}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4k}\right)\right), \\ &\quad \left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3-4k}\right), \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3-4k}\right)\right), \\ &\quad \left(\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3-4k}\right), \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3-4k}\right)\right)\end{aligned}$$