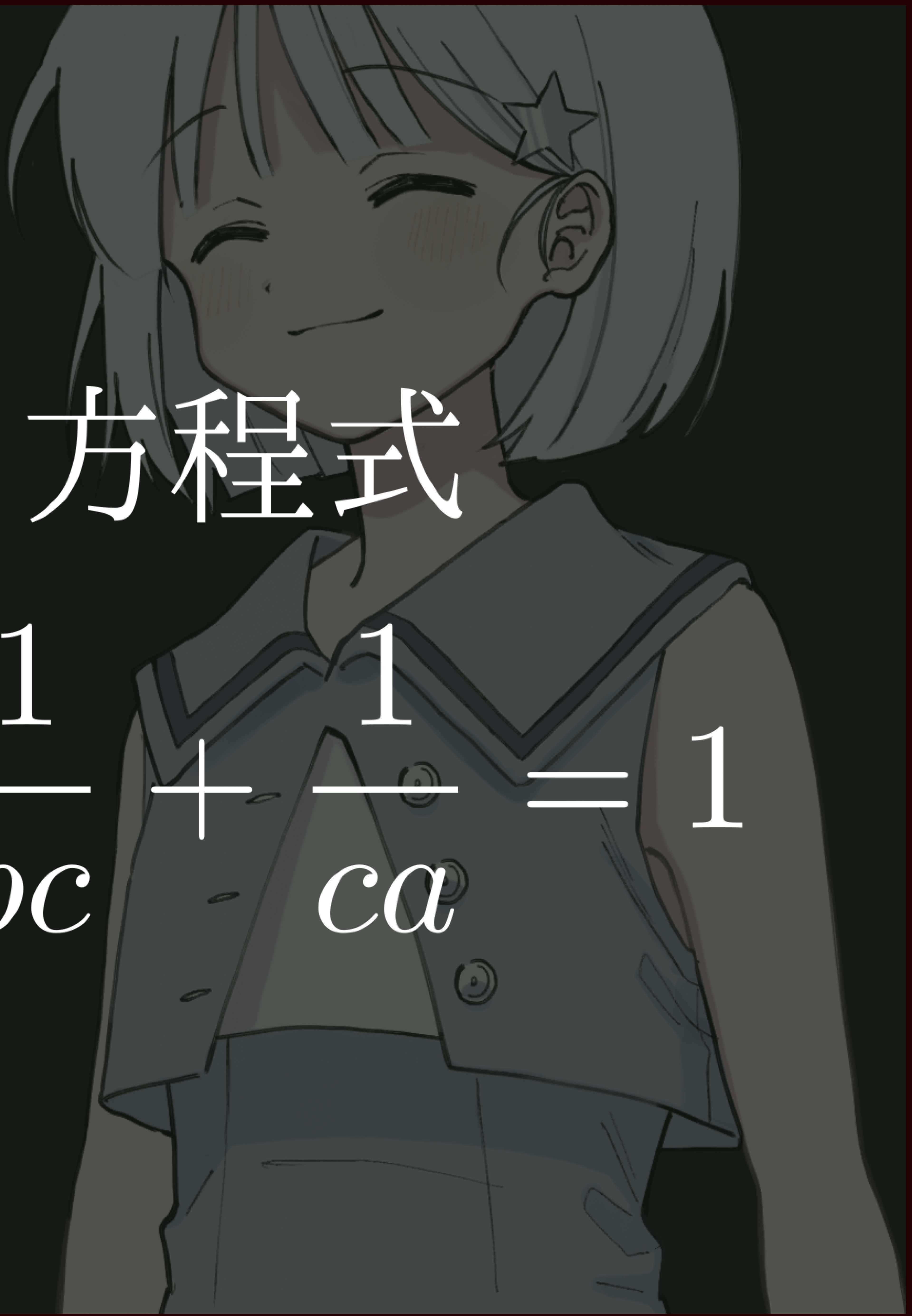
自然数 a, b, c の方程式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$$



次の等式を満たす自然数 a, b, c を全て答えよ。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1 \quad (a \leq b \leq c)$$

解答（0）

$$\begin{aligned}
& a \leq b \leq c \\
&\iff \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \\
&\implies \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \leq \frac{3}{a}+\frac{3}{a^2} \\
&\iff 1 \leq \frac{3}{a}+\frac{3}{a^2} \\
&\iff 4a^2 \leq 12a+12 \\
&\iff (2a-3)^2 \leq 21 \\
&\iff a \leq \frac{3+\sqrt{21}}{2} \\
&\implies a < 4
\end{aligned}$$

$a=1$ の場合は成り立たない為、$2 \leq a < 4$ だと考えられる。従って、$a=2,3$ の場合が解に該当する。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$$

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{bc}=1-\frac{1}{a}$$

$$(a-1)(a+1)(b+c)+a(a-1)=(a-1)^2bc$$

$$((a-1)b+a+1)((a-1)c+a+1)=2a^2+a+1$$

次の等式を満たす自然数 a, b, c を全て答えよ。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1 \quad (a \leq b \leq c)$$

解答（Ⅰ）

$$((a-1)b+a+1)((a-1)c+a+1)=2a^2+a+1$$

$a=2$ のとき

$$\begin{aligned}((a-1)b+a+1)((a-1)c+a+1)&=2a^2+a+1\\(b+3)(c+3)&=11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b+3, c+3)&=(1, 11)\\(b, c)&=(4, 14)\end{aligned}$$

$a=3$ のとき

$$\begin{aligned}((a-1)b+a+1)((a-1)c+a+1)&=2a^2+a+1\\(2b+4)(2c+4)&=22\\2(b+2)(c+2)&=11\end{aligned}$$

左辺は偶数、右辺は奇数。すなわち、この関係を満たす自然数 b, c は存在しない。

結論

$$\exists a, b, c \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1, a \leq b \leq c$$

$$\iff (a, b, c)=(2, 4, 14)$$