次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

<u>説明</u>

与えられた積分を $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上の計算に変更したものは King Property の利用が適した問題の例としてよく知られる。$\left(u = \frac{\pi}{2} - x \text{ と置換}\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

しかしながら、King Property は区間なしの積分に対しては有効でない。

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答I（0）

与えられた積分に対して、次のような置換を行う。(ワイエルシュトラス置換)

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right),\ \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x\\ &=\int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\ &=\int \frac{-4u}{(u^2-2u-1)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$\alpha=1+\sqrt{2},\beta=1-\sqrt{2}$ とすると、複素数 k_0,k_1,k_2,k_3 が存在して、定義域内のuに対して次の関係を恒等的に満たす。

$$\frac{-4u}{(u^2-2u-1)(u^2+1)}=\frac{k_0u+k_1}{u^2+1}+\frac{k_2}{u-\alpha}+\frac{k_3}{u-\beta}$$

従って、与えられた積分は $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{k_0}{2}\ln\left|u^2+1\right|+k_1\tan^{-1}(u)\\ &\quad+k_2\ln|u-\alpha|+k_3\ln|u-\beta|+\mathrm{C}\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答1（1）

恒等式は $-i, i, \alpha, \beta$ でない任意の複素数u に対して成り立つ。よって、以下のような計算により $k_0, \cdots, k_3$の値を得られる。

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{u\to\alpha}(u-\alpha)\cdot\frac{-4u}{(u^2-2u-1)(u^2+1)} \\ &= \lim_{u\to\alpha}\frac{-4u}{(u-\beta)(u^2+1)} \\ &= \frac{-4\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+1)} = \frac{-4}{(\alpha-\beta)^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= \lim_{u\to\beta}(u-\beta)\cdot\frac{-4u}{(u^2-2u-1)(u^2+1)} \\ &= \lim_{u\to\beta}\frac{-4u}{(u-\alpha)(u^2+1)} \\ &= \frac{-4\beta}{(\beta-\alpha)(\beta^2+1)} = \frac{-4}{(\beta-\alpha)^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{u\to\infty} u\cdot\frac{-4u}{(u^2-2u-1)(u^2+1)} = 0$$

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to\infty} u\cdot\left(\frac{k_0u+k_1}{u^2+1}+\frac{k_2}{u-\alpha}+\frac{k_3}{u-\beta}\right) \\ &= k_0+k_2+k_3 \end{aligned}$$

$$\therefore k_0 = 1$$

また、$u=0$ より $k_1 = \dfrac{k_2}{\alpha}+\dfrac{k_3}{\beta}$ が得られる。

従って $k_1 = 1$ である。

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答1（2）

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{k_0}{2}\ln\left|u^2+1\right| + k_1\tan^{-1}(u) \\
&\quad + k_2\ln|u-\alpha| + k_3\ln|u-\beta| + \mathrm{C} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2+1}{u^2-2u-1}\right| + \tan^{-1}(u) + \mathrm{C} \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \ln|\sin(x)+\cos(x)|\right) + \mathrm{C}
\end{aligned}$$

解答1 補足

【ワイエルシュトラス置換】

積分における $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ のような置換のこと。

三角関数と有理関数の合成で書かれた積分を

有理関数の積分に帰結させる。

2変数の有理関数 $P(\cdot,\cdot)$に対して、

$$\begin{aligned}
&\int P\left(\sin(x),\cos(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int P\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

が成り立つ。これは $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ の置換による。

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答2

以下の二つの積分 I, J を考える。

$$I = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$J = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

二つの和 $I+J$ と差 $I-J$ を計算することで、

これらの相加平均である I を得る。

$$\begin{aligned} I+J &= \int \mathrm{d}x \\ &= x + \mathrm{C}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I-J &= \int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int -\frac{\mathrm{d}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)}{\sin(x)+\cos(x)} \\ &= -\ln\left|\sin(x)+\cos(x)\right| + \mathrm{C}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left((I+J)+(I-J)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x+\mathrm{C}_0)+(-\ln\left|\sin(x)+\cos(x)\right|+\mathrm{C}_1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x-\ln\left|\sin(x)+\cos(x)\right|\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1\right) \end{aligned}$$

結論

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(x-\ln\left|\sin(x)+\cos(x)\right|\right)+\mathrm{C} \end{aligned}$$