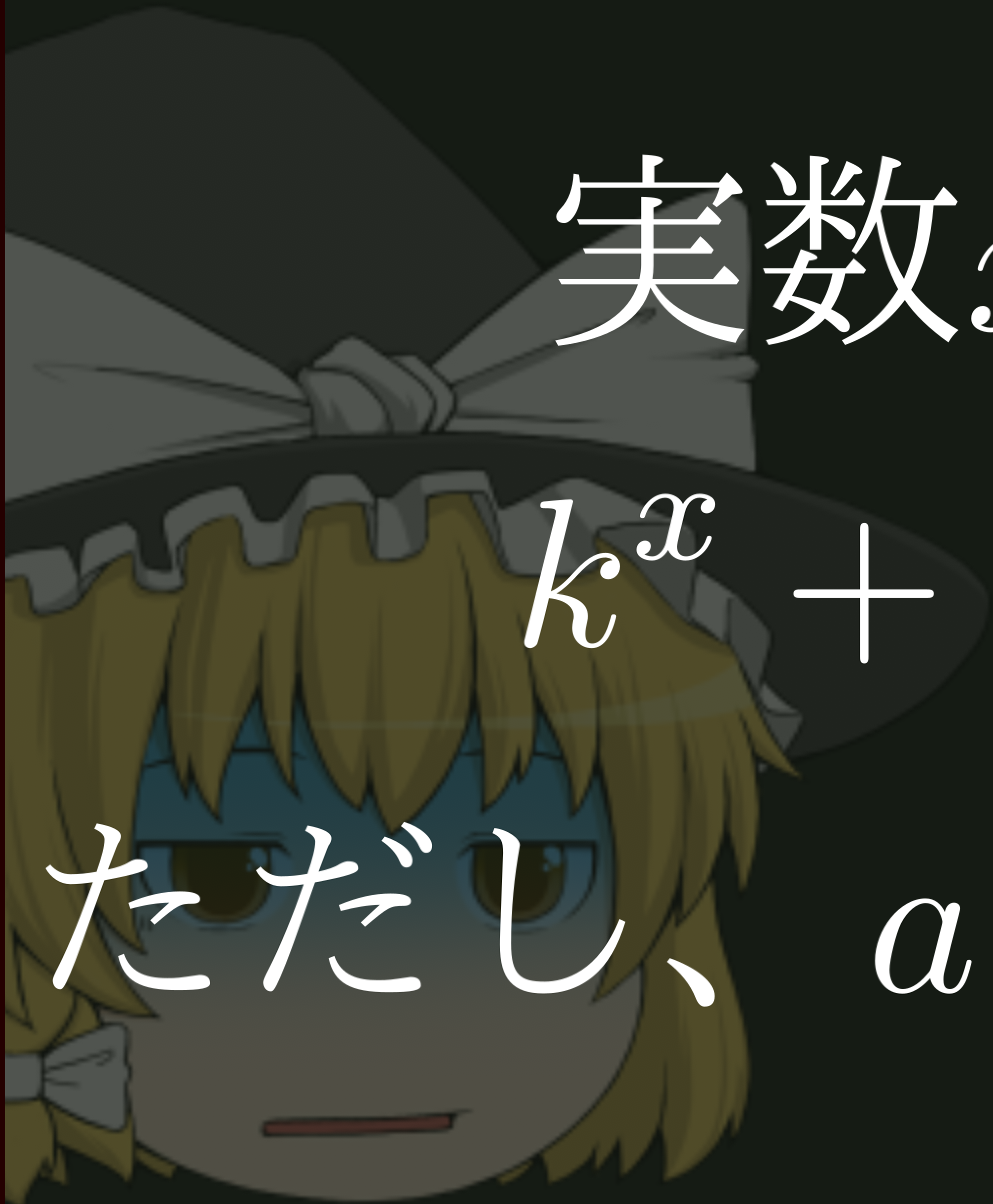

実数xの方程式

$$k^x + ax + b = 0$$

ただし、 $a, b, k \in \mathbb{R},\ k > 0$

次の等式を満たす実数xを全て答えよ。

$k^x + ax + b = 0 \quad (a, b, k \in \mathbb{R},\ k > 0)$

<u>解答</u>

$k = 1$ のとき

$$ax + b + 1 = 0$$

$$x = \begin{cases} -\frac{b+1}{a} & a \neq 0 \\ (\text{任意の実数}) & a = 0 \text{ かつ } b = -1 \\ (\text{存在しない}) & a = 0 \text{ かつ } b \neq -1 \end{cases}$$

$k \neq 1$ かつ $a = 0$ のとき

$$k^x + b = 0$$

$$k^x = -b$$

$$x = \begin{cases} \log_k(-b) & b < 0 \\ (\text{存在しない}) & b \geq 0 \end{cases}$$

$k \neq 1$ かつ $a \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} k^x + ax + b &= 0 \\ ax + b &= -k^x \\ (-ax - b)k^{-x} &= 1 \\ \left(-x - \frac{b}{a}\right) k^{-x-\frac{b}{a}} &= \frac{k^{-\frac{b}{a}}}{a} \\ \left(-x - \frac{b}{a}\right) \ln(k) e^{\left(-x-\frac{b}{a}\right)\ln(k)} &= \frac{k^{-\frac{b}{a}}}{a} \ln(k) \\ \left(-x - \frac{b}{a}\right) \ln(k) &= \mathrm{W}\left(\frac{k^{-\frac{b}{a}}}{a} \ln(k)\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{k^{-\frac{b}{a}}}{a} \ln(k) \geq -e^{-1}$ ならば

$$x = -\frac{b}{a} - \frac{1}{\ln(k)} \mathrm{W}\left(\frac{k^{-\frac{b}{a}}}{a} \ln(k)\right)$$

結論

$\exists x \in \mathbb{R}\ \text{s.t.}\ k^x + ax + b = 0$

$(a, b, k \in \mathbb{R}, k > 0)$

$$\iff x = -\frac{b}{a} - \frac{1}{\ln(k)}\mathrm{W}\left(\frac{k^{-\frac{b}{a}}}{a}\ln(k)\right)$$

(右辺が存在する場合。他は省略。)

xの方程式 $k^x + ax + b = 0$ は

$k = 1$ の場合に1次方程式化

$a = 0$ の場合に指数方程式化する。

本題はこのどちらもを満たさない場合である。

このときの解が上記の値である。

補足1

【ランベルトのW関数】

xの関数$\mathrm{W}(x)$は、関数$f(x) = xe^x$の逆関数である。

すなわち、$x = \mathrm{W}(xe^x) = \mathrm{W}(x)e^{\mathrm{W}(x)}$を満たす。

xe^xの値域に着目する。

極限は $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0, \lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$

$\dfrac{\mathrm{d}(xe^x)}{\mathrm{d}x} = (x+1)e^x$より、$x = -1$ で極小値をとる。

$-\dfrac{1}{e} < 0$ なので、これが最小値と言える。

以上から、$x \in \mathbb{R} \implies xe^x \in \left[-\dfrac{1}{e}, \infty\right)$であり、

$xe^x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{e}\right) \implies x \notin \mathbb{R}$ が言える。

すなわち、$x < -\dfrac{1}{e}$ に対して $\mathrm{W}(x) \notin \mathbb{R}$が成り立つ。

補足2

Q. $k<0$ の場合に解は存在するか。

A. 条件に依って存在し得る。

$b=1$と定めれば、如何なるaやkに対しても

$x=0$を解に持つ。

より一般に、$(a\neq 0, k\neq -1$として$)$

xを奇数を分母とした既約分数と仮定すれば

次の関係が成り立つ。

$$x=-\frac{b}{a}-\frac{1}{\ln(-k)}\mathrm{W}\left(-\frac{(-k)^{-\frac{b}{a}}}{a}\ln(-k)\right)$$

このとき、右辺が仮定に従えばそれが解である。

オイラーの公式から、次の関係が言える。

$$\begin{aligned}(-1)^x &= e^{(2n+1)x\pi i} \quad (n\in\mathbb{Z})\\ &= \cos((2n+1)x\pi)+i\sin((2n+1)x\pi)\end{aligned}$$

$(-1)^x$が実数であるための必要十分な条件は

$\exists n\in\mathbb{Z}$ s.t. $(2n+1)x\in\mathbb{Z}$ であるため、

xは有理数かつ既約分数の形で分母の素因数に

2を持ってはならない。

$a=-3e^{\frac{2}{3}}, b=3e^{\frac{2}{3}}, k=-e$ の場合

$k^x+ax+b=(-e)^x-3e^{\frac{2}{3}}x+3e^{\frac{2}{3}}$であり、

$x=\dfrac{2}{3}$ のときに0を値に取る。