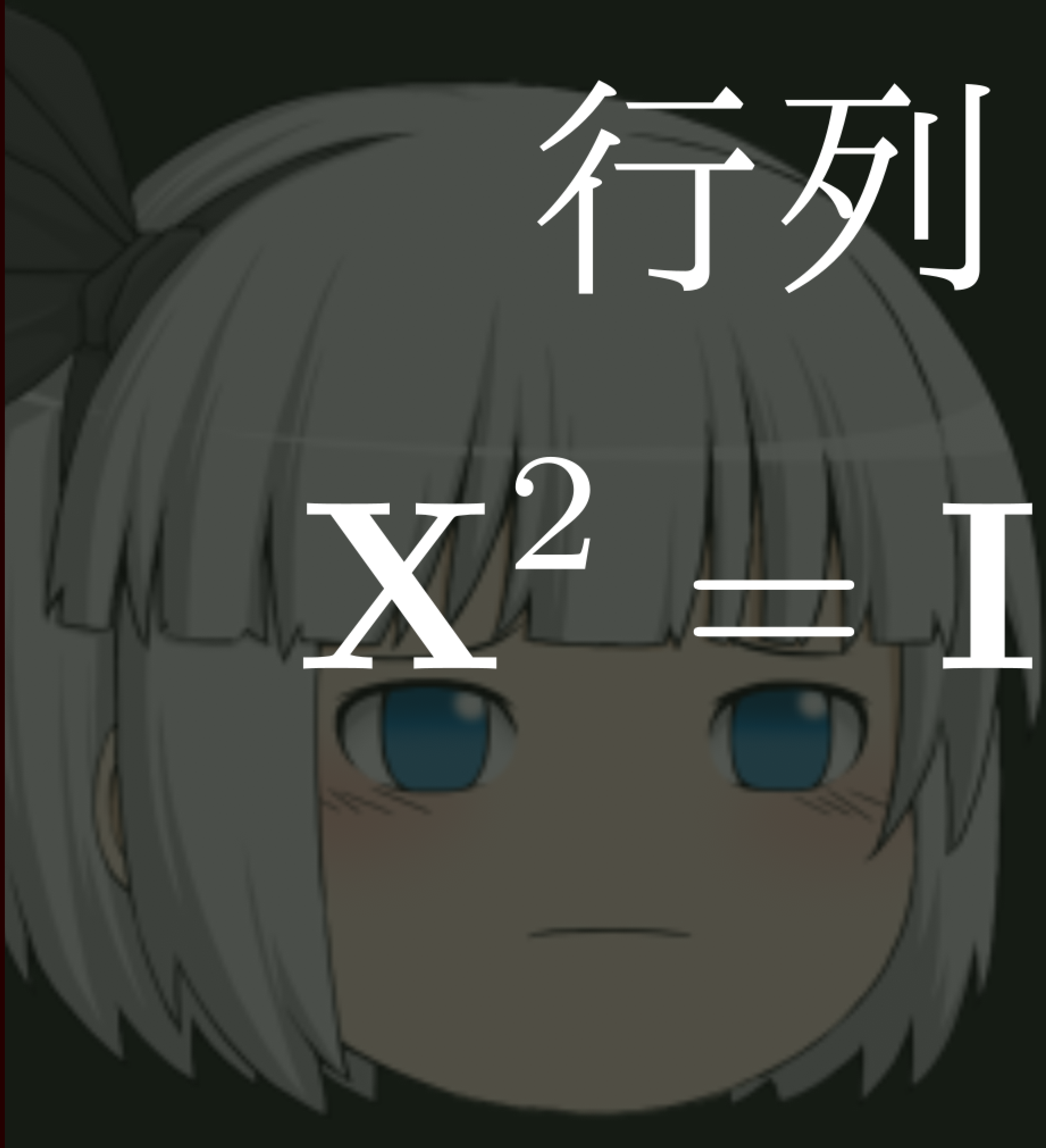
行列 $\mathbf{X}$ の方程式

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{I} \qquad \left(\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\right)$$



次の等式を満たす実2次正方行列$\mathbf{X}$を全て答えよ。

$\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$　(ただし$\mathbf{I}$は単位行列)

説明

【実2次正方行列】

成分が全て実数の2次正方行列のこと。

実数 a, b, c, d を用いて $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表せる。

【単位行列】

全ての対角成分が1、かつ他の成分が0である正方行列$\mathbf{I}$のこと。

任意の正方行列$\mathbf{A}$に対して次を満たす。

$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$

解答I (0)

実数a, b, c, dを用いて$\mathbf{X}$を次のように表す。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

両辺の各成分を比較して次の関係を得る。

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$$

解答1（1）

$a+d=0$ の場合

第2式と第3式はb,cに依らずに成立する。

また、第1式と第4式は同値になる。

よって、$a^2+bc=1$ を満たす a,b,c を用いて

$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ と表せる。

$a+d\neq 0$ の場合

仮定より $b=c=0$ が言える。

また、第1式と第4式より $a^2=d^2=1$ とわかり、

$a=d=\pm 1$ も言える。　$(\because a\neq -d)$

よって、次がわかる。

$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (複号同順)

解答2

実数 a,b,c,d を用いて

$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

ケイリー・ハミルトンの定理より

$(a+d)\mathbf{X}=(ad-bc+1)\mathbf{I}$ が言える。

$a+d=0$ ならば $ad-bc+1=0$ であり、

$a+d\neq 0$ ならば両辺の成分を比較して

解答1と同様に結論を得る。

結論

$$\exists \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ s.t. } \mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$$

$$\iff \mathbf{X} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} & (a^2 + bc = 1) \\ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} & (\text{複号同順}) \end{cases}$$

補足1

【ケイリー・ハミルトンの定理(2次)】

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

上のように定義された行列 $\mathbf{A}$ に対して

次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{A}^2 - (a+d)\mathbf{A} + (ad - bc)\mathbf{I} = \mathbf{O}$$

ただし、$\mathbf{I}$ は単位行列、$\mathbf{O}$ は零行列である。

補足2（問題の解釈）

2乗して $\mathbf{I}$ になる行列が $\mathbf{X}$ なのだから、

$\mathbf{X}$ は $\mathbf{I}$ の平方根(2乗根)だと言える。

特に、$\mathbf{I}$ を除く根を $\mathbf{I}$ の原始平方根と呼びたい。

自然数 n を用いて $\mathbf{X}^n = \mathbf{I}$ とすると

同じ様にして $\mathbf{I}$ の原始冪根を考えることができる。

応用

問題の解 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の成分 a, b, c, d を用いて

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (cx + d \neq 0)$$ とする。

このとき、$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ が成り立つ。