次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+3(2x+1)^2\right)^n}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+3(2x+1)^2\right)^n}$$

<u>説明</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+3(2x+1)^2\right)^n}=\lim_{L\to\infty}\sum_{n=0}^{L}\frac{x^2}{\left(1+3(2x+1)^2\right)^n}$$

であるため、与えられた極限は二重の極限である。

$$\lim_{x}\lim_{y}f(x,y)=\lim_{y}\lim_{x}f(x,y)$$

は一般には成り立たない。

従って、次のような計算が成り立つとは言えない。

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+3(2x+1)^2\right)^n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\left(1+3(2x+1)^2\right)^n}\\&=0\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+3(2x+1)^2)^n}$$

解答（0）

自然数 N と実数 x に対して、$f_N(x)$ を次のように定める。

$$f_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^2}{(1+3(2x+1)^2)^n}$$

さらに、$f_N(x)$ の N 極限を f とする。
すなわち、f_Nと f に対して次を満たす。

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x)=f(x)$$

このとき、与えられた極限は $\lim_{x\to 0} f(x)$ に等しい。

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N}\frac{x^2}{(1+3(2x+1)^2)^n} \\ &= x^2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(1+3(2x+1)^2)^n} \\ &= x^2\frac{1-\left(\frac{1}{1+3(2x+1)^2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{1+3(2x+1)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\in\mathbb{R} &\iff 2x+1\in\mathbb{R} \\ &\iff (2x+1)^2\geq 0 \\ &\iff 3(2x+1)^2\geq 0 \\ &\iff 1+3(2x+1)^2\geq 1 \\ &\iff 0<\frac{1}{1+3(2x+1)^2}\leq 1 \end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+3(2x+1)^2)^n}$$

解答（1）

故に、$x\neq -\dfrac{1}{2}$ に対して次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} f_N(x) &= \lim_{N\to\infty} x^2\frac{1-\left(\frac{1}{1+3(2x+1)^2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{1+3(2x+1)^2}}\\ &= \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+3(2x+1)^2}}\end{aligned}$$

従って、次が成り立つ。

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+3(2x+1)^2}}\quad\left(x\neq -\frac{1}{2}\right)$$

以上より、次が従う。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+3(2x+1)^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

結論

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+3(2x+1)^2)^n}=0$$