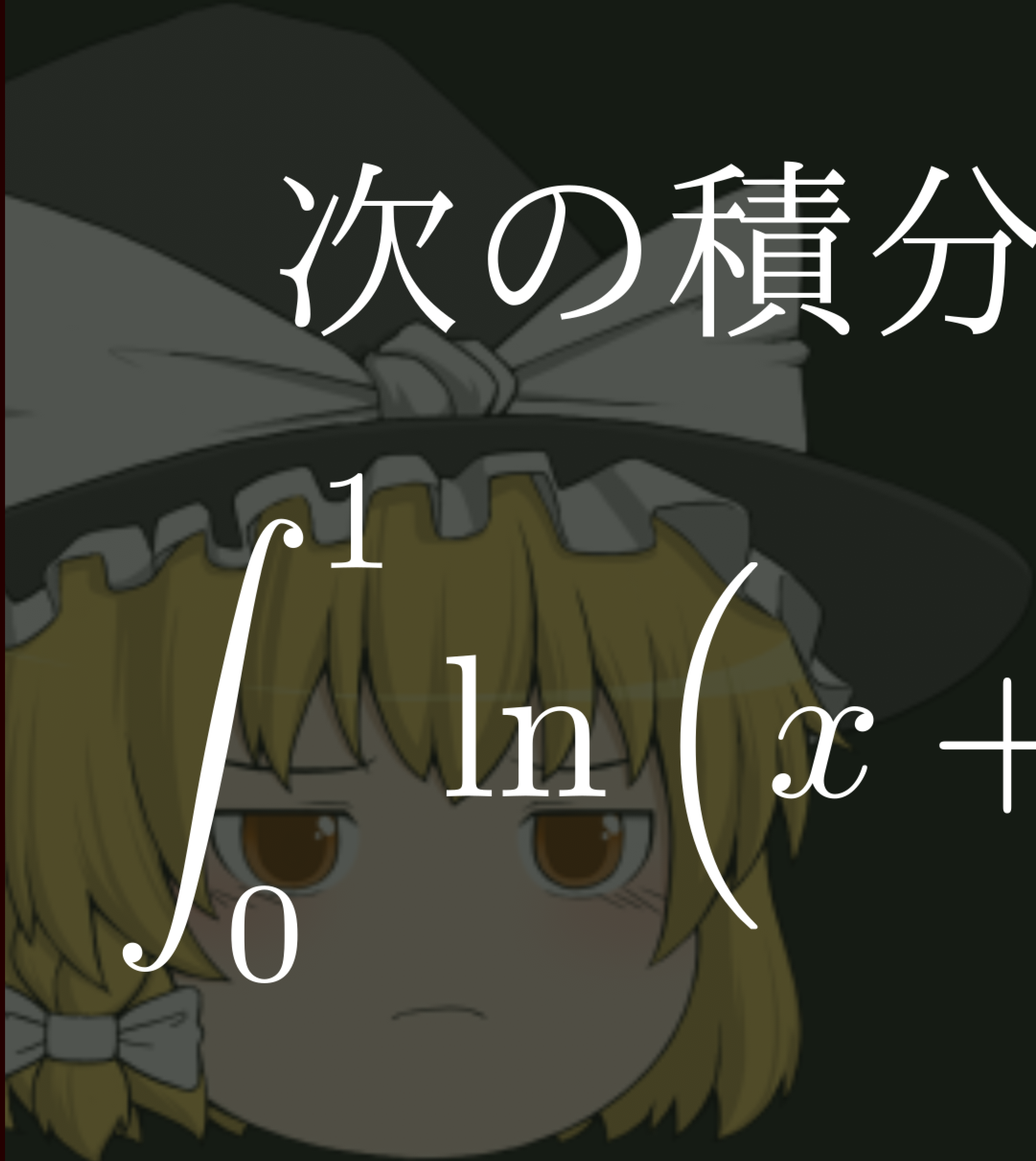


次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

<u>説明(0)</u>

与えられた積分の被積分関数は
sinh 関数の逆関数である。

【双曲線関数】

実数 x に対して、双曲線関数の値 $\sinh(x)$ と $\cosh(x)$ は次のように表される。

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

性質:

sinh と cosh は任意の x に対して次を満たす。

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x)$$

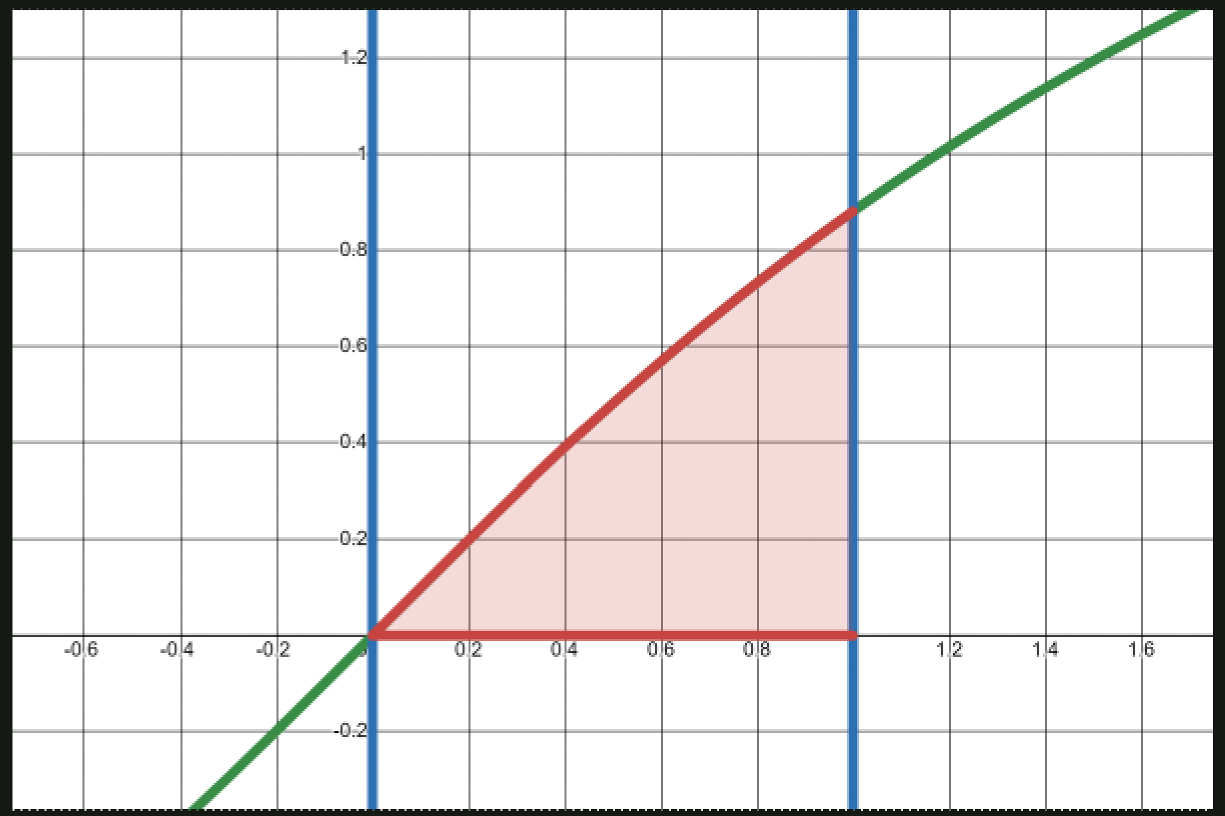
これを用いて逆関係であることを確かめる。

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\sinh(x)+\sqrt{1+(\sinh(x))^2}\right)\\
&= \ln\left(\sinh(x)+\sqrt{(\cosh(x))^2}\right)\\
&= \ln\left(\sinh(x)+\cosh(x)\right)\\
&= \ln\left(e^x\right)\\
&= x
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

説明(1)



$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

グラフから、与えられた積分はおおよそ $\frac{1}{2}$ 程度だと考えられる。(範囲内で $y=x$ より下にある)

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

<u>解答0</u>

【逆関数の積分法】
関数 f に対して原始関数 F と逆関数 f^{-1} が存在するとき、次が成り立つ。

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - \left(F\circ f^{-1}\right)(x) + \mathrm{C}$$

$f=\sinh$ とすると、次が言える。(ﾒﾓﾒﾓ)

$$\begin{aligned} F &= \cosh \\ f^{-1} &= \sinh^{-1} \\ &= \ln\left(\bullet+\sqrt{1+\bullet^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sinh^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x\sinh^{-1}(x) - \cosh\left(\sinh^{-1}(x)\right)\right]_0^1 \\ &= \left[x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{1+x^2}\right]_0^1 \\ &= \sinh^{-1}(1) - \sqrt{2} + 1 \\ &= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \left(1-\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

解答I

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 \\
&\quad -\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 \\
&= \ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

結論

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right) \\
&= 0.46716002\ldots
\end{aligned}$$