次の積分を計算せよ。

$$\int \left(x - \frac{1}{x} \right) (\ln(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \left(x-\frac{1}{x}\right)(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$$

解答

$$\begin{aligned}
&\int \left(x-\frac{1}{x}\right)(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&=\int \left(e^u-e^{-u}\right)u^2\left(e^u\mathrm{d}u\right) \quad (u=\ln(x)) \\
&=\int u^2\left(e^{2u}-1\right)\mathrm{d}u \\
&=\int u^2e^{2u}\mathrm{d}u-\int u^2\mathrm{d}u \\
&=-\frac{1}{(-2)^{2+1}}\sum_{k=0}^{2}\frac{2!}{k!}(-2u)^ke^{2u}+\frac{1}{3}u^3+\mathrm{C} \\
&=\frac{1}{2^2}x^2\left(1-2\ln(x)+2(\ln(x))^2\right)+\frac{1}{3}(\ln(x))^3+\mathrm{C}
\end{aligned}$$

結論

$$\begin{aligned}
&\int \left(x-\frac{1}{x}\right)(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&=\frac{1}{2}x^2\left((2\ln(x)-1)^2+1\right)+\frac{1}{3}(\ln(x))^3+\mathrm{C}
\end{aligned}$$

補足

$$\int x^ne^{-mx}\mathrm{d}x=-\frac{1}{m^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(mx)^ke^{-mx}+\mathrm{C}$$

解答の4行目から5行目への変形にはこの関係を用いた。
nは自然数、mは0でない整数の時に成り立つ。
導出は 積分の演習 #1 より。