

自然数 a, b, c の方程式

$$\begin{cases} ab + c = 2020 \\ a + bc = 2021 \end{cases}$$

GOEIROINK

次の等式を満たす自然数 a, b, c を全て答えよ。

$$\begin{cases} ab + c = 2020 \\ a + bc = 2021 \end{cases}$$

解答

$$(a + bc) - (ab + c) = 2021 - 2020$$

$$(c - a)(b - 1) = 1$$

$c - a$ と $b - 1$ はどちらも整数である為、
 $c - a = b - 1 = \pm 1$ (複号同順) を満たす。

$$b = 0 \text{ のとき } (a = c + 1)$$

$$(a, c) = (2021, 2020)$$

$$b = 2 \text{ のとき } (a + 1 = c)$$

$$\begin{cases} ab + c = 2020 \\ a + bc = 2021 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + c = 2020 \\ a + 2c = 2021 \end{cases}$$

$$2(2a + c) - (a + 2c) = 2 \cdot 2020 - 2021$$

$$3a = 2019$$

$$a = 673$$

$$c = a + 1$$

$$= 674$$

結論

$$\exists a, b, c \in \mathbb{N}; (ab + c = 2020) \wedge (a + bc = 2021)$$

$$\iff (a, b, c) = (2021, 0, 2020), (673, 2, 674)$$