#6

次の総和を計算せよ。

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

次の総和を計算せよ。

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

<u>説明</u>

【床関数】

実数 x に対して、床関数 $\lfloor x \rfloor$ 次のように定める。

$$\lfloor x \rfloor = n \quad (n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z})$$

$\lfloor x \rfloor$ の他に、$[x]$ やfloor(x) などの表記がある。

次の総和を計算せよ。

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

解答

自然数 k と m に対して、次を考える。

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = m &\iff m \leq \sqrt{k} < m+1 \\
&\iff m^2 \leq k < (m+1)^2 \\
&\iff m^2 \leq k \leq (m+1)^2 - 1
\end{aligned}$$

これを踏まえて与えられた総和を計算する。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} m \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m(2m+1) \\
&= 2\sum_{m=1}^{n-1} m^2 + \sum_{m=1}^{n-1} m \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) \\
&= \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1)
\end{aligned}$$

次の総和を計算せよ。

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

<u>結論</u>

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)$$

<u>おまけ</u>

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor \\ &= 1+1+1 \\ &= 3 \\ &= \frac{1}{6}2\cdot(2-1)\cdot(4\cdot 2+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{24} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{4} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \sqrt{6} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{7} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{8} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{9} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \sqrt{10} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{11} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{12} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \sqrt{14} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{15} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{16} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{17} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \sqrt{18} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{19} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{20} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{21} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \sqrt{22} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{23} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{24} \right\rfloor \\ &= 1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9 \\ &= 70 \\ &= \frac{1}{6}5\cdot(5-1)\cdot(4\cdot 5+1)\end{aligned}$$