次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x$$

解答1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x &= \lim_{u\to\infty}\sqrt{(-u)^2+(-u)}+(-u)\\ &= \lim_{u\to\infty}\sqrt{u^2-u}-u\\ &= \lim_{u\to\infty}\frac{-u}{\sqrt{u^2-u}+u}\\ &= \lim_{u\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-u^{-1}}+1}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

解答2

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{\left(\frac{x}{|x|}\right)^2+\frac{x}{|x|^2}}-\frac{x}{|x|}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{(\operatorname{sgn}(x))^2+\frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|}}-\operatorname{sgn}(x)}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

結論

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=-\frac{1}{2}$$

補足

【符号関数】

実数 x の符号 $\mathrm{sgn}(x)$ は次のように与えられる。

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

任意の x に対して、次を満たす。

$$\mathrm{sgn}(x)|x| = x$$

$x \to -\infty$ は x が任意の実数よりも小さい状態を表す。x は少なくとも 0 よりは小さい。
従って、$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sgn}(x) = -1$ が成り立つ。