次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

<u>解答（0）</u>

$x \in [0,1]$ に対して $f(x), g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ と $\dfrac{\mathrm{d}(xg(x))}{\mathrm{d}x}$ を調べる。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{(1+x)\left(1+x^2\right)} - \frac{2x\ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{(1+x)\left(1+x^2\right)} - 2xf(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(xg(x))}{\mathrm{d}x} &= g(x) + x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) \\
&= g(x) + x\left(\frac{1}{(1+x)\left(1+x^2\right)} - 2xf(x)\right) \\
&= \frac{x}{(1+x)\left(1+x^2\right)} + g(x) - 2x^2f(x) \\
&= \frac{x}{(1+x)\left(1+x^2\right)} - g(x) + 2f(x)
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（1）

先の結果を$f(x)$について整理すると、
次のような関係が現れる。

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}(xg(x))}{\mathrm{d}x}+g(x)-\frac{x}{(1+x)\left(1+x^2\right)}\right)$$

fは与えられた積分の被積分関数である。
従って、この関係の両辺を $[0,1]$ 上で積分すると
問題の答えを得ることができる。

非負実数sに対して$I(s)$ を次のように定める。

$$I(s)=\int_0^1 \frac{\ln(1+sx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(s)=\int_0^1 \frac{x}{(1+sx)\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x$$

このとき、次の関係が成り立つ。

$$I(1)=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(1)=\int_0^1 \frac{x}{(1+x)\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x$$

Iには積分の必要な二つの積分の情報が
含まれていることがわかる。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（2）

任意の $s \geq 0$ に対し複素数 a,b,c が存在し、

任意の $x \neq -\dfrac{1}{s}$ に対して次の関係を満たす。

$$\frac{x}{(1+sx)(1+x^2)} = \frac{a}{1+sx} + \frac{b+cx}{1+x^2}$$

$J_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ とすると、

$\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(s)$ は次のように表せる。

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{a}{s}\ln(1+s) + bJ_0 + cJ_1$$

恒等式から、a,b,c に対して次の関係を得る。

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c+bs=1 \\ a+cs=0 \end{cases}$$

この関係を満たす組は

$(a,b,c) = \left(\dfrac{-s}{1+s^2}, \dfrac{s}{1+s^2}, \dfrac{1}{1+s^2}\right)$ である。

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \left(\frac{a}{s}\ln(1+s) + bJ_0 + cJ_1\right)\mathrm{d}s$$

$$I(1) - I(0) = -\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$$

$$+ J_0\int_0^1 \frac{s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s + J_1\int_0^1 \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$$

$$I(1) = -I(1) + 2J_0J_1 = J_0J_1$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（3）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(s) &= \frac{a}{s}\ln(1+s) + bJ_0 + cJ_1 \\ &= -\frac{\ln(1+s)}{1+s^2} + \frac{J_0 s}{1+s^2} + \frac{J_1}{1+s^2} \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(1) &= -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}(J_0 + J_1)\end{aligned}$$

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\begin{aligned}I(1) &= J_0 J_1 \\ &= \frac{1}{8}\pi\ln(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(1) &= -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}(J_0 + J_1) \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

以上から、次の関係が言える。

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(g(1) + I(1) - \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\pi\ln(2)\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\pi(\ln(2) - 1) + 6\ln(2)\right)\end{aligned}$$

補足

正当化:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^1 \frac{\ln(1+sx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{(1+sx)\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$s, x \in [0,1]$ に対して $u(s,x)$ を定める。

$$u(s,x) = \frac{\ln(1+sx)}{1+x^2}$$

各sに対して $|u(s,x)| \leq 1$ であるからuは可積分、

各xに対して $\dfrac{\partial u}{\partial s}(s,x) = \dfrac{x}{(1+sx)\,(1+x^2)}$ である。

$\left|\dfrac{x}{(1+sx)\,(1+x^2)}\right| \leq 1$ よりルベーグの収束定理が

成り立ち、次を満たす。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^1 u(s,x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial s}(s,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x}{(1+sx)\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$