この回答の何がダメ!?

~~$\sin(x)$ は奇関数だから~~

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>説明</u>

与えられた積分は区間が有界でない。
従って狭義のリーマン積分では値を定義しない。

上端と下端が共に非有界であるため、
有限な実数cを中心に区間を分け、片側非有界な区間二つそれぞれの上で積分を定義する。
すなわち、$(-\infty,\infty)$ を $(-\infty,c)$ と (c,∞) の二つに分け、二つの区間それぞれで値を定義する。

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^c \sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \lim_{b\to\infty}\int_c^b \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

二つの極限がそれぞれ有限な値に収束するとき、
それらの和を $(-\infty,\infty)$ での積分の値とする。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \lim_{b\to\infty}\int_c^b \sin(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$(-\infty,\infty)$ 上の積分を次のように表すのは誤りである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

従って、被積分関数が奇関数であっても
それのみを理由に値が0だとは言えない。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

解答

ここでは、0を中心に積分の区間を分ける。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\Big[-\cos(x)\Big]_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty}(\cos(a)-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\Big[-\cos(x)\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty}(1-\cos(b))\end{aligned}$$

極限の一つが収束しない為、与えられた積分の値は広義リーマン積分の範囲でも定義されない。

補足1

一般の連続関数fに対しての $(-\infty,\infty)$ 上の積分を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ある有限な実数cに対して右辺の二つの極限がいずれも収束するとき、その値を積分値として定める。
いずれかが収束しなければ値は定義されない。

$(-\infty,\infty)$ の広義積分が定義されるならば、その値はcに依らない。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$$

このような定義は一般的でない。

$f(x)=\sin(x)$ を例にすると、

$$\int_{-L}^{L}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \cos(-L)-\cos(L)$$

が成り立つが、 $\cos(-L)$ と $\cos(L)$ はいずれも $L\to\infty$ の極限を持たない。
定義されない値同士の差を0とするのは不自然であるため、この積分は定義されるべきでない。

しかし、上記のように定めると奇関数に対しては必ず値が0になってしまうので、不適当である。

補足2（0）

fを奇関数、gを偶関数とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 g(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

fの $(-\infty, 0)$ 上の極限を調べる。

$$\begin{aligned}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_{-a}^{-0} f(-u)\,\mathrm{d}(-u)\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_0^{-a} -f(u)\,\mathrm{d}u\\ &= -\left(\lim_{a'\to\infty}\int_0^{a'} f(u)\,\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

一方の極限が他方の極限の -1倍であるので、二つの内のいずれかの収束が言えれば、積分の値は0と言える。逆にいずれかが収束しないと言えれば、積分の値は存在しないと言える。

補足2（1）

gの $(-\infty,0)$ 上の極限を調べる。

$$\begin{aligned}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 g(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_{-a}^{-0} g(-v)\,\mathrm{d}(-v)\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_0^{-a} g(v)\,\mathrm{d}v\\ &= \lim_{a'\to\infty}\int_0^{a'} g(v)\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

二つの極限は一致するため、積分の値は
いずれかの極限値の2倍と言える。
ただし、いずれかの収束を前提とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

上記のようにして考えても良い。
しかし、等号が成り立つのはいずれかの極限が
収束したときのみである。