実数xの方程式

$$x^{\lfloor x \rfloor} + x^{\lceil x \rceil} + 1 = 0$$

次の等式を満たす実数xを全て答えよ。

$x^{\lfloor x \rfloor}+x^{\lceil x \rceil}+1=0$

【床関数, 天井関数】

床関数$\lfloor x \rfloor$: x以下の最大の整数。

$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathrm{Z} | n \leq x\}$

$\mathrm{floor}(x)$や$[x]$とも表記する。

天井関数$\lceil x \rceil$: x以上の最小の整数。

$\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathrm{Z} | n \geq x\}$

$\mathrm{ceil}(x)$とも表記する。

例)

$\lfloor 2.64 \rfloor = 2,\ \left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor = -2$

$\lceil e \rceil = 3,\ \lceil -\pi \rceil = -3$

$\lfloor 3 \rfloor = \lceil 3 \rceil = 3$

⟨基本的な性質⟩

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$
2. 任意の整数 k に対して、
   $\lfloor k+x \rfloor = k + \lfloor x \rfloor,\ \lceil k+x \rceil = k + \lceil x \rceil$
3. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil, \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

次の等式を満たす実数xを全て答えよ。

$x^{\lfloor x \rfloor} + x^{\lceil x \rceil} + 1 = 0$

解答（0）

xが整数の場合

$$
\begin{aligned}
x^{\lfloor x \rfloor} + x^{\lceil x \rceil} + 1 &= 0 \\
2x^x + 1 &= 0 \\
x^x &= -\frac{1}{2} \\
(-(2n+1))^{-(2n+1)} &= -\frac{1}{2} \quad (x = -(2n+1), n \in \mathrm{N}) \\
(2n+1)^{2n+1} &= 2
\end{aligned}
$$

各辺の偶奇が異なるので、

等式を満たす自然数nは存在しない。

xが非整数の場合

$$
\begin{aligned}
x^{\lfloor x \rfloor} + x^{\lceil x \rceil} + 1 &= 0 \\
x^{\lfloor x \rfloor} + x^{\lfloor x \rfloor + 1} + 1 &= 0 \\
x^{\lfloor x \rfloor}(x+1) &= -1
\end{aligned}
$$

$x^{\lfloor x \rfloor} > 0$ の場合

$x^{\lfloor x \rfloor} > 0 \iff x + 1 < 0$

すなわち、$x < -1$ かつ $\lfloor x \rfloor \equiv 0 \pmod 2$

$x = -2n + \alpha$ とおく $(n \in \mathrm{N}, \alpha \in (0,1))$

$$
\begin{aligned}
x^{\lfloor x \rfloor}(x+1) &= -1 \\
(-2n+\alpha)^{\lfloor -2n+\alpha \rfloor}(-2n+\alpha+1) &= -1 \\
(2n-\alpha)^{-2n}(2n-\alpha-1) &= 1 \\
2n-\alpha-1 &= (2n-\alpha)^{2n}
\end{aligned}
$$

次の等式を満たす実数xを全て答えよ。

$x^{\lfloor x \rfloor} + x^{\lceil x \rceil} + 1 = 0$

解答（1）

$$
\begin{aligned}
n > 1 &\iff 2n - \alpha > 2 - \alpha \\
&\implies 2n - \alpha > 1 \\
&\implies (2n - \alpha)^{2n} > 2n - \alpha
\end{aligned}
$$

$$
0 > -1 \iff 2n - \alpha > 2n - \alpha - 1
$$

$$
\therefore n > 1 \implies (2n - \alpha)^{2n} > 2n - \alpha - 1
$$

$x^{\lfloor x \rfloor} > 0$を満たす解は存在しない。

$x^{\lfloor x \rfloor} < 0$ の場合

$$
\begin{aligned}
x^{\lfloor x \rfloor} < 0 &\iff x + 1 > 0 \\
&\iff -1 < x < 0 \text{ かつ } \lfloor x \rfloor \equiv 1 \pmod 2 \\
&\implies \lfloor x \rfloor = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{\lfloor x \rfloor}(x+1) + 1 &= 0 \\
x^{-1}(x+1) + 1 &= 0 \\
x + 1 + x &= 0 \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

結論

$$
\exists x \in \mathrm{R} \text{ s.t. } x^{\lfloor x \rfloor} + x^{\lceil x \rceil} + 1 \implies x = -\frac{1}{2}
$$