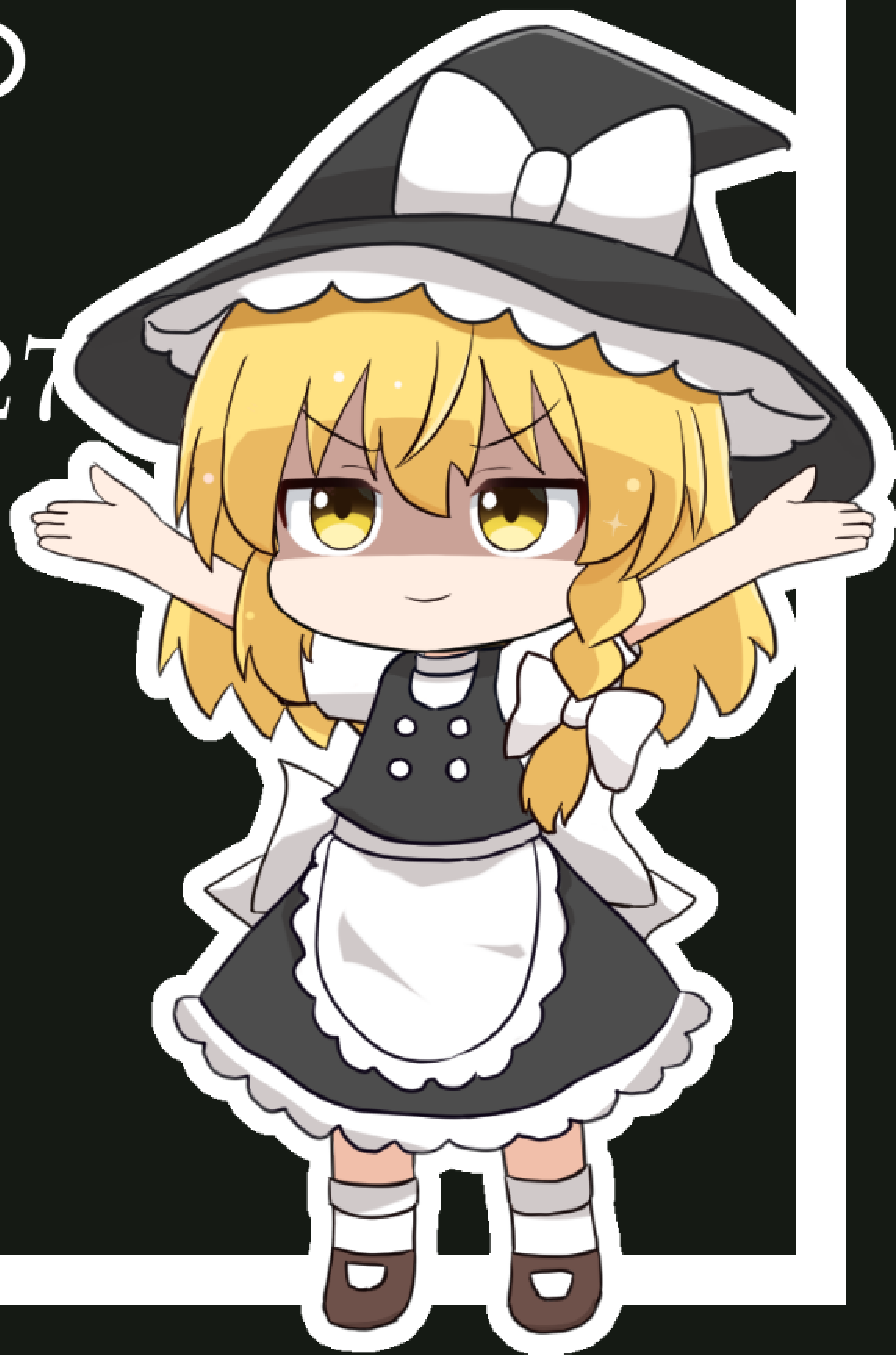
#7

次の関係を示せ。

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2+\left(\frac{b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geq 27$$



次の関係を示せ。$(a, b, c \in \mathbb{R}_{>0})$

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geq 27$$

解答I

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{3}\left(\frac{a+2b}{c} + \frac{b+2c}{a} + \frac{c+2a}{b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{a}{c} + \frac{2b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{2c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{2a}{b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + 2\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{3}(3 + 2 \cdot 3)^2 \\
&= 27
\end{aligned}$$

解答I 補足

【コーシー・シュワルツの不等式（3 変数版）】

6 つの実数 a, b, c, x, y, z について、

常に次を満たす。

$$(ax+by+cz)^2 \leq \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$A = (a, b, c), X = (x, y, z)$ とすれば、

$$\langle A, X \rangle = |A||X|\cos(\theta) \leq |A||X|$$

内積から直ちに言える。

【相加相乗平均の関係（3 変数版）】

正の実数 a, b, c について、次の関係が成り立つ。

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

次の関係を示せ。$(a, b, c \in \mathbb{R}_{>0})$

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geq 27$$

<u>解答2</u>

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \\
&\quad + 4\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \\
&\quad + 4\left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) \\
&\geq 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \\
&= 27
\end{aligned}$$