次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

解答Ⅰ（0）

与えられた極限を L とし、また、$a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ とする。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \\ &= \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \\ &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

ここで、a_n の対数を調べる。

指数関数 (または対数関数) は連続なので、

これらの収束が同値であるからだ。

$$\begin{aligned} \ln(a_n) &= \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\to \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

解答1（1）

$$\begin{aligned}\ln(L) &= \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x(\ln(x)-1)\Big]_0^1 \\ &= -1\end{aligned}$$

従って、$L = \dfrac{1}{e}$ と言える。

解答1 補足1

【区分求積法】

$[0,1]$ 上連続な関数 f に対して、次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

解答 1 では上記の f として $\ln(x)$ の積分を扱ったが、

$x=0$ で値が定義されないので、

$x \to +0$ の極限を考えた。(広義積分)

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

<u>解答1 補足2</u>

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\ln(\epsilon) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \left(x=\frac{1}{\epsilon}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}-\frac{\ln(x)}{x}\\ &= 0 \quad \left(\because \ln(x)<\sqrt{x}\right)\end{aligned}$$

解答 1 の積分は左の結果を知らずとも

以下のように計算が可能。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_1^x \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\int_u^0 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 -\,\mathrm{d}u\\ &= -1\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

<u>解答2</u>

スターリングの近似公式より $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

特に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$ である。

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{2\pi n}}} &= \frac{e\sqrt[n]{n!}}{n\sqrt[2n]{2\pi n}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}{\frac{1}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}} \\ &\to 1 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\sqrt[2n]{2\pi n} = \frac{1}{e}$であるため、

与えられた極限もまた、同じ値に収束する。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}{\frac{1}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}\right) \\ &= 1\cdot\frac{1}{e} \\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

<u>結論</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$