次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

説明

与えられた積分の被積分関数 $\dfrac{x}{\tan(x)}$ は $x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ において定義されない。
従って、(広義でない)リーマン積分では値が定義されないため、広義リーマン積分として考えることとする。

解答I (0)

与えられた積分を次のように定義する。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^m \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\int_m^t \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

ある $m \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して右辺の極限が収束するとき、この値を与えられた積分の値と定める。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答1（1）

$$\lim_{x\to+0} \frac{x}{\tan(x)} = 1$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{x}{\tan(x)} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}\left(\tan(x)\right)}{\mathrm{d}x} = 1 + \left(\tan(x)\right)^2$$

$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して

$0 < x, 0 < \tan(x), \dfrac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} < \dfrac{\mathrm{d}\left(\tan(x)\right)}{\mathrm{d}x}$ であるから、

$0 < \dfrac{x}{\tan(x)} < 1$ が成り立つ。

$$\int_\epsilon^m 0\,\mathrm{d}x = \int_m^t 0\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^m 1\,\mathrm{d}x &= m - \epsilon \\ &\to m \quad (\epsilon \to +0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_m^t 1\,\mathrm{d}x &= t - m \\ &\to \frac{\pi}{2} - m \quad \left(t \to \frac{\pi}{2} - 0\right)\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答I（2）

$\epsilon < m < t$ なる $\epsilon, m, t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して

$$\int_\epsilon^m 0\,\mathrm{d}x < \int_\epsilon^m \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x < \int_\epsilon^m 1\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_m^t 0\,\mathrm{d}x < \int_m^t \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x < \int_m^t 1\,\mathrm{d}x$$ であるから、

$$0 < \int_\epsilon^m \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x + \int_m^t \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x < \int_\epsilon^t \mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}$$

を満たし、ある $I \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して

$$I = \lim_{\epsilon \to +0} \int_\epsilon^m \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x + \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \int_m^t \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。

このとき、0超$\dfrac{\pi}{2}$未満のmをどのように取っても同じ値に収束する。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答I（3）

以下、$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$ として議論を続ける。

実数sに対して、$I(s)$ を次のように定義する。

$$I(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

$I(0) = 0, I(1) = I$ である。

ここで $I(s)$ の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}$ 調べる。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(s\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+(su)^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \quad (u = \tan(x)) \\
&= \frac{1}{s^2-1}\int_0^{\infty}\left(\frac{s^2}{1+(su)^2} - \frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{s^2-1}\Big[s\tan^{-1}(su) - \tan^{-1}(u)\Big]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}(s-1) \\
&= \frac{\pi}{2(s+1)}
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答I (4)

$I(s)$ は $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}$ の原始関数(のひとつ)であるから、

定数Cに対して $I(s) = \displaystyle\int \mathrm{d}I = \frac{\pi}{2}\ln(s+1) + \mathrm{C}$ を

満たす。

$I(0) = 0$ より定数Cは $\mathrm{C} = 0$ を満たし、

$I(s) = \dfrac{\pi}{2}\ln(s+1)$ が成り立つ。

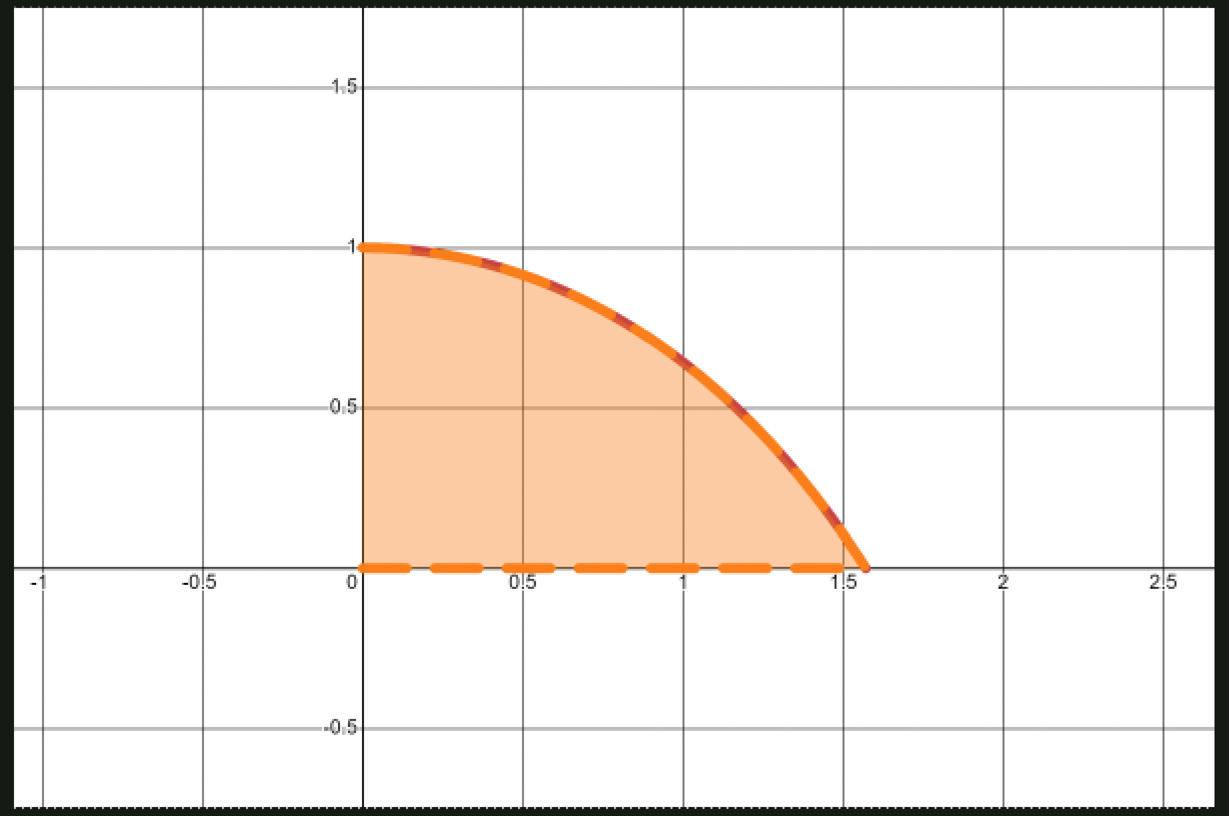
以上より、

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = I(1) = \frac{\pi}{2}\ln(2)$ が成り立つ。

結論

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(2)$$

グラフ



$$y = \frac{x}{\tan(x)} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 < y < \frac{x}{\tan(x)} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

補足1 (0)

【微分と積分の交換】

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし、$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下を満たすとする。

1. 各 $t \in I$ ごとに $f(t, \cdot)$ は可積分である。
2. 各 $x \in \mathbb{R}$ ごとに $\dfrac{\partial}{\partial t} f(\cdot, x)$ が存在する。
3. 任意の$t_0 \in I$ に対してある $\delta > 0$ と可積分関数Gが存在して、
$$\sup_{|t-t_0|\le\delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) \right| \le G(x) \quad \text{となる。}$$

以上の条件を満たすとき、次の関係が成り立つ。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)} \right) \mathrm{d}x \text{ の証明}$$

1. (0)

$$\lim_{x\to+0} \frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)} = s$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\tan^{-1}(s\tan(x))\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{s}{1+(s\tan(x))^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}(s\tan(x))}{\mathrm{d}x} = s(\sec(x))^2$$

$s \ge 0$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}\left(\tan^{-1}(s\tan(x))\right)}{\mathrm{d}x} \le \frac{\mathrm{d}(s\tan(x))}{\mathrm{d}x} \text{ が常に成立。}$$

補足1（1）

1.（1）

よって、$s \geq 0$ と $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に対して常に

$0 \leq \tan^{-1}(s\tan(x)) \leq s\tan(x)$ を満たし、

$0 \leq \dfrac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)} \leq s$ が言える。

$s < 0$ に対しても同様の議論で

$0 > \dfrac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)} > s$ が導ける。

故に、任意の $s \in \mathbb{R}$ と $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に対して

$\left|\dfrac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\right| \leq |s|$ が成り立つ。

従って以下の関係を満たす。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\right| \mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |s|\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}|s|$$

すなわち、左辺の積分は収束する。(可積分)

2.

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\right) = \frac{1}{1+(s\tan(x))^2}$$

3.

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\tan^{-1}(s\tan(x))}{\tan(x)}\right)\right| \leq 1$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答2

収束性の議論の後から解答を始める。

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}\left(\ln\left(\sin(x)\right)\right) \\
&= \Bigl[x\ln\left(\sin(x)\right)\Bigr]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

#11の議論より

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$ が言える。

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(2)$ が成り立つ。

補足2

$\displaystyle\Bigl[x\ln(\sin(x))\Bigr]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 0$ の証明

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to+0}\Bigl[x\ln\left(\sin(x)\right)\Bigr]_{x=\epsilon}^{x=\frac{\pi}{2}} &= \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\ln\left(\sin(\epsilon)\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\ln\left(\epsilon\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$