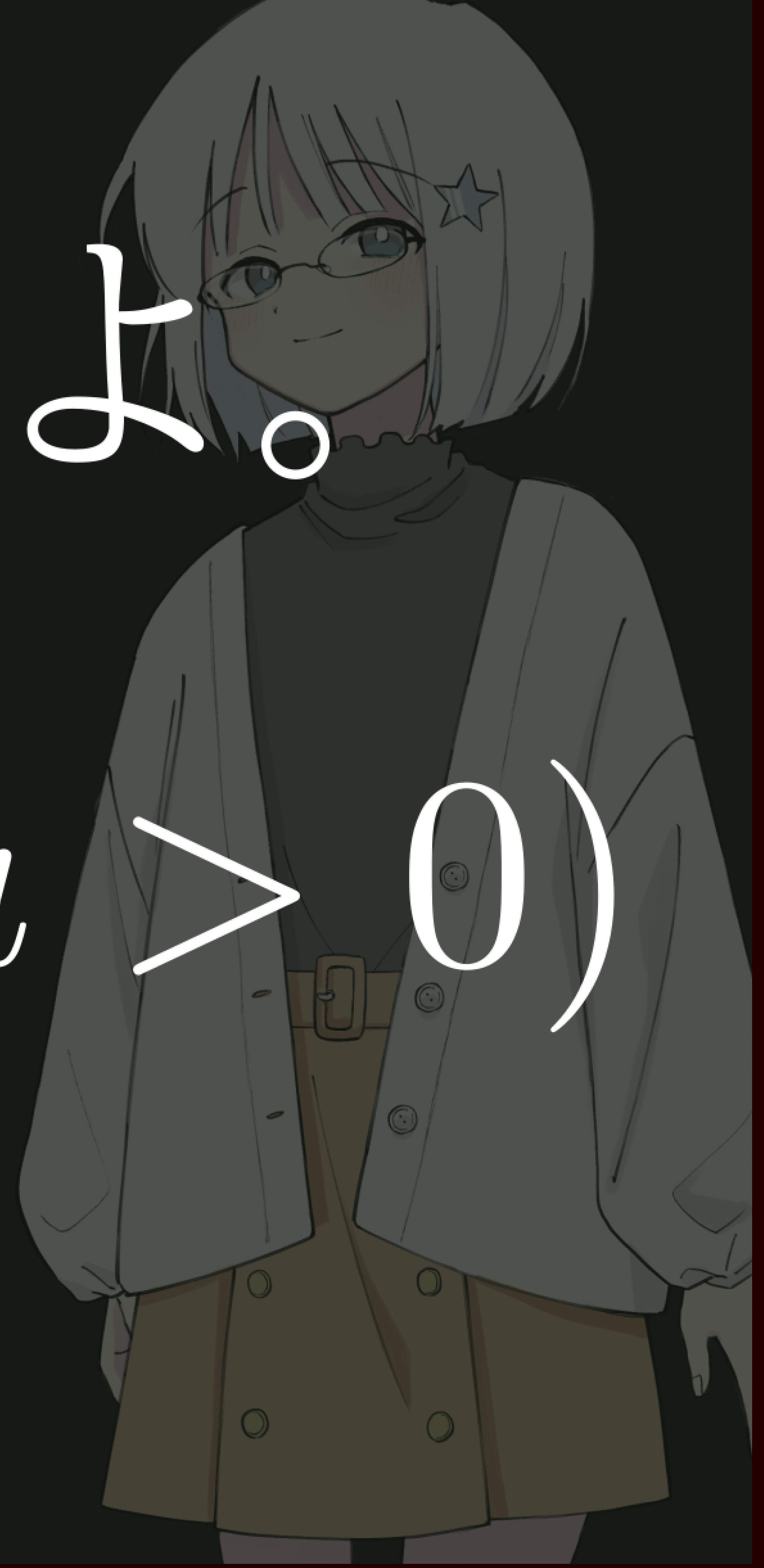
次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (a>0)$$



次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}} \quad (a>0)$$

説明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & 0<a<1\\ 1, & a=1\\ \infty, & a>1\end{cases}$$

上記の極限を既知とする。

aによって与えられた極限は変化するはずである。

解答

aの値によってa^nの振る舞いが異なる。

$a=1$ を中心にした3つの場合に分けて考える。

$a=1$ の場合

$$\begin{aligned}(1+a^n)^{\frac{1}{n}} &= (1+1^n)^{\frac{1}{n}}\\ &= (1+1)^{\frac{1}{n}}\\ &= 2^{\frac{1}{n}} \to 1 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

$0<a<1$ の場合

$$\begin{aligned}&0<a<1\\ &\implies 0<a^n<1 \quad (\because n>1)\\ &\implies 1<1+a^n<2\\ &\implies 1^{\frac{1}{n}}<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}} \quad (n>0)\end{aligned}$$

$1^{\frac{1}{n}}$ は常に1に一致する。

また、$a=1$ の場合の結論より $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$

以上とはさみうちの原理から

$\lim_{n\to\infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$ が言える。

$a > 1$ の場合

$$\begin{aligned} & 0 < 1 < a \\ & \implies 0 < 1 < a^n \\ & \implies a^n < 1 + a^n < 2a^n \\ & \implies a < (1+a^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} a \end{aligned}$$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}} = a$ が言える。

<u>結論</u>

$$\lim_{n\to\infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1, & 0 < a \leq 1 \\ a, & a > 1 \end{cases}$$

<u>補足I</u>

$$\begin{aligned} & 0 < a < 1 \\ & \implies 0 < a^2 < a \\ & \implies 0 < a^3 < a^2 \end{aligned}$$

これを繰り返して $0 < a^n < \cdots < a^2 < a < 1$

よって、$0 < a^n < 1$

$$\begin{aligned} & 1 < a \\ & \implies a < a^2 \\ & \implies 1 < a < a^2 < \cdots < a^n \\ & \implies 0 < 1 < a^n \end{aligned}$$

補足2

【ヘルダー平均 (一般化平均)】

pを0でない実数とする。

正の数 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ に対して、

指数p のヘルダー平均は次のように定義される。

$$M_p(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} {x_i}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p \to 0$ の場合は幾何平均 (相乗平均)、

$p = 1$ の場合は算術平均 (相加平均)、

$p = -1$ の場合は調和平均に一致する。

また、$p \to \infty$ の場合は最大値に収束し、

$p \to -\infty$ の場合は最小値に収束する。

ヘルダー平均と最大値の関係を認めれば、

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1^n + a^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^n + a^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^n + a^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \mathrm{Max}\,(1, a) \end{aligned}$$

と上記のように回答できる。