次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[qn]{{}_{pn}P_{qn}}}{n}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[qn]{{}_{pn}P_{qn}}}{n}\quad (p,q\in\mathbb{Z}, p>q>0)$$

解答（0）

自然数 M, m に対して、順列 (Permutation) ${}_MP_m$は次のように定められる。

$$ {}_MP_m=\frac{M!}{(M-m)!}$$

$m!$は m この整数の積なので、${}_MP_m$は $M-(M-m)=m$ 個、${}_{pn}P_{qn}$は qn 個の整数の積と捉えられる。

また、$n=\sqrt[qn]{n^{qn}}$ であるから、これも qn 乗根記号の内部は qn この整数の積とみなせる。

与えられた極限を L、極限を求める数列を a_nとする。

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\sqrt[qn]{{}_{pn}P_{qn}}}{n}\\&=\sqrt[qn]{\frac{{}_{pn}P_{qn}}{n^{qn}}}\\&=\sqrt[qn]{\frac{1}{n^{qn}}\prod_{k=0}^{qn-1}(pn-k)}\\&=\sqrt[qn]{\prod_{k=0}^{qn-1}\left(p-\frac{k}{n}\right)}\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[qn]{{}_{pn}P_{qn}}}{n} \quad (p, q \in \mathbb{Z}, p > q > 0)$$

解答（I）

a_nの対数を調べる。

$$\begin{aligned}
\ln(a_n) &= \ln\left(\sqrt[qn]{\prod_{k=0}^{qn-1}\left(p - \frac{k}{n}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{qn}\ln\left(\prod_{k=0}^{qn-1}\left(p - \frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{qn-1}\ln\left(p - \frac{k}{n}\right) \\
&\to \frac{1}{q}\int_0^q \ln(p-x)\,\mathrm{d}x \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

連続性から、$\ln(a_n) \to \ln(L)$ $(n\to\infty)$ である。

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \frac{1}{q}\int_0^q \ln(p-x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{q}\int_0^q \ln(p-x)\,\mathrm{d}(p-x) \\
&= -\frac{1}{q}\Big[(p-x)\left(\ln(p-x)-1\right)\Big]_0^q \\
&= -\frac{1}{q}\left((p-q)\left(\ln(p-q)-1\right) - p(\ln(p)-1)\right) \\
&= \frac{1}{q}\ln\left(\frac{p^p}{(p-q)^{p-q}}\right) - 1
\end{aligned}$$

従って、次が言える。

$$L = \frac{1}{e}\sqrt[q]{\frac{p^p}{(p-q)^{p-q}}}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[qn]{{}_{pn}P_{qn}}}{n} \quad (p, q \in \mathbb{Z}, p > q > 0)$$

結論

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[qn]{{}_{pn}P_{qn}}}{n} = \frac{1}{e}\sqrt[q]{\frac{p^p}{(p-q)^{p-q}}}$$

おまけ

$0^0 = 1$ と定めた上で、$p = q = 1$ とすると、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

この関係が直ちに導かれる。(前回の結果)