複素数zの方程式

$$\cosh(z) = 0$$

次の等式を満たす複素数zを全て答えよ。

$\cosh(z) = 0$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

解答1

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= 0 \\ \frac{e^z + e^{-z}}{2} &= 0 \\ (e^z)^2 + 1 &= 0 \\ e^{2z} &= -1 \\ 2z &= \ln(-1) \\ &= (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ z &= \frac{2n+1}{2}\pi i \end{aligned}$$

解答2

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{e^{i(-iz)} + e^{-i(-iz)}}{2} \\ &= \cos(-iz) \\ (\sinh(z) &= i\sin(-iz)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= 0 \\ \cos(-iz) &= 0 \\ -iz &= \frac{2n+1}{2}\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ z &= \frac{2n+1}{2}\pi i \end{aligned}$$

結論

$$\{z \in \mathbb{C} | \cosh(z) = 0\} = \left\{ \frac{2n+1}{2}\pi i \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$$

補足1

【オイラーの公式】

任意の複素数zに対して次の等式が成立する。

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$

【オイラーの等式】

オイラーの公式の$z = \pi$のときの関係。

$e^{i\pi} + 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos(z) + i\sin(z) \\
e^{-iz} &= \cos(z) - i\sin(z)
\end{aligned}
$$

$$
\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}
$$

補足2(問題の解釈)

$\dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = 0$より

加法の逆元と乗法の逆元が一致する複素数は

$\pm i$の2つ限りであることわかる。

$-z = \dfrac{1}{z}$

$z^2 = -1 \quad$ (両辺を$-z$倍)

これは虚数単位の定義と等しい。