次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n \to \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$$

<u>説明</u>

以下、与えられた極限に対して次のような置換を考える。

$$x=\frac{1}{n}$$

$n\to+\infty$ のとき､$x\to+0$ である。
従って、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}=\lim_{x\to+0}\left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

が成り立つものとして考える。

【必要な情報】

$$\lim_{x}f(x)=\alpha\wedge\lim_{x}g(x)=\beta$$
$$\implies\lim_{x}f(x)g(x)=\alpha\beta$$

$$\lim_{x}f(x)=\alpha>0\wedge\lim_{x}g(x)=\beta$$
$$\implies\lim_{x}f(x)^{g(x)}=\alpha^{\beta}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to+0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

<u>解答I</u>

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1-(1-\cos(x))\\ &= 1-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=0$ であるから、

$$\begin{aligned}&(\cos(x))^{\frac{1}{-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}}\\ &= \left(1-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}}\\ &\to e \quad (x\to+0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-2}{x^2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\\ &\to -\frac{1}{2} \quad (x\to+0)\end{aligned}$$

以上のことから、次が従う。

$$\begin{aligned}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} &= (\cos(x))^{\frac{1}{-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\cdot\frac{-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{x^2}}\\ &= \left((\cos(x))^{\frac{1}{-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}}\right)^{\frac{-2}{x^2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\\ &\to e^{-\frac{1}{2}} \quad (x\to+0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\\ &= 0.60653065\ldots\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to+0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

解答2

$$\begin{aligned}
(\cos(x))^2 &= 1-(\sin(x))^2 \\
(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} &= \left(1-(\sin(x))^2\right)^{\frac{1}{2x^2}} \\
&= \left(\left(1-(\sin(x))^2\right)^{\frac{1}{-(\sin(x))^2}}\right)^{\frac{-(\sin(x))^2}{2x^x}} \\
&\to e^{-\frac{1}{2}} \quad (x\to+0)
\end{aligned}$$

解答3

$$\begin{aligned}
(\cos(x))^2 &= (\sec(x))^{-2} \\
&= \left(1+(\tan(x))^2\right)^{-1} \\
(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} &= \left(1+(\tan(x))^2\right)^{-\frac{1}{2x^2}} \\
&= \left(\left(1+(\tan(x))^2\right)^{\frac{1}{(\tan(x))^2}}\right)^{-\frac{(\tan(x))^2}{2x^2}} \\
&\to e^{-\frac{1}{2}} \quad (x\to+0)
\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to+0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

解答4（0）

$$\boxed{\lim_{x} f(x) = L \iff \lim_{x} e^{f(x)} = e^L}$$

$$\ln\left((\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))$$

次のような置換を考える。

$$u = x^2$$

$x > 0$ であるから、

$x \to +0$ ならば $u \to +0$ である。(同値)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x)) &= \frac{1}{u}\ln\left(\cos\left(\sqrt{u}\right)\right) \\ &= \frac{\ln\left(\cos\left(\sqrt{u}\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\sqrt{0}\right)\right)}{u-0}\end{aligned}$$

u を適切に取ると、$\left(0 < u < \frac{\pi^2}{16}\text{など}\right)$

任意の u に対して $\ln\left(\cos\left(\sqrt{\bullet}\right)\right)$ は $[0,u]$ 上連続かつ $(0,u)$ で微分可能である。

このとき、$v \in (0,u)$ が存在して、

次を満たす (平均値の定理)

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\ln\left(\cos\left(\sqrt{u}\right)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\ln\left(\cos\left(\sqrt{u}\right)\right)\right)\Big|_{u=v} \\ &= -\frac{\tan\left(\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to+0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

解答4（1）

$u\to+0$ のとき、$v\to+0$ であることから次が言える。

$$\lim_{u\to+0}-\frac{\tan\left(\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}=-\frac{1}{2}$$

以上から $\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))=-\frac{1}{2}$であり、

結論が従う。

結論

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}&=\lim_{x\to+0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$