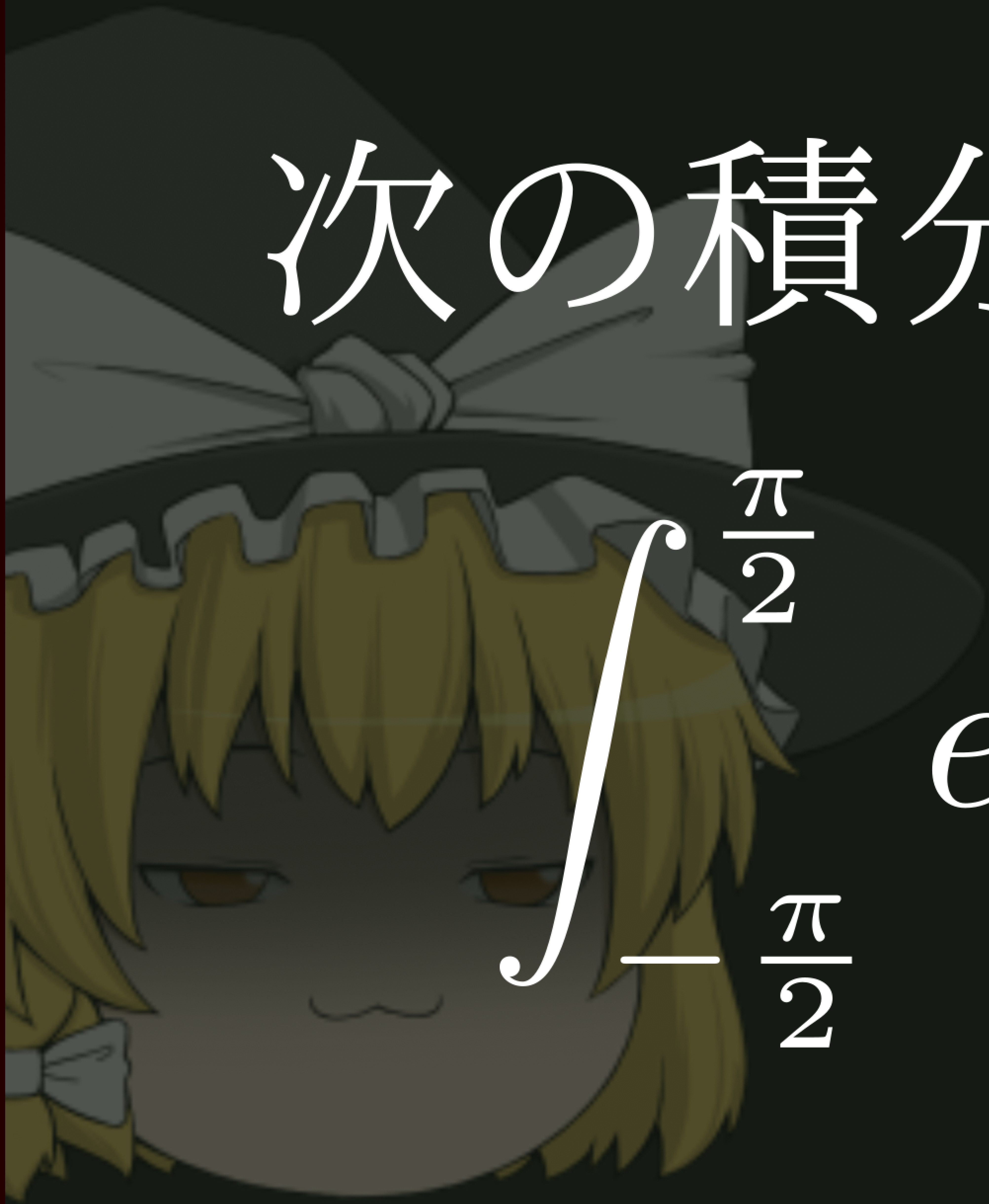


次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

<u>説明</u>

被積分関数 $e^{-(\tan(x))^2}$ は $x=-\dfrac{\pi}{2}$ または $x=\dfrac{\pi}{2}$ で定義されない。

与えられた積分は狭義のリーマン積分の値を持たないので、広義積分の範囲で考える。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\frac{\pi}{2}+0}\int_a^0 e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^b e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

右辺の極限がそれぞれ収束するとき、その値を与えられた積分の値とする。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（0）

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to-\frac{\pi}{2}+0}\int_a^0 e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to-\frac{\pi}{2}+0}\int_0^{-a} e^{-(\tan(u))^2}\,\mathrm{d}u \quad (u=-x) \\
&= \lim_{a'\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{a'} e^{-(\tan(u))^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

従って、$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ と $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ の極限が一致するので、いずれかの収束を確かめれば十分である。

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^b e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\tan(b)} \frac{e^{-v^2}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \quad (v=\tan(x)) \\
&= \lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{e^{-v^2}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

$$\lim_{L\to\infty}\int_0^L \left|\frac{e^{-v^2}}{1+v^2}\right|\mathrm{d}v \le \lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}$$

従って、与えられた積分は収束する。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（1）

正の実数sに対して、次のように $F(s)$ を定める。

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-s^2\left(1+v^2\right)}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$$

このとき、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2eF(1)$ を満たす。

Fの導関数 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$ を調べる。

正の実数sと実数vに対して、次のように関数Gを定める。

$$G(s,v) = \frac{e^{-s^2\left(1+v^2\right)}}{1+v^2}$$

$\dfrac{\partial G}{\partial s}(s,v) = -2se^{-s^2\left(1+v^2\right)}$ を満たす。

正の整数nに対して、次のように数列 h_n と関数列 g_n を定める。

$$0 < h_n < h_{n-1} < \cdots < h_0$$

$$g_n(s,v) = \frac{G(s+h_n,v) - G(s,v)}{h_n}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（2）

g_n は $\lim_{n\to\infty} g_n(s,v) = \frac{\partial G}{\partial s}(s,v)$ を満たす。

Gは任意のs, vに対して連続である。

従って、平均値の定理より次を満たす

$c \in (s, s+h_n)$ の存在が言える。

$$\frac{G(s+h_n,v)-G(s,v)}{h_n} = \frac{\partial G}{\partial s}(c,v)$$

左辺は正に $g_n(s,v)$ そのものである。

上記の主張は任意のs及びnに対して成り立つから

$\sup|g_n| \le \sup\left|\frac{\partial G}{\partial s}\right|$ が言える。

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial G}{\partial s}(s,v)\right| &= \left|-2se^{-s^2\left(1+v^2\right)}\right| \\ &= 2se^{-s^2\left(1+v^2\right)} \\ &= 2se^{-s^2}\cdot e^{-(sv)^2} \\ &\le 2se^{-s^2}\frac{1}{1+(sv)^2} \\ &\le \frac{2s}{1+(sv)^2}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2s}{1+(sv)^2}\,\mathrm{d}v = \pi$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（3）

これより、vについて$(0,\infty)$上可積分な関数Dが存在し、任意のn及びsに対してDが$|g_n|$の優関数であることが言える。

従って、ルベーグの収束定理(優収束定理)より次の関係が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n(s,v)\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial s}(s,v)\,\mathrm{d}v$$

以上より、$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \displaystyle\int_0^\infty -2se^{-s^2\left(1+v^2\right)}\,\mathrm{d}v$ が成立。

計算を続けて $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s)$ の値を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) &= \int_0^\infty -2se^{-s^2\left(1+v^2\right)}\,\mathrm{d}v \\ &= -2e^{-s^2}\int_0^\infty e^{-(sv)^2}s\,\mathrm{d}v \\ &= -2e^{-s^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= -\sqrt{\pi}e^{-s^2}\end{aligned}$$

$\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$

$\mathrm{erfc}(x) = 1-\mathrm{erf}(x)$ として

$F(s) = -\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{erf}(s)+\mathrm{C}$ と表せる。 $(\mathrm{C}:$ 定数$)$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

解答 (4)

$$\left|\frac{e^{-s^2\left(1+v^2\right)}}{1+v^2}\right| \leq \frac{1}{1+v^2}$$ なので、

優収束定理により、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+0} F(s) &= \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$F(s) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{erf}(s) + \mathrm{C}$ から $\lim_{s\to+0} F(s) = \mathrm{C}$ も

成り立つので、$\mathrm{C} = \frac{\pi}{2}$ が導けて、

$F(s) = \frac{\pi}{2}\operatorname{erfc}(s)$ が言える。

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\infty \frac{e^{-v^2}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \\ &= 2e\int_0^\infty \frac{e^{-\left(1+v^2\right)}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \\ &= 2eF(1) \\ &= e\pi\operatorname{erfc}(1)\end{aligned}$$

以上より、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\tan(x))^2}\,\mathrm{d}x = e\pi\operatorname{erfc}(1)$ が従う。

$e\pi\operatorname{erfc}(1) \approx 1.34329342\ldots$

補足

【ルベーグの収束定理(優収束定理)】

$\{f_n\}$ を測度空間 (S, Σ, μ) 上の可測関数の列とする。この列はある関数fに各点収束し、任意のnおよび $x \in S$ に対して $|f_n(x)| \le G(x)$ を満たす関数Gが存在するものとする。

このとき、次の関係が成り立つ。

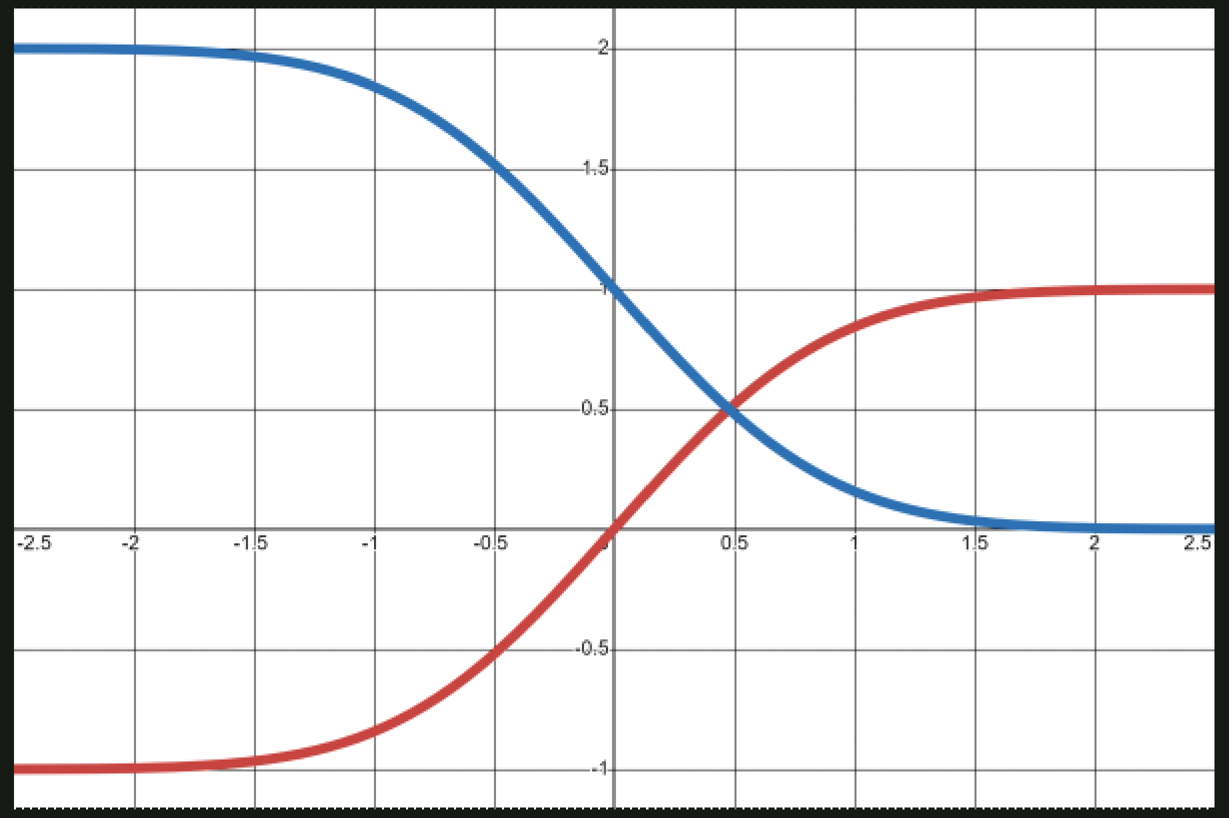
$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_S f \, \mathrm{d}\mu$$

【誤差関数(error function)】

任意の実数xに対して、誤差関数 $\operatorname{erf}(x)$ と相補誤差関数 $\operatorname{erfc}(x)$ を次のように定める。

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$



$y = \operatorname{erf}(x)$

$y = \operatorname{erfc}(x)$