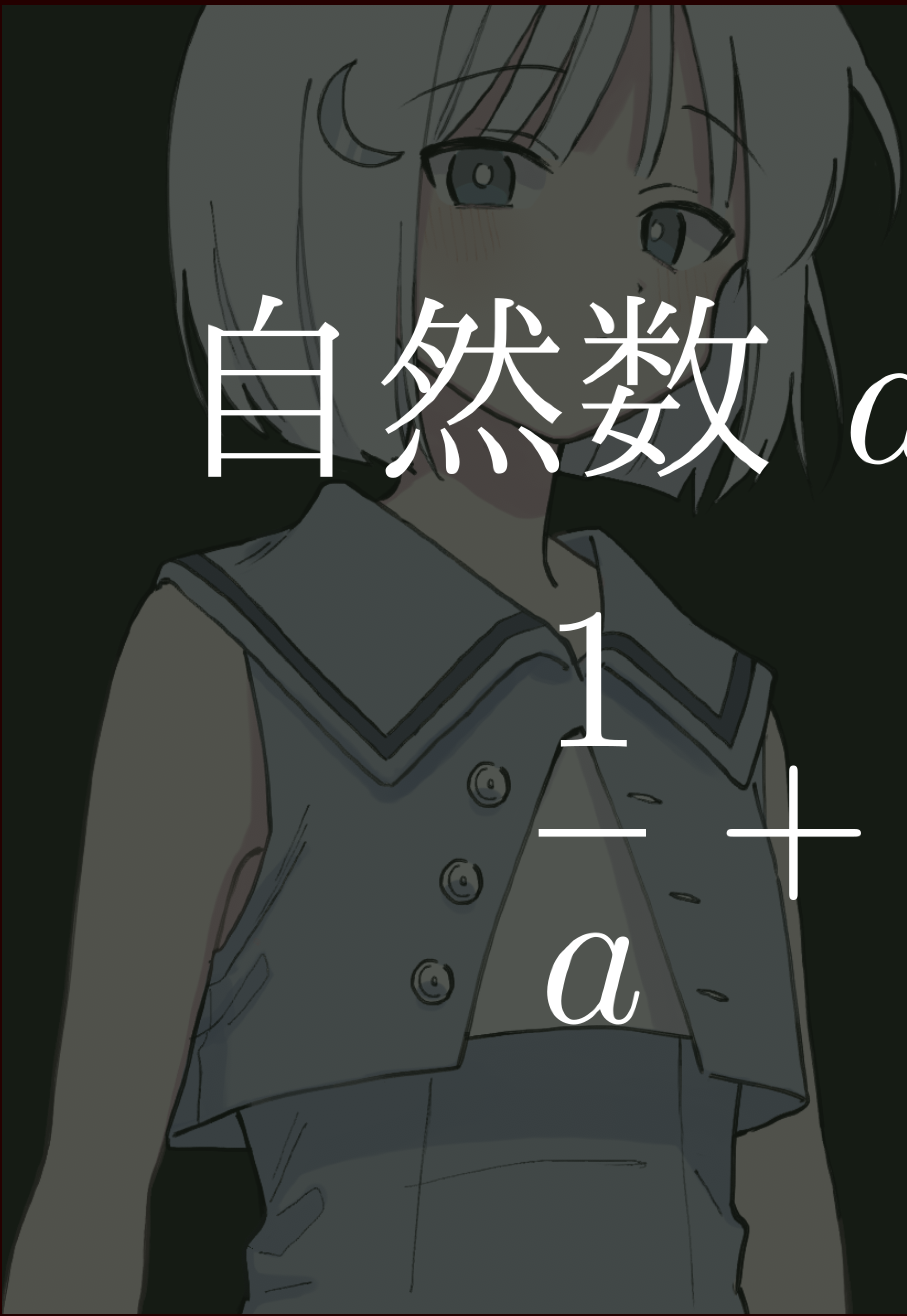

自然数 a, b, c の方程式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

次の等式を満たす自然数 a, b, c を全て答えよ。

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \quad (a \leq b \leq c)$

解答（0）

$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ は正であるため、a, b, c はいずれも2以上である。

$$
\begin{aligned}
a \leq b \leq c &\iff \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \\
&\implies \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{3}{a} \\
&\iff 1 \leq \frac{3}{a} \\
&\iff a \leq 3 \\
&\iff a=2 \text{ or } a=3
\end{aligned}
$$

$a=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=1 \\
\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=\frac{1}{2} \\
2(b+c)&=bc \\
(b-2)(c-2)&=4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b-2, c-2)&=(1,4),(2,2) \\
(b, c)&=(3,6),(4,4)
\end{aligned}
$$

次の等式を満たす自然数 a, b, c を全て答えよ。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \quad (a \leq b \leq c)$$

<u>解答（I）</u>

$a=3$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=1\\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=\frac{2}{3}\\ 6(b+c)&=4bc\\ (2b-3)(2c-3)&=9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2b-3, 2c-3)&=(1,9),(3,3)\\ (b,c)&=(2,6),(3,3)\end{aligned}$$

ただし $a \leq b$ が必要条件であるため、

$(a,b,c)=(3,2,6)$ は解に適さない。

<u>結論</u>

$$\exists a,b,c \in \mathbb{N}; \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \land a \leq b \leq c$$

$$\iff (a,b,c)=(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3)$$