

#2

2018年（前期）理系 第3問

東北大学

入試問題
の巣窟

2018年度 東北大学 前期理系 第3問

問題 整数 a, b は等式

$$3^a - 2^b = 1$$

を満たしているとする。

- (1) a, b はともに正となることを示せ。
- (2) $b > 1$ ならば, a は偶数であることを示せ。
- (3) ① を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。



N_tr a2v1d1 pbm

整数 a, b は等式 $3^a - 2^b = 1$ を満たしているとする。

(1)

a, b は共に正になることを示せ。

解答

$$3^a - 2^b = 1$$

$$2^{-b} - 3^{-a} = 2^{-b}3^{-a}$$

$$2^{-b}3^{-a} - 2^{-b} + 3^{-a} = 0$$

$$(2^{-b} + 1)(3^{-a} - 1) = -1$$

$$(2^{-b} + 1)(3^{-a} - 1) < 0 \implies 3^{-a} - 1 < 0$$

$$\iff 3^{-a} < 1$$

$$\iff a > 0$$

$$a > 0 \iff 3^a - 1 > 1$$

$$\iff 2^b > 1$$

$$\iff b > 0$$

(2)

$b > 1$ ならば、 a は偶数であることを示せ。

解答

$$b > 1 \iff b \geq 2 \quad (\because b \in \mathbb{Z})$$

$$\iff 2^b \geq 4$$

$$\implies 2^b \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\implies 3^a - 2^b \equiv (-1)^a \pmod{4}$$

$$\implies a \equiv 0 \pmod{2}$$

整数 a, b は等式 $3^a - 2^b = 1$ を満たしているとする。

(3)

与えられた等式を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。

解答

$3 - 2 = 1$ より $(a, b) = (1, 1)$ は解のひとつである。

$b > 1$ に対して $a = 2a'$ を満たす整数 a' を用いる。

$$\begin{aligned} 3^{2a'} - 2^b &= 1 \\ (3^{a'} + 1)(3^{a'} - 1) &= 2^b \end{aligned}$$

上記から $b = p + q, p > q$ なる整数 p, q を用いて次の関係が言える。

$$\begin{cases} 3^{a'} + 1 = 2^p \\ 3^{a'} - 1 = 2^q \end{cases}$$

これを踏まえて次に続く。

$$\begin{aligned} 2^p - 2^q &= 2 \\ 2^q (2^{p-q} - 1) &= 2 \end{aligned}$$

$p > q$ より 2^{p-q} は2以上の整数である。

2^q は偶数、 $2^{p-q} - 1$ は奇数なので、

p, q は $2^q = 2, 2^{p-q} - 1 = 1$ を満たす。

従って $q = 1, p = 2$ であるから、 $b = 3$ である。

$$\begin{aligned} b = 3 &\iff 3^a = 9 \\ &\iff a = 2 \end{aligned}$$

以上から、 $(a, b) = (1, 1), (2, 3)$ である。