次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\lfloor\sqrt{2n^2-k^2}\right\rfloor}{n^2}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\lfloor\sqrt{2n^2-k^2}\right\rfloor}{n^2}$$

【床関数】

$$\lfloor x\rfloor = k \quad (k\le x<k+1, k\in\mathbb{Z})$$

解答（0）

$a_k=\sqrt{2n^2-k^2}$とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\lfloor\sqrt{2n^2-k^2}\right\rfloor}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor a_k\rfloor}{n^2}$$

$$a_k-1<\lfloor a_k\rfloor\le a_k$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-1}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor a_k\rfloor}{n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\\ &= \int_0^1\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta \quad \left(x=\sqrt{2}\sin(\theta)\right)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos(2\theta))\,d\theta\\ &= \left[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

解答（1）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
$$=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n^2}=\frac{\pi}{4}$$

結論

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\lfloor\sqrt{2n^2-k^2}\right\rfloor}{n^2}=\frac{\pi}{4}$$

補足1

【はさみうちの原理】

3つの実数列$\{A_n\},\{B_n\},\{M_n\}$について

$$(A_n\le M_n\le B_n)\land\left(\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n=L\right)$$

$\Longrightarrow\ \lim_{n\to\infty}M_n=L$ が成り立つ。

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}$$

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\lfloor\sqrt{2n^2-k^2}\right\rfloor}{n^2}$$

とすればこの問題のケースに一致する。

補足2

【区分求積法】

実数区間$I=[a,b]$上で定義された

実数値連続関数fに対して次が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

$a=0, b=1$ とすれば $[0,1]$上の積分になり

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

この様により簡素に表せる。