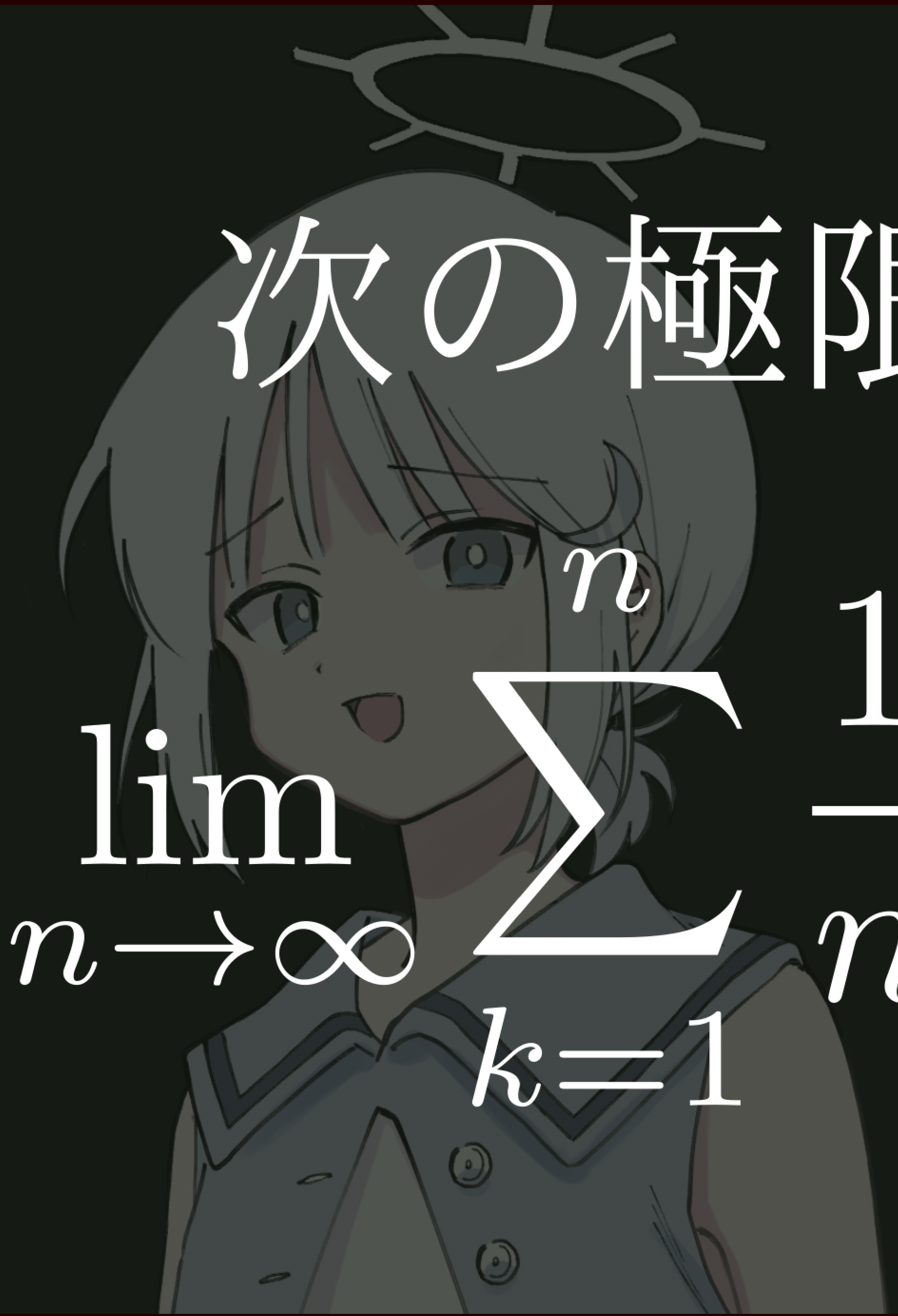

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)^{2}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)^2$$

解答

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)^2 &= \int_0^1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)^2\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

結論

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)^2$$

補足

【区分求積法】

$[0,1]$ 上連続な関数 f に対して、次の関係が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

【半角の公式】

任意の実数 x に対して次が成り立つ。

$$\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=\frac{1+\cos(x)}{2}$$
$$\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=\frac{1-\cos(x)}{2}$$