次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

説明

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

与えられた無限和は指数関数の級数展開表示に似ており、何かしらの関係が感じられる。

実際、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \frac{\mathrm{d}\left(e^z\right)}{\mathrm{d}z}(1) = e$ であるので、

似たような方法で計算が出来そう。

$a_n = \dfrac{n^4}{n!}$とすると、

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^4}\right| \\ &= \frac{(n+1)^3}{n^4} \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

であるから、与えられた無限和が収束することは確認できる。(ダランベールの収束判定法)

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

解答I（0）

P_mを次のような多項式とする。

$$\begin{aligned} P_m(x) &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-m) \\ &= \prod_{k=0}^{m}(x-k) \end{aligned}$$

P_mは0以上m以下の整数全てを根に持つ。

つまり、任意の$k \in \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq z \leq m\}$に対して、次が成り立つ。

$$P_m(k) = 0$$

次の関係を示す。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_m(n)}{n!} = e$$

以下のように計算すればよい。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_m(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{m} \frac{P_m(n)}{n!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{P_m(n)}{n!} \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{P_m(n)}{n!} \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-m-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= e \end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

解答1（1）

実数 s, t, u, v, w に対して、次が成り立つとする。

$$\begin{gathered} s + tn + un(n-1) + vn(n-1)(n-2) \\ + wn(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 \end{gathered}$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4$ を代入して次の関係を得る。

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ s + t &= 1 \\ s + 2t + 2u &= 2^4 \\ s + 3t + 6u + 6v &= 3^4 \\ s + 4t + 12u + 24v + 24w &= 4^4 \end{aligned}$$

これを満たす組は

$(s, t, u, v, w) = (0, 1, 7, 6, 1)$ のみである。

従って、n^4 は次のように表せる。

$$\begin{aligned} n^4 &= n + 7n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) \\ &\quad + n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= P_0(n) + 7P_1(n) + 6P_2(n) + P_3(n) \end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$$

<u>解答I（2）</u>

以上から、与えられた極限は次のように計算される。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_0(n)+7P_1(n)+6P_2(n)+P_3(n)}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_0(n)}{n!}+7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_1(n)}{n!}\\ &\quad +6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_2(n)}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_3(n)}{n!}\\ &= e+7e+6e+e\\ &= 15e\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

解答2（0）

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を写像とし、次のように値を定める。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$$

任意の x に対して右辺の無限和は一様収束する。

一様収束性から、f の導関数、及び高次導関数は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{nx}}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{nx}}{n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m} &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left(\frac{e^{nx}}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m e^{nx}}{n!}
\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

解答2（1）

従って、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 e^{nx}}{n!} \bigg|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}(0)$$

が成り立つ。

ところで、$f(x) = e^{e^x}$ である。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \bigg|_{z=e^x} \\ &= e^{e^x} \end{aligned}$$

以上から、与えられた極限は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!} &= \frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}(0) \\ &= 15e \end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

<u>結論</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = 15e$$

<u>おまけ(解答2の補足)</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^4 \left(e^{e^x}\right)}{\mathrm{d}x^4} &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} \left(e^{e^x} e^x\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(e^{e^x} \left(e^{2x} + e^x\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(e^{e^x} \left(e^{3x} + 3e^{2x} + e^x\right)\right) \\
&= e^{e^x} \left(e^{4x} + 6e^{3x} + 7e^{2x} + e^x\right)
\end{aligned}$$

従って、$\dfrac{\mathrm{d}^4 \left(e^{e^x}\right)}{x^4}(0) = 15e$