

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^7 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^7 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx$$

解答 (0)

	0	...	1	...	3	...	5	...
$x - 5$	-						0	+
$x - 3$	-				0	+		
$x - 1$	-		0	+				

上記の表を基に与えられた積分を分割する。
具体的には、 $[0, 1)$, $[1, 3)$, $[3, 5)$, $[5, 7]$ の4つ。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x-1}{x-4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 + \frac{3}{x-4}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + 3 \ln |x-4| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 3 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx &= -\frac{1}{2} \int_1^3 \frac{x-1}{x-4} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[x + 3 \ln |x-4| \right]_1^3 \\ &= -1 + \frac{3}{2} \ln(3) \end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^7 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx$$

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx &= \frac{1}{2} \int_3^5 (x-1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x-1)^2 \right]_3^5 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx &= \frac{1}{2} \int_5^7 \frac{x-1}{x-4} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + 3 \ln |x-4| \right]_5^7 \\ &= 1 + \frac{3}{2} \ln(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^7 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right) - 1 + \frac{3}{2} \ln(3) \\ &\quad + 3 + 1 + \frac{3}{2} \ln(3) \\ &= \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{27}{4}\right)\end{aligned}$$

結論

$$\int_0^7 \frac{|x-1|}{|x-3|+|x-5|} dx = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{27}{4}\right)$$