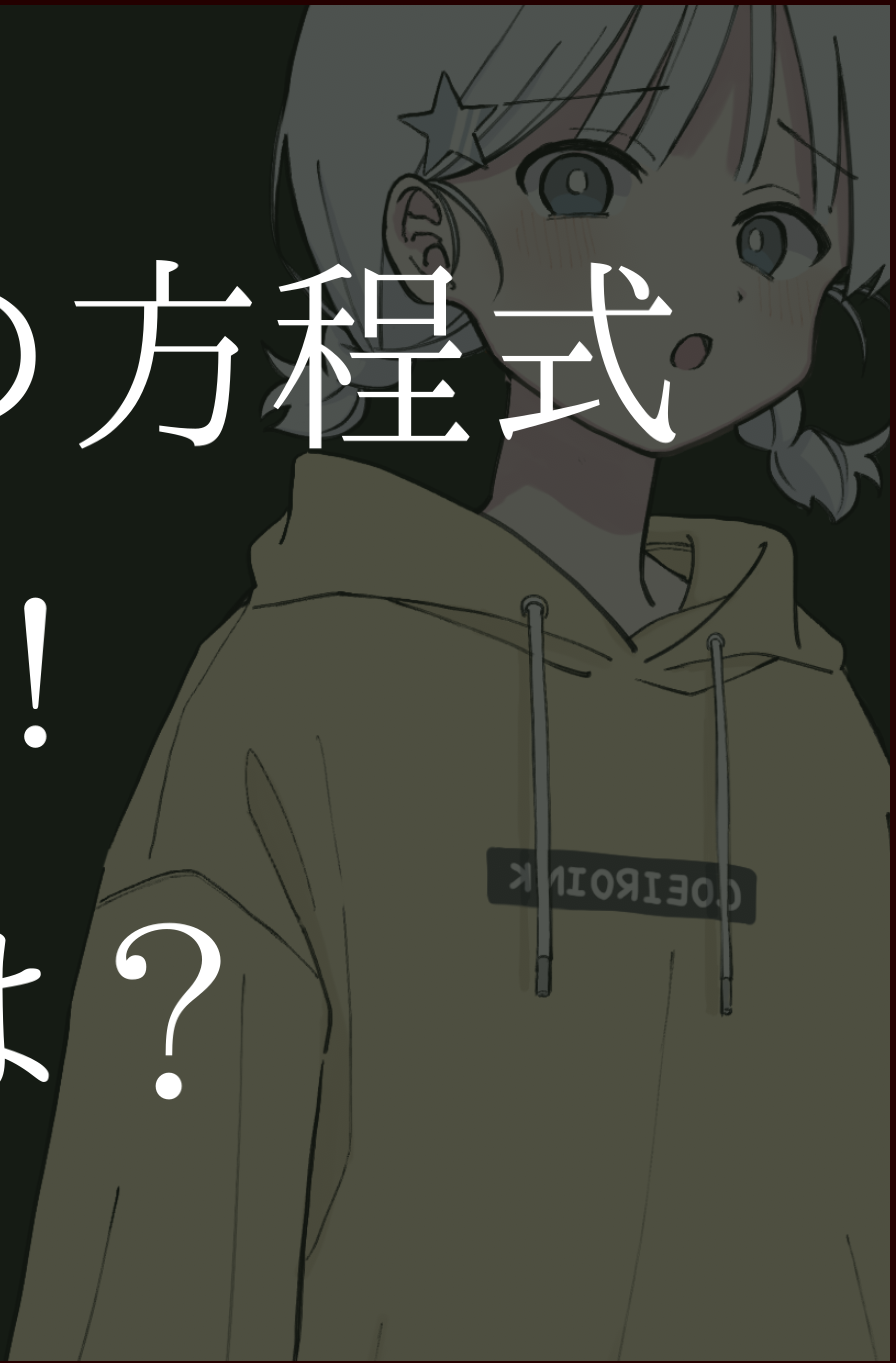
自然数 a, b, c の方程式

$$abc = 10!$$

解の個数は？



次の等式を満たす自然数 a, b, c

全ての組の個数を答えよ。

$abc = 10!$

解答（0）

10! の素因数を調べる。

10以下の最大の素数は7であるので、

10! は $2, 3, 5, 7$ の累乗の積で表せる。

10以下の最大の2の冪は3乗、3の冪は2乗、

5の冪は1乗、7の冪も1乗である。

$n!$ はpを $\displaystyle\sum_{i=1}^{\log_p(n)} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ 個素因数に持つ。

従って、10! は次のように表せる。

$$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

自然数 $p \leq 8, q \leq 4, r \leq 2, s \leq 1$ を用いて

$$a = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$$

とすると、bc は p, q, r, s によって一意に定まる。

$$\begin{aligned} bc &= \frac{10!}{a} \\ &= \frac{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s} \\ &= 2^{8-p} \cdot 3^{4-q} \cdot 5^{2-r} \cdot 7^{1-s} \end{aligned}$$

従って、$abc = 10!$ を満たす (a, bc) の個数は

10! の正の約数の個数に一致する。

これと同様にして、$bc = \dfrac{10!}{a}$ を満たす (b, c) の

個数は $\dfrac{10!}{a}$ の正の約数の個数に等しいと言える。

次の等式を満たす自然数 a, b, c

全ての組の個数を答えよ。

$abc = 10!$

解答（1）

以上のことから、$abc = 10!$ を満たす (a, b, c) の個数は $10!$ の全ての正の約数の正の約数の個数の総和と捉えることができる。

従って、個数Nは次のように表される。

$$N = \sum_{\substack{0 \leq p \leq 8 \\ 0 \leq q \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq s \leq 1}} (p+1)(q+1)(r+1)(s+1)$$

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq 8 \\ 0 \leq q \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq s \leq 1}} (p+1)(q+1)(r+1)(s+1) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq p \leq 9 \\ 1 \leq q \leq 5 \\ 1 \leq r \leq 3 \\ 1 \leq s \leq 2}} pqrs \\
&= \left(\sum_{p=1}^{9} p\right)\left(\sum_{q=1}^{5} q\right)\left(\sum_{r=1}^{3} r\right)\left(\sum_{s=1}^{2} s\right) \\
&= \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \\
&= 45 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 3 \\
&= 12150
\end{aligned}$$

結論

$$\left|\left\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3; abc = 10!\right\}\right| = 12150$$