実数xの方程式

$$x + e^x = 0$$

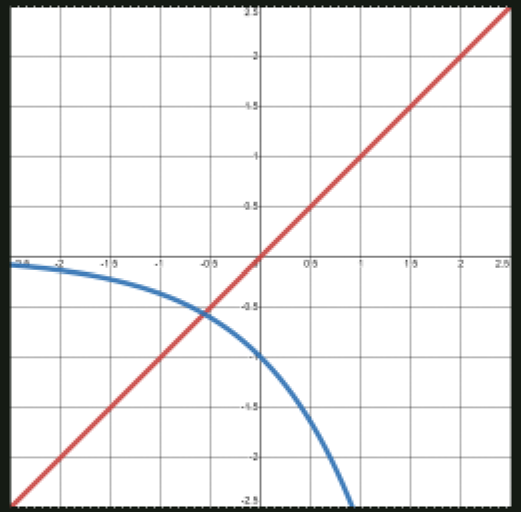
次の等式を満たす実数xを全て答えよ。

$x + e^x = 0$

グラフ

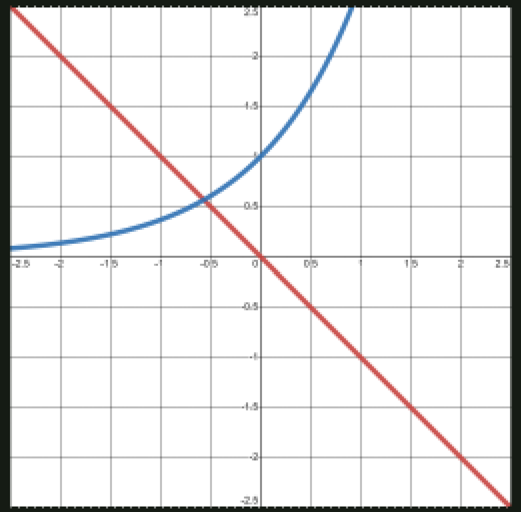
$y = x$と$y = -e^x$の交点か

$y = -x$と$y = e^x$の交点と解釈できる。



$y = x$

$y = -e^x$



$y = -x$

$y = e^x$

$-1 < x < 0$の範囲にひとつの交点が見られる。

関数$f(x) = \pm x, \pm e^x$は実数全体で単調に変化する。

赤青の増減の向きが異なるため、他の交点はない。

【ランベルトのW関数】

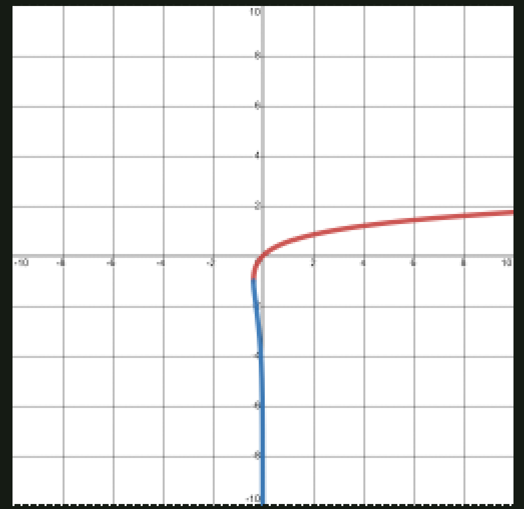
複素数zの関数$f(z) = ze^z$に対しての逆関数。

$z = \mathrm{W}\left(ze^z\right) = \mathrm{W}(z)e^{\mathrm{W}(z)}$を満たす。

zが実数のとき、$\mathrm{W}(z) \geq -1$の部分を$\mathrm{W}_0(z)$と、

$\mathrm{W}(z) < -1$の部分を$\mathrm{W}_{-1}(z)$と表す。

$$\mathrm{W}(z) = \begin{cases} \mathrm{W}_0(z),\ \mathrm{W}(z) \geq -1 \\ \mathrm{W}_{-1}(z),\ \mathrm{W}(z) < -1 \end{cases}$$



$y = \mathrm{W}_0(x), y = \mathrm{W}_{-1}(x)$

解答1

$$\begin{aligned}
x + e^x &= 0 \\
x &= -e^x \\
t &= e^{-t} \quad (x = -t \ (t > 0)) \\
\ln(t) &= -t \\
-\frac{\ln(t)}{t} &= 1 \\
-\ln(t) e^{-\ln(t)} &= 1 \\
-\ln(t) &= \mathrm{W}(1) \\
t &= e^{-\mathrm{W}(1)} \\
x &= -e^{-\mathrm{W}(1)} \\
&= -\mathrm{W}(1) \\
&= -0.5671432904097838\ldots
\end{aligned}$$

解答2

$$\begin{aligned}
x + e^x &= 0 \\
e^{x+e^x} &= 1 \\
e^x e^{e^x} &= 1 \\
\mathrm{W}\left(e^x e^{e^x}\right) &= \mathrm{W}(1) \\
e^x &= \mathrm{W}(1) \\
x &= \ln\left(\mathrm{W}(1)\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{e^{\mathrm{W}(1)}}\right) \\
&= -\mathrm{W}(1) \\
&= -0.5671432904097838\ldots
\end{aligned}$$

結論

$$\{x \in \mathrm{R} | x + e^x = 0\} = \{-\mathrm{W}(1)\}$$