次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

解答I

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}\left(1+e^{-x}\right) \\ &= -\ln\left(1+e^{-x}\right)+\mathrm{C}\end{aligned}$$

結論

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(1+e^{-x}\right)+\mathrm{C}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$$

<u>解答2</u>

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

ここで、I, J を次のように定める。

$$I = \int \frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$
$$J = \int \frac{e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

このとき、J は与えられた積分に等しい。

$$\begin{aligned} I + J &= \int \mathrm{d}x \\ &= x + \mathrm{C}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I - J &= \int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{e^{x}+e^{-x}} \\ &= \ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) + \mathrm{C}_1 \end{aligned}$$

であるから、J 即ち与えられた積分は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\left((I+J)-(I-J)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right) + \mathrm{C} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) + \mathrm{C} \end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

解答3(0)

$x>0$ とする。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int e^{-x}\cdot\frac{1}{1-(-e^{-x})}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-e^{-x}\right)^n\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-x}\right)^n\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-x}\right)^n$ の部分列 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(-e^{-x}\right)^n$ は $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ に一様に収束する。従って、次が成り立つ。

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-x}\right)^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int\left(-e^{-x}\right)^n\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

<u>解答3(1)</u>

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x &= -\sum_{n=1}^{\infty}\int \left(-e^{-x}\right)^n \mathrm{d}x \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int e^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{-n} e^{-nx} + \mathrm{C} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-e^{-x}\right)^n}{n} + \mathrm{C} \\ &= -\ln\left(1-\left(-e^{-x}\right)\right) + \mathrm{C} \\ &= -\ln\left(1+e^{-x}\right) + \mathrm{C}\end{aligned}$$

$x<0$ のときも同様にして計算できる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-e^x\right)^n\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^x\right)^n\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int e^{nx}\,\mathrm{d}x \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-e^x\right)^n}{n} + \mathrm{C} \\ &= x - \ln\left(1+e^x\right) + \mathrm{C} \\ &= -\ln\left(1+e^{-x}\right) + \mathrm{C}\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

解答3 補足(0)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (一様収束)$$

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall x \in A;$$

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}\left|\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_A f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_A (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_A |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_A \epsilon\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{Vol}(A)\epsilon\end{aligned}$$

故に、次を満たす。(積分と極限の交換)

$$\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

解答3 補足(1)

$0<a<b<\infty$ なる a,b に対して、次を考える。

$A=[a,b]$ 上の関数列 f_n とその極限関数 f

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(-e^{-x}\right)^k=\frac{\left(-e^{-x}\right)-\left(-e^{-x}\right)^{n+1}}{1+e^{-x}}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-e^{-x}\right)^k=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

ここで、f_n と f の差を考える。

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

$x_M\in A$ が $|f_n-f|$ の最大の値を取るとする。
即ち、任意の $x\in A$ に対して次を満たす。

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &\le |f_n(x_M)-f(x_M)|\\ &=\frac{e^{-(n+1)x_M}}{1+e^{-x_M}}\end{aligned}$$

また、最大値が存在すれば、それは上限に等しい。

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)| &=\frac{e^{-(n+1)x_M}}{1+e^{-x_M}}\\ &\to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

$x<0$ の場合についても同様に言える。