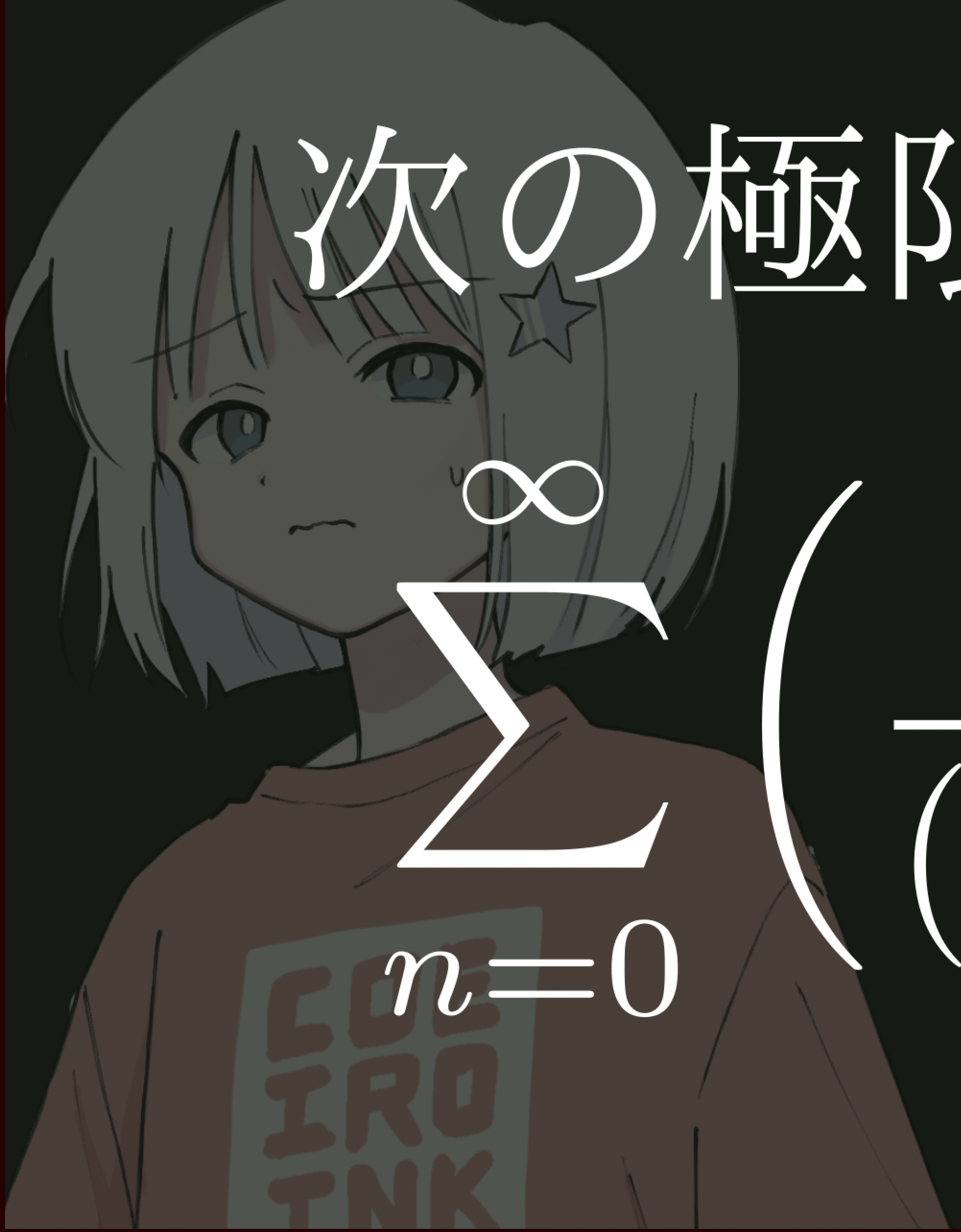

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(-1)^n+7}\right)^n$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(-1)^n+7}\right)^n$$

解答（0）

与えられた極限は級数である。即座に値を得られる形ではない為、各項の一般の形について調べて計算のしやすい形で考える。

自然数 n に対して、a_n を次のように定める。

$$a_n=\left(\frac{2}{(-1)^n+7}\right)^n$$

$\sqrt[n]{a_n}$ が一定の値であれば a_n は等比数列であり、その和も容易に計算できる。しかし、実際は n に依って値が変化する。従って、同じ方法は使えない。

$\sqrt[n]{a_n}$ の n に依存する部分をよく見てみる。$(-1)^n$ は整数 n の偶奇に依って 1 と -1 を交替するように変化する。即ち、偶奇が同じ n に対しては $\sqrt[n]{a_n}$ は常に一定の値を取ることがわかる。

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{4^n}, & \text{if } n\equiv 0 \pmod 2\\ \frac{1}{3^n}, & \text{if } n\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(-1)^n+7}\right)^n$$

解答（I）

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4^2}}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3^2}\right)}$$

であることから、これらの和である $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ が

収束することが言える。

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n+1} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4^2}} + \frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3^2}\right)} \\ &= \frac{16}{15} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{173}{120}\end{aligned}$$

結論

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(-1)^n+7}\right)^n = \frac{173}{120}$$