別解

次の積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha} \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

解答I（0）

$x>0$ なる実数 x と実数αに対して

$f(x,\alpha), I(x,\alpha)$ を次のように定める。

$$f(x,\alpha)=x^{\alpha}$$
$$I(x,\alpha)=\int_1^x f(s,\alpha)\,\mathrm{d}s$$

このとき、f と I に対して次が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)=x^{\alpha}\ln(x)$$
$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(x,\alpha)=\int_1^x s^{\alpha}\ln(s)\,\mathrm{d}s$$

従って、与えられた積分は$\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}$によって表せる。

$$\begin{aligned}\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^x s^{\alpha}\ln(s)\,\mathrm{d}s+\mathrm{C}\\ &=\frac{\partial I}{\partial \alpha}(x,\alpha)+\mathrm{C}\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

解答I（I）

任意の x,α に対して $I(x,\alpha)$ が存在する。

また、各 x に対して $\ln(x)$ が存在する為、

$\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ もまた有限である。

$$I(x,\alpha)=\begin{cases}\ln(x), & \text{if } \alpha=-1\\ \dfrac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}-1\right), & \text{if } \alpha\neq-1\end{cases}$$

$s\in[x,1]$ または $s\in[1,x]$ において、

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(s,\alpha)\right|\leq|(1+x^{\alpha})\ln(x)|$ を常に満たす。

以上から、次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_1^x f(s,\alpha)\,\mathrm{d}s=\int_1^x\frac{\partial f}{\partial \alpha}(s,\alpha)\,\mathrm{d}s$$

これはすなわち、$\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ の積分表示を意味する。

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(x,\alpha)=\int_1^x s^{\alpha}\ln(s)\,\mathrm{d}s$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha} \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

解答I (2)

$\alpha \neq -1$ のとき、$I(x,\alpha)$ は次のように表せる。

$$I(x,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha} - 1\right)$$

このとき、$I(x,\alpha)$ はαについて連続である。

$x = 1$ のとき、$\lim_{\alpha \to -1} I(x,\alpha) = 0 = I(x,-1)$ である。

$x \neq -1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha \to -1} I(x,\alpha) \\
&= \lim_{\alpha \to -1} \frac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha} - 1\right) \\
&= \ln(x) \cdot \lim_{\alpha \to -1} \frac{1}{(1+\alpha)\ln(x)}\left(e^{(1+\alpha)\ln(x)} - 1\right) \\
&= \ln(x) \\
&= I(x,-1)
\end{aligned}$$

任意の x に対して $\lim_{\alpha \to -1} I(x,\alpha) = I(x,-1)$ を満たす。

従って、I はαについて常に連続である。

次の積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

解答I（3）

$0<|\alpha-t|<\delta$とする。

$$\begin{aligned}|I(x,\alpha)-I(x,t)| &= \left|\int_1^x s^{\alpha}\,\mathrm{d}s-\int_1^x s^{t}\,\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\int_1^x \left(s^{\alpha}-s^{t}\right)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\int_1^x s^{t}\left(s^{\alpha-t}-1\right)\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|\int_1^x s^{t}\left|s^{|\alpha-t|}-1\right|\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|x^{\delta}-1\right|\left|\int_1^x s^{t}\,\mathrm{d}s\right|\end{aligned}$$

$$\epsilon=\left|x^{\delta}-1\right||I(x,t)|$$

任意の$\epsilon>0$に対して上を満たすようにδを定めると、任意のx,tに対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0,\exists\delta>0;\forall\alpha\in\mathbb{R};\\ &0<|\alpha-t|<\delta \implies |I(x,\alpha)-I(x,t)|\le\epsilon\end{aligned}$$

従って$I(x,\alpha)$はαについて連続である。

次の積分を計算せよ。

$$\int x^\alpha \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

解答I（4）

$I(x,\alpha)=\dfrac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}-1\right)$ より、-1 でない t に対して $\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}(x,t)$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial \alpha}(x,t) &= \frac{\partial\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}{\partial \alpha}(x,t)\left(x^{1+t}-1\right) \\ &\quad + \frac{1}{1+t}\frac{\partial\left(x^{1+\alpha}-1\right)}{\partial \alpha}(x,t) \\ &= -\frac{1}{(1+t)^2}\left(x^{1+t}-1\right)+\frac{x^{1+t}\ln(x)}{1+t} \\ &= \frac{1}{(1+t)^2}\left(x^{1+t}((1+t)\ln(x)-1)+1\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}(x,-1)$ は次のように計算する。

$x=1$ のとき

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(x,-1)=\lim_{\alpha\to -1}\frac{I(x,\alpha)-I(x,-1)}{\alpha-(-1)}=0$$

$x\neq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial \alpha}(x,-1) &= \lim_{\alpha\to -1}\frac{I(x,\alpha)-I(x,-1)}{\alpha-(-1)} \\ &= \lim_{\alpha\to -1}\frac{\frac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}-1\right)-\ln(x)}{1+\alpha} \\ &= \lim_{\alpha\to -1}\frac{x^{1+\alpha}-1-(1+\alpha)\ln(x)}{(1+\alpha)^2} \\ &= (\ln(x))^2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1-u}{u^2}\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>解答I（5）</u>

$\lim_{u\to 0} e^u-1-u=0, \lim_{u\to 0} u^2=0$ であって、

$\dfrac{\mathrm{d}\left(e^u-1-u\right)}{\mathrm{d}u}=e^u-1, \dfrac{\mathrm{d}\left(u^2\right)}{\mathrm{d}u}=2u$ より

$\lim_{u\to 0}\dfrac{\frac{\mathrm{d}(e^u-1-u)}{\mathrm{d}u}}{\frac{\mathrm{d}(u^2)}{\mathrm{d}u}}=\dfrac{1}{2}$である。

従って、ロピタルの定理により次が成り立つ。

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1-u}{u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}(e^u-1-u)}{\mathrm{d}u}}{\frac{\mathrm{d}(u^2)}{\mathrm{d}u}}=\frac{1}{2}$$

故に、$\dfrac{\partial I}{\partial\alpha}(x,-1)=\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$を満たす。

$\dfrac{1}{2}(\ln(1))^2=0$ であるので、$x=1$ の場合も含まれる。

<u>結論</u>

$$\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2+\mathrm{C}, & \text{if } \alpha=-1\\ \dfrac{x^{1+\alpha}}{(1+\alpha)^2}\left((1+\alpha)\ln(x)-1\right)+\mathrm{C}, & \text{if } \alpha\neq-1\end{cases}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

解答2

与えられた積分は次の関係を満たす。

$$\int x^{\alpha}\ln(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^x s^{\alpha}\ln(s)\,\mathrm{d}s+\mathrm{C}$$

従って、$[1,x]$ または $[x,1]$ での値がわかればよい。

$$\begin{aligned}
&\int_1^x s^{\alpha}\ln(s)\,\mathrm{d}s\\
&=\int_1^x s^{\alpha}\,\mathrm{d}s\int_1^s t^{-1}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_1^x t^{-1}\,\mathrm{d}t\int_t^x s^{\alpha}\,\mathrm{d}s\\
&=\int_1^x t^{-1}\,\mathrm{d}t\left(\begin{cases}\ln(x)-\ln(t)\\ \dfrac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}-t^{1+\alpha}\right)\end{cases}\right)\\
&=\begin{cases}\displaystyle\int_1^x\left(t^{-1}\ln(x)-t^{-1}\ln(t)\right)\mathrm{d}t\\ \displaystyle\frac{1}{1+\alpha}\int_1^x\left(t^{-1}x^{1+\alpha}-t^{\alpha}\right)\mathrm{d}t\end{cases}\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2\\ \dfrac{1}{(1+\alpha)^2}\left(x^{1+\alpha}((1+\alpha)\ln(x)-1)+1\right)\end{cases}
\end{aligned}$$