次の積分を計算せよ。

$$\int x^n e^{-mx}\,\mathrm{d}x$$

$$(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^n e^{-mx}\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

解答（0）

$$\begin{aligned}
&\int x^n e^{-mx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{-m}\int x^n \left(-me^{-mx}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{-m}\int x^n \mathrm{d}\left(e^{-mx}\right) \\
&= -\frac{1}{m}x^n \cdot e^{-mx} + \frac{1}{m}\int \left(nx^{n-1}\mathrm{d}x\right) \cdot e^{-mx} \\
&= -\frac{1}{m}x^n e^{-mx} + \frac{n}{m}\int x^{n-1}e^{-mx}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$I_n = \dfrac{m^n}{n!}\displaystyle\int x^n e^{-mx}\mathrm{d}x$ とする。

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{m^0}{0!}\int x^0 e^{-mx}\mathrm{d}x \\
&= \int e^{-mx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{-m}\int -me^{-mx}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{m}\int \mathrm{d}\left(e^{-mx}\right) \\
&= -\frac{1}{m}e^{-mx} + \mathrm{C}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\frac{m^{n-1}}{n!}x^n e^{-mx} + I_{n-1} \\
&= -\frac{m^{n-1}}{n!}x^n e^{-mx} - \frac{m^{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-mx} + I_{n-2} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{m^{k-1}}{k!}x^k e^{-mx} + I_0 \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{m^{k-1}}{k!}x^k e^{-mx} - \frac{1}{m}e^{-mx} \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{m^{k-1}}{k!}x^k e^{-mx}
\end{aligned}
$$

<u>結論</u>

$$
\int x^n e^{-mx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{m^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(mx)^k e^{-mx} + \mathrm{C}
$$

<u>補足</u>

$$
f_{n,m}(x) = x^n e^{-mx}
$$

$$
F_{n,m}(x) = -\frac{1}{m^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(mx)^k e^{-mx} \text{ とする。}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f_{n,1}(t)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty t^n e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \Gamma(n+1) \quad (= \Pi(n)) \\
&= n!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f_{n,1}(t)\mathrm{d}t &= \Big[F(x)\Big]_0^\infty \\
&= \left[-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k e^{-x}\right]_0^\infty \\
&= n!
\end{aligned}
$$