この回答の何がダメ!?

$$\int_0^{\pi} \tan(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x$$

誤回答

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \tan(\pi - u)(-\mathrm{d}u) \quad (x = \pi - u)$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(u)\ \mathrm{d}u$$

$$\int_0^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\ \mathrm{d}x + \left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\ \mathrm{d}x\right)$$
$$= 0$$

解答

$$\lim_{\epsilon_0 \to +0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon_0} \tan(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\lim_{\epsilon_1 \to +0} \int_{\frac{\pi}{2}+\epsilon_1}^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x$$

上記の2つの極限の値が存在しないので、

与えられた積分の値は存在しない。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon_0} \tan(x)\ \mathrm{d}x = \ln\left(\sec\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon_0\right)\right)$$
$$= \ln(\csc(\epsilon_0)) \to \infty \quad (\epsilon_0 \to +0)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\epsilon_1}^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1\right)\right|$$
$$= \ln(\sin(\epsilon_1)) \to -\infty \quad (\epsilon_1 \to +0)$$

値が存在しない(定義されない)ので、
誤回答にある等式は全て成立しない。

<u>補足</u>

【不連続点についての広義積分】

関数fが$[a,b]$上の1点cを除いて連続ならば
(下の式の右辺の極限の存在を仮定して)

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\epsilon_0 \to +0} \int_a^{c-\epsilon_0} f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{\epsilon_1 \to +0} \int_{c+\epsilon_1}^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

が定義される。不連続点が複数の場合も
いくつかの部分区間に分けて考えればよい。
上にある極限が収束するとき、
「広義積分は収束する」という。

解答にて示した通り、与えられた積分の
部分区間についての積分の極限は収束しない
ため、積分の値も定義されない。

言い訳に使ったコーシーの主値については
収束を確認しました。

$$\lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \tan(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\pi} \tan(x)\ \mathrm{d}x \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to +0} \left(\Big[\ln(\sec(x)) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} + \Big[\ln(-\sec(x)) \Big]_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\pi} \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to +0} \left(\ln\left(\sec\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)\right) - \ln\left(-\sec\left(\frac{\pi}{2}+\epsilon\right)\right) \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to +0} (\ln(\csc(\epsilon)) + \ln(\sin(\epsilon)))$$

$$= 0$$