次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

<u>説明</u>

$(1,\infty)$ 上で $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{x^2}$ を満たすので

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$ が成り立つ。

$\dfrac{x^2}{1+x^4}$ は実数上に特異点を持たないので

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ は有限の値を取り、また偶関数で

あることから $(-\infty,\infty)$ 上の積分もまた、

有限に収束する。

従って $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ が

成り立つ。

次の積分を計算せよ。

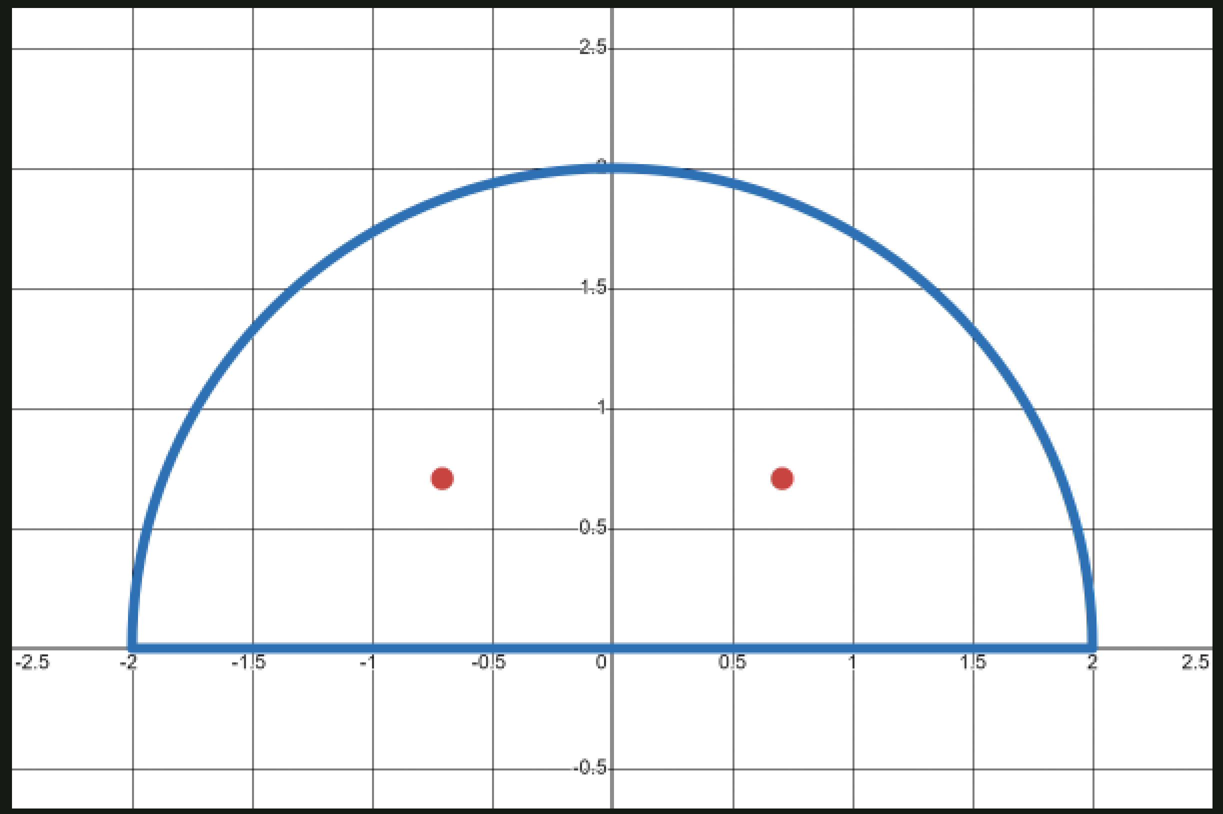
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

解答I（0）

1を超える実数Rに対して単純閉曲線Cを次の C_0, C_1 の和と定める。

$$C_0 : z(t) = t \quad (t \in [-R, R])$$
$$C_1 : z(t) = Re^{it} \quad (t \in [0, \pi])$$

複素数zに対して $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ とすると、
Cの内部にfの2つの特異点αとβが存在する。
$(\Re\alpha > \Re\beta)$



C, α, β

α, β はいずれもfの極であるので、
留数定理により次の関係が成り立つ。

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,\alpha) + \mathrm{Res}(f,\beta)\right)$$

この関係は1超の任意のRに対して成立する。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

解答1（1）

$C = C_0 + C_1$ より

C上の積分は二つの実区間の積分で表せる。

$$\begin{aligned}
&\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_0^{\pi} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

一つ目の積分の極限$(R \to \infty)$は与えられた積分に収束する。

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right)\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{i\left(Re^{it}\right)^3}{1+\left(Re^{it}\right)^4}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \left|\frac{i\left(Re^{it}\right)^3}{1+\left(Re^{it}\right)^4}\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4-1}\,\mathrm{d}t \\
&\to 0 \quad (R \to \infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, \alpha) &= \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha)\frac{z^2}{1+z^4} \\
&= \lim_{z\to\alpha} \frac{z^2}{(z+\alpha)\left(z^2-\beta^2\right)} \\
&= \frac{\alpha}{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}
\end{aligned}$$

同様にして $\operatorname{Res}(f, \beta) = \dfrac{\beta}{2\left(\beta^2-\alpha^2\right)}$ が言える。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

解答1（2）

$$\begin{aligned}
&2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,\alpha)+\mathrm{Res}(f,\beta)\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{\alpha}{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}+\frac{\beta}{2\left(\beta^2-\alpha^2\right)}\right)\\
&= \frac{\pi i}{\alpha+\beta}\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

以上より、次の結論が言える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

<u>解答2</u>

#18の結論によると、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-2}}{1+x^{-4}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+w^4}\,\mathrm{d}x \quad \left(w = x^{-1}\right) \\ &= 2\frac{\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$