次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答（0）

$x \in (0,1)$ と非負実数tに対して $f(t,x)$ を、
非負実数tに対して $I(t)$ を次のように定める。

$$f(t,x) = \frac{x^t - 1}{\ln(x)},\ I(t) = \int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

fのtについての偏導関数を調べる。

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = x^t$$

$t \geq 0$ より $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ は各tに対して $x \in (0,1)$ 上
0超1以下であるため、xについて可積分である。

I の導関数を調べる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^t\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1+t}\end{aligned}$$

途中にある微分と積分の順序交換は
有界収束定理により保証される。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

解答（1）

$I(t) = \displaystyle\int \mathrm{d}I(t)$ より、$I(t) = \ln(1+t) + \mathrm{C}$ を常に満たす実数Cが存在する。

$I(0) = 0$ であるから $\mathrm{C} = 0$ である。

すなわち、$I(t) = \ln(1+t)$ を満たす。

以上と $I(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ より、

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$$ が成り立つ。

補足

【有界収束定理】

a, b, M を $a < b$ かつ $M > 0$を満たす定数とする。関数列 $\{f_n\}$ は1以上の各nと $x \in (a,b)$ に対して $|f_n(x)| \leq M$ を満たし、関数fに収束する。このとき、次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$