次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

解答I（0）

与えられた積分を I とし、
I に対して次のような置換を行う。

$$\sqrt{x} = (\sin(\theta))^2$$

このとき、$\mathrm{d}x = 4\cos(\theta)\,(\sin(\theta))^3\,\mathrm{d}u$ が成り立つ。

積分範囲は次のように変化する。

$$x : 0 \to 1$$

$$\theta : -\pi \to -\frac{\pi}{2}$$

(意図的に不自然な範囲を選んでいます。)

$$I = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\theta))^2}} \cdot \left(4\cos(\theta)\,(\sin(\theta))^3\,\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= -4\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^3\,\mathrm{d}\theta$$

$$= -4\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(1-(-\cos(\theta))^2\right)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

ここで、I に対してさらなる置換を行う。

$$v = -\cos(\theta)$$

このとき、$\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}u$ を満たす。

積分範囲は次の通り。

$$\theta : -\pi \to -\frac{\pi}{2}$$

$$v : 1 \to 0$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

解答1（1）

$$\begin{aligned} I &= -4\int_1^0 \left(1-v^2\right)\mathrm{d}v \\ &= 4\int_0^1 \left(1-v^2\right)\mathrm{d}v \\ &= 4\left[v-\frac{1}{3}v^3\right]_0^1 \\ &= 4\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

解答1 補足

行った二つの置換を見る。

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= (\sin(\theta))^2 \\ -\cos(\theta) &= v \end{aligned}$$

1 行目に着目する。

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= (\sin(\theta))^2 \\ &= 1-(-\cos(\theta))^2 \\ &= 1-v^2 \\ x &= \left(1-v^2\right)^2 \end{aligned}$$

このとき、$\mathrm{d}x = -4v\left(1-v^2\right)\mathrm{d}v$ であるため

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \left(1-v^2\right)\mathrm{d}v$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

<u>解答2</u>

与えられた積分 I に対して、次の置換を行う。

$$s = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} &= \sqrt{1-\sqrt{x}} \\
-\frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{-4\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x \\
\frac{4}{s^2}\left(1-\frac{1}{s^2}\right)\mathrm{d}s &= \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

積分範囲の変化は次の通り。

$$\begin{aligned}
x &: 0 \to 1 \\
s &: 1 \to \infty
\end{aligned}$$

従って、I は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
I &= 4\int_1^\infty \frac{1}{s^2}\left(1-\frac{1}{s^2}\right)\mathrm{d}s \\
&= 4\int_1^\infty \left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^4}\right)\mathrm{d}s \\
&= 4\left[-\frac{1}{s}+\frac{1}{3s^3}\right]_1^\infty \\
&= 4\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

解答3

I に対して次の置換を行う。

$$t = \sqrt{1-\sqrt{x}}$$
$$x = \left(1-t^2\right)^2$$
$$\mathrm{d}x = -4t\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t$$

積分範囲は次のように変化する。

$$x : 0 \to 1$$
$$t : 1 \to 0$$

I は次のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^0 \frac{1}{t}\cdot\left(-4t\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t\right) \\
&= 4\int_0^1 \left(1-t^2\right)\mathrm{d}t \\
&= 4\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\
&= 4\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

解答4

与えられた積分に対して、次の置換を行う。

$$\sqrt{x} = u$$

このとき、$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ である。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^1 u^{2-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 2B\left(2, \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\cdot\frac{\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

自然数 n に対して$\Gamma(n+1) = n!$が成り立ち、

複素数 z に対して$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= 2\cdot\frac{1!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

解答4 補足

実部が正の複素数 x, y, z に対して、
関数 Γ と B を次のように定める。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

Γ 関数の性質

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Γ 関数と B 関数の関係

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

結論

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$$