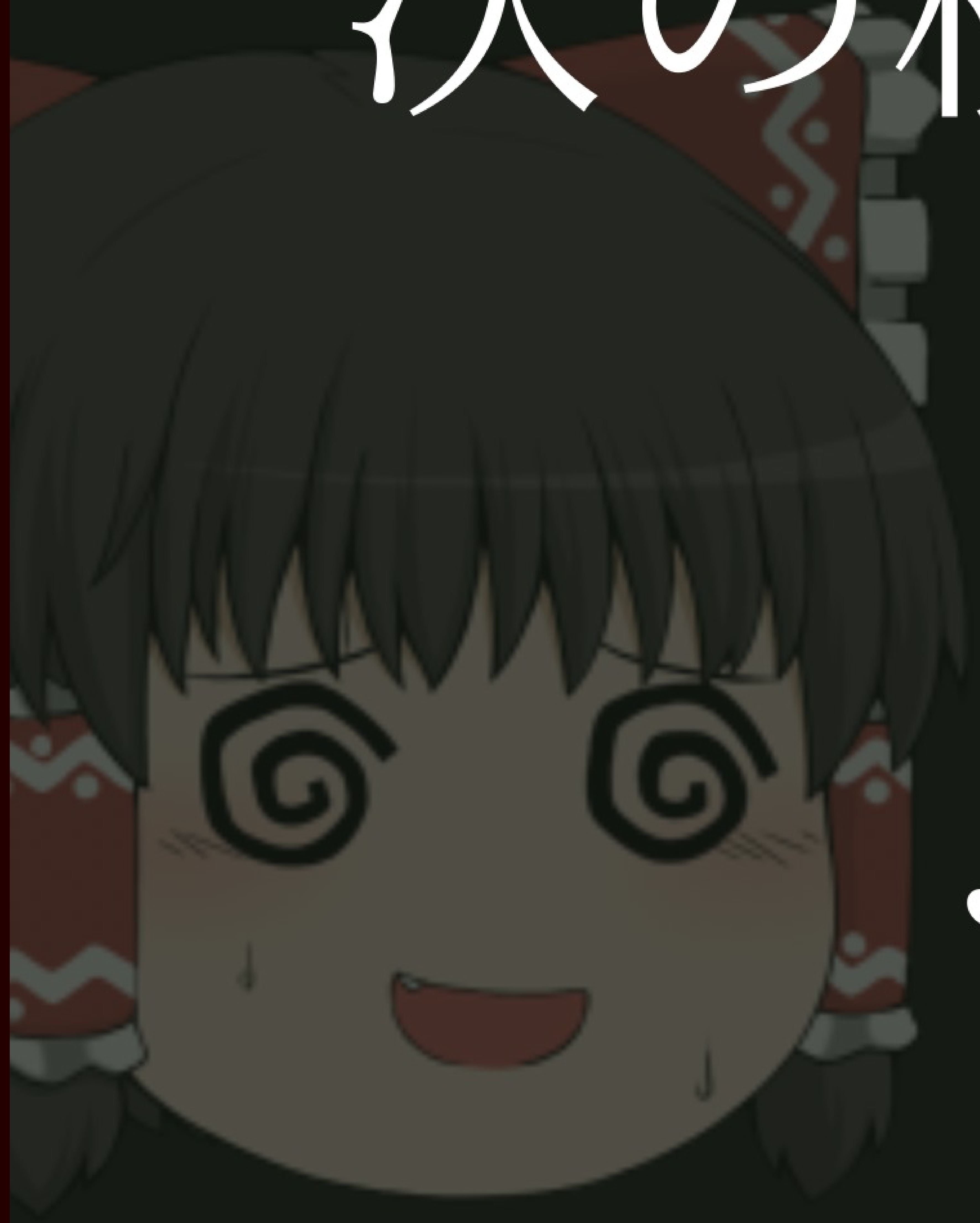
次の積分を計算せよ。



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

説明

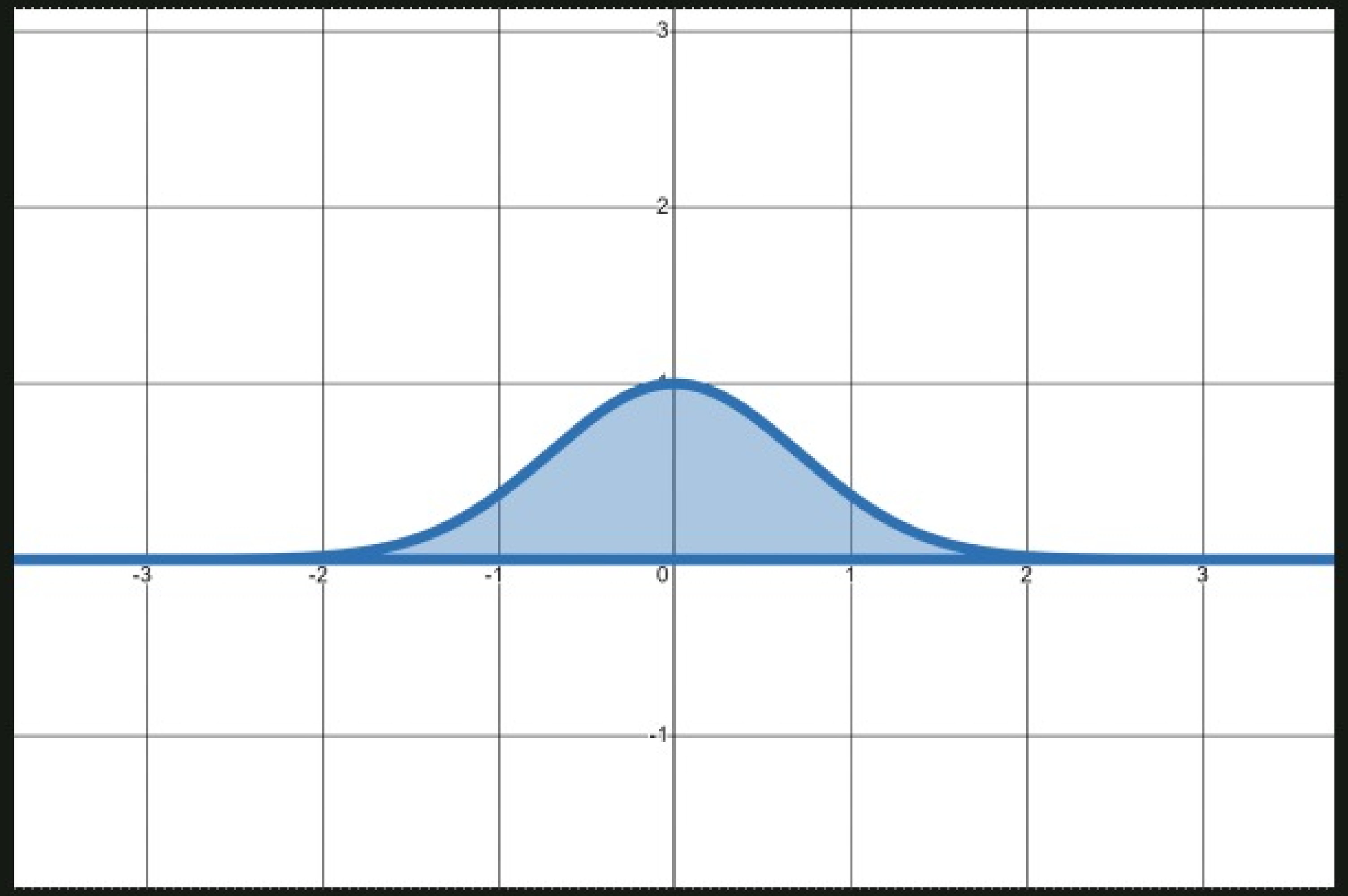
与えられた積分は無限区間の積分であるので
狭義のリーマン積分の範囲では値を定義しない。

適当な実数mを用いて次の極限を考える。

$$\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{m} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \lim_{t\to\infty}\int_{m}^{t} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

二つの極限がそれぞれ収束するとき、
それらの和を e^{-x^2} の $(-\infty,\infty)$ における
広義リーマン積分の値と定める。

グラフ



$0 < y < e^{-x^2}$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（収束性の確認）

与えられた積分の範囲 $(-\infty, \infty)$ を
$(-\infty, 0), (0, \infty)$ の二つの区間に分けて考える。

$$\begin{aligned}\lim_{b\to-\infty}\int_b^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to-\infty}\int_0^{-b} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \lim_{b'\to\infty}\int_0^{b'} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

上記の関係より、$(0, \infty)$ での収束が言えれば、
その極限値の2倍が与えられた積分の値である。

$\forall x > 0; 1 + x < e^x$ より次が成立する。

$$\begin{aligned}& x > 0 \\ & \implies 1 + x^2 < e^{x^2} \\ & \implies 0 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \\ & \implies 0 \le \int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \le \int_0^x \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \le \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

実数引数の指数関数は常に正なので、
与えられた積分の絶対収束性を確かめられた。

以降のページでは、ある実数Iを用いて

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

として議論を続ける。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答I（0）

Iの定義から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

であり、以下に続く。

$$\begin{aligned}
I \cdot I &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

ここで、I^2に対して次の置換を行う。

$$\begin{aligned}
x &= r\cos(\theta) \\
y &= r\sin(\theta)
\end{aligned}$$

この置換に対するヤコビアン$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$は

以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} \\
&= \cos(\theta)(r\cos(\theta)) - \sin(\theta)(-r\sin(\theta)) \\
&= r\left(\cos(\theta)\right)^2 + r\left(\sin(\theta)\right)^2 \\
&= r
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答I（I）

$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ である。

従って、I^2 は次のように表される。

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

以下のように計算を続けて I^2 の値を得る。

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,\mathrm{d}\left(-r^2\right)\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}; e^{-x^2} > 0$ であるから、

$$I = \sqrt{\pi}$$

が成り立つ。

解答I 補足I

$$\begin{aligned}
I^2 &= I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} I e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

同様にして

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

も示せる。

解答1 補足2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

の正当化

【フビニ・トネリの定理】

$f(x,y)$を$[a,b]\times[c,d]$上可測な関数とする。

$$\int_a^b\left(\int_c^d |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_c^d\left(\int_a^b |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

上記3つのいずれかが有限値ならば、

これらは全て等しい。

【重積分の変数変換(2変数)】

xy平面上の領域Dがuv平面上の領域Eに一対一に対応するとき、D上の可積分関数fに対して、次の関係が成り立つ。

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Jを$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$のヤコビ行列の行列式とする。

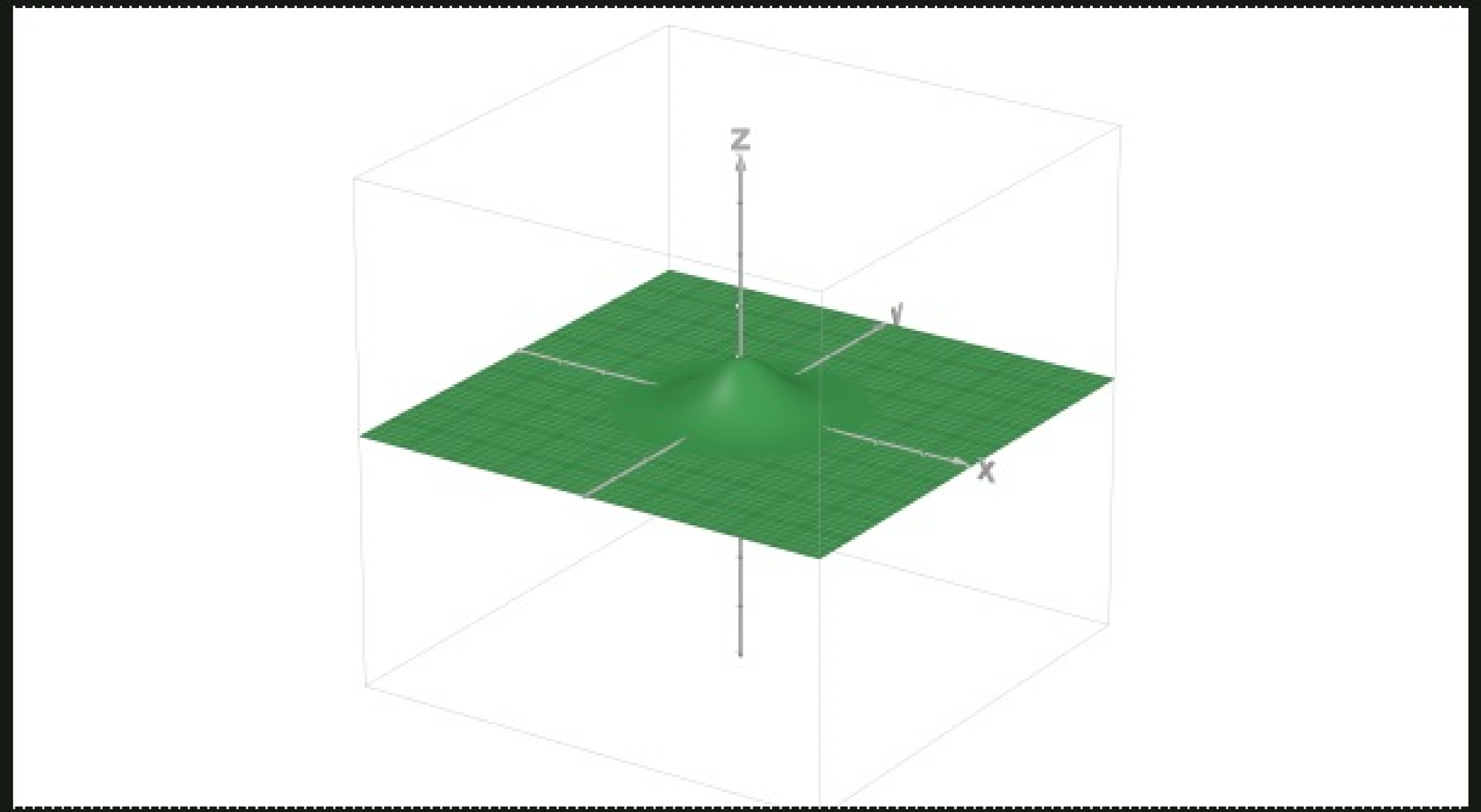
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答2（0）

3次元空間上の曲面 $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ について考える。

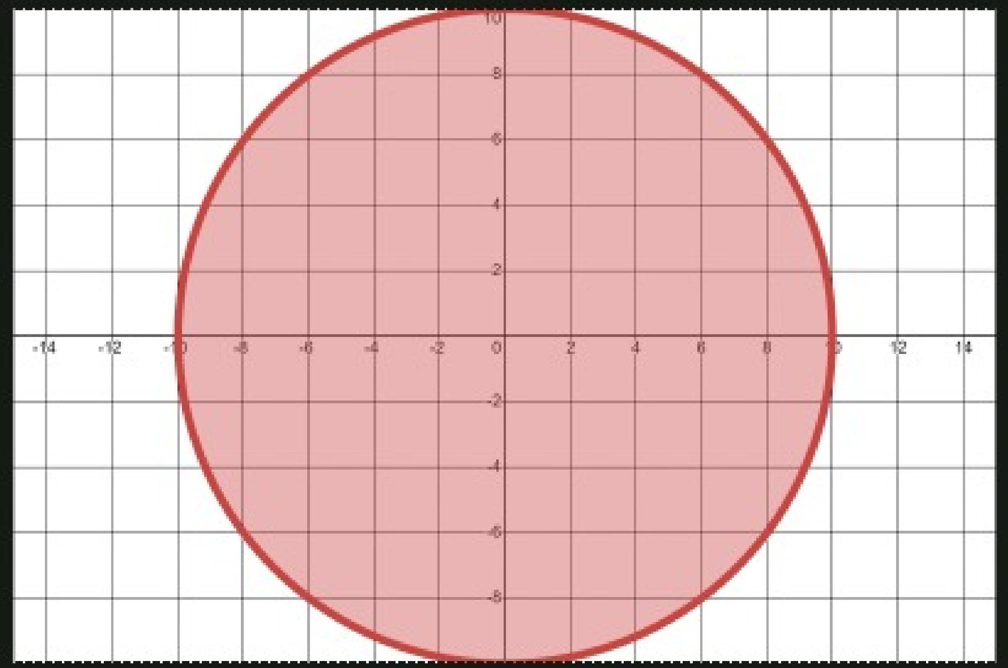


$z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

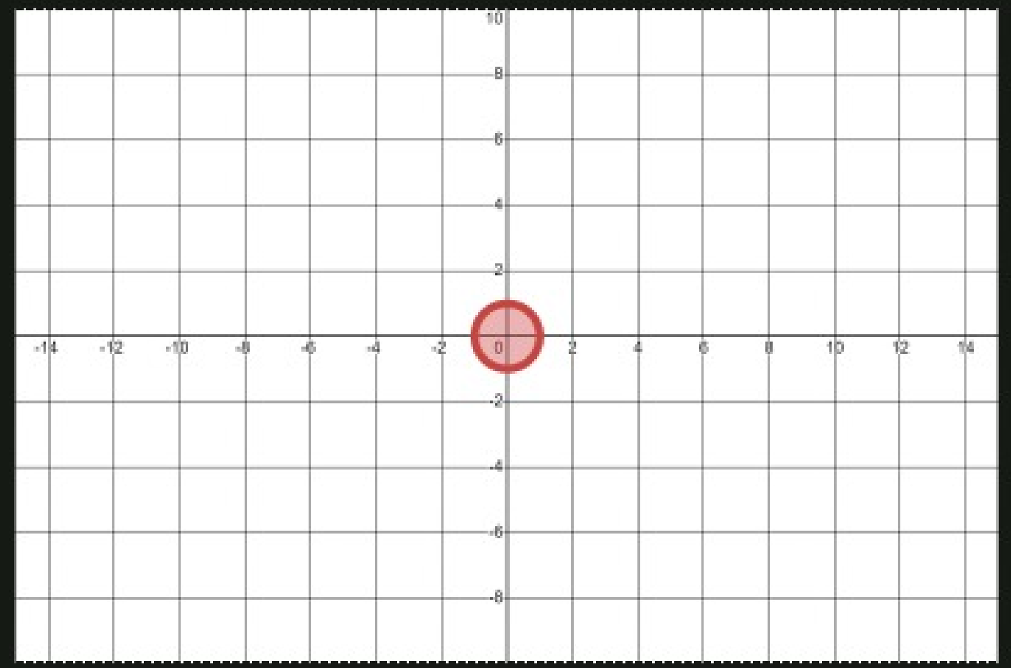
領域 $0<z<e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ の体積を
z軸方向の積分とy軸方向の積分の
2通りの方法で計算する。

z軸方向に見たとき

この領域をz軸方向に見ると、その断面は
$(x,y,z)=(0,0,t)\ (0<t\leq 1)$ を中心とした
半径が $\sqrt{-\ln(z)}$ の円である。



$z=e^{-100}$ のとき



$z=e^{-1}$ のとき

従って、領域の体積Vは次のように表せる。

$$V=\int_0^1 -\pi\ln(z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\pi$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

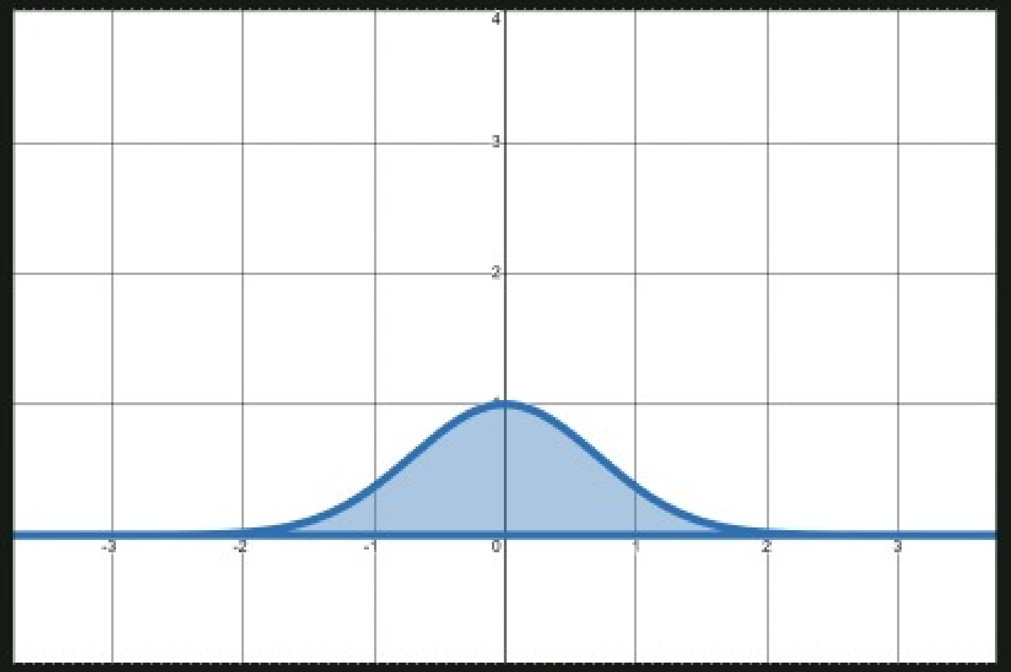
解答2（1）

y軸方向に見たとき

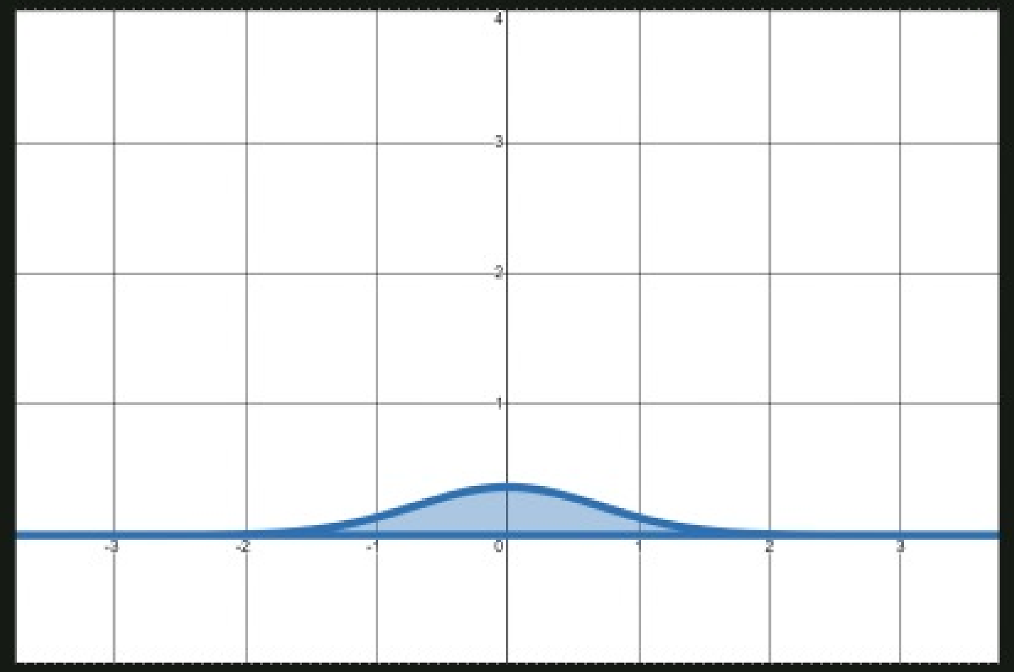
この領域をy軸方向に見ると、その断面は

xy平面における $y = e^{-x^2}$ のグラフを

縦に潰したような形になる。



$y = 0$ のとき



$y = 1$ のとき

具体的には、yを任意に固定して

$0 < z < e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ の領域が断面である。

従って、Vは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= I^2 \end{aligned}$$

以上より、$I^2 = \pi$ であり、

$\forall x \in \mathbb{R}; e^{-x^2} > 0$ から $I = \sqrt{\pi}$ が言える。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答3

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left((ty)^2+y^2\right)}\,(y\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}y \quad (x=ty) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-y^2\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-y^2\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{2\left(1+t^2\right)}e^{-y^2\left(1+t^2\right)}\right]_0^\infty \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\tan^{-1}(t)\Big]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

よって、フビニ・トネリの定理より

$\frac{1}{4}I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-y^2\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$ が成り立ち、

$I=\sqrt{\pi}$ が言える。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答4（0）

非負実数tに対して、

関数 $f(t)$ を次のように定義する。

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

fの導関数を調べる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\right) &= 2\left(\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)e^{-t^2} \\ &= 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 -2te^{-t^2\left(1+y^2\right)}\,\mathrm{d}y \\ &= -2\int_0^t e^{-\left(t^2+x^2\right)}\,\mathrm{d}x \quad (ty = x) \\ &= -2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\right) \\ &\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 0\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答4（1）

tに依らず $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$ であることから、

f は定数関数であるとわかる。

$$\begin{aligned} f(0) &= \left(\int_0^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-0^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

よって、$f(t) = \dfrac{\pi}{4}$ であると言える。

正の整数 n と $y \in [0,1]$ に対して

$$g_n(y) = \frac{e^{-n^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}$$ を定義する。

$$\begin{aligned} & 1 \le 1 + y^2 \le e^{y^2} \\ & \implies 1 \le \left(1+y^2\right) e^{n^2 y^2} \\ & \implies 0 < \frac{e^{-n^2 y^2}}{1+y^2} \le 1 \\ & \implies 0 < \frac{e^{-n^2} \cdot e^{-n^2 y^2}}{1+y^2} \le e^{-n^2} \\ & \implies 0 < \frac{e^{-n^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2} \le 1 \end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答4（2）

$|g_n(y)| \le 1,\ \lim_{n\to\infty} g_n(y) = 0$ であるから、

有界収束定理により次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(y)\,\mathrm{d}y$$

故に、 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 0$ を満たす。

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} f(t) &= \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 + 0\\ &= \left(\frac{I}{2}\right)^2\end{aligned}$$

また、$\forall t; f(t) = \dfrac{\pi}{4}$ である。

以上より、$I = \sqrt{\pi}$ が言える。

解答4 補足1 (0)

非負整数nと非負実数tに対して、数列h_nと関数列 $a_n(t,y)$ を次のように定める。

$$0 < h_n < h_{n-1} < \cdots < h_1 < h_0$$

$$A(t,y) = \frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{1+y^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,y) = -2te^{-t^2(1+y^2)}$$

$$a_n(t,y) = \frac{A(t+h_n,y)-A(t,y)}{h_n}$$

このとき、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(t,y) = \frac{\partial A}{\partial t}(t,y)$ である。

$|a_n(t,y)|$ の (t,y,nのいずれにも依らない)一様な上界を調べる。

$A(t,y)$ はtについて連続である。従って、平均値の定理より次が従う。

$$\exists c; t < c < t+h_n,\ \frac{A(t+h_n,y)-A(t,y)}{h_n} = \frac{\partial A}{\partial t}(c,y)$$

h_n はnについて単調減少な数列であるものの、上限は存在しない。故に、非負実数上の任意の二点に対してcが存在することとみなせる。

解答4 補足1（1）

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t,y) = -2e^{-t^2\left(1+y^2\right)}\left(1-2t^2\left(1+y^2\right)\right)$$

$$0 < t < \frac{1}{\sqrt{2\left(1+y^2\right)}} \implies \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t,y) < 0,$$

$$t > \frac{1}{\sqrt{2\left(1+y^2\right)}} \implies \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t,y) > 0$$ から、

$\dfrac{\partial A}{\partial t}(t,y)$ は $t = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(1+y^2\right)}}$ のときに

tについての最小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{\frac{e}{2}\left(1+y^2\right)}}$ をとる。

また、任意のyに対して最小値は-1を超える。

$\dfrac{\partial A}{\partial t}(t,y)$ は正ではないので、

$\forall t \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}; \left|\dfrac{\partial A}{\partial t}(t,y)\right| \leq 1$ を満たす。

従って、有界収束定理より次のことが言える。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 a_n(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} a_n(t,y)\,\mathrm{d}y$$

すなわち、$A(t,y)$ に関する積分と微分の順序交換に等しい。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 A(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\partial A}{\partial t}(t,y)\,\mathrm{d}y$$

以上より、次が従う。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-t^2\left(1+y^2\right)}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

解答4 補足2

【有界収束定理】

a,b,M を $a<b$ かつ $M>0$を満たす定数とする。
関数列 $\{f_n\}$ は1以上の各nと $x\in(a,b)$ に
対して$|f_n(x)|\leq M$ を満たし、関数fに収束する。
このとき、次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答5（0）

正の実数tに対して、

関数 $F(t)$ を次のように定める。

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2} = 0$$

任意のtとxに対して $\dfrac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2} \leq 1$ である。

有界収束定理より、任意の $R>0$ に対して

次が成り立つ。

$$\lim_{t\to+0}\int_0^R \frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^R \frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^R 0\,\mathrm{d}x$$

従って、次が言える。

$$\lim_{t\to+0} F(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答5（I）

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty -2te^{-t^2\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= -2e^{-t^2}\int_0^\infty e^{-(tx)^2}\,(t\,\mathrm{d}x) \\
&= -2e^{-t^2}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \quad (u = tx) \\
&= -Ie^{-t^2}
\end{aligned}$$

正の実数cを用いて、次の極限を調べる。

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to+0}\int_{t=a}^{t=c}\mathrm{d}F(t) &= \lim_{a\to+0}\Big[F(t)\Big]_a^c \\
&= F(c) - \lim_{a\to+0}F(a) \\
&= F(c) - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\int_{t=c}^{t=b}\mathrm{d}F(t) &= \lim_{b\to\infty}\Big[F(t)\Big]_c^b \\
&= \lim_{b\to\infty}F(b) - F(c) \\
&= -F(c)
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_{t=a}^{t=c}\mathrm{d}F(t) + \lim_{b\to\infty}\int_{t=c}^{t=b}\mathrm{d}F(t) = -\frac{\pi}{2}$ より

$\displaystyle\int_{t=0}^{t=\infty}\mathrm{d}F(t) = -\frac{\pi}{2}$ が言える。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答5（2）

一方で、$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = -Ie^{-t^2}$ より次のことも導ける。

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{t=\infty} \mathrm{d}F(t) &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} -Ie^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -I\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}I^2
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{t=0}^{t=\infty} \mathrm{d}F(t) = -\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}I^2$ であるから、
$I = \sqrt{\pi}$ が導ける。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答6 (0)

$\Re z > 0$ なるzに対して $\Gamma(z)$ を、

$\Re x > 0, \Re y > 0$ なるx, y に対して$B(x, y)$ を

次のように定める。

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$B(x, y) = \int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

このとき、$B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-y}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\right) \quad (y = x^2) \\ &= \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

従って、$I^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が成り立つ。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答6（1）

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ここで、次のような置換をする。

$$\begin{aligned}
t &= (\sin(\theta))^2 \\
\mathrm{d}t &= \sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{(\sin(\theta))^2}\sqrt{1-(\sin(\theta))^2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \\
&= \pi
\end{aligned}$$

以上より、$I^2=\pi$ であり、$I=\sqrt{\pi}$ が言える。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答7（0）

【ウォリス積分】

非負整数nに対して、ウォリス積分I_nは次のように与えられる。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^n\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{(n-1)!!}{n!!},\ n: \mathrm{even} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!},\ n: \mathrm{odd} \end{cases}$$

ただし、$n!!$ はnの二重階乗である。

$\forall x \in (0,1); 1 - x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ より、全ての正の整数Nに対して各項のN乗の$(0,1)$ での積分も大小関係を保存する。

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^N \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2N+1}\,\mathrm{d}\theta \quad (x = \sin(\theta))$$
$$= I_{2N+1}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\theta))^{2N-2}\,\mathrm{d}\theta \quad (x = \tan(\theta))$$
$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2N-2}\,\mathrm{d}\theta = I_{2N-2}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答7（I）

$$\int_0^1 \left(e^{-x^2}\right)^N \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^{\sqrt{N}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

従って、次が成り立つ。

$$\sqrt{N} I_{2N+1} < \int_0^{\sqrt{N}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u < \sqrt{N} I_{2N-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^n\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^{n-1} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \Big[-(\sin(\theta))^{n-1} \cos(\theta) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^{n-2} (\cos(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta \\
&= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答7（2）

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
I_n I_{n-1} &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \\
&= \frac{n-2}{n} I_{n-2} I_{n-3} \\
n I_n I_{n-1} &= (n-2) I_{n-2} I_{n-3} \\
&= I_1 I_0 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{n+1} < I_n < I_{n-1} \\
& \implies n I_{n+1} I_n < n I_n^2 < n I_n I_{n-1} \\
& \implies \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2} < n I_n^2 < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

従って、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n I_n^2 = \frac{\pi}{2}$ であり、$\sqrt{n} I_n \geq 0$ より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ が成り立つ。

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答7（3）

$$\begin{aligned}\sqrt{N}I_{2N+1} &= \sqrt{\frac{N}{2N+1}}\cdot\sqrt{2N+1}I_{2N+1}\\ &\to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{N}I_{2N-2} &= \sqrt{\frac{N}{2N-2}}\cdot\sqrt{2N-2}I_{2N-2}\\ &\to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

$\sqrt{N}I_{2N+1} < \displaystyle\int_0^{\sqrt{N}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u < \sqrt{N}I_{2N-2}$ であるから

はさみうちの原理によって次が従う。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{N}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

また、上の等式の左辺は $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ と

同じものを意味する。これは $\dfrac{I}{2}$ であった。

以上より、$I=\sqrt{\pi}$ が成り立つ。