次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$$

説明

与えられた積分は広義リーマン積分の範囲で扱う。
被積分関数 $\ln\left(\sin(x)\right)$ は $x=0$ において
定義されないので、(広義でない)リーマン積分の
範囲では値が定義されない。

また、 $\displaystyle\lim_{x\to+0} \ln\left(\sin(x)\right) = -\infty$ と $x=0$ における
極限値は有限でないので、与えられた積分の
収束性の確認も別途必要である。

解答（0）

与えられた積分を次のように定める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0} \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$$

上式の右辺が有限の値に収束した場合にのみ
それを与えられた積分の値とする。

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); 0 < \frac{2}{\pi}x < \sin(x) < 1$ から、
$\ln\left(\frac{2}{\pi}x\right) < \ln\left(\sin(x)\right) < 0$ が言える。

従って、$\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に対して
$\displaystyle\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2}{\pi}x\right) \mathrm{d}x < \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$ が成り立つ。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$$

解答（Ⅰ）

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2}{\pi}x\right) \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{2}{\pi}\epsilon}^{1} \ln(u)\,\mathrm{d}u \quad \left(u = \frac{2}{\pi}x\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[u\ln(u) - u\Big]_{\frac{2}{\pi}\epsilon}^{1} \\ &= -\frac{\pi}{2} + \epsilon - \epsilon\ln\left(\frac{2}{\pi}\epsilon\right) \\ &\to -\frac{\pi}{2} \quad (\epsilon \to +0)\end{aligned}$$

以上から、ある実数 $I \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ が存在して、

$\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x = I$ を満たすことが言える。

以下、$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$ として回答を続ける。

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\right)(-\mathrm{d}s) \quad \left(s = \frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos(s)\right) \mathrm{d}s\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$$

解答 (2)

$$\begin{aligned}
{\color{red}I} + {\color{blue}I} &= {\color{red}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x} + {\color{blue}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos(x)\right) \mathrm{d}x} \\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\cos(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(2x)\right) \mathrm{d}x - \ln(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s - \frac{\pi}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin(\pi - t)\right) (-\mathrm{d}t) \quad (t = \pi - s) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(t)\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s \\
&= 2I
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x$$

解答（3）

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s - \frac{\pi}{2}\ln(2),$$

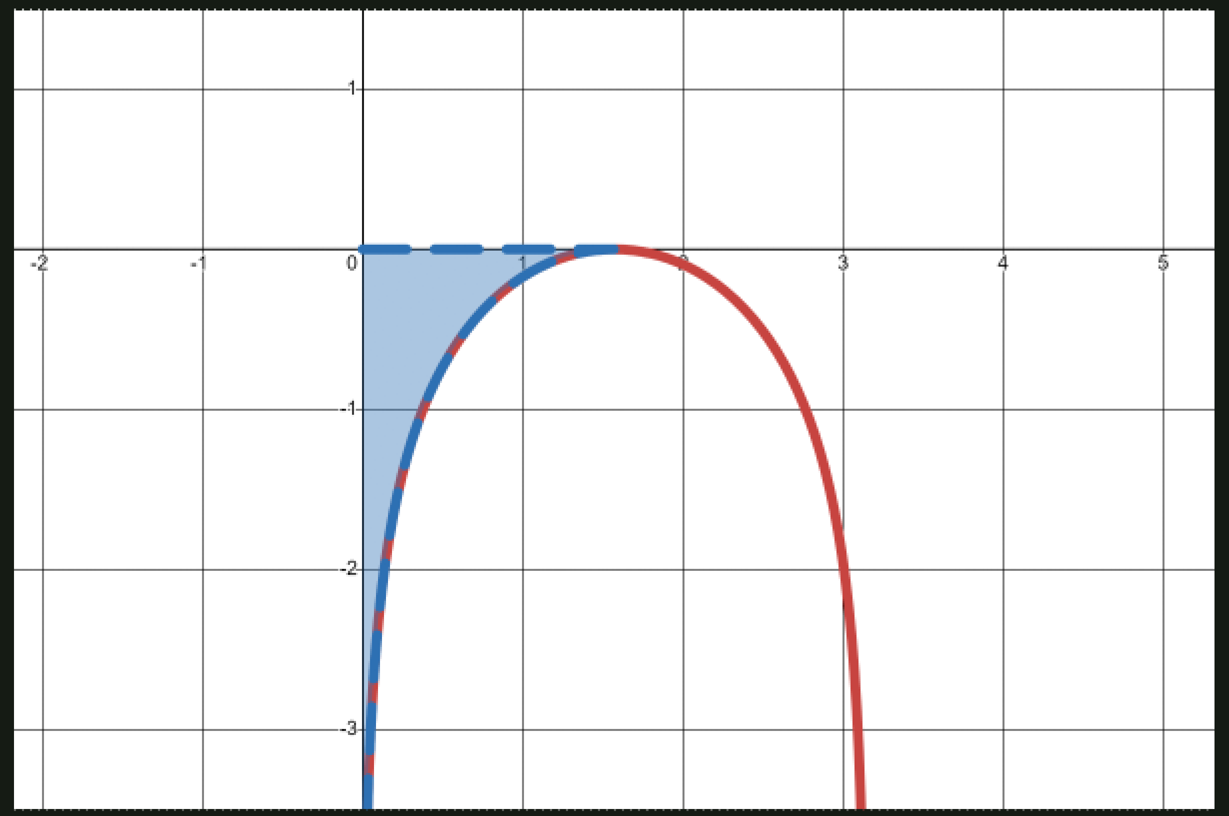
$$2I = \int_0^{\pi} \ln\left(\sin(s)\right) \mathrm{d}s \quad \text{より、}$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$$

結論

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$$

グラフ



$$y = \ln\left(\sin(x)\right) \qquad (0 < x < \pi)$$

$$\ln\left(\sin(x)\right) < y < 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

補足1

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \frac{2}{\pi}x < \sin(x)$ の証明

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ に対して、$f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = -\sin(x)$$

$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ かつ $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} < 0$ であるから、
$x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ を除いて $f(x) > 0$ が成り立つ。

補足2

$\lim_{x \to +0} x \ln(x) = 0$ の証明

$\lim_{x \to +0} \ln(x) = -\infty, \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$ であるから、
ロピタルの定理より次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \to +0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to +0} -x \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = x \ln(x)$より、主張は従う。