

実数 x の方程式

$$e^x = ex$$



次の等式を満たす実数 x を全て答えよ。

$$e^x = ex$$

解答1

【自明な情報】

解: $x = 1$

解でない: $x \leq 0$

$$f(x) = e^x - ex$$

$$\frac{df}{dx} = e^x - e$$

$f(1) = 0$ は f の唯一の極小値である。

すなわち、これは関数の最小値でもある。

故に $f(x) = 0$ の解は $x = 1$ のみであり、

同値な与えられた方程式もこれに従う。

解答2

$$e^x = ex$$

$$\frac{1}{e} = xe^{-x}$$

$$-\frac{1}{e} = -xe^{-x}$$

$$-x = W\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$x = -W\left((-1)e^{-1}\right) \\ = 1$$

結論

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } e^x = ex \iff x = 1$$