次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$$

$$(n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1)$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1)$$

説明

実数xの関数 $\dfrac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin(x)}$ は $x=0$ で定義されない。つまり、与えられた積分はリーマン積分では値が存在しない。
ここでは、広義リーマン積分を考えることにする。

【広義積分】

区間$(a,b]$上で定義される関数fに対して

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

右辺の極限値が存在するならばの等式は成り立つ。

解答（0）

$$I_n = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$$ とする。

$$\begin{aligned}
&\sin\left((2n+1)\,x\right)\\
&= \sin\left((2n-1)x+2x\right)\\
&= \sin\left((2n-1)x\right)\cos(2x) + \cos\left((2n-1)x\right)\sin(2x)\\
&= \sin\left((2n-1)x\right)\cdot\left(1-2\left(\sin(x)\right)^2\right)\\
&\quad + \cos\left((2n-1)x\right)\cdot 2\sin(x)\cos(x)\\
&= \sin\left((2n-1)x\right) + 2\cos\left(2nx\right)\sin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2nx\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]_\epsilon^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sin(n\pi) - \sin(2n\epsilon)\right)\\
&= -\frac{1}{2n}\sin(2n\epsilon) \to 0 \quad (\epsilon\to+0)
\end{aligned}$$

解答（1）

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin(x)-4\left(\sin(x)\right)^3}{\sin(x)}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \left(3-4\left(\sin(x)\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(3-4\left(\sin(x)\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(3-4\left(\cos(x)\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\left(2(n-1)+1\right)x\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to+0} 2\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2nx\right)\mathrm{d}x \\
&= I_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= I_{n-1} \\
&= I_1 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

結論

$$
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}
$$

余談

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left(\frac{(2n+1)x-(2n-1)x}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)x-(2(n-1)+1)\,x}{2}\right)\end{aligned}$$

であり、三角関数の差に現れることが考えられる。

$$\begin{aligned}&\sin\left((2n+1)\,x\right)-\sin\left((2n-1)x\right)\\ &= 2\cos(2nx)\sin(x)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\mathrm{d}x = 0$ であるから、

$I_n = I_{n-1}$ が成り立つ。

よって、全てのnに対してI_nは等しい。

余談の余談

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left((2n-1)x\right)\mathrm{d}x \neq 0$ であるので

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(2nx\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$ の値は一定でない。

$\displaystyle J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(2nx\right)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$ とすると、

$\displaystyle J_n - J_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},\ J_1 = 2$ から

$\displaystyle J_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ である。

また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = 1 + \frac{\pi}{4}$ である。(証明略)