次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+kx^2)^n}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+kx^2)^n}\quad (k>0)$$

解答

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+kx^2)^n} &= \lim_{x\to 0}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{x^2}{(1+kx^2)^n}\\
&= \lim_{x\to 0}\lim_{N\to\infty} x^2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+kx^2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{1+kx^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+kx^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{k}\left(1+kx^2\right)\\
&= \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

結論

$$\begin{aligned}
x\neq 0 &\Longrightarrow x^2>0\\
&\Longrightarrow kx^2>0\\
&\Longrightarrow 1+kx^2>1\\
&\Longrightarrow 0<\frac{1}{1+kx^2}<1\\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{1+kx^2}\right)^N\to 0\ (N\to\infty)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+kx^2)^n}=\frac{1}{k}$$