

実数 x の方程式

$$e^{f(x)} + kf(x) = 0$$

ただし、 $k \neq 0$



次の等式を満たす実数 x を全て答えよ。

$$e^{f(x)} + kf(x) = 0 \quad (\text{ただし、} k \neq 0)$$

解答

$$e^{f(x)} + kf(x) = 0$$

$$e^{f(x)} = -kf(x)$$

$$-f(x)e^{-f(x)} = k^{-1}$$

$$-f(x) = W(k^{-1})$$

$$x = f^{-1}(-W(k^{-1}))$$

結論

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } e^{f(x)} + kf(x) = 0$$

$$\iff x = f^{-1}(-W(k^{-1})) \quad (k \in (-\infty, -e] \cup (0, \infty))$$

補足1 (いつもの)

$$W(xe^x) = W(x)e^{W(x)} = x$$

補足2 (例示1)

$f(x) = x$ のとき

$$e^x = ex$$

$$e^x + (-e)x = 0$$

$$\begin{aligned} x &= -W((-e)^{-1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

補足3 (例示2)

$$x + \ln(x) = 0$$

$$e^{\ln(x)} + \ln(x) = 0$$

$$x = e^{-W(1)}$$

$$= 0.5671432904097838 \dots$$