#5

2021年 文系

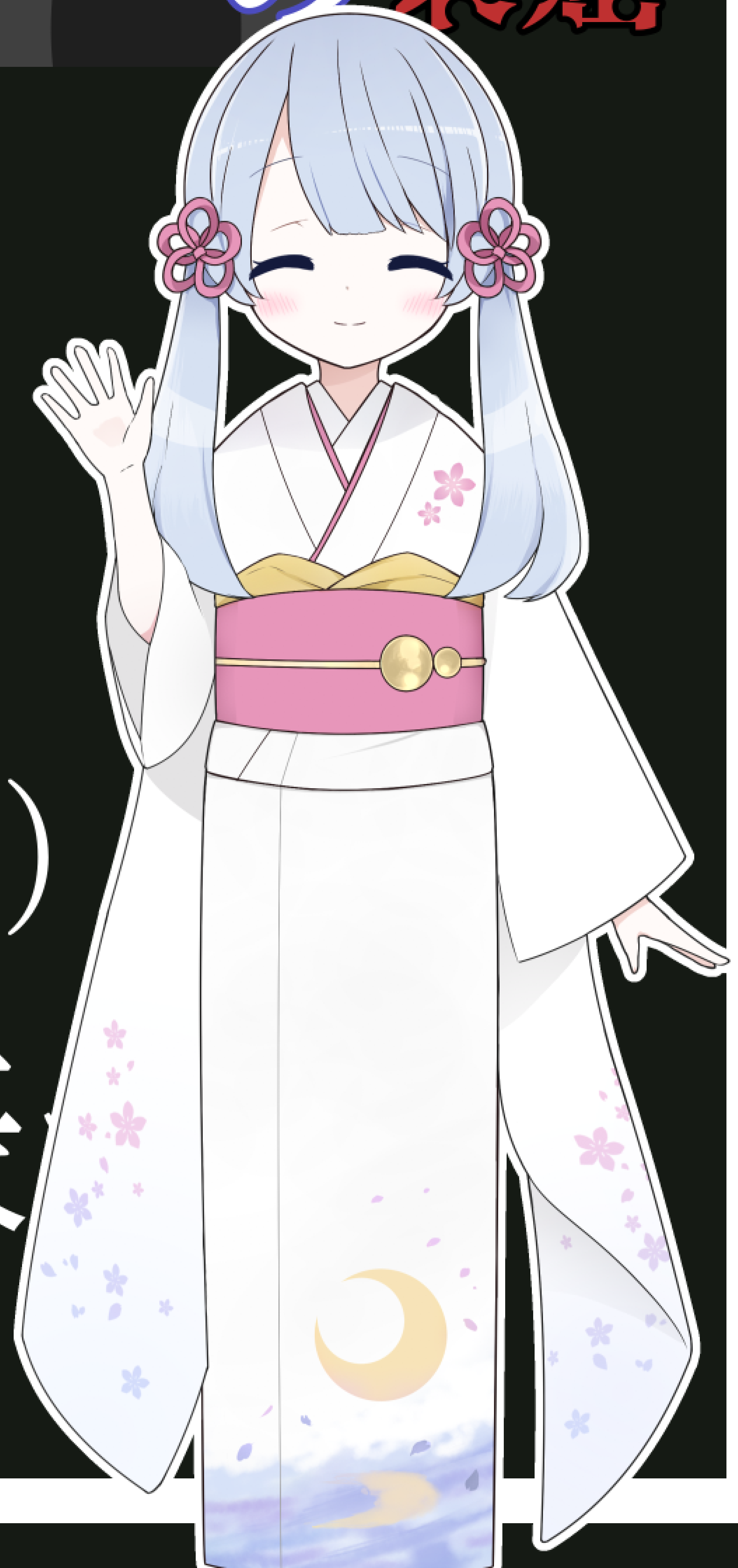
京都大学

入試問題の巣窟

$6.75_{(10)}$ を2進法で表せ。

また、この数と $101.0101_{(2)}$

積を2進法および4進法で表



(1) $6.75_{(10)}$ を2進法で表せ。

(2) $6.75_{(10)} \times 101.0101_{(2)}$ を2進及び4進表記せよ。

説明

2以上の整数nに対して、$_{(n)}$をn進表記の印とする。

例）

$$71_{(8)} : 8\text{進数の}71$$
$$57_{(10)} : 10\text{進数の}57$$

$$71_{(8)} = 57_{(10)}$$

数Aがn進法で $a_m \ldots a_1 a_0 . a_{-1} \ldots$ (n^i の位がa_i)

と書かれるとき、Aは次のように表せる。

$$A = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i n^i$$

例）

$$0.3333\ldots_{(10)} = \frac{1}{3}_{(10)} = 0.1_{(3)}$$
$$1.125_{(10)} = 1.1_{(8)} = 1.1111\ldots_{(9)}$$

少なくともmが有限の値であればAは収束する。

$$\sum_{i=-\infty}^{m} a_i n^i < \sum_{i=-\infty}^{m} n^{i+1} = \frac{n^{m+1}}{1-n^{-1}}$$

(1) $6.75_{(10)}$ を2進法で表せ。

(2) $6.75_{(10)} \times 101.0101_{(2)}$ を2進及び4進表記せよ。

解答

以下、進法が明らかでないものは全て10進数であるとする。

(1)

$$\begin{aligned} 6.75_{(10)} &= \frac{27}{4} \\ &= \frac{2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0}{2^2} \\ &= 2^2 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2} \\ &= 110.11_{(2)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & 6.75_{(10)} \times 101.0101_{(2)} \\ &= 110.11_{(2)} \times 101.0101_{(2)} \\ &= (110.11 \times 101.0101)_{(2)} \\ &= (11111.111 + 11.111111)_{(2)} \\ &= (100000 - 0.001 + 100 - 0.000001)_{(2)} \\ &= (100100 - 0.001001)_{(2)} \\ &= 100011.110111_{(2)} \\ &= 203.313_{(4)} \end{aligned}$$

補足1（n進法の加算と乗算）

n進法の四則演算は10進法のものと全く同じ手続きで行われる。

1桁同士の結果があれば、2以上の桁においてはそれぞれの位に対して計算を繰り替えすことで結果を得ることができる。

整数 d_A, d_B と2以上の整数nが存在し、

任意の実数 A, B に対して整数列 $\{a_i\}, \{b_i\}$ が次のように定められる。

$$0 \leq a_i < n,\ 0 \leq b_i < n$$

$$A = \sum_{i=-\infty}^{d_A} a_i n^i,\ B = \sum_{i=-\infty}^{d_B} b_i n^i$$

このとき、AとBに対して次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} A \pm B &= \sum_{i=-\infty}^{d_A} a_i n^i \pm \sum_{i=-\infty}^{d_B} b_i n^i \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\max(d_A, d_B)} (a_i \pm b_i) n^i \quad \text{(複号同順)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sum_{i=-\infty}^{d_A} a_i n^i \right) \left(\sum_{i=-\infty}^{d_B} b_i n^i \right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{d_A} \sum_{j=-\infty}^{d_B} a_i b_j n^{i+j} \end{aligned}$$

それぞれの位で計算を繰り返していることが表されている。

補足2（n進法からn^m進法への変換）（0）

n進表記からn^m進表記への変換には比較的容易な手順が存在する。

1. n進表記をm桁ごとに区切る。
2. 各まとまりをn^m進表記に書き換える。

例）

$$110010_{(2)} \to 302_{(4)}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & 11|00|10_{(2)} & \\
\swarrow & | & \searrow \\
11_{(2)} & 00_{(2)} & 10_{(2)} \\
\| & \| & \| \\
3_{(4)} & 0_{(4)} & 2_{(4)} \\
\searrow & | & \swarrow \\
 & 3|0|2_{(4)} &
\end{array}$$

lを整数とすると、n進表記のlm乗の位から$(l+1)m-1$乗の位までの並びのn^m進表記がn^m進表記のl乗の位の値に一致する。

2進数と16進数の例が有名。
2進数を4桁ごとに区切り、それぞれのまとまりを16進表記に書き換えると全体の変換も完了する。

例）

$$\begin{aligned}
&1111011111110010111110_{(2)} \\
&\to 0011|1101|1111|1100|1011|1110_{(2)} \\
&\to 3|\mathrm{D}|\mathrm{F}|\mathrm{C}|\mathrm{B}|\mathrm{E}_{(16)} \\
&\to \mathrm{3DFCBE}_{(16)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1111011111110010111110_{(2)} &= 4062398_{(10)} \\
\mathrm{3DFCBE}_{(16)} &= 4062398_{(10)}
\end{aligned}$$

補足2（n進法からnᵐ進法への変換）(I)

証明

$n, m\,\mathbb{N}, n \geq 2, m \geq 1, l, d \in \mathbb{Z}$

$a_i, k_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i < n, 0 \leq k_i < n^m$ (forall i)

$$A = \sum_{i=-\infty}^{d} a_i n^i = \sum_{i=-\infty}^{dm^{-1}} k_i \left(n^m\right)^i$$

このとき、次の関係が成り立つ。

$$k_l = \left\lfloor An^{-lm} \right\rfloor - n^m \left\lfloor An^{-(l+1)m} \right\rfloor$$

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor An^{-lm} \right\rfloor - n^m \left\lfloor An^{-(l+1)m} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=l}^{dm^{-1}} k_i n^{(i-l)m} - n^m \sum_{i=l+1}^{dm^{-1}} k_i n^{(i-l-1)m} \\
&= k_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor An^{-lm} \right\rfloor - n^m \left\lfloor An^{-(l+1)m} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=lm}^{d} a_i n^{i-lm} - n^m \sum_{i=(l+1)m}^{d} a_i n^{i-(l+1)m} \\
&= \sum_{i=lm}^{(l+1)m-1} a_i n^{i-lm}
\end{aligned}$$

$$\therefore k_i = \sum_{i=lm}^{(l+1)m-1} a_i n^{i-lm}$$