#1

2007年（前期）理系 第6問

京都大学

入試問題の巣窟

2007 年度　京都大学　前期理系　第 6 問

$\boxed{\text{問題}}$ すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満

実数 a，b に対して $1+f(a)f(b) \neq 0$ であって $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。

実数上のC^∞級関数fと任意の実数xに対して$f(x)$が存在し、$f(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0)=1$ を満たす。

また、任意の実数a,bに対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ と

$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ が成立する。

説明

関数fの正体は$\tanh$だと直感した。

$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$とすれば条件をすべて満たす。

しかし、条件を満たす関数がこれひとつとは限らない。つまり、他にも条件を満たす関数があるかもしれない。

故に、現時点で関数fを特定することはできない。

(1)

任意の実数aに対して、$-1<f(a)<-1$であることを証明せよ。

解答（0）

$$
\begin{aligned}
f(0) &= f(x-x) \\
&= f\left(x+(-x)\right) \\
&= \frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}
\end{aligned}
$$

$f(0)=0,\ 1+f(x)f(-x)\neq 0$ であるから、

任意の実数xに対して $f(-x)=-f(x)$ が成立する。

$f(x)=-1$ または $f(x)=1$ を満たすxが存在すれば $1+f(x)f(-x)=0$ が成立し、与えられた条件に反する。

実数上のC^∞級関数fと任意の実数xに対して$f(x)$が存在し、$f(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0)=1$ を満たす。
また、任意の実数a,bに対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ と
$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ が成立する。

解答（1）

微分可能性からfは実数全体で連続である。
また、fの値域には0が含まれるので、
-1以下または1以上の値が含まれることもまた
与えられた条件に反する。

$r\in\mathbb{R};\ f(r)\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$なる$r$を仮定する。

中間値の定理より、$f(0)<\gamma<f(r)$ または
$f(r)<\gamma<f(0)$ を満たす任意の実数γについて
$f(x)=\gamma$ を満たす実数xが存在する。
すなわち、$f(x)=-1$ または $f(x)=1$を満たす
実数xが存在するということである。

$$\begin{aligned} f(x)=-1 \text{ or } 1 &\implies -\left(f(x)\right)^2=-1 \\ &\iff f(x)\cdot(-f(x))=-1 \\ &\iff f(x)f(-x)=-1 \\ &\iff 1+f(x)f(-x)=0 \end{aligned}$$

これは与えられた条件に反する。
故に仮定したrは存在せず、任意の実数xに対して
$-1<f(x)<1$ が成り立つ。

補足

【微分可能関数の連続性】

$$\exists c \in \mathbb{R};\ \lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=c$$

$$\implies \lim_{h\to 0} f(\alpha+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(\alpha)+ch\right)$$

$$\implies \lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$$

【中間値の定理】

実数直線$\mathbb{R}$の閉区間$I=[a,b]$上で定義される連続な実数値関数fが $f(a)<f(b)$ を満たすとき、閉区間 $[f(a),f(b)]$ 内の任意の点γに対して $\gamma=f(c)$ となるI内の点cが存在する。

$\langle$ざっくり言うと$\rangle$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ なる連続関数fに対して $f(a)\neq f(b)$であるならば$f(a)$と$f(b)$の間の任意の値がfの値域に含まれる。

実数上のC^∞級関数fと任意の実数xに対して$f(x)$が存在し、$f(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0)=1$ を満たす。
また、任意の実数a,bに対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ と $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ が成立する。

(2)

$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。

解答（0）

上に凸な関数についての次の関係を利用して示す。

$$f\text{が上に凸} \iff \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)<0$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)\\&=f(h)\cdot\frac{1-(f(x))^2}{1+f(x)f(h)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{f(h)}{h}\cdot\frac{1-(f(x))^2}{1+f(x)f(h)}\\&\to 1\cdot\frac{1-(f(x))^2}{1+f(x)\cdot f(0)}\quad (h\to 0)\\&=1-(f(x))^2\end{aligned}$$

実数上のC^∞級関数fと任意の実数xに対して$f(x)$が存在し、$f(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0)=1$ を満たす。

また、任意の実数a,bに対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ と $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ が成立する。

解答（1）

$$\therefore \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=1-\left(f(x)\right)^2$$

$f(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}>0$ より、$x>0 \implies f(x)>0$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-\left(f(x)\right)^2\right)\\&=-2f(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x>0 &\implies f(x)>0\land\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)>0\\&\implies -2f(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)<0\\&\iff \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)<0\\&\iff f\text{は上に凸}\end{aligned}$$

実数上のC^∞級関数fと任意の実数xに対して$f(x)$が存在し、$f(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0)=1$ を満たす。
また、任意の実数a,bに対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ と
$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ が成立する。

<u>別解答</u>

一番に $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=1-(f(x))^2$ を得たとして始める。

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+f}+\dfrac{1}{1-f}\right)\mathrm{d}f=\mathrm{d}x$ であるから、

$\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+f}{1-f}\right|=x+\mathrm{C}\quad(\mathrm{C}\in\mathbb{R})$

(1)

関数fの連続性から、fの値域は実数直線上の区間として表現できる。
$-1,1\notin f(\mathbb{R})$ かつ $0\in f(\mathbb{R})$ であるから、
$f(\mathbb{R})\subset(-1,1)$ が言える。

(2)

$f(x)=0$ から $\mathrm{C}=0,\ |f(x)|<1$ から $\dfrac{1+f}{1-f}>0$
が言える。よって $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ と定まる。
$\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)=-\dfrac{8\left(e^{4x}-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$ である。
指数関数e^xは単調増加関数であるので、
$x>0$ ならば $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)<0$ が成り立つ。