この回答の何がダメ!?

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta = 0$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

誤回答

$$u = \sin(\theta)$$
$$\theta = \sin^{-1}(u)$$
$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

$$\theta : 0 \to \pi$$
$$u : 0 \to 0 \quad (\sin(0) = \sin(\pi) = 0)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta &= \int_0^{0} u \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

説明

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

$\theta \in [0, \pi]$ 上で常にこれが成立するわけではない。

$\cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}u$ は成立するが、

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を中心に $\cos(\theta)$ の正負が異なる。

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \begin{cases} \sqrt{1-(\sin(\theta))^2}, & \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sqrt{1-(\sin(\theta))^2}, & \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{1-u^2}, & \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sqrt{1-u^2}, & \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}\end{aligned}$$

$u = \sin(\theta)$ と置換するのであれば、

積分する区間を $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ と $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ の

2つに分けて考えなければならなかった。

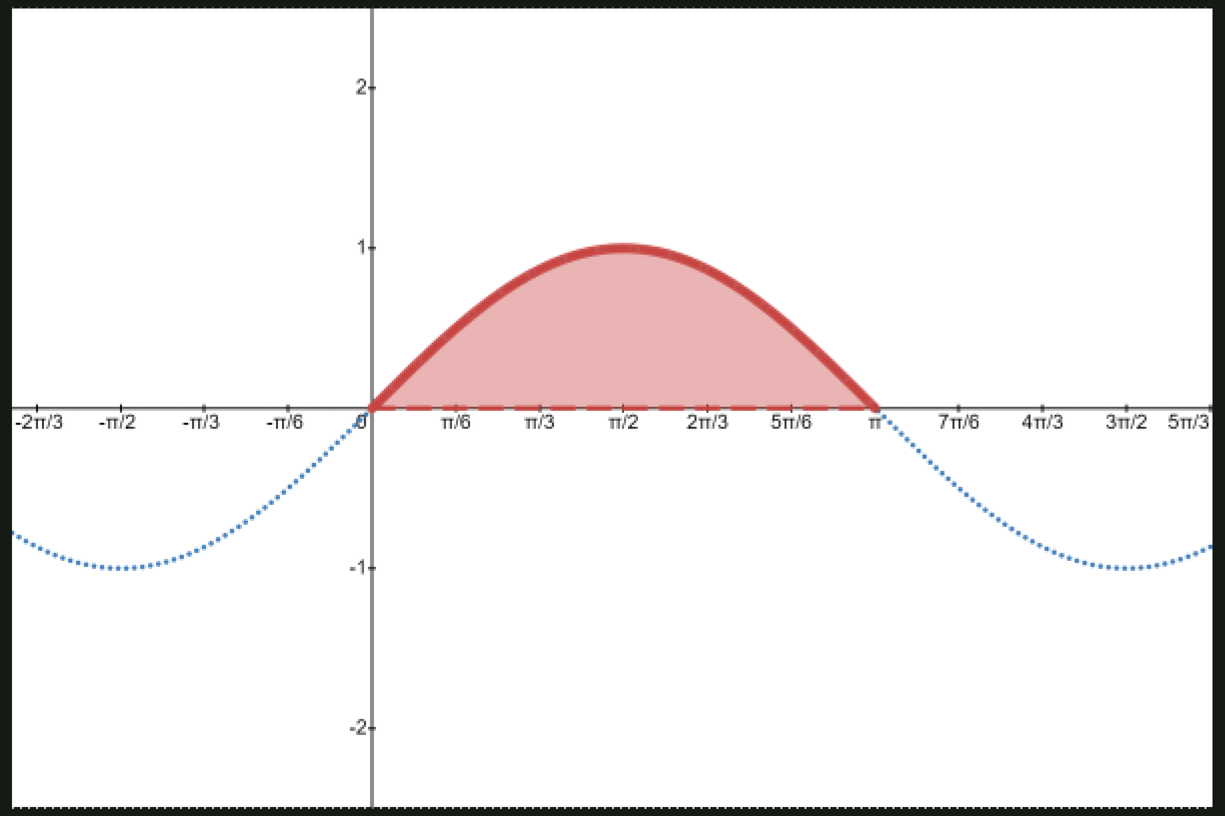
解答

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{1} u \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u \right) + \int_1^{0} u \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u \right) \\
&= 2 \int_0^{1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u \\
&= 2 \left[-\sqrt{1-u^2} \right]_0^1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

結論

$$
\int_0^{\pi} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta = 2
$$

補足



$y = \sin(x)$

与えられた積分は$\mathbb{R}^2$上の (実数 x, y を用いて) $0 < y < \sin(x)$ の部分の面積に等しいのだから、そもそも0になるわけがない。

(端点を除いて常に $\sin(x) > 0$ なので)