次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

<u>説明</u>

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x &\le \int_0^n \frac{x^2}{n^3}\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^n \frac{n^2}{n^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{d}x \\ &= 1\end{aligned}$$

この積分は明らかに負ではないので、

与えられた極限は 0 以上 1 以下の値に収束する。

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

解答1 (0)

$I_n=\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x, L=\lim_{n\to\infty} I_n$とする。

整数 k に対して $k\leq x<k+1$ ならば

$\lfloor x\rfloor=k$ であるから、I_nを次のように計算出来る。

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{kx}{n^3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

総和の内部の積分は計算出来て、

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\frac{kx}{n^3}\,\mathrm{d}x&=\frac{k}{n^3}\int_k^{k+1}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{k}{n^3}\cdot\frac{1}{2}\left((k+1)^2-k^2\right)\\&=\frac{k}{n^3}\cdot\frac{1}{2}(2k+1)\\&=\frac{1}{2n^3}\left(2k^2+k\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}I_n&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^3}\left(2k^2+k\right)\\&=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2+\frac{1}{2n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

解答1（1）

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

自然数の累乗和は上のようであった。

従って、I_nは次のように表せる。

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2n^3}\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{4n}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &\to \frac{1}{3} \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

結論

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

<u>補足</u>

自然数の累乗和の計算 (2 次まで)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ を既知とする。

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+2k+1\right)$$

この関係を利用する。

1 次の和について解くと、次が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1\right)$$

この関係を利用して、2 次の和も得られる。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1\right)\\
3\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) - 3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1\\
&= (n+1)^3 - 1 + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n\\
&= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\\
\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

解答2

床関数の性質に注目する。

$$\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1 \iff x-1 < \lfloor x\rfloor \leq x$$

このことから、与えられた極限の積分について、次のことが言える。

$$\int_0^n \frac{x(x-1)}{n^3}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^n \frac{x^2}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

n が十分に大きいとき、左右の辺の差は無視できる。つまり、これらの極限は与えられた極限に一致する。

$$\begin{aligned}\left|\int_0^n \frac{x^2}{n^3}\,\mathrm{d}x - \int_0^n \frac{x(x-1)}{n^3}\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^n \frac{x}{n^3}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left|\int_0^n \frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

よって、右辺を計算しても与えられた極限を得ることができる。

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{x^2}{n^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n^3}\int_0^n x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} \\ &\to \frac{1}{3} \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

<u>解答3</u>

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x &= \int_0^n \frac{x\left(x-(x-\lfloor x\rfloor)\right)}{n^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^n \frac{x^2}{n^3}\,\mathrm{d}x - \int_0^n \frac{x\left(x-\lfloor x\rfloor\right)}{n^3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

右辺の二つの積分の極限がそれぞれ収束すれば、その差が与えられた極限に一致する。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x^2}{n^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

この関係は解答 2 の方法と同じ様にして得られる。

$$\begin{aligned}\left|\int_0^n \frac{x\left(x-\lfloor x\rfloor\right)}{n^3}\,\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_0^n \frac{x}{n^3}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_0^n \frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x$$

解答4

与えられた極限の積分に対して、次の置換を行う。

$$x = nz$$

$$\int_0^n \frac{x\lfloor x\rfloor}{n^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{z\lfloor nz\rfloor}{n}\,\mathrm{d}z$$

また、右辺の被積分関数に対して次が成り立つ。

$$\left|\frac{z\lfloor nz\rfloor}{n}\right| \le z^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z\lfloor nz\rfloor}{n} = z^2$$

故に、ルベーグの収束定理から次が言える。

$$\int_0^1 \frac{z\lfloor nz\rfloor}{n}\,\mathrm{d}z \to \int_0^1 z^2\,\mathrm{d}z \quad (n\to\infty)$$

以上より、結論が従う。