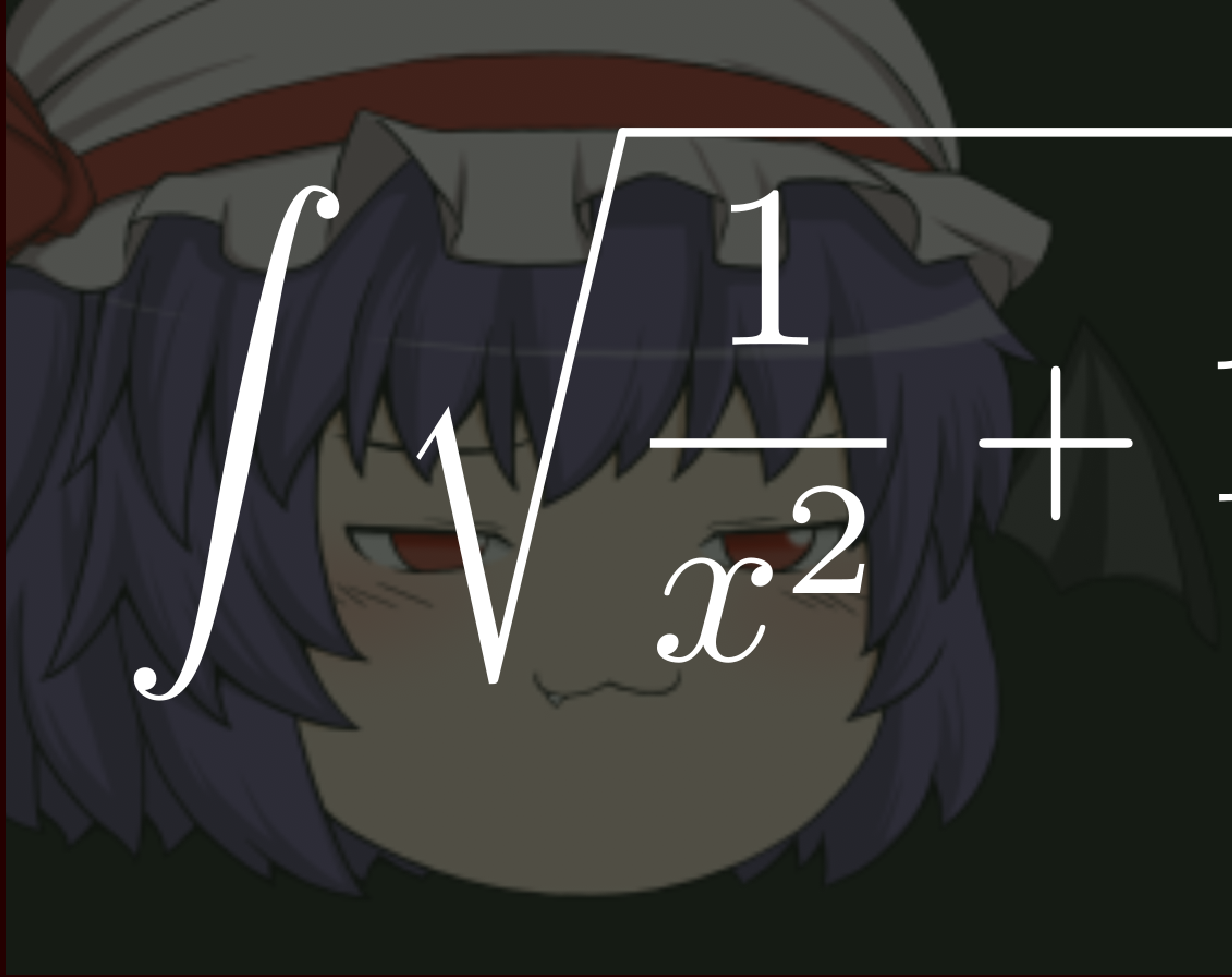
次の積分を計算せよ。



$$\int \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\, \mathrm{d}x \qquad (x > 0)$$

次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x \quad (x>0)$$

解答1

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+x^2}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

文字の置換

$$u=\sqrt{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int \left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left(2u+\ln(u-1)-\ln(u+1)\right)+\mathrm{C} \\ &= \frac{1}{2}\left(2u+\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right)+\mathrm{C} \\ &= u-\ln\left(\frac{u+1}{\sqrt{u^2-1}}\right)+\mathrm{C} \\ &= \sqrt{1+x^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)+\mathrm{C}\end{aligned}$$

解答2

$$\int \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,(x\mathrm{d}x)$$

文字の置換

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$1+x^2 = \frac{1}{v^2}$$

$$x\mathrm{d}x = -\frac{1}{v^3}\mathrm{d}v$$

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{v}\frac{v^2}{1-v^2}\left(-\frac{1}{v^3}\mathrm{d}v\right) \\
&= -\int \frac{1}{v^2\left(1-v^2\right)}\mathrm{d}v \\
&= -\int \left(\frac{1}{1-v^2}+\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+v}+\frac{1}{1-v}+\frac{2}{v^2}\right)\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln(1+v)-\ln(1-v)-\frac{2}{v}\right)+\mathrm{C} \\
&= \frac{1}{v}-\ln\left(\frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}}\right)+\mathrm{C} \\
&= \sqrt{1+x^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)+\mathrm{C}
\end{aligned}$$

解答3

被積分関数を関数fの逆関数 f^{-1} とし、
逆関数の積分法を利用して原始関数を求める。

$$f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \iff f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$F(x):=\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x &= \int f^{-1}(x)\mathrm{d}x\\ &= xf^{-1}(x)-\left(F\circ f^{-1}\right)(x)+\mathrm{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\\ &= \int\sec(\theta)\mathrm{d}\theta \quad (x=\sec(\theta))\\ &= \ln\left(\sec(\theta)+\tan(\theta)\right)+\mathrm{C}\\ &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\mathrm{C}\end{aligned}$$

結論

$$\int\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)+\mathrm{C}$$

補足1

解答1や2の置換は三角関数を経由しても得られる。

$$x=\tan(u),\ v=\sec(u) \implies v=\sqrt{1+x^2}$$

$$x=\cot(u),\ v=\sin(u) \implies v=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

補足2（逆関数の積分法）

関数fの原始関数Fが存在するとき、

fの逆関数 f^{-1} の原始関数は次のように表せる。

$$\int f^{-1}(x)\ \mathrm{d}x = xf^{-1}(x)-\left(F\circ f^{-1}\right)(x)+\mathrm{C}$$

導出は逆関数の積分法の動画を参照。