#4

2003年

徳島文理大学

入試問題の巣窟

次の実数の部分集合について

$A = \{x; |x| < 3\}$,

$B = \{x; |x - a| < 4\}$ とする。

$A \cap B = A$ となるための

aに関する条件を求めよ。

$A=\{x\in\mathbb{R};|x|<3\}, B=\{x\in\mathbb{R};|x-a|<4\}$

$A\cap B=A$ となるaの条件を求めよ。

説明

任意の集合X,Yに対して、$X=Y$ とは

$X\subset Y$ かつ $X\supset Y$ を満たすことに等しい。

$A\cap B\subset A$ はaに依らず自明に成り立つから、

$A\cap B\supset A$ を満たすaを調べればよい。

$A = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 3\}, B = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < 4\}$
$A \cap B = A$ となるaの条件を求めよ。

解答

任意の集合X, Yに対して、$X = Y$ とは
$X \subset Y$ かつ $X \supset Y$ を満たすことに等しい。
$A \cap B \subset A$ はaに依らず自明に成り立つから、
$A \cap B \supset A$ を満たすaを調べればよい。

定義から、$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$ である。
また、集合の包含と論理包含は同じであるから、
$A \cap B \supset A$ を、すなわち $\forall x \in A; x \in A \cap B$ を
満たすようなaが対象である。

$A \cap B$ の定義から、$x \in A \cap B$ は $x \in A$ と
$x \in B$ を共に満たすことであった。
つまりAの元が全てBにも属するための
条件を探すことに等しい。

$$\begin{aligned} x \in B &\iff |x - a| < 4 \\ &\iff -4 < x - a \wedge x - a < 4 \\ &\iff a < x + 4 \wedge x - 4 < a \end{aligned}$$

この関係が全ての $x \in A$ で満たされなければ
ならない。従って、$a \leq 1$ かつ $-1 \leq a$
すなわち $|a| \leq 1$ なるaに対してのみ成り立つ。

結論

$$|a| \leq 1$$

<u>補足</u>

$$\begin{aligned}
A \cap B = A &\iff (A \cap B \subset A) \land (A \cap B \supset A) \\
&\iff A \cap B \supset A \\
&\iff \forall x \in A; x \in A \cap B \\
&\iff \forall x \in A; x \in B \\
&\iff \forall x \in A; |x - a| < 4 \\
&\iff \forall x \in A; x - 4 < a < x + 4 \\
&\iff (\forall x \in A; x - 4 < a) \\
&\qquad \land (\forall x \in A; a < x + 4) \\
&\iff (-1 \leq a) \land (a \leq 1) \\
&\iff |a| \leq 1
\end{aligned}$$