

実数 $x$ の方程式

$$\log(6 \cos(x)) (6 \sin(x)) = \frac{3}{2}$$



次の等式を満たす実数 $x$ を全て答えよ。

$$\log_{(6 \cos(x))} (6 \sin(x)) = \frac{3}{2}$$

### 説明

対数の存在条件は

$6 \sin(x) > 0, 6 \cos(x) > 0, 6 \cos(x) \neq 1$  であるから、

$$x \in \left(2n\pi, \frac{4n+1}{2}\pi\right) \setminus \left\{\frac{6n+1}{3}\pi\right\} \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ を}$$

満たす。

この方程式は $x$ に $2\pi$ を足す操作について対称。

簡単のため  $n=0$  すなわち  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$  上で

のみ議論を行う。

### 解答

$$\log_{(6 \cos(x))} (6 \sin(x)) = \frac{3}{2}$$

$$\iff 6 \sin(x) = (6 \cos(x))^{\frac{3}{2}}$$

$$\iff (6 \sin(x))^2 = (6 \cos(x))^3$$

$$\iff 6 (\cos(x))^3 + (\cos(x))^2 - 1 = 0$$

$$\iff (2 \cos(x) - 1) \left(3 (\cos(x))^2 + 2 \cos(x) + 1\right) = 0$$

$$\iff \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3}$$

### 結論

$$\exists x \in \mathbb{R}; \log_{(6 \cos(x))} (6 \sin(x)) = \frac{3}{2}$$

$$\iff x = \frac{6n+1}{3}\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$