次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

<u>説明</u>

与えられた積分の区間は非有界なので
狭義のリーマン積分の範囲での値は持たない。

$[0,\infty)$ 上の積分を次で与える。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

右辺の極限が収束するとき、その値を
与えられた積分のものとして定める。

<u>解答（収束性の確認）</u>

$\forall x \in [0,\infty); \max\left(1, x^3\right) \leq \left|1+x^3\right|$ であるので、

$\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{1}{1+x^3}\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \frac{1}{\max\left(1,x^3\right)}\,\mathrm{d}x$ を満たす。

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{\max\left(1,x^3\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\max\left(1,x^3\right)}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{\max\left(1,x^3\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \left[\frac{-2}{x^2}\right]_1^\infty \\
&= 3
\end{aligned}$$

従って、与えられた積分は有限の値をとる。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

解答1（0）

$$1 = \frac{1}{3}\left(\left(1-x+x^2\right) - (1+x)\left(-\frac{1}{2}+x-\frac{3}{2}\right)\right)$$

より、$\dfrac{1}{1+x^3}$ の積分を3つの積分の和で表せる。

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{-1+2x}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x$$

右辺の積分をそれぞれ計算し、

$\dfrac{1}{1+x^3}$ の原始関数をひとつ得る。

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(1+x) + \mathrm{C}_0$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int \frac{-1+2x}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}\left(1-x+x^2\right)}{1-x+x^2} \\ &= \frac{1}{6}\ln\left(1-x+x^2\right) + \mathrm{C}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{C}_2\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

解答1（1）

従って、

$$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ は

$\dfrac{1}{1+x^3}$ の原始関数のひとつである。

$$\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right)\right]_{x=0}^{x=\infty}=0,$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{x=0}^{x=\infty}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$ である。

以上より、 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ が従う。

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

解答2（0）

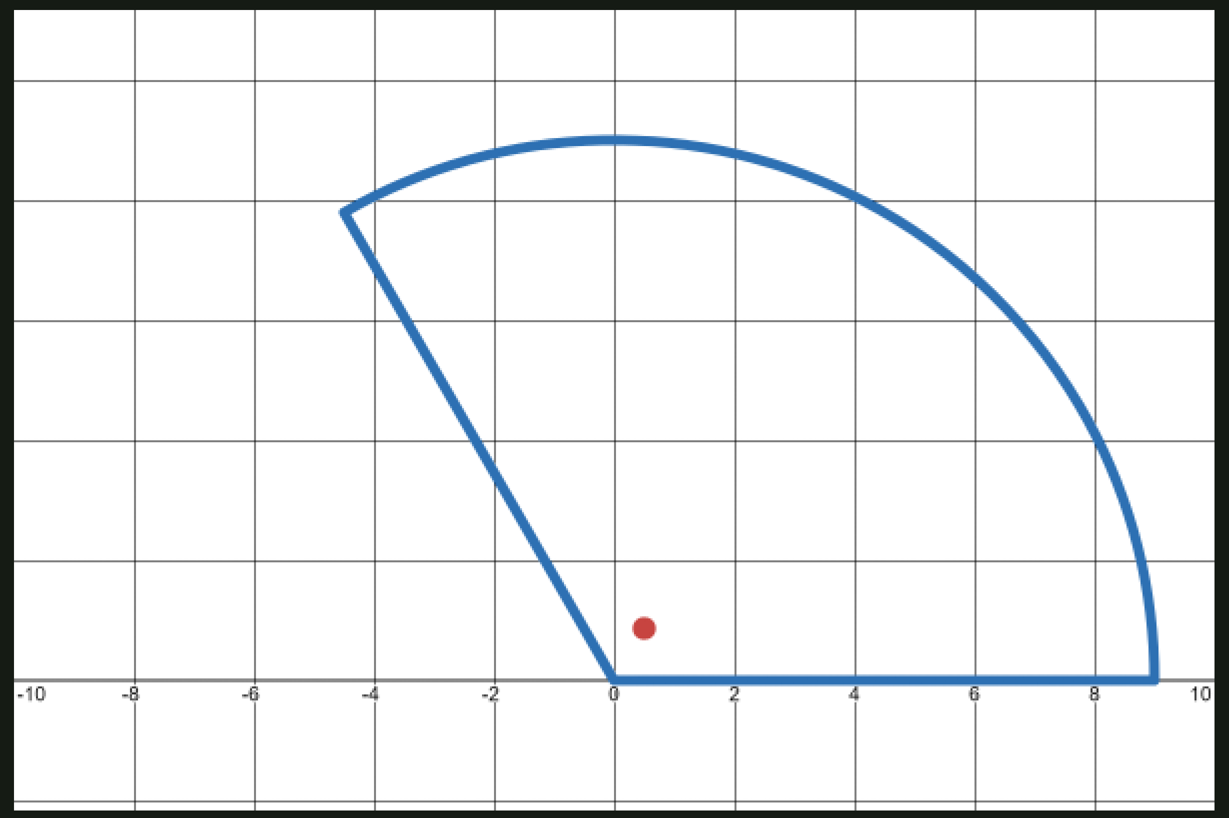
1を超える実数Rに対して、単純閉曲線Cを次の曲線 C_0, C_1, C_2 の和として定める。

$$C_0 : z(t) = t \quad (t \in [0, R])$$

$$C_1 : z(t) = Re^{it} \quad \left(t \in \left[0, \frac{2}{3}\pi\right]\right)$$

$$C_2 : z(t) = e^{\frac{2}{3}\pi i} t \quad (t \in [0, R])$$

このとき、Cの内部に $\dfrac{1}{1+z^3}$ の孤立特異点がただひとつ存在する。（この特異点をαとする。）



$C, \alpha \left(= e^{\frac{\pi}{3} i}\right)$

$f(z) = \dfrac{1}{1+z^3}$ とすると、

留数定理により次のことが言える。

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, \alpha)$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

<u>解答2（I）</u>

Cの定義から、fのC上の周回積分は

次の3つの積分によって表すことができる。

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R & f(t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^{\frac{2}{3}\pi} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right) \\ &+ \int_R^0 f\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}t\right)\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

先の周回積分と留数の関係は $R>1$ に対して

成り立つので、$R\to\infty$ としても従う。

$$\begin{aligned}\int_0^R f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^R \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \\ &\to \int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{2}{3}\pi} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right)\right| &= \left|\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{iRe^{it}}{1+\left(Re^{it}\right)^3}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left|\frac{iRe^{it}}{1+\left(Re^{it}\right)^3}\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\left|iRe^{it}\right|}{\left|1+\left(Re^{it}\right)^3\right|}\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{R}{R^3-1}\,\mathrm{d}t \\ &\to 0 \quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

解答2（2）

従って、$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right) \to 0 \quad (R\to\infty)$

$$\begin{aligned}
&\int_R^0 f\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}t\right)\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -e^{\frac{2}{3}\pi i}\int_0^R \frac{1}{1+\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}t\right)^3}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-\frac{\pi}{3}i}\int_0^R \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \\
&\to \alpha^{-1}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \quad (R\to\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,\alpha) &= \lim_{z\to\alpha}\frac{z-\alpha}{1+z^3} \\
&= \lim_{z\to\alpha}\frac{1}{(z+1)\left(z-\alpha^{-1}\right)} \\
&= \frac{1}{(1+\alpha)\left(\alpha-\alpha^{-1}\right)} \\
&= \frac{1+\alpha^{-1}}{\left(1+\alpha^{-1}\right)(1+\alpha)\left(\alpha-\alpha^{-1}\right)} \\
&= \frac{1+\alpha^{-1}}{3\sqrt{3}i}
\end{aligned}$$

以上より、

$\displaystyle\left(1+\alpha^{-1}\right)\int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = 2\pi i\cdot\frac{1+\alpha^{-1}}{3\sqrt{3}i}$ を満たし、

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ が言える。

解答2 補足

【留数定理】

複素平面上の単純閉曲線γとその内部で定義される関数fについて、fがγの内部に孤立特異点 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ を持ち、それ以外で正則(複素微分可能)であるとする。このとき、次が成り立つ。

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Res}(f, a_k)$$

ただし、左辺の積分はγの内部の点からの偏角が正の向きに進む。

また、 $\mathrm{Res}(f, a_k)$ はfの点a_kにおける留数とする。

【留数の明示公式】

点aがfのm位の極であるとき、次が成り立つ。

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} (z-a)^m f(z)$$

留数定理及び留数の明示公式の証明はローラン展開とコーシーの積分定理による。(略)