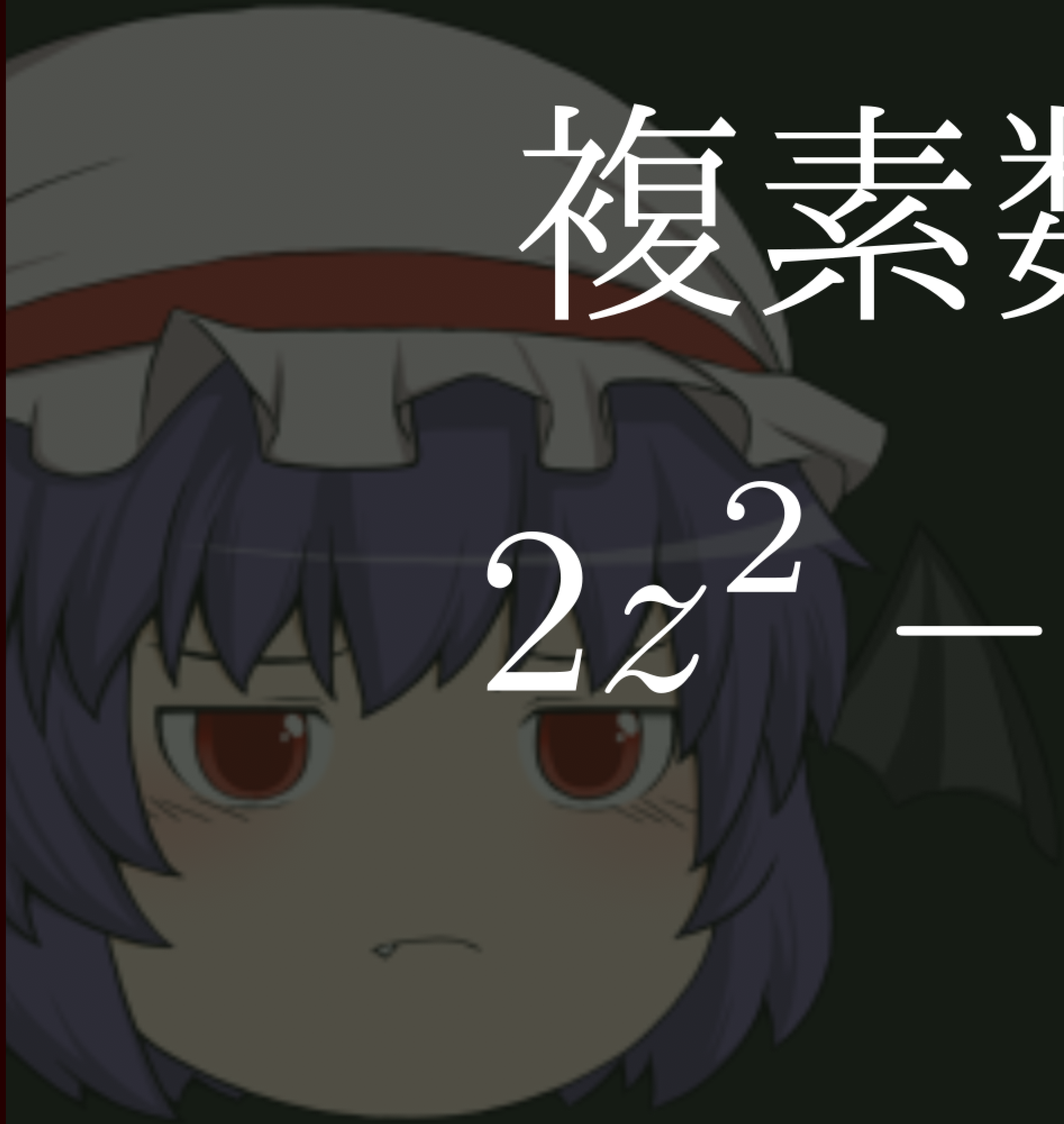
複素数zの方程式

$$2z^2 - 5|z| + 3 = 0$$



次の等式を満たす複素数zを全て答えよ。

$2z^2-5|z|+3=0$

zが実数のとき（実数解）

$$
\begin{aligned}
2z^2-5|z|+3&=0\\
2|z|^2-5|z|+3&=0\\
(2|z|-3)(|z|-1)&=0\\
|z|&=1,\frac{3}{2}\\
z&=\pm1,\pm\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

解答（0）

xとyを実数とし、$z=x+iy$ と置き換えて調べる。

$$
\begin{aligned}
2z^2-5|z|+3&=0\\
2(x+iy)^2-5|z|+3&=0\\
2\left(x^2-y^2+i\cdot 2xy\right)-5|z|+3&=0\\
\left(2x^2-2y^2-5|z|+3\right)+i\cdot 4xy&=0+i\cdot 0
\end{aligned}
$$

このとき、$2x^2-2y^2-5|z|+3=0$ かつ

$4xy=0$ である。

次の等式を満たす複素数zを全て答えよ。

$2z^2-5|z|+3=0$

解答（1）

$x=0$ のとき

$$
\begin{aligned}
2z^2-5|z|+3&=0\\
2y^2+5|y|-3&=0\\
2|y|^2+5|y|-3&=0\\
(|y|+3)(2|y|-1)&=0\\
|y|&=\frac{1}{2}\quad(|y|\geq 0)\\
y&=\pm\frac{1}{2}\\
\therefore z&=\pm\frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

$y=0$ のとき

$z\in\mathbb{R}$であるので、初めの議論に帰着する。

よって $z=\pm 1,\pm\dfrac{3}{2}$

結論

$$
\begin{aligned}
&\exists z\in\mathbb{C};\ 2z^2-5|z|+3=0\\
\iff\ & z\in\left\{-\frac{3}{2},-1,1,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}i,\frac{1}{2}i\right\}
\end{aligned}
$$

補足（一般化）

実数$a, b, c\ (a \neq 0)$に対して

等式 $az^2 + b|z| + c = 0$ を満足する複素数zの

存在を調べる。

$$
\begin{aligned}
&az^2 + b|z| + c = 0 \\
&\iff az^2 = -b|z| - c
\end{aligned}
$$

左辺az^2は複素数、右辺 $-b|z| - c$ は実数である。

故にz^2もまた実数であり、$\arg\left(z^2\right) = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$

から $\arg(z) = \dfrac{n}{2}\pi$ が言える。

すなわちzは実数または純虚数である。

$z = x\ \ (x \in \mathbb{R})$ならば

$az^2 + b|z| + c = 0 \iff a|x|^2 + b|x| + c = 0$

$z = iy\,(y \in \mathbb{R})$ならば

$az^2 + b|z| + c = 0 \iff a|y|^2 - b|y| - c = 0$

以上から、複素数zの方程式 $az^2 + b|z| + c = 0$ は

非負実数sの方程式 $as^2 \pm bs \pm c = 0$ (複号同順)

に帰着して考えることができる。