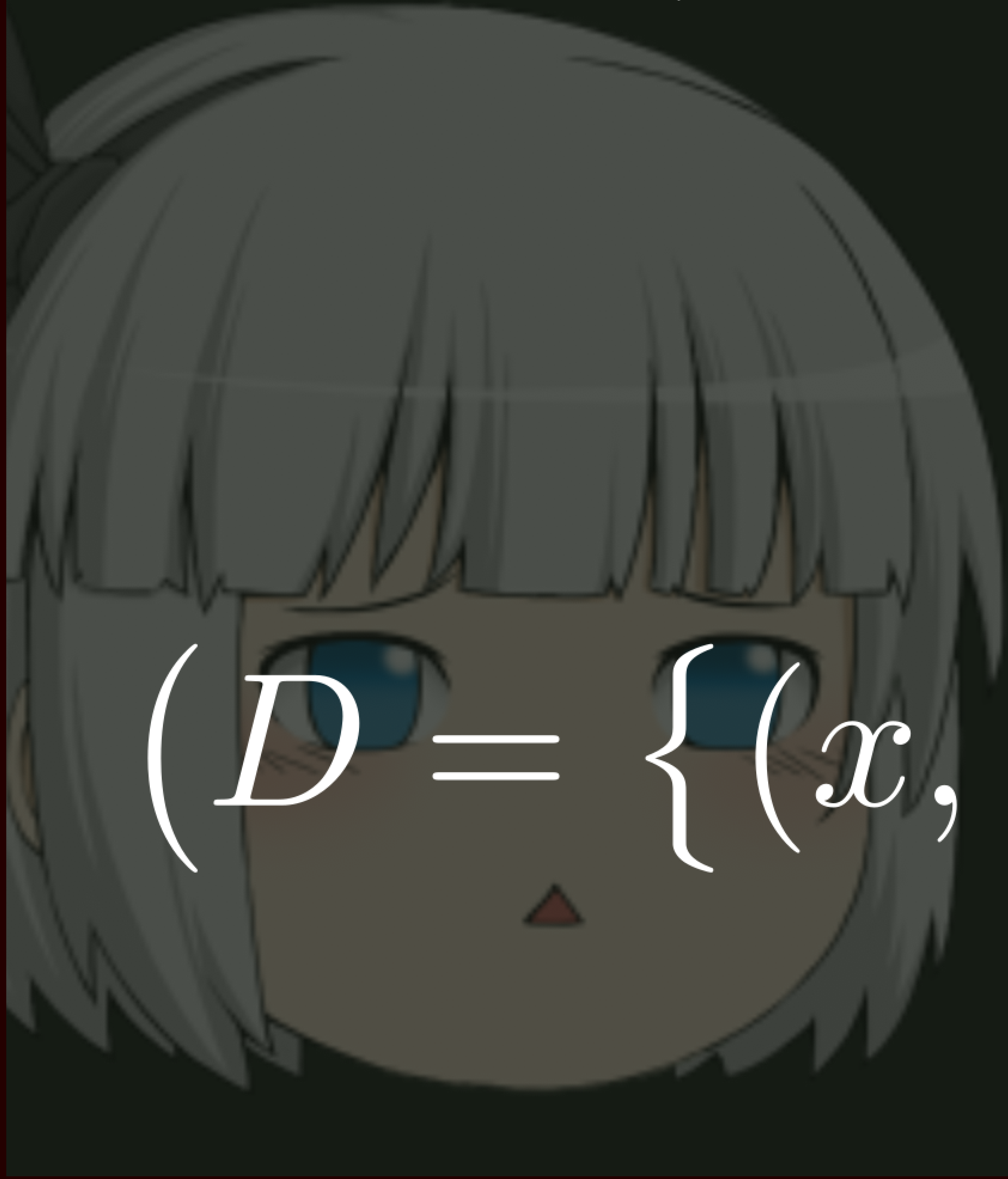
次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\left(D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\right\}\right)$$



次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \left(D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le 1\right\}\right)$$

説明(0)

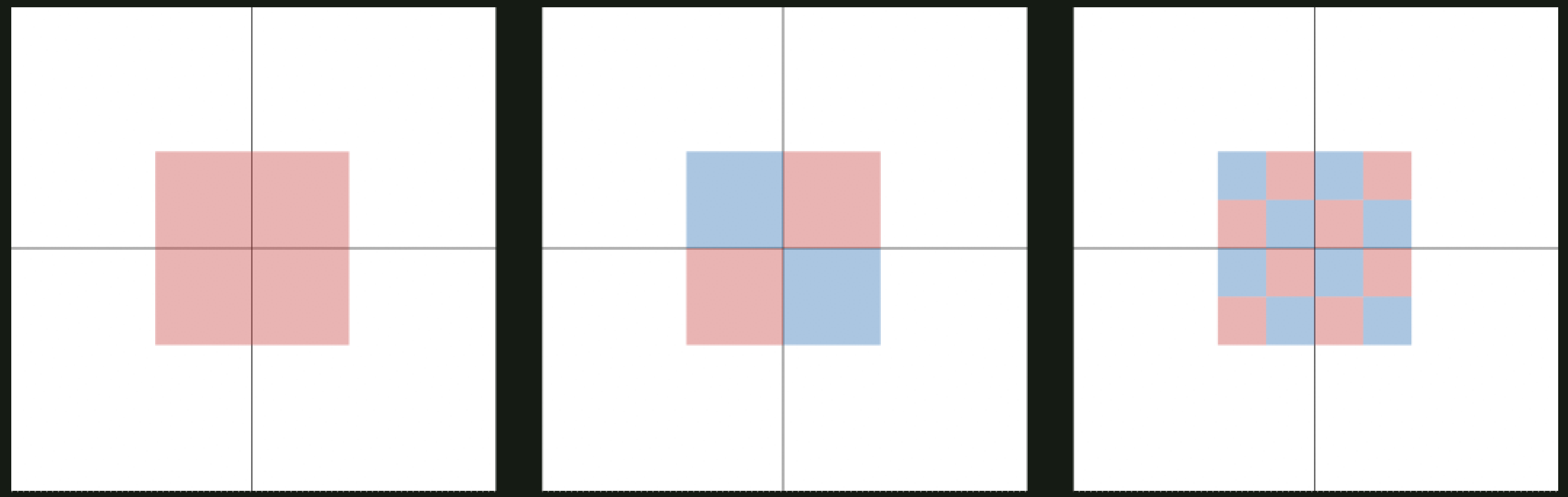
【重積分（ざっくりまたは雑）】

実数値関数 f の区間 $I\in\mathbb{R}^n$ 上の積分は
次のように定められる。

I の分割 $\{I_i\}_{i=1}^m$ とその代表点 $\{x_i^*\}_{i=1}^m$
$V=\max\mathrm{vol}\left(\{I_i\}\right)$ を用いて次のように表す。

$$\int_I f\left(\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{V\to 0}\sum_{i=1}^m f\left(x_i^*\right)\mathrm{vol}\left(I_i\right)$$

右辺の極限が収束しなければ、
この積分は定義されない。



区間の分割イメージ (2 次の場合)

分割は画像のような等分でなくてもよい。
各領域の大きさを 0 に近づけるため、
分割の個数は限りなく大きくなる。

一般に、n 重積分と n 重の逐次積分は一致しない。

$$\int\cdots\int_I f\left(\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$\neq \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_m}^{b_m} f\left(x_1,\cdots,x_m\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m$$

次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \left(D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 1\right\}\right)$$

<u>説明(1)</u>

【一般の領域における重積分】

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D における積分は、
D の指示関数 1_D と $I\supset D$ なる n 次元区間 I を
用いて次のように表される。

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_I 1_D(\boldsymbol{x})\,f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$1_D(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in D\\ 0, & \boldsymbol{x}\notin D\end{cases}$$

次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \left(D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le 1\right\}\right)$$

解答準備

以下、複数の解答において領域 D の
指示関数 1_D を用いることとする。

$$1_D(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

解答I（0）

領域 $R=[-1,1]\times[-1,1]$ は領域 D を含む
長方形領域である。
実際、x,y のいずれかの絶対値が 1 を超えると
$x^2+y^2\le 1$ を満たさない。

従って、与えられた積分は次のように表せる。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_R 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

領域と被積分関数が有界であることから
与えられた積分は有限であり、フビニの定理より
次のことが言える。

$$\iint_R 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \left(D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 1\right\}\right)$$

解答1（1）

　また、D の定義から次のことも言える。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{-\sqrt{1-y^2}} 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\right.\\ &\quad + \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &\quad \left.+ \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

あとは目の前にある計算をするだけである。

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= 4\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta \quad (y=\sin(\theta))\\ &= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\\ &= \pi\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \left(D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\right\}\right)$$

解答2

与えられた積分に対して、
$(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ と置換する。
この置換のヤコビ行列式は次のようにして得られる。

$$\begin{aligned}
\det \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(r,\theta)} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= r
\end{aligned}$$

この置換は $E = [0,1] \times [0,2\pi)$ から D への
双射 (全単射) の関係にあるため、次が成り立つ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_E \left|\det \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(r,\theta)}\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

計算を続ける。

$$\begin{aligned}
\iint_E \left|\det \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(r,\theta)}\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= \iint_E r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) \left(\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\right) \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \left(D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\right\}\right)$$

解答3（蛇足）

与えられた積分は領域 D の面積を表す。
D は単位円であるため、その面積は π である。
従って、次が成り立つ。

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

補足

初めの説明にあるとおり、重積分は
分割した積分領域の、面積と
代表点における被積分関数の値の和だ。

$I = [-1,1] \times [-1,1]$ とその分割 $\{I_i\}_{i=1}^m$
代表点 $x_i^* \in I_i$ を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_I 1_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\max \mathrm{vol}(I_i) \to 0} \sum_{i=1}^m 1_D\left(x_i^*\right) \mathrm{vol}\left(I_i\right)\end{aligned}$$

つまり領域 I を分割して、領域 D に含まれる点の
大きさだけを足し合わせているので、
与えられた積分は D の面積に一致する。

結論

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$