#0

2020年（前期） 理系 第4問

北海道大学

入試問題の巣窟

2020 年度　北海道大学　前期理系　第４問

問題 α を $0<\alpha<1$ を満たす実数とし，$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\alpha,\ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義されるとき，次の問に答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ かつ $a_{n+1}>a_n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ とおくとき，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1}<b_n$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

$\alpha \in \{r \in \mathbb{R};\ 0 < r < 1\}$

$f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \leq 1)$

(1)

1以上の整数nに対して、$0 < a_n < 1$ かつ

$a_{n+1} > a_n$が成り立つことを示せ。

解答

$$\begin{aligned} 0 < a_n < 1 &\iff 0 < \frac{\pi}{2}a_n < \frac{\pi}{2} \\ &\implies 0 < \sin\left(\frac{\pi}{2}a_n\right) < 1 \\ &\iff 0 < a_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

$a_1 = \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$ より、

1以上の整数nに対して $0 < a_n < 1$ が成立。

$g(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - x$ とする。

$\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x) = -\dfrac{\pi^2}{2^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ より

$0 < s < 1$ なるsに対して $\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(s)$ は負である。

$g(0) = g(1) = 0$ であるから、$g(s)$は常に正。

すなわち、$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}s\right) > s$ が成り立つ。

1以上の整数nに対して $0 < a_n < 1$

であるので、$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_n\right) > a_n$

すなわち $a_{n+1} > a_n$ が成り立つ。

$\alpha \in \{r \in \mathbb{R};\ 0 < r < 1\}$

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = f\left(a_n\right) \quad \left(n \in \mathbb{Z},\ n \leq 1\right)$

(2)

$b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき、1以上の整数nに対して

$b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ。

解答

$g(x) = \dfrac{1 - f(x)}{1 - x}$ とすると $b_n = g\left(a_n\right)$ であり、

$b_{n+1} < b_n \iff g\left(a_{n+1}\right) < g\left(a_n\right)$ なので

$0 < x < 1$ でのgの単調減少性を示すことで

$b_{n+1} < b_n$ の証明とする。

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1 - f(x) - (1 - x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}{(1 - x)^2}$$

$$h(x) = (1 - x)^2\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) &= -(1 - x)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) \\ &= -\frac{\pi^2}{4}(1 - x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(0) = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$\alpha \in \{r \in \mathbb{R};\ 0 < r < 1\}$

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \leq 1)$

解答（続き）

$$
\begin{aligned}
& 0 < x < 1 \\
& \implies 0 > -\frac{\pi^2}{4}(1-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\
& \iff 0 > \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) \\
& \implies h(x) < 0 \\
& \implies h(x)(1-x)^{-2} < 0 \\
& \iff \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) < 0
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) < 0
$$

$$
\iff (x_0 < x_1 \implies g(x_0) > g(x_1))
$$

$x_0 = a_n,\ x_1 = a_{n+1}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
g(a_n) > g(a_{n+1}) & \iff \frac{1-f(a_n)}{1-a_n} > \frac{1-f(a_{n+1})}{1-a_{n+1}} \\
& \iff \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n} > \frac{1-a_{n+2}}{1-a_{n+1}} \\
& \iff b_n > b_{n+1}
\end{aligned}
$$

$\alpha \in \{r \in \mathbb{R};\ 0 < r < 1\}$

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \leq 1)$

<u>別解答</u>

$$\begin{aligned}
h(x) &= 1 - f(x) - (1-x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \\
&= 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (1-x)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\
&= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \\
&\quad - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}(1-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1\right) \\
&\quad + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}(1-x)\right)
\end{aligned}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1\right)$ は負で $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ は正であるので、$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}(1-x)$ が負だとわかれば $h(x)$ は負であると言える。

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(1-x)\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)
\end{aligned}$$

$u > 0 \implies u > \sin(u)$ なので、

$0 < x < 1 \implies \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right) < \frac{\pi}{2}(1-x)$ である。

故に $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}(1-x) < 0$ が言える。

よって $h(x) < 0$ である。

以下、元の解答と同じ議論。

$\alpha \in \{r \in \mathbb{R};\ 0 < r < 1\}$

$f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \leq 1)$

(3)

$\lim_{n\to\infty} a_n$ および(2)で定めた $\{b_n\}$ に対して

$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

解答

$$
\begin{aligned}
&0 < a_n < a_{n+1} < 1 \\
&\iff 0 > -a_n > -a_{n+1} > -1 \\
&\iff 1 > 1 - a_n > 1 - a_{n+1} > 0 \\
&\implies 1 > \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} > 0 \\
&\iff 0 < b_n < 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 - a_{n+1} &= b_n (1 - a_n) \\
&= b_n b_{n-1} (1 - a_{n-1}) \\
&= b_n b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_1 (1 - a_1) \\
&< b_1^n (1 - \alpha) \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_n\right)}{1 - a_n} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1 - x} \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\mathrm{d}x}(1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$