#3

2023年（前期）理系 第2問

富山大学

入試問題の巣窟

2023 年度　富山大学　前期理系　第２問

$\boxed{\text{問題}}$　e を自然対数の底として，$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$　$(x \geqq 0)$ を考える。次の問いに答えよ。ただ

対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-\frac{x}{2}}=0$ であることは用いてよい。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減，およびグラフの凹凸を調べ，グラフをかけ。また，変曲点が 2 つ以上あ
　　の y 座標の大小関係も調べよ。ただし，$2<e<3$ であることを用いてもよい。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(3)　a を正の実数とする。xy 平面において，$0 \leqq y \leqq f(x)$，$0 \leqq x \leqq a$ を満たす部分の面積を
　　き，$S(a)$ を a の式で表せ。

(4)　(3) の $S(a)$ に対して，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ。

N_toyama2023A_0

0以上の実数xに対して次の$f(x)$が定義される。

$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$

(1)

関数 $y=f(x)$ の増減、およびグラフの凹凸を調べ、グラフをかけ。また、変曲点が2つ以上あれば、それらのy座標の大小関係も調べよ。

ただし、$2<e<3$ であることを用いてもよい。

解答（0）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)&=\frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)e^{-\frac{x}{2}}+x^2\,\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{(2x\,\mathrm{d}x)\,e^{-\frac{x}{2}}+x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{d}x}\\&=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}x(x-4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}x(x-4)\right)\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2-4x\right)\right)}{\mathrm{d}x}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(x^2-4x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(x^2-4x\right)}{\mathrm{d}x}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\left(x^2-4x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left((2x-4)\,\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2-8x+8\right)\end{aligned}$$

0以上の実数xに対して次の$f(x)$が定義される。

$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$

解答（1）

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}x(x-4)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2-8x+8\right)$$

$$\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=\begin{cases}-1, & x>4\\ 0, & x=0,4\\ 1, & 0<x<4\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)=\begin{cases}-1, & 4-2\sqrt{2}<x<4+2\sqrt{2}\\ 0, & x=4\pm2\sqrt{2}\\ 1, & 0\le x<4-2\sqrt{2}, x>4+2\sqrt{2}\end{cases}$$

$x=4-2\sqrt{2}, x=4+2\sqrt{2}$ それぞれの前後で

fの2次導関数の符号が変化する。

そのため、この2点は $y=f(x)$ の変曲点である。

$$f\left(4\pm2\sqrt{2}\right)=\left(4\pm2\sqrt{2}\right)^2e^{-\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}}$$
$$=8e^{-2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{\pm2}e^{\mp\sqrt{2}}\quad(\text{複号同順})$$

$$\frac{f\left(4+2\sqrt{2}\right)}{f\left(4-2\sqrt{2}\right)}=\left(\sqrt{2}+1\right)^4e^{-2\sqrt{2}}$$
$$=\left(17+12\sqrt{2}\right)e^{-2\sqrt{2}}$$
$$>29\cdot3^{-3}$$
$$>1$$

$$\therefore f\left(4+2\sqrt{2}\right)>f\left(4-2\sqrt{2}\right)\quad(\because f(x)\ge0)$$

0以上の実数xに対して次の$f(x)$が定義される。

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

解答（2）

$x = 0, 4-2\sqrt{2}, 4, 4+2\sqrt{2}$ における点$(x, f(x))$の間とその先の軌跡の形を指示する。

基本的には次の指示に従う。

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$ ならば点が左下から右上へ

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) < 0$ ならば点が左上から右下へ続く様に

これと同時に、次に従って点を繋ぐ。

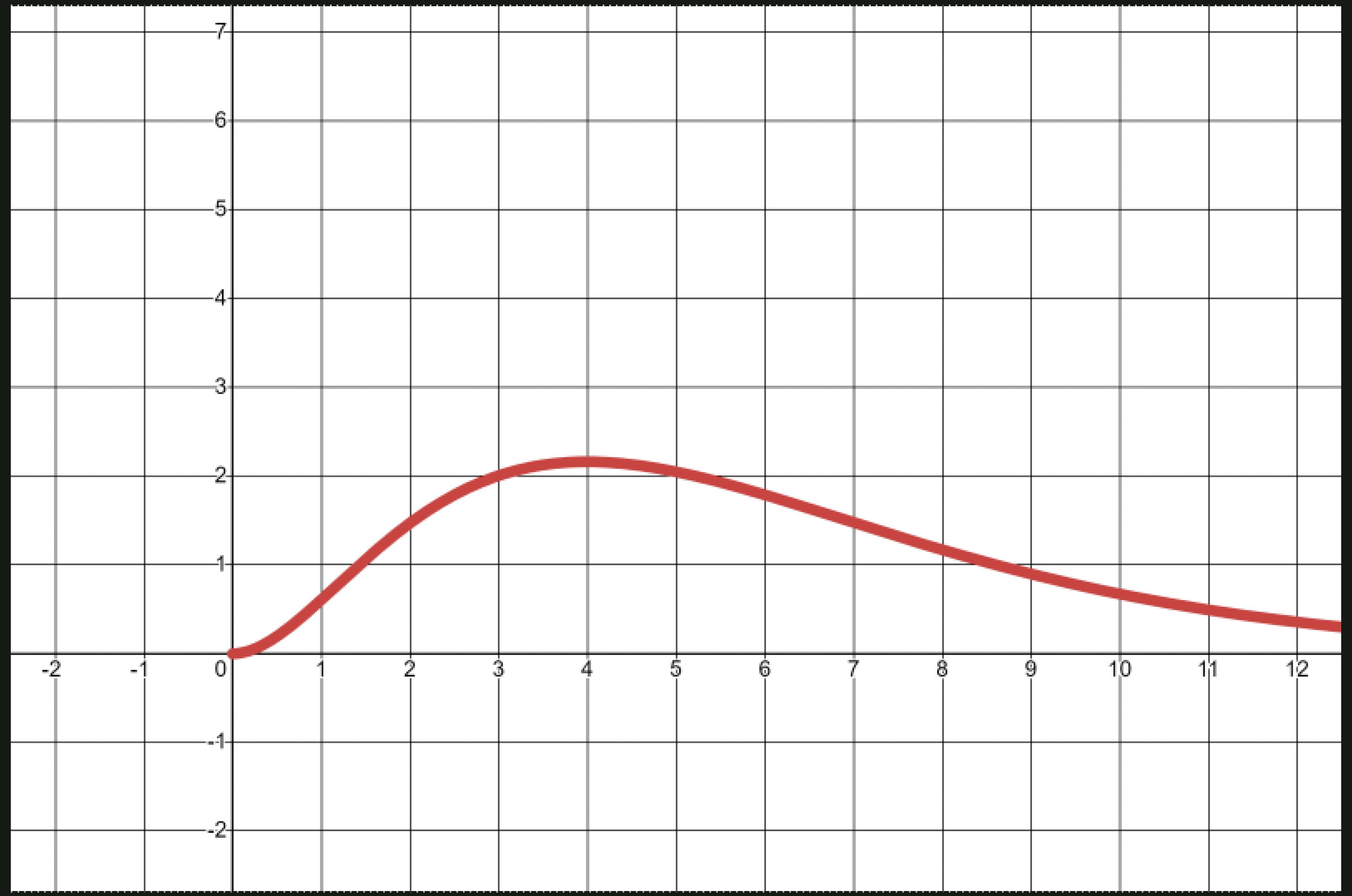
$\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0$ ならば曲線が下に膨らむように

$\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0$ ならば曲線が上に膨らむようにする。

増減表

x	0	$\cdots$	$4-2\sqrt{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$	$4+2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f(x)$	0	↗	$f\left(4-2\sqrt{2}\right)$	↗	$16e^{-2}$	↘	$f\left(4+2\sqrt{2}\right)$	↘
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	0		$+$		0		$-$	
$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$

グラフ（完成図）



$$y = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

$$(y = f(x))$$

0以上の実数xに対して次の$f(x)$が定義される。

$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$

(2)

不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ を求めよ。

解答I

$f(x)=\dfrac{\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\left(ax^2+bx+c\right)\right)}{\mathrm{d}x}$ を常に満たす実数a,b,cを調べる。

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\left(ax^2+bx+c\right)\right)}{\mathrm{d}x}$$
$$=e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}ax^2+\left(2a-\frac{1}{2}b\right)x+\left(b-\frac{1}{2}c\right)\right)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}a=1 \\ 2a-\dfrac{1}{2}b=0 \\ b-\dfrac{1}{2}c=0 \end{cases}$$
$$\iff (a,b,c)=(-2,-8,-16)$$

よって

$f(x)=\dfrac{\mathrm{d}\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+4x+8\right)\right)}{\mathrm{d}x}$ であり、

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=-2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+4x+8\right)+\mathrm{C}$$

0以上の実数xに対して次の$f(x)$が定義される。

$f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$

解答2

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= -2\int x^2\,\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \\
&= -2x^2 e^{-\frac{x}{2}} + 2\int (2x\,\mathrm{d}x) e^{-\frac{x}{2}} \\
&= -2x^2 e^{-\frac{x}{2}} - 8\int x\,\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \\
&= -2x^2 e^{-\frac{x}{2}} - 8x e^{-\frac{x}{2}} + 8\int \mathrm{d}x\, e^{-\frac{x}{2}} \\
&= -2x^2 e^{-\frac{x}{2}} - 8x e^{-\frac{x}{2}} - 16 e^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{C} \\
&= -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 4x + 8\right) + \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

0以上の実数xに対して次の$f(x)$が定義される。

$f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$

(3)

aを正の実数とする。xy平面において、

$0 \leq y \leq f(x), 0 \leq x \leq a$ を満たす部分の

面積を$S(a)$とするとき、$S(a)$をaの式で表せ。

解答

$x > 0 \implies f(x) > 0$ であるから、

$S(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ を満たす。

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \left(x^2 + 4x + 8 \right) \right]_0^a \\
&= 16 - 2e^{-\frac{a}{2}} \left(a^2 + 4a + 8 \right)
\end{aligned}
$$

0以上の実数xに対して次の$f(x)$が定義される。

$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$

(4)

(3)の$S(a)$に対して、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)$を求めよ。

解答

(3)より

$S(a)=16-2e^{-\frac{a}{2}}\left(a^2+4a+8\right)$

$$\lim_{a\to\infty}e^{-\frac{a}{2}}=\lim_{a\to\infty}e^{-\frac{a}{2}}a^2=0$$

$a>4\implies 16-6e^{-\frac{a}{2}}a^2<S(a)<16-2e^{-\frac{a}{2}}$

であるから、挟みうちの原理により

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)=16$

補足1

左にある$S(a)$の大小関係は次の関係による。

$$0<a^2+4a+8<3a^2$$

$a>0\implies a^2+4a+8>0$ は自明。

$a>1+\sqrt{5}\implies 3a^2>a^2+4a+8$ であるので、

十分大きなaに対して成り立つ。

補足2

$\forall n \in \mathbb{N};\ \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ の証明

$x > 0 \implies e^x > 0$ の成立は自明である。

$$\begin{aligned} e^x > 0 &\implies \int_0^x e^u \, \mathrm{d}u > 0 \\ &\implies e^x > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x > \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} &\implies \int_0^x e^u \, \mathrm{d}u > \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{u^i}{i!} \right) \mathrm{d}u \\ &\implies e^x - 1 > \sum_{i=0}^{m} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \\ &\implies e^x > \sum_{i=0}^{m+1} \frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

故に任意の非負整数mと正数xに対して

$e^x > \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!}$ が成り立つ。

任意の自然数nと正数xに対して非負整数mが

存在し、$x^{-n} e^x > \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{x^{i-n}}{i!}$ かつ $m > n$ を

満たす。

$m - n > 0$ であるから、$x^{m-n} \to \infty\ (x \to \infty)$

であって、さらに追い出しの原理から

$x^{-n} e^x \to \infty\ (x \to \infty)$ も言える。

以上から $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ が成り立つ。