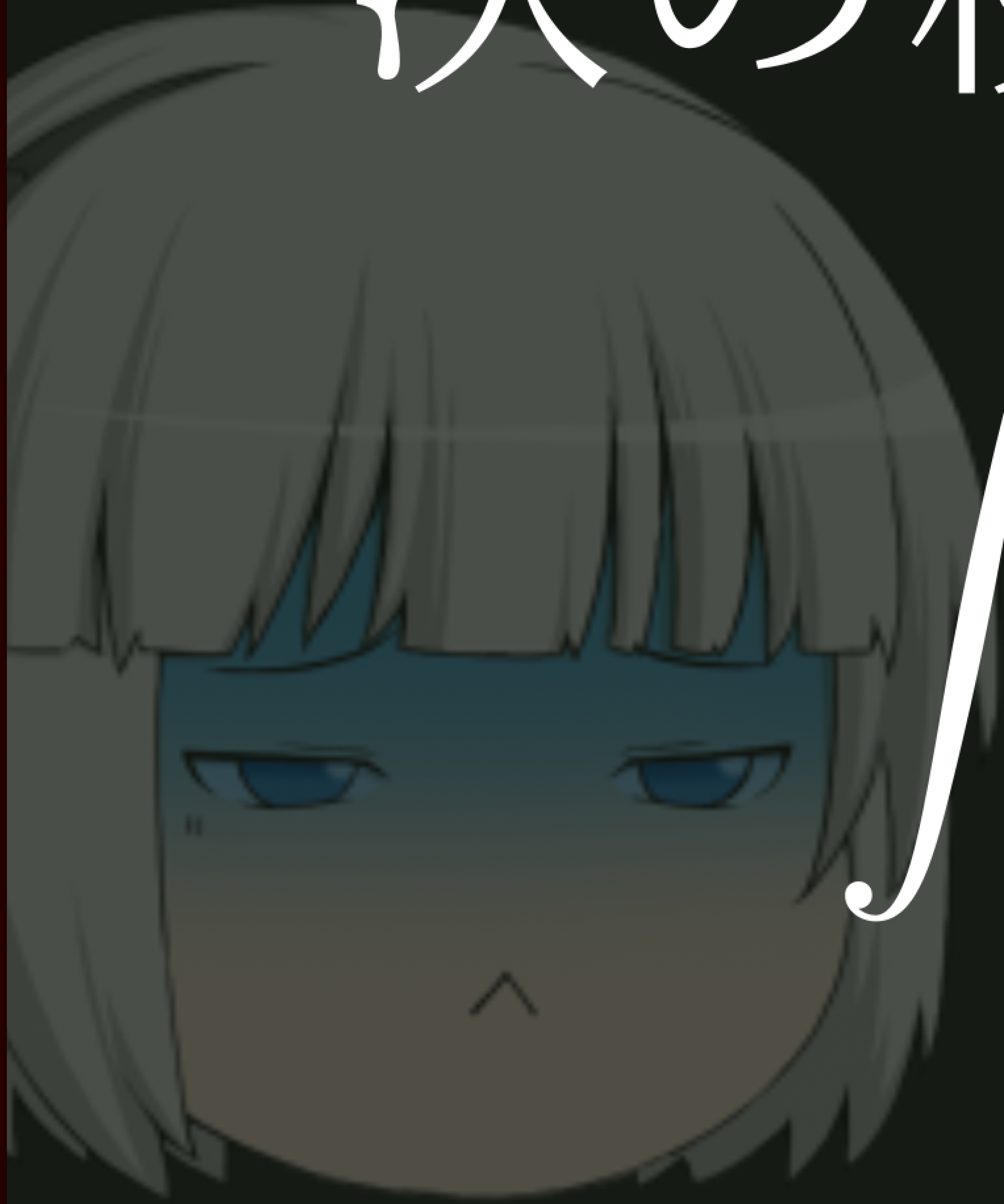
次の積分を計算せよ。



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

説明

無限区間(有界でない区間)の積分は
広義でないリーマン積分の範囲では定義されない。

$\mathbb{R}$ 上で連続な関数fと有限な実数mに対して、
$(-\infty,\infty)$ における積分を次のように定義する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_{m}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

右辺の極限がそれぞれ収束するとき、
右辺を広義積分の値と定める。

解答（0）

$$\begin{aligned}\int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \Big[\tan^{-1}(x)\Big]_{0}^{t} \\ &= \tan^{-1}(t) \\ &\to \frac{\pi}{2} \quad (t\to\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{b}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \Big[\tan^{-1}(x)\Big]_{b}^{0} \\ &= -\tan^{-1}(b) \\ &\to \frac{\pi}{2} \quad (b\to-\infty)\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答（1）

二つの極限がそれぞれ収束したことにより、

与えられた積分の値は定まり、次の結論を得る。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi
\end{aligned}$$

結論

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$

補足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$$ と

定義しない理由

より一般に、 $\lim_{L\to\infty} a(L) = -\infty,\ \lim_{L\to\infty} b(L) = \infty$

なるa,b二つを用いて無限区間の積分を表さない。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{L\to\infty}\int_{a(L)}^{b(L)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_{m}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

例えば、次のような積分を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{2L} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty$$

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-2L}^{L} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = -\infty$$

上記のように、aとbの与え方によって

収束か発散かの振る舞いすら変わってしまう。

従って、上端と下端の無限大は別々に極限を

取ることが妥当だと判断できる。