



実数 x の不等式

$$|3x^2 + 7x - 6| > 2x + 6$$

次の不等式を満たす実数 x を全て答えよ。

$$|3x^2 + 7x - 6| > 2x + 6$$

解答1

$3x^2 + 7x - 6$ の正負によって場合分けをする。

$3x^2 + 7x - 6 = (3x - 2)(x + 3)$ であるので、

$$3x^2 + 7x - 6 \geq 0 \iff (x \leq -3) \vee \left(x \geq \frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2 + 7x - 6 < 0 \iff -3 < x < \frac{2}{3}$$

$x \leq -3$ または $x \geq \frac{2}{3}$ の場合

$$3x^2 + 7x - 6 > 2x + 6$$

$$3x^2 + 5x - 12 > 0$$

$$(3x - 4)(x + 3) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ または } x > \frac{4}{3}$$

$-3 < x < \frac{2}{3}$ の場合

$$-(3x^2 + 7x - 6) > 2x + 6$$

$$3x^2 + 9x < 0$$

$$x(x + 3) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 0$$

次の不等式を満たす実数 x を全て答えよ。

$$|3x^2 + 7x - 6| > 2x + 6$$

解答2

符号関数 sgn を用いて整理する。

【符号関数】

符号関数 $\text{sgn}(x)$ は実数 x の符号を返す。

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

また、0でない x に対して、次が成り立つ。

$$\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$|3x^2 + 7x - 6| > 2x + 6$$

$$\iff |3x - 2||x + 3| > 2(x + 3)$$

$$\iff |3x - 2| > 2 \cdot \frac{x + 3}{|x + 3|} \quad (\because x \neq -3)$$

$$\iff |3x - 2| > 2 \text{sgn}(x + 3)$$

$x < -3$ の場合

$|3x - 2| > 0$ に対して $\text{sgn}(x + 3) < 0$ なので成立。

$x > -3$ の場合

$$|3x - 2| > 2$$

$$\iff (3x - 2 > 2) \vee (3x - 2 < -2)$$

$$\iff \left(x > \frac{4}{3}\right) \vee (x < 0)$$

$$\therefore -3 < x < 0 \text{ または } x > \frac{4}{3}$$

次の不等式を満たす実数 x を全て答えよ。

$$|3x^2 + 7x - 6| > 2x + 6$$

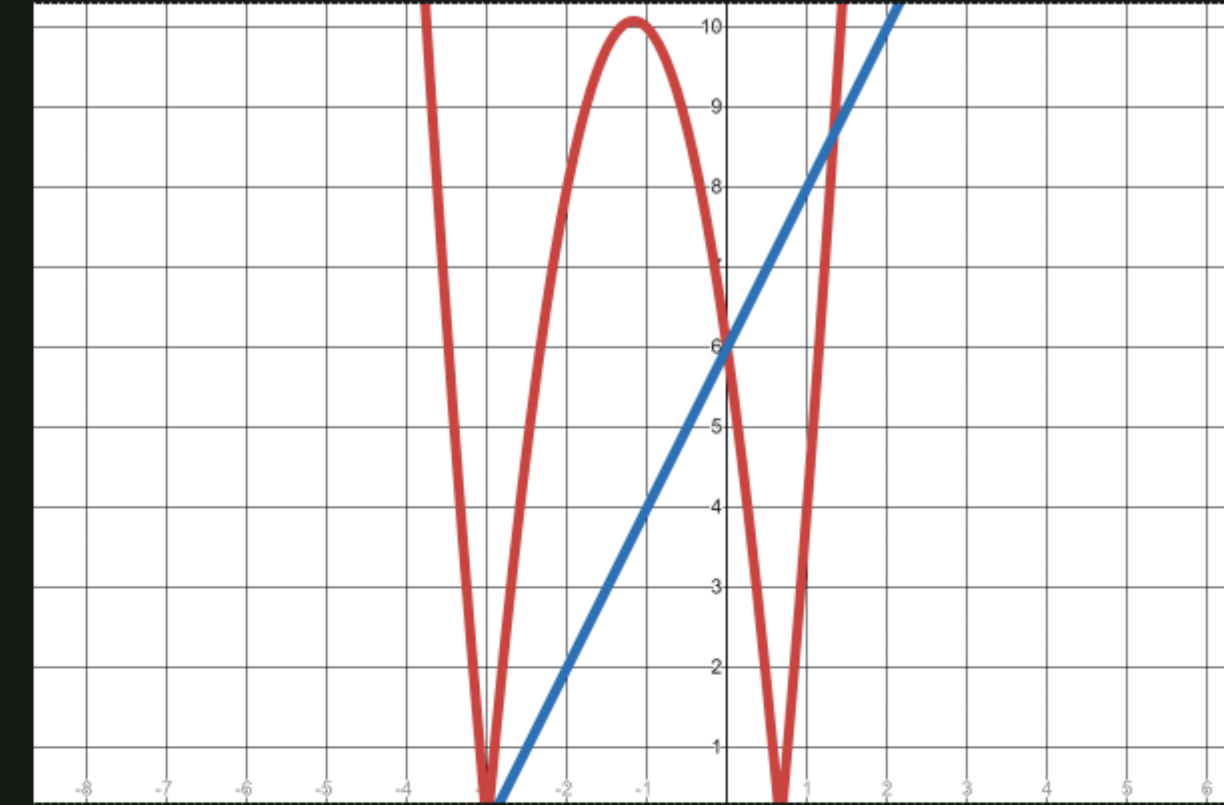
結論

$$\exists x \in \mathbb{R}; |3x^2 + 7x - 6| > 2x + 6$$

$$\iff (x < -3) \vee (-3 < x < 0) \vee \left(x > \frac{4}{3}\right)$$

$$\iff x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$$

グラフ



$$y = |3x^2 + 7x - 6|$$

$$y = 2x + 6$$