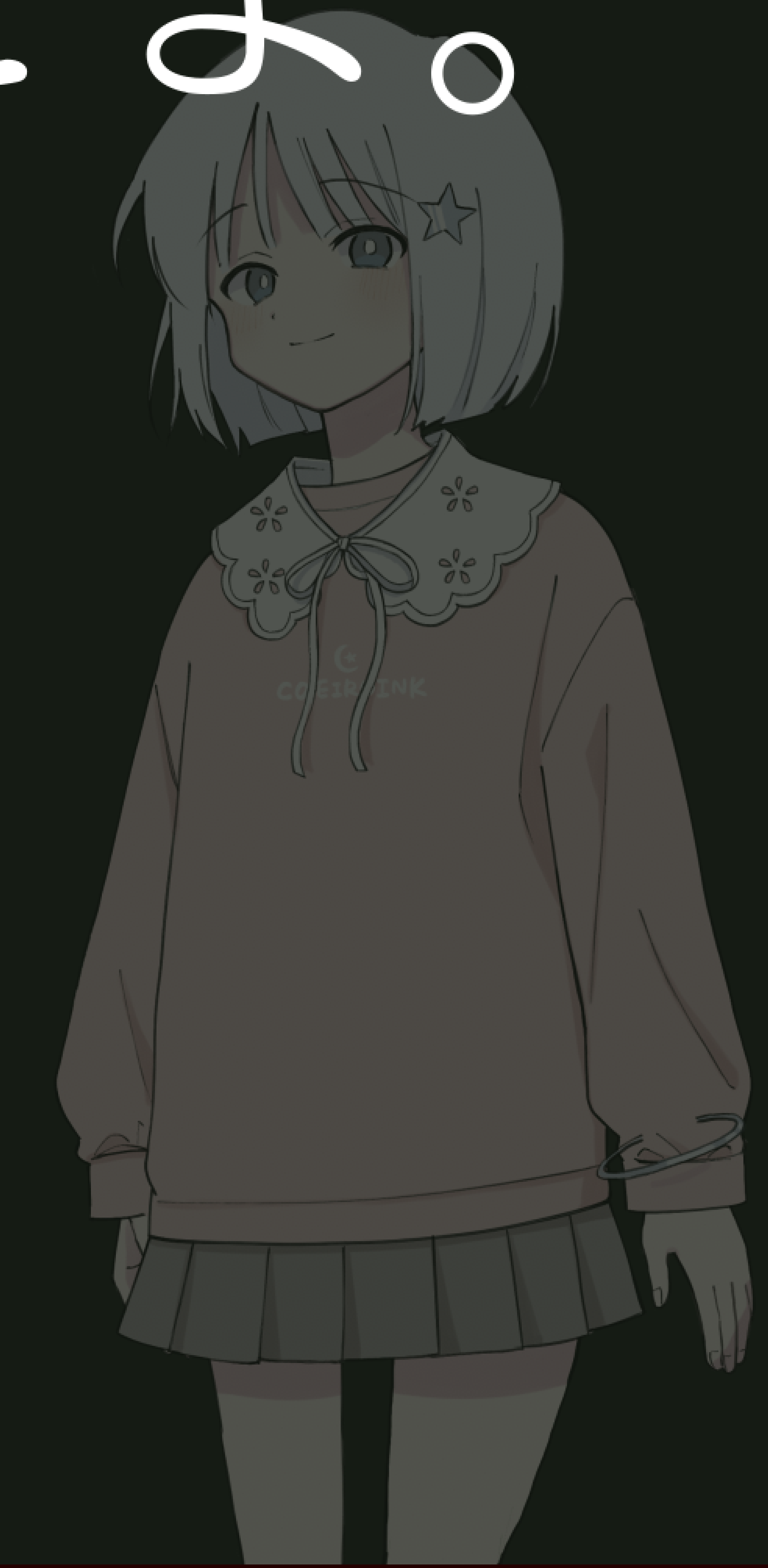
次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x$$



次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

解答

与えられた積分に対して次のような置換を行う。

$$s = 1 - x$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 -\frac{\ln(1-s)}{s}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \frac{s^{n-1}}{n} &\le -\frac{\ln(1-s)}{s} \quad (m \ge 1) \\ &\le \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{1-s}}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{1-s}}\,\mathrm{d}s = \pi$ であるから、

優収束定理より次の関係が従う。

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{s^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}s$$

故に与えられた積分は次のように表せる。

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

補足

【ルベーグの収束定理(優収束定理)】

$\{f_n\}$ を測度空間 (S, Σ, μ) 上の可測関数の列とする。この列はある関数fに各点収束し、任意のnおよび $x \in S$ に対して $|f_n(x)| \leq G(x)$ を満たす関数Gが存在するものとする。

このとき、次の関係が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} \int_S f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_S f \, \mathrm{d}\mu$$

【バーゼル問題】

自然数の平方の逆数の和の値を問う問題。

既に値は得られ、証明もされている。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

正弦関数のテイラー展開と無限乗積展開を用いて係数を比較する方法や、

フーリエ級数展開を用いた方法が良く知られる。