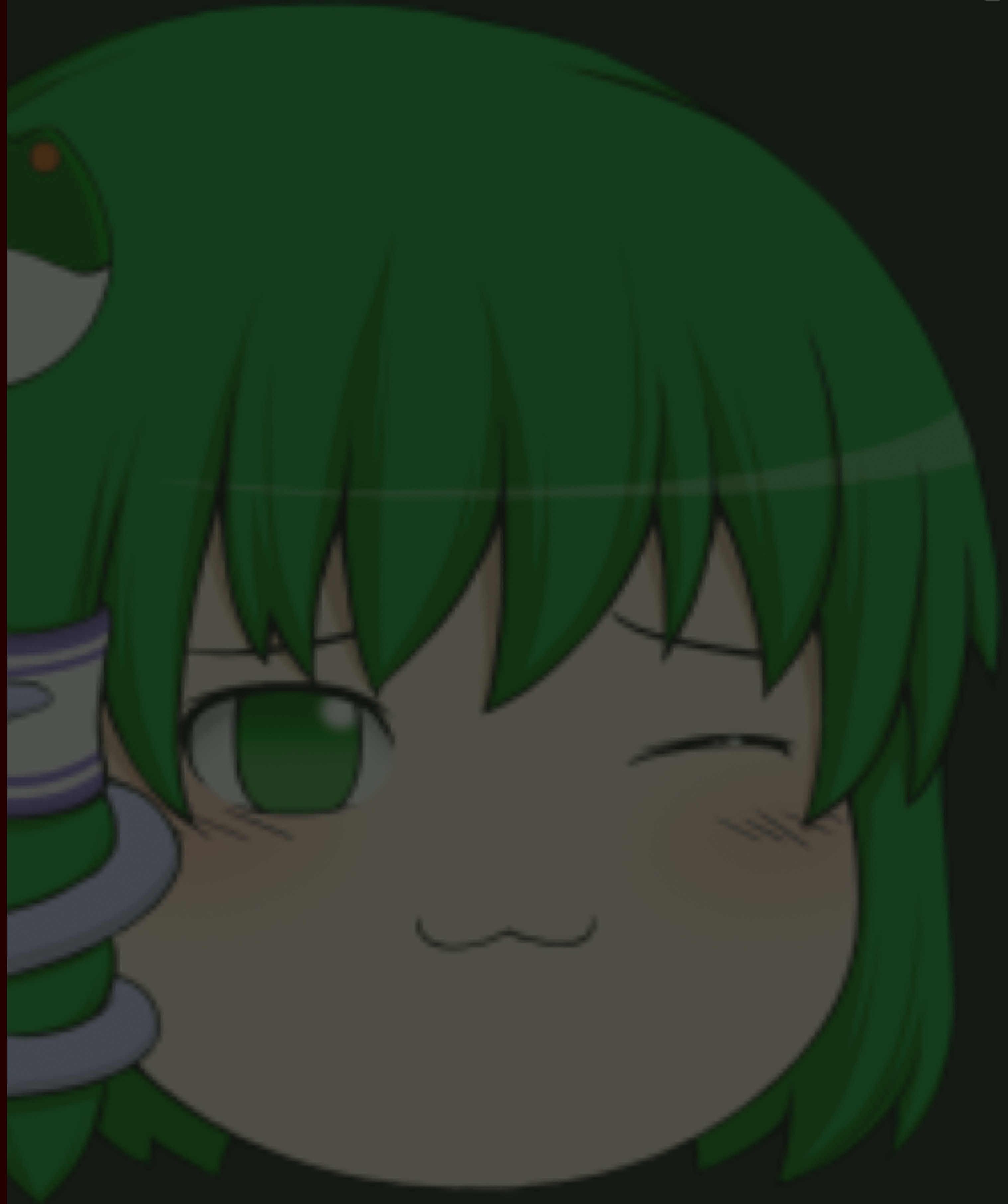
次の極限を計算せよ。



$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$$

解答I

実数 a, b の下で、関数 f を次のように定める。

$$f(x) = (ax+b)2^{-x}$$

f が任意の正整数 n に対して

$n2^{-n} = f(n) - f(n-1)$ を満たすとする。

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{a+b}{2} - b, & n=1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{2} = \frac{2a+b}{4} - \frac{a+b}{2}, & n=2 \text{ のとき} \end{cases}$$

a, b はこれを満たすので、$(a,b) = (-1,-2)$ である。

従って、$f(x) = -(x+2)2^{-x}$だとわかる。

以上から、与えられた積分は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n2^{-n} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (f(n) - f(n-1)) \\ &= \lim_{N\to\infty} (f(N) - f(0)) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(-(N+2)2^{-N} + 2\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

次の極限を計算せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$$

解答2

$f:(-2,2)\to\mathbb{R}$ を写像とし、次のように定める。

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x^n$$

このとき、f は次のようにも表せる。

$$f(x)=\frac{x}{2-x}$$

従って、次が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x^n=\frac{x}{2-x}$$

ここで両辺を微分すると、次が成り立つ。
(無限和と微分の交換は一様収束性から。)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}x^{n-1}=\frac{2}{(2-x)^2}$$

ここで、$x=1$ とすると結論が従う。

結論

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}=2$$