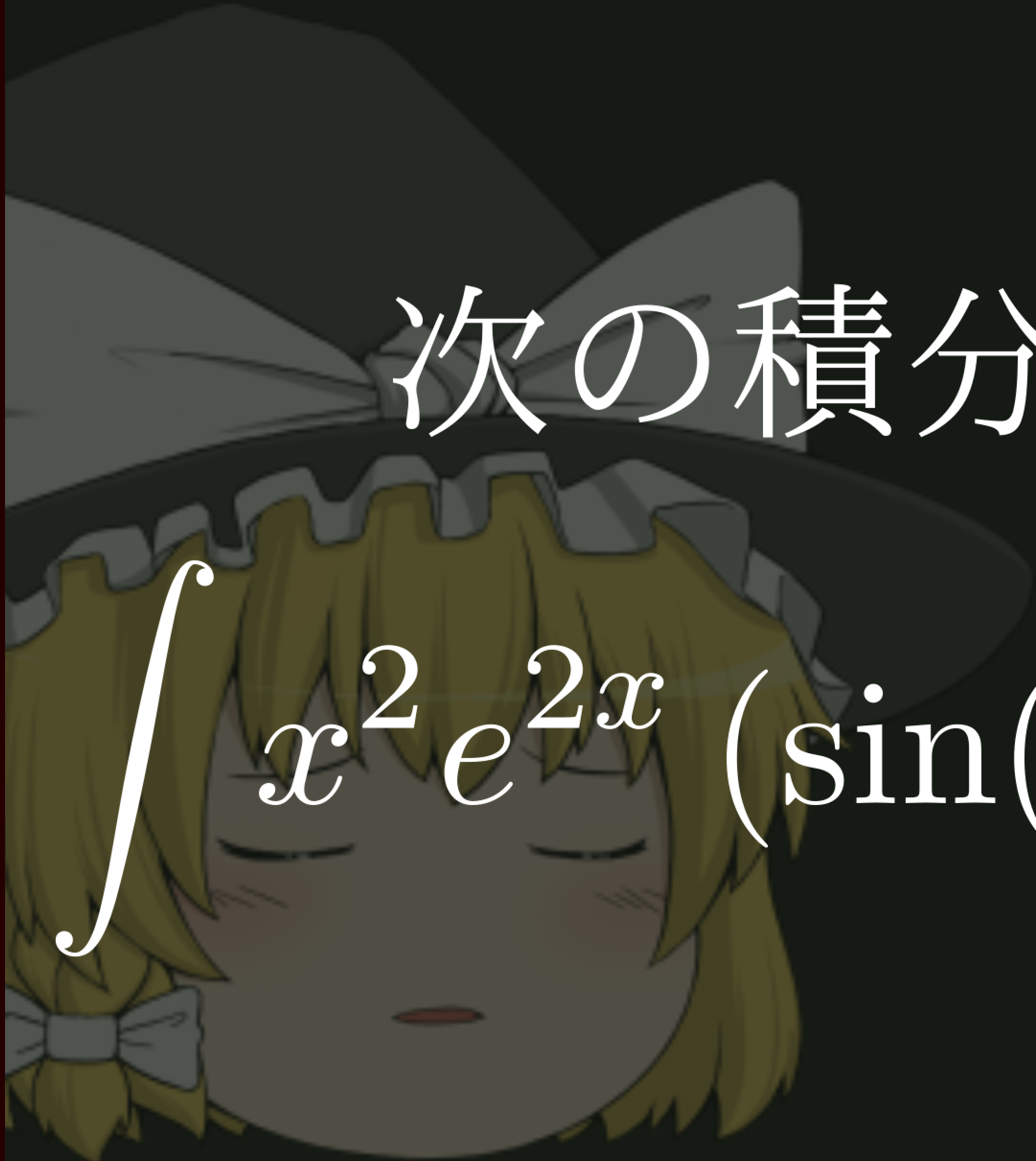

次の積分を計算せよ。

$$\int x^2 e^{2x} \left(\sin(x)\right)^2 \left(\cos(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^2 e^{2x} \left(\sin(x)\right)^2 \left(\cos(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

解答（0）

$$\begin{aligned}
&\int x^2 e^{2x} \left(\sin(x)\right)^2 \left(\cos(x)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \int x^2 e^{2x} \left(\sin(2x)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8} \int x^2 e^{2x} (1 - \cos(4x)) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(x^n\right)}{\mathrm{d}x} = n x^{n-1} \qquad \frac{\mathrm{d}\left(\cos(4x)\right)}{\mathrm{d}x} = -4\sin(4x)$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{2x}\right)}{\mathrm{d}x} = 2e^{2x} \qquad \frac{\mathrm{d}\left(\sin(4x)\right)}{\mathrm{d}x} = 4\cos(4x)$$

与えられた積分は部分積分を用いて計算出来る。

$i \in \{0, 1, 2\}$ に対して $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ が存在を仮定し、次の多項式 P_i及び関数 f を定める。

$$P_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

$$f(x) = e^{2x} \left(P_0(x) + P_1(x)\cos(4x) + P_2(x)\sin(4x)\right)$$

このとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}x}(x) &= 2a_i x + b_i \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= 2f(x) + e^{2x} \frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}(x) \\
&\quad + e^{2x} \cos(4x) \left(\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}x}(x) + 4P_2(x) \right) \\
&\quad + e^{2x} \sin(4x) \left(-4P_1(x) + \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}x}(x) \right)
\end{aligned}$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^2 e^{2x} (\sin(x))^2 (\cos(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

<u>解答（I）</u>

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \dfrac{1}{8}x^2 e^{2x}(1-\cos(4x))$ が成り立つとする。
このとき、a_i, b_i, c_i は次を満たす。

$$2a_0 = \frac{1}{8}$$
$$2a_0 + 2b_0 = 0$$
$$b_0 + 2c_0 = 0$$

$$2a_1 + 4a_2 = -\frac{1}{8}$$
$$2a_1 + 2b_1 + 4b_2 = 0$$
$$b_1 + 2c_1 + 4c_2 = 0$$

$$-4a_1 + 2a_2 = 0$$
$$-4b_1 + 2a_2 + 2b_2 = 0$$
$$-4c_1 + b_2 + 2c_2 = 0$$

適当に計算をすると値を得られる。
$(a_0, b_0, c_0) \to (a_1, a_2) \to (b_1, b_2) \to (c_1, c_2)$ の順で調べると、複雑な計算は不要なので省略。

$$(a_0, b_0, c_0,) = \left(\frac{1}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32},\right)$$
$$(a_1, b_1, c_1,) = \left(-\frac{1}{80}, -\frac{3}{400}, \frac{11}{4000},\right)$$
$$(a_2, b_2, c_2,) = \left(-\frac{1}{40}, \frac{1}{100}, \frac{1}{2000},\right)$$

次の積分を計算せよ。

$$\int x^2 e^{2x} \left(\sin(x)\right)^2 \left(\cos(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

解答（2）

$$f(x) = \frac{1}{4000} e^{2x} \Bigg(125\left(2x^2 - 2x + 1\right) - \cos(4x)\left(50x^2 + 30x - 11\right) - 2\sin(4x)\left(50x^2 - 20x - 1\right) \Bigg)$$

以上から、上記の f に対して次が成り立つ。

$$\int x^2 e^{2x} \left(\sin(x)\right)^2 \left(\cos(x)\right)^2 \mathrm{d}x = f(x) + \mathrm{C}$$

結論

省略(左を参照)