次の積分を計算せよ。

$$\int (\ln(x))^n \, \mathrm{d}x \qquad (n \in \mathrm{N})$$

次の積分を計算せよ。

$$\int (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathrm{N})$$

解答

$$\int (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x = (\ln(x))^n \cdot x - \int \mathrm{d}\left((\ln(x))^n\right) \cdot x$$
$$= x\,(\ln(x))^n - n \int (\ln(x))^{n-1} \,\mathrm{d}x$$

$I_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\int (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$ とする。

$$I_0 = \frac{(-1)^0}{0!} \int (\ln(x))^0 \,\mathrm{d}x$$
$$= \int \mathrm{d}x$$
$$= x + \mathrm{C}$$

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!} x\,(\ln(x))^n + I_{n-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x\,(\ln(x))^k + I_0$$
$$= x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (\ln(x))^k \quad (I_0 = x)$$

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x = x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (\ln(x))^k$$
$$\int (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x = x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (\ln(x))^k$$

結論

$$\int (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x = x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (\ln(x))^k + \mathrm{C}$$