

# 求解一类双线性规划问题的数值算法

答辩人: 胡雨宽

导 师: 殷俊锋 教授

同济大学数学科学学院

2019.6.4



# 提纲

- ① 引言
- ② 最优性条件
- ③ 算法设计
- ④ 收敛性分析
- ⑤ 数值实验
- ⑥ 总结

# 提纲

- 1 引言
- 2 最优性条件
- 3 算法设计
- 4 收敛性分析
- 5 数值实验
- 6 总结

# 问题背景

最优运输问题 (Villani '08):

- 建立有效比较概率分布的几何工具.
- 极小化将一概率分布“运输”到另一概率分布的“花费”.

## Monge 问题

令  $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ .  $f$  为  $P$  上的概率密度函数,  $g$  为  $Q$  上的概率密度函数.  
 $c: P \times Q \rightarrow [0, \infty)$  为连续函数. Monge 问题

$$\inf_T M(T) := \int_P c(p, T(p)) f(p) \, dp, \quad \text{s.t. } T\#f = g.$$

其中  $T\#f = g$  定义为

$$\int_B g(q) \, dq = \int_{T^{-1}(B)} f(p) \, dp, \quad \forall B \subset Q,$$

$c$  可以看做是成本泛函.

# 问题背景 (续)

当  $f, g$  为离散概率分布函数:

- $P = \{p_1, \dots, p_m\}, Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ .
- $\{f_1, \dots, f_m\}, \{g_1, \dots, g_n\}$ .

$$\begin{aligned} \min_{a_{ij}} \quad & \sum_{i,j} c_{ij} a_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j a_{ij} = f_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_i a_{ij} = g_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & a_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (\text{LP})$$

这里  $c_{ij} := c(p_i, q_j)$ .

# 问题陈述

$$\begin{aligned}
 \min_{X, Y} \quad & \sum_{i \neq j} \frac{x_{ij}}{|r_i - r_j|} + \sum_{i \neq k} \frac{y_{ik}}{|r_i - r_k|} + \sum_{i, j, k: j \neq k} \frac{x_{ij} y_{ik}}{|r_j - r_k|} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_j x_{ij} = \rho_i, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_i x_{ij} = \rho_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_k y_{ik} = \rho_i, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_i y_{ik} = \rho_k, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & x_{ij}, y_{ik} \geq 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \\
 & x_{ii}, y_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $r = (r_1, \dots, r_n)^T$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ . 将  $\{|r_i - r_j|\}$  储存于  $R = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1/|r_i - r_j|, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

# 研究现状

角度 1 可分离约束的双线性规划. 广泛的应用 (Konno '71等).

已有方法:

- 割平面法 (Ritter '66等).
- 分支定界法 (Falk '73等).

角度 2 非凸二次规划.

已有方法 (Nocedal/Wright '06):

- 逐步二次规划 (SQP).
- 积极集法 (Active-set Methods).
- 内点法 (Interior-point Methods).
- ...

# 研究现状

角度 1 可分离约束的双线性规划. 广泛的应用 (Konno '71等).

已有方法:

- 割平面法 (Ritter '66等).
- 分支定界法 (Falk '73等).

角度 2 非凸二次规划.

已有方法 (Nocedal/Wright '06):

- 逐步二次规划 (SQP).
- 积极集法 (Active-set Methods).
- 内点法 (Interior-point Methods).
- ...

以上方法均以列向量为求解对象  $\Rightarrow$  计算量问题.



# 预备知识

## 标准矩阵内积

对  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 定义

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

求导规则:

$$\frac{d}{dA} \langle A, B \rangle = B, \quad \frac{d}{dB} \langle A, B \rangle = A.$$

# 预备知识

## 标准矩阵内积

对  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 定义

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

求导规则:

$$\frac{d}{dA} \langle A, B \rangle = B, \quad \frac{d}{dB} \langle A, B \rangle = A.$$

问题(1)即可化为矩阵形式:

$$\begin{aligned} \min_{X, Y} \quad & \langle R, X \rangle + \langle R, Y \rangle + \langle Y, XR \rangle \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X) = 0, X \geq 0, \\ & Y\mathbf{1} = \rho, Y^T\mathbf{1} = \rho, \text{tr}(Y) = 0, Y \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

其中  $\mathbf{1}$  为全 1 向量.

# 预备知识 (续)

实验表明 ...

假设

问题(2)的所有稳定点  $(X, Y)$  均满足  $X = Y$ .

## 预备知识 (续)

实验表明 ...

假设

问题(2)的所有稳定点  $(X, Y)$  均满足  $X = Y$ .

⇒ 简化问题:

$$\begin{array}{ll} \min_X & 2\langle X, R \rangle + \langle X, XR \rangle \\ \text{s.t.} & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X) = 0, X \geq 0. \end{array} \quad (3)$$

# 预备知识 (续)

实验表明 ...

假设

问题(2)的所有稳定点  $(X, Y)$  均满足  $X = Y$ .

⇒ 简化问题:

$$\begin{aligned} \min_X \quad & 2\langle X, R \rangle + \langle X, XR \rangle \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X) = 0, X \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

引入分裂变量  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 进一步得到等价的

$$\begin{aligned} \min_{X, Z} \quad & f(X, Z) \triangleq 2\langle X, R \rangle + \langle Z, XR \rangle \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X) = 0, \\ & Z^T\mathbf{1} = \rho, Z \geq 0, \\ & X = Z. \end{aligned} \quad (4)$$

之后重点求解问题(4).

# 提纲

- 1 引言
- 2 最优性条件
- 3 算法设计
- 4 收敛性分析
- 5 数值实验
- 6 总结

# 最优性条件

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(X, Z, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \Phi, \Omega) = & f(X, Z) - \langle \lambda_1, X\mathbf{1} - \rho \rangle - \langle \lambda_2, Z^T\mathbf{1} - \rho \rangle \\ & - \mu \text{tr}(X) - \langle \Omega, Z \rangle - \langle \Phi, X - Z \rangle.\end{aligned}$$

# 最优性条件

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(X, Z, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \Phi, \Omega) = & f(X, Z) - \langle \lambda_1, X\mathbf{1} - \rho \rangle - \langle \lambda_2, Z^T\mathbf{1} - \rho \rangle \\ & - \mu \text{tr}(X) - \langle \Omega, Z \rangle - \langle \Phi, X - Z \rangle.\end{aligned}$$

## 问题(4)的 KKT 条件

若  $(X^*, Z^*)$  为问题(4)的解, 则存在拉格朗日乘子  $\mu^* \in \mathbb{R}, \lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}^n, \Phi^*, 0 \leq \Omega^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 使得

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_X \mathcal{L}_0 = 2R + Z^* R - \lambda_1^* \mathbf{1}^T - \Phi^* - \mu^* I = 0, \\ \nabla_Z \mathcal{L}_0 = X^* R - \mathbf{1} (\lambda_2^*)^T + \Phi^* - \Omega^* = 0, \\ X^* \mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X^*) = 0, \\ (Z^*)^T \mathbf{1} = \rho, Z^* \geq 0, \\ \Omega^* \geq 0, \\ \Omega^* \circ Z^* = 0. \end{array} \right\}$$

稳定性条件

或对偶可行性条件

原始可行性条件,

互补松弛条件.

(5)

这里 “ $\circ$ ” 表示 Hadamard 积.



# 提纲

- 1 引言
- 2 最优性条件
- 3 算法设计**
- 4 收敛性分析
- 5 数值实验
- 6 总结

# ADMM 算法简介

ADMM 算法 (介绍可见 [Boyd, et al. '10](#)) 求解问题一般形式:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & \theta(x) := \sum_{i=1}^n \theta_i(x_i) + \ell(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n A_i x_i = b, \end{aligned} \tag{6}$$

这里  $\theta_i: \mathbb{R}^{d_i} \mapsto (-\infty, +\infty]$ ,  $\ell: \mathbb{R}^d \mapsto (-\infty, +\infty]$ ;  $x_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ ;  $A_i \in \mathbb{R}^{m \times d_i}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . 问题(6)的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A(x_1, \dots, x_n, \bar{\mu}) = & \sum_{i=1}^n \theta_i(x_i) + \ell(x_1, \dots, x_n) \\ & - \bar{\mu}^T \left( \sum_{i=1}^n A_i x_i - b \right) + \frac{\bar{\beta}}{2} \left\| \sum_{i=1}^n A_i x_i - b \right\|^2, \end{aligned} \tag{7}$$

其中  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m$  为拉格朗日乘子,  $\bar{\beta} > 0$  为惩罚因子.

# ADMM 算法简介 (续)

---

## 算法 1 $n$ 块 ADMM 算法

---

输入:  $x_2^0, \dots, x_n^0, \bar{\mu}^0, k := 0$ .

输出:  $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k, \bar{\mu}^k$ .

1: **while** 收敛性测试未通过 **do**

2:  $x_1^{k+1} := \arg \min_{x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}} \mathcal{L}_A(x_1, \dots, x_n^k, \bar{\mu}^k);$

3:  $\dots\dots\dots$

4:  $x_n^{k+1} := \arg \min_{x_n \in \mathbb{R}^{d_n}} \mathcal{L}_A(x_1^{k+1}, \dots, x_n, \bar{\mu}^k);$

5:  $\bar{\mu}^{k+1} := \bar{\mu}^k - \bar{\beta} \left( \sum_{i=1}^n A_i x_i^{k+1} - b \right);$

6:  $k := k + 1;$

7: **end while**

---

# ADMM 算法简介 (续)

现有工作简介:

- 两块凸可分问题 (Boyd, et al. '10, He/Yuan '12等):  $n = 2, \ell = 0$ ,  $\theta_1, \theta_2$  是凸函数.
- 多块凸可分问题 (He/Tao/Yuan '12, Cai/Han/Yuan '17等):  $n \geq 3, \ell = 0$ ,  $\theta_1, \dots, \theta_n$  是凸函数. 可能发散 (Chen, et al. '16).  
 $\Rightarrow$  无假设的困境.

# ADMM 算法简介 (续)

现有工作简介:

- 两块凸可分问题 (Boyd, et al. '10, He/Yuan '12等):  $n = 2, \ell = 0$ ,  $\theta_1, \theta_2$  是凸函数.
- 多块凸可分问题 (He/Tao/Yuan '12, Cai/Han/Yuan '17等):  $n \geq 3, \ell = 0$ ,  $\theta_1, \dots, \theta_n$  是凸函数. 可能发散 (Chen, et al. '16).  
 $\Rightarrow$  无假设的困境.
- 凸不可分问题 (Hong, et al. '14, Chen, et al. '19). 即使  $n = 2, \theta(\cdot)$  凸, 仍然开放 (Hong/Luo/Razaviyayn '16).

# ADMM 算法简介 (续)

现有工作简介:

- 两块凸可分问题 (Boyd, et al. '10, He/Yuan '12等):  $n = 2, \ell = 0$ ,  $\theta_1, \theta_2$  是凸函数.
- 多块凸可分问题 (He/Tao/Yuan '12, Cai/Han/Yuan '17等):  $n \geq 3, \ell = 0$ ,  $\theta_1, \dots, \theta_n$  是凸函数. 可能发散 (Chen, et al. '16).  
 $\Rightarrow$  无假设的困境.
- 凸不可分问题 (Hong, et al. '14, Chen, et al. '19). 即使  $n = 2, \theta(\cdot)$  凸, 仍然开放 (Hong/Luo/Razaviyayn '16).
- 非凸问题. 理论缺乏, 应用广泛.
  - Wen, et al. '13等: 需要强加无法验证的条件.
  - Hong/Luo/Razaviyayn '16: 只需要  $\theta_i$ 's 和  $\ell$  满足合理的正则条件, 且  $\bar{\beta}$  充分大.

# ADMM 算法简介 (续)

$$\mathcal{L}_A(X, Z, \Phi) = f(X, Z) - \langle \Phi, X - Z \rangle + \frac{\beta}{2} \|X - Z\|_F^2. \quad (8)$$

---

## 框架 2 求解问题 (4) 的 ADMM 算法框架

---

输入:  $X^0, Z^0, \Phi^0, \beta^0, k := 0$ .

输出:  $X^k, Z^k, \Phi^k$ .

1: **while** 收敛性测试未通过 **do**

2:  $X^{k+1} = \arg \min_{X: X\mathbf{1}=\rho, \text{tr}(X)=0} \mathcal{L}_A(X, Z^k, \Phi^k);$

3:  $Z^{k+1} = \arg \min_{Z: Z^T\mathbf{1}=\rho, Z \geq 0} \mathcal{L}_A(X^{k+1}, Z, \Phi^k);$

4: 更新  $\Phi^k$  得到  $\Phi^{k+1};$

5: 如有需要, 更新  $\beta^k$  得到  $\beta^{k+1};$

6:  $k := k + 1;$

7: **end while**

---

# 子问题的求解 - $X$ 子问题

省去上标  $k$ , 改用 ‘+’ 标记更新值.

$$\begin{aligned} \min_X \quad & 2\langle X, R \rangle + \langle Z, XR \rangle - \langle \Phi, X - Z \rangle + \frac{\beta}{2} \|X - Z\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, \quad \text{tr}(X) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

带等式约束的凸二次规划



# 子问题的求解 - $X$ 子问题

省去上标  $k$ , 改用 ‘+’ 标记更新值.

$$\begin{aligned} \min_X \quad & 2\langle X, R \rangle + \langle Z, XR \rangle - \langle \Phi, X - Z \rangle + \frac{\beta}{2} \|X - Z\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, \quad \text{tr}(X) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

带等式约束的凸二次规划  $\Rightarrow$  拉格朗日乘数法.

$$\beta X + (2R + ZR - \lambda_1 \mathbf{1}^T - \mu I - \Phi - \beta Z) = 0, \quad (10a)$$

$$-\text{tr}(X) = 0, \quad (10b)$$

$$-(X\mathbf{1} - \rho) = 0. \quad (10c)$$

# 子问题的求解 - $X$ 子问题 (续)

由(10a),

$$X^+ = -\frac{1}{\beta}(2R + ZR - \lambda_1 \mathbf{1}^T - \mu I - \Phi - \beta Z). \quad (11)$$

由(11)和(10b),(10c), 令

$$\begin{aligned} M_1 &= 2R\mathbf{1} + ZR\mathbf{1} - \Phi\mathbf{1} - \beta Z\mathbf{1} + \beta\rho, \\ m_1 &= 2\text{tr}(R) + \text{tr}(ZR) - \text{tr}(\Phi) - \beta\text{tr}(Z). \end{aligned}$$

乘子为

$$\mu = \frac{1}{n-1} \left( -\frac{1}{n} \mathbf{1}^T M_1 + m_1 \right), \quad \lambda_1 = \frac{1}{n} (M_1 - \mathbf{1}\mu). \quad (12)$$

(12)和(11)给出  $X$  子问题(9)的解  $X^+$ .

# 子问题的求解 - $Z$ 子问题

$$\begin{aligned} \min_Z \quad & \langle Z, X^+ R \rangle - \langle \Phi, X^+ - Z \rangle + \frac{\beta}{2} \|X^+ - Z\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T \mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

同样是凸二次规划, 但是有不等式约束.

# 子问题的求解 - $Z$ 子问题

$$\begin{aligned} \min_Z \quad & \langle Z, X^+ R \rangle - \langle \Phi, X^+ - Z \rangle + \frac{\beta}{2} \|X^+ - Z\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T \mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

同样是凸二次规划, 但是有不等式约束. `quadprog()`?

# 子问题的求解 - $Z$ 子问题

$$\begin{aligned} \min_Z \quad & \langle Z, X^+ R \rangle - \langle \Phi, X^+ - Z \rangle + \frac{\beta}{2} \|X^+ - Z\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T \mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

同样是凸二次规划, 但是有不等式约束. quadprog()?

忽略非负约束, 类似  $X$  子问题求超平面  $Z^T \mathbf{1} = \rho$  上的一点  $\tilde{Z}$ :

$$\lambda_2 = \frac{1}{n} \left[ R(X^+)^T \mathbf{1} + \Phi^T \mathbf{1} - \beta (X^+)^T \mathbf{1} + \beta \rho \right],$$

$$\tilde{Z} = \frac{1}{\beta} (X^+ R + \Phi - \beta X^+ - \mathbf{1} \lambda_2^T).$$

# 子问题的求解 - $Z$ 子问题 (续)

问题(13)的等价形式:

$$\begin{array}{ll} \min_Z & \|Z - \tilde{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t.} & Z^T \mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{array}$$

# 子问题的求解 - $Z$ 子问题 (续)

问题(13)的等价形式:

$$\begin{aligned} \min_Z \quad & \|Z - \tilde{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T \mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{aligned}$$

分块

$$Z = [z_1, \dots, z_n], \quad \tilde{Z} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n].$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \min_{z_1, \dots, z_n} \quad & \sum_{j=1}^n \|z_j - \tilde{z}_j\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^T z_j = \rho_j, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{14}$$

$\text{quadprog}() \Rightarrow Z^+$ .

子问题的求解 -  $Z$  子问题 (续)

问题(13)的等价形式:

$$\begin{aligned} \min_Z \quad & \|Z - \tilde{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T \mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{aligned}$$

分块

$$Z = [z_1, \dots, z_n], \quad \tilde{Z} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n].$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \min_{z_1, \dots, z_n} \quad & \sum_{j=1}^n \|z_j - \tilde{z}_j\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^T z_j = \rho_j, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

$\text{quadprog}() \Rightarrow Z^+$ .

注

若未恰当引入分裂变量  $Z$ , 子问题求解难度不言而喻.



# 拉格朗日乘子的更新

对一般的等式约束非线性优化问题

$$\begin{array}{ll}\min_x & \bar{f}(x) \\ \text{s.t.} & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E},\end{array}$$

增广拉格朗日函数法 ( $\gamma^k$  是惩罚因子):

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \gamma^k c_i(x^k), \quad \forall i \in \mathcal{E}.$$

# 拉格朗日乘子的更新

对一般的等式约束非线性优化问题

$$\begin{array}{ll}\min_x & \bar{f}(x) \\ \text{s.t.} & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E},\end{array}$$

增广拉格朗日函数法 ( $\gamma^k$  是惩罚因子):

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \gamma^k c_i(x^k), \quad \forall i \in \mathcal{E}.$$

因此我们的拉格朗日乘子更新策略可选为

$$\Phi^+ = \Phi - \beta(X^+ - Z^+). \quad (15)$$

若带松弛因子  $\alpha > 0$ , 则

$$\Phi^+ = \Phi - \alpha\beta(X^+ - Z^+). \quad (16)$$

# 停机准则与 KKT 违反度

对  $X$  子问题:

$$X^{k+1} = \arg \min_{X: X\mathbf{1}=\rho, \text{tr}(X)=0} \mathcal{L}_A(X, Z^k, \Phi^k)$$

$\Rightarrow \exists \lambda_1^{k+1}, \mu^{k+1}$  使得

$$2R + Z^k R - \Phi^k + \beta(X^{k+1} - Z^k) - \lambda_1^{k+1} \mathbf{1}^T - \mu^{k+1} I = 0, \quad (17a)$$

$$X^{k+1} \mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X^{k+1}) = 0. \quad (17b)$$

# 停机准则与 KKT 违反度

对  $X$  子问题:

$$X^{k+1} = \arg \min_{X: X\mathbf{1}=\rho, \text{tr}(X)=0} \mathcal{L}_A(X, Z^k, \Phi^k)$$

$\Rightarrow \exists \lambda_1^{k+1}, \mu^{k+1}$  使得

$$2R + Z^k R - \Phi^k + \beta(X^{k+1} - Z^k) - \lambda_1^{k+1} \mathbf{1}^T - \mu^{k+1} I = 0, \quad (17a)$$

$$X^{k+1} \mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X^{k+1}) = 0. \quad (17b)$$

等式(17a),(17b)分别对应于问题(4)KKT 条件(5)中的

$$2R + Z^* R - \lambda_1^* \mathbf{1}^T - \mu^* I - \Phi^* = 0, \quad (18a)$$

$$X^* \mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X^*) = 0. \quad (18b)$$

# 停机准则与 KKT 违反度 (续)

- 使用更新策略(15):

$$\begin{aligned}
 & 2R + Z^k R - \Phi^k + \beta(X^{k+1} - Z^k) - \lambda_1^{k+1} \mathbf{1}^T - \mu^{k+1} I \\
 & = 2R + Z^{k+1} R - \Phi^{k+1} - \lambda_1^{k+1} \mathbf{1}^T - \mu^{k+1} I + \boxed{(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)},
 \end{aligned}$$

- 使用更新策略(16):

$$\begin{aligned}
 & 2R + Z^k R - \Phi^k + \beta(X^{k+1} - Z^k) - \lambda_1^{k+1} \mathbf{1}^T - \mu^{k+1} I \\
 & = 2R + Z^{k+1} R - \Phi^{k+1} - \lambda_1^{k+1} \mathbf{1}^T - \mu^{k+1} I \\
 & \quad + \boxed{(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)} + \boxed{(1 - \alpha)\beta(X^{k+1} - Z^{k+1})}.
 \end{aligned}$$

# 停机准则与 KKT 违反度 (续)

对  $Z$  子问题:

$$Z^{k+1} = \arg \min_{Z: Z^T \mathbf{1} = \rho, Z \geq 0} \mathcal{L}_A(X^{k+1}, Z, \Phi^k)$$

$\Rightarrow \exists \lambda_2^{k+1}, \Omega^{k+1} \geq 0$  使得

$$X^{k+1} R - \Phi^k - \beta(X^{k+1} - Z^{k+1}) - \mathbf{1} \left( \lambda_1^{k+1} \right)^T - \Omega^{k+1} = 0, \quad (19a)$$

$$\left( Z^{k+1} \right)^T \mathbf{1} = \rho, Z^{k+1} \geq 0, \quad (19b)$$

$$\Omega^{k+1} \geq 0, \quad (19c)$$

$$\Omega^{k+1} \circ Z^{k+1} = 0. \quad (19d)$$

## 停机准则与 KKT 违反度 (续)

$$X^{k+1}R - \Phi^k - \beta(X^{k+1} - Z^{k+1}) - \mathbf{1} \left( \lambda_1^{k+1} \right)^T - \Omega^{k+1} = 0, \quad (19a)$$

$$\left( Z^{k+1} \right)^T \mathbf{1} = \rho, Z^{k+1} \geq 0, \quad (19b)$$

$$\Omega^{k+1} \geq 0, \quad (19c)$$

$$\Omega^{k+1} \circ Z^{k+1} = 0. \quad (19d)$$

等式(19a)-(19d)分别对应于问题(4)KKT 条件(5)中的

$$X^*R - \mathbf{1} \left( \lambda_2^* \right)^T + \Phi^* - \Omega^* = 0, \quad (20a)$$

$$\left( Z^* \right)^T \mathbf{1} = \rho, Z^* \geq 0, \quad (20b)$$

$$\Omega^* \geq 0, \quad (20c)$$

$$\Omega^* \circ Z^* = 0. \quad (20d)$$

# 停机准则与 KKT 违反度 (续)

- 使用更新策略(15):

$$\begin{aligned} & X^{k+1}R - \Phi^k - \beta(X^{k+1} - Z^{k+1}) - \mathbf{1} \left( \lambda_2^{k+1} \right)^T - \Omega^{k+1} \\ &= X^{k+1}R - \Phi^{k+1} - \mathbf{1} \left( \lambda_2^{k+1} \right)^T - \Omega^{k+1}. \end{aligned}$$

- 使用更新策略(16):

$$\begin{aligned} & X^{k+1}R - \Phi^k - \beta(X^{k+1} - Z^{k+1}) - \mathbf{1} \left( \lambda_2^{k+1} \right)^T - \Omega^{k+1} \\ &= X^{k+1}R - \Phi^{k+1} - \mathbf{1} \left( \lambda_2^{k+1} \right)^T - \Omega^{k+1} - \boxed{(1 - \alpha)\beta(X^{k+1} - Z^{k+1})}. \end{aligned}$$



# 停机准则与 KKT 违反度 (续)

KKT 违反度:

$$\begin{aligned} t^{k+1} &\triangleq \|X^{k+1} - Z^{k+1}\|_{\infty} && \text{原始残差,} \\ s^{k+1} &\triangleq \|(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)\|_{\infty} && \text{对偶残差.} \end{aligned} \quad (21)$$

# 停机准则与 KKT 违反度 (续)

KKT 违反度:

$$\begin{aligned} t^{k+1} &\triangleq \|X^{k+1} - Z^{k+1}\|_{\infty} && \text{原始残差,} \\ s^{k+1} &\triangleq \|(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)\|_{\infty} && \text{对偶残差.} \end{aligned} \quad (21)$$

停机准则:

情形 1  $t^{k+1}, s^{k+1}$  都足够小;

情形 2 对某个  $p^{k+1} \in (0, 1)$ ,  $p^{k+1}s^{k+1} + (1 - p^{k+1})t^{k+1}$  足够小. 其中  $p^{k+1}$  反映了我们主观上对两类残差所赋的权值.

# 停机准则与 KKT 违反度 (续)

KKT 违反度:

$$\begin{aligned} t^{k+1} &\triangleq \|X^{k+1} - Z^{k+1}\|_{\infty} && \text{原始残差,} \\ s^{k+1} &\triangleq \|(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)\|_{\infty} && \text{对偶残差.} \end{aligned} \quad (21)$$

停机准则:

情形 1  $t^{k+1}, s^{k+1}$  都足够小;

情形 2 对某个  $p^{k+1} \in (0, 1)$ ,  $p^{k+1}s^{k+1} + (1 - p^{k+1})t^{k+1}$  足够小. 其中  $p^{k+1}$  反映了我们主观上对两类残差所赋的权值.

我们使用

$$E^{k+1} = (1 - p^{k+1})t^{k+1} + p^{k+1}s^{k+1} \quad (22)$$

作为 **KKT** 违反度.

# 完整算法

## 算法 3 求解问题 (4) 的 ADMM 算法

输入:  $X^0, Z^0, \Phi^0, \beta^0, \epsilon, k := 0, s^0 := 1, t^0 := 1, \alpha > 0$  (默认值为1),  
 $p^0 \in (0, 1)$ .

输出:  $X^k, Z^k, \Phi^k$

- 1:  $E^k = (1 - p^k)t^k + p^k s^k$ ;
- 2: **while**  $E^k > \epsilon$  **do**
- 3: 由公式(12),(11)计算  $X^{k+1}$ ;
- 4: 使用 MATLAB 内置函数 `quadprog()` 求解列子问题(14)得到  $Z^{k+1}$ ;
- 5:  $\Phi^{k+1} = \Phi^k - \alpha\beta^k(X^{k+1} - Z^{k+1})$ ;
- 6: 由公式(21)计算  $t^{k+1}, s^{k+1}$ ;
- 7: 更新  $\beta^k$  得到  $\beta^{k+1}$ ;
- 8: 更新  $p^k$  得到  $p^{k+1}$ ;
- 9: 由公式(22)得到  $E^{k+1}$ ;
- 10:  $k := k + 1$ ;
- 11: **end while**

# 提纲

- 1 引言
- 2 最优性条件
- 3 算法设计
- 4 收敛性分析**
- 5 数值实验
- 6 总结

# 收敛性分析

## 定理 (算法3的收敛性定理)

假设算法3每一步,  $Z$  子问题均精确求解, 且产生的迭代序列  $\{X^k\}, \{Z^k\}, \{\Phi^k\}$  分别收敛到  $X^*, Z^*, \Phi^*$ , 满足  $X^* = Z^*$ . 则  $(X^*, Z^*, \Phi^*)$  为问题(4)的稳定点.

# 收敛性分析

## 定理 (算法3的收敛性定理)

假设算法3每一步,  $Z$  子问题均精确求解, 且产生的迭代序列  $\{X^k\}, \{Z^k\}, \{\Phi^k\}$  分别收敛到  $X^*, Z^*, \Phi^*$ , 满足  $X^* = Z^*$ . 则  $(X^*, Z^*, \Phi^*)$  为问题(4)的稳定点.

关键点:

- ①  $X^* \in \arg \min_{X \mathbf{1} = \rho, \text{tr}(X) = 0} f(X, Z^*) - \langle \Phi^*, X - Z^* \rangle.$
- ②  $Z^* \in \arg \min_{Z^T \mathbf{1} = \rho, Z \geq 0} f(X^*, Z) - \langle \Phi^*, X^* - Z \rangle.$

# 提纲

- 1 引言
- 2 最优性条件
- 3 算法设计
- 4 收敛性分析
- 5 数值实验**
- 6 总结



# 数值实验

使用 MATLAB 内置函数 `randn()` 和 `abs()` 生成随机问题. 小型问题以  $n = 3, 4, 5$  各一问题为代表, 大型问题以  $n = 20, 30, 40$  各一问题为代表.

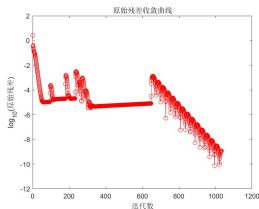
小型问题中的常量取法:

$$\alpha = 1, \quad \beta^k \equiv 10^3, \quad \epsilon = 10^{-8}, \quad p^k \equiv 0.5.$$

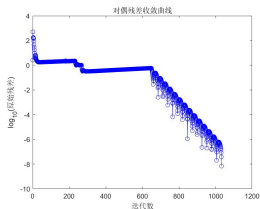
大型问题中的常量取法:

$$\alpha = 1, \quad \beta^k \equiv 10^4, \quad \epsilon = 10^{-6}, \quad p^k \equiv 0.5.$$

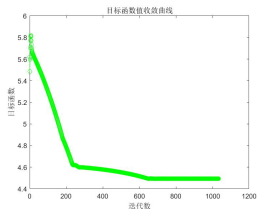
## 数值实验 - 收敛曲线



(a) 原始残差



(b) 对偶残差



(c) 目标函数值

图 1:  $n = 4$  收敛曲线

数值实验 - 松弛因子  $\alpha$  $\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ .表 1:  $n = 3$ , 不同的松弛因子

$\alpha$	$n = 3$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
0.1	<b>452</b>	<b>0.0072</b>	$3.40 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
0.2	491	0.0079	$8.45 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
0.3	510	0.0088	$7.07 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
0.4	517	0.0098	<b><math>2.86 \times 10^{-9}</math></b>	<b>1.1722</b>
0.5	503	0.0080	$7.45 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
0.6	534	0.0103	$7.79 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
0.7	538	0.0093	$5.69 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
0.8	525	0.0082	$3.24 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
0.9	548	0.0105	$8.97 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
1.0	560	0.0097	$8.02 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>

数值实验 - 松弛因子  $\alpha$  $\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ .表 2:  $n = 30$ , 不同的松弛因子

$\alpha$	$n = 30$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
0.1	117886	74.7150	$9.74 \times 10^{-7}$	26.2298
0.2	69365	42.6729	$8.60 \times 10^{-7}$	25.8871
0.3	70989	43.2812	$8.88 \times 10^{-7}$	25.8828
0.4	<b>65533</b>	<b>40.0219</b>	$6.46 \times 10^{-7}$	25.8757
0.5	122029	76.4424	$9.28 \times 10^{-7}$	25.6165
0.6	112336	82.8559	$9.63 \times 10^{-7}$	25.6165
0.7	112002	70.1342	$8.81 \times 10^{-7}$	25.6165
0.8	109121	67.5131	$7.99 \times 10^{-7}$	25.6165
0.9	113655	70.1853	$8.83 \times 10^{-7}$	25.6165
1.0	207788	129.1006	<b><math>6.00 \times 10^{-7}</math></b>	<b>24.9461</b>

数值实验 - 惩罚因子  $\beta$ 

$$\begin{cases} \beta = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, & n = 3, 4, 5, \\ \beta = 10^3, 10^4, 10^5, & n = 20, \\ \beta = 10^4, 10^5, & n = 30. \end{cases} \quad (23)$$

表 3:  $n = 3$ , 不同的惩罚因子

$\beta$	$n = 3$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
100	<b>224</b>	<b>0.0043</b>	$5.46 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
1000	560	0.0095	$8.02 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>
10000	3998	0.0647	<b><math>4.92 \times 10^{-9}</math></b>	<b>1.1722</b>
100000	38377	0.5818	$7.68 \times 10^{-9}$	<b>1.1722</b>

数值实验 - 惩罚因子  $\beta$ 

$$\begin{cases} \beta = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, & n = 3, 4, 5, \\ \beta = 10^3, 10^4, 10^5, & n = 20, \\ \beta = 10^4, 10^5, & n = 30. \end{cases} \quad (23)$$

表 4:  $n = 5$ , 不同的惩罚因子

$\beta$	$n = 5$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
100	969	0.0465	$5.00 \times 10^{-9}$	<b>2.7741</b>
1000	<b>860</b>	<b>0.0384</b>	$9.54 \times 10^{-9}$	<b>2.7741</b>
10000	3857	0.1698	<b><math>4.64 \times 10^{-9}</math></b>	<b>2.7741</b>
100000	33470	1.4344	$9.47 \times 10^{-9}$	<b>2.7741</b>

数值实验 - 惩罚因子  $\beta$ 

$$\begin{cases} \beta = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, & n = 3, 4, 5, \\ \beta = 10^3, 10^4, 10^5, & n = 20, \\ \beta = 10^4, 10^5, & n = 30. \end{cases} \quad (23)$$

表 5:  $n = 20$ , 不同的惩罚因子

$\beta$	$n = 20$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
1000	<b>12122</b>	<b>4.1522</b>	$9.95 \times 10^{-7}$	<b>9.8692</b>
10000	79052	26.7695	<b><math>5.02 \times 10^{-7}</math></b>	<b>9.8692</b>
100000	753429	255.0805	$9.98 \times 10^{-7}$	<b>9.8692</b>

数值实验 - 惩罚因子  $\beta$ 

$$\begin{cases} \beta = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, & n = 3, 4, 5, \\ \beta = 10^3, 10^4, 10^5, & n = 20, \\ \beta = 10^4, 10^5, & n = 30. \end{cases} \quad (23)$$

表 6:  $n = 30$ , 不同的惩罚因子

$\beta$	$n = 30$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
10000	<b>207788</b>	<b>133.6154</b>	<b><math>6.00 \times 10^{-7}</math></b>	<b>24.9461</b>
100000	2053406	1327.5987	$7.08 \times 10^{-7}$	24.9542



数值实验 - 惩罚因子  $\beta$ 

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, & n = 3, 4, 5, \\ \beta = 10^3, 10^4, 10^5, & n = 20, \\ \beta = 10^4, 10^5, & n = 30. \end{array} \right. \quad (23)$$

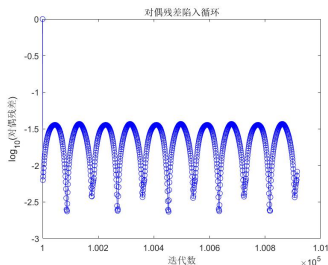
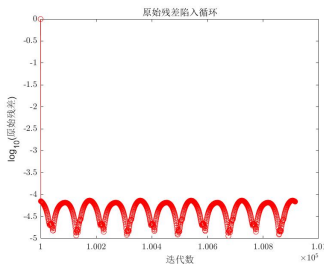


图 2:  $n = 30, \beta = 10^3$  残差陷入循环. 左: 原始残差; 右: 对偶残差

# 数值实验 – 测试问题

- 目的: 表明算法3的确可以达到全局最优解.
- 构造方式: 给定一数对  $(p, q) : p \neq q, p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 定义  $R$  为

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = p, j = q \text{ 或 } i = q, j = p, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (24)$$

$$\rho := \mathbf{1}.$$

$$\begin{aligned} \min_X \quad & 2x_{pq} + 2 \sum_i x_{ip} x_{iq} \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, X \geq 0, \text{tr}(X) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

最优值为 0.

## 数值实验 - 测试问题 (续)

$$\begin{aligned} \min_X \quad & 2x_{pq} + 2 \sum_i x_{ip} x_{iq} \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, X \geq 0, \text{tr}(X) = 0. \end{aligned}$$

$$n = 5, 10, 15, 20, (p, q) = (3, 4), \alpha = 1, \beta = 10^3, \epsilon = 10^{-8}.$$

表 7: 测试问题,  $n = 5, 10, 15, 20$ 

$n$	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
5	3187	0.1536	$3.00 \times 10^{-9}$	$-1.44 \times 10^{-11}$
10	1447	0.1766	$1.65 \times 10^{-9}$	$-4.94 \times 10^{-15}$
15	2243	0.3284	$2.30 \times 10^{-9}$	$6.54 \times 10^{-13}$
20	2030	0.3299	$4.53 \times 10^{-9}$	$-8.07 \times 10^{-13}$

# 数值实验 - 与求解非凸二次规划的算法比较

- MATLAB 内置函数 `fmincon()`, 调用算法 `'sqp'`, `'active-set'` 求解问题(3)和(2), 设置停机准则 `ConstraintTolerance` 为上文默认值. 在使用算法3求解  $n = 50, 60, 70, 80$  的问题, 设置惩罚因子

$$\begin{cases} \beta = 10^4, & n = 50, 60, \\ \beta = 2 \times 10^4, & n = 70, 80. \end{cases}$$

## 数值实验 - 与求解非凸二次规划的算法比较 (续)

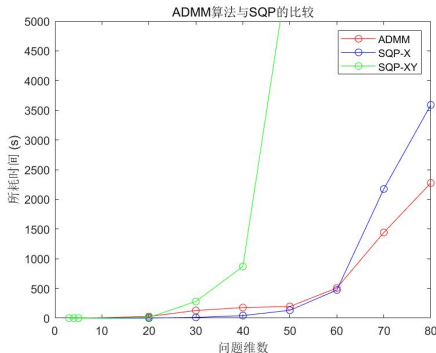


图 3: 算法3和 SQP 运行时间对比

结论: 对于小型问题, 积极集法和 SQP 最为便捷; 对于大型问题, 算法3更具优势. 算法3的缺点在于, 我们需要根据问题的维度不断重新设置惩罚因子  $\beta$ .

# 提纲

- 1 引言
- 2 最优性条件
- 3 算法设计
- 4 收敛性分析
- 5 数值实验
- 6 总结**

# 总结

- 针对问题(4)特殊结构设计了 ADMM 算法.
- 证明了一定条件下 ADMM 算法3收敛到问题(4)的稳定点.
- 在随机生成的问题上进行数值实验; 讨论了多个人工给定因子对算法效果的影响; 与求解非凸二次规划的算法做了比较, 得出算法3在大型问题上更具优势的结论.

感谢聆听!

`huyukuan2015@tongji.edu.cn`