求解一类双线性规划问题的数值算法

答辩人: 胡雨宽
导　师: 般俊锋　教授

同济大学数学科学学院

2019.6.4

提纲

提纲

问题背景

最优运输问题 (Villani '08):

- 建立有效比较概率分布的几何工具.
- 极小化将一概率分布" 运输" 到另一概率分布的" 花费".

$$
\text{(LP)} \quad \begin{aligned}
\min_{a_{ij}} \quad & \sum_{i,j} c_{ij} a_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j} a_{ij} = f_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{i} a_{ij} = g_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\
& a_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

这里 $c_{ij}, f_i, g_j \geq 0, \forall i, j$.

问题陈述

$$
\begin{aligned}
\min_{X,Y} \quad & \sum_{i\neq j} \frac{x_{ij}}{|r_i - r_j|} + \sum_{i\neq k} \frac{y_{ik}}{|r_i - r_k|} + \sum_{i,j,k: j\neq k} \frac{x_{ij}y_{ik}}{|r_j - r_k|} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_j x_{ij} = \rho_i, \quad i = 1,\dots,n, \\
& \sum_i x_{ij} = \rho_j, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_k y_{ik} = \rho_i, \quad i = 1,\dots,n, \\
& \sum_i y_{ik} = \rho_k, \quad i = 1,\dots,n, \\
& x_{ij}, y_{ik} \geq 0, \quad i,j,k = 1,\dots,n, \\
& x_{ii}, y_{ii} = 0, \quad i = 1,\dots,n,
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $r = (r_1,\dots,r_n)^T, \rho = (\rho_1,\dots,\rho_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$. 将 $\{|r_i - r_j|\}$ 储存于 $R = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其中

$$
r_{ij} = \begin{cases} 1/|r_i - r_j|, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}
$$

研究现状

角度 1 **可分离约束的双线性规划.** 广泛的应用 (Konno '71等).

已有方法:

- 割平面法 (Ritter '66等).
- 分支定界法 (Falk '73等).

角度 2 **非凸二次规划.**

已有方法 (Nocedal/Wright '06):

- 逐步二次规划 (SQP).
- 积极集法 (Active-set Methods).
- 内点法 (Interior-point Methods).
- ...

研究现状

角度 1 **可分离约束的双线性规划.** 广泛的应用 (Konno '71等).

已有方法:

- 割平面法 (Ritter '66等).
- 分支定界法 (Falk '73等).

角度 2 **非凸二次规划.**

已有方法 (Nocedal/Wright '06):

- 逐步二次规划 (SQP).
- 积极集法 (Active-set Methods).
- 内点法 (Interior-point Methods).
- . . .

以上方法均以列向量为求解对象 $\Rightarrow$**计算量问题**.

预备知识

标准矩阵内积

对 $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

预备知识

标准矩阵内积

对 $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

问题(1)即可化为矩阵形式:

$$\begin{aligned} \min_{X,Y} \quad & \langle R, X\rangle + \langle R, Y\rangle + \langle Y, XR\rangle \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, \mathrm{tr}(X) = 0, X \geq 0, \\ & Y\mathbf{1} = \rho, Y^T\mathbf{1} = \rho, \mathrm{tr}(Y) = 0, Y \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{1}$ 为全 1 向量.

预备知识 (续)

实验表明 ...

假设

问题(2)的所有稳定点 (X, Y) 均满足 $X = Y$.

预备知识 (续)

实验表明 . . .

假设

问题(2)的所有稳定点 (X, Y) 均满足 $X = Y$.

$\Rightarrow$ 简化问题:

$$\begin{aligned} \min_{X} \quad & 2\langle X, R\rangle + \langle X, XR\rangle \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, \operatorname{tr}(X) = 0, X \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

预备知识 (续)

实验表明 . . .

假设

问题(2)的所有稳定点 (X, Y) 均满足 $X = Y$.

$\Rightarrow$ 简化问题:

$$\begin{aligned} \min_{X} \quad & 2\langle X, R\rangle + \langle X, XR\rangle \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, \operatorname{tr}(X) = 0, X \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

引入**分裂变量**$Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 进一步得到等价的

$$\begin{aligned} \min_{X,Z} \quad & f(X, Z) \triangleq 2\langle X, R\rangle + \langle Z, XR\rangle \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, \operatorname{tr}(X) = 0, \\ & Z^T\mathbf{1} = \rho, Z \geq 0, \\ & X = Z. \end{aligned} \tag{4}$$

之后**重点求解**问题(4).

提纲

最优性条件

问题(4)的 KKT 条件

若 (X^*, Z^*) 为问题(4)的解, 则存在拉格朗日乘子 $\mu^* \in \mathbb{R}, \lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}^n$, $\Phi^*, 0 \le \Omega^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2R + Z^* R - \lambda_1^* \mathbf{1}^T - \Phi^* - \mu^* I = 0, \\ X^* R - \mathbf{1}(\lambda_2^*)^T + \Phi^* - \Omega^* = 0, \end{array}\right\} & \text{稳定性条件或对偶可行性条件} \\ \left.\begin{array}{l} X^* \mathbf{1} = \rho, \operatorname{tr}(X^*) = 0, \\ (Z^*)^T \mathbf{1} = \rho, Z^* \ge 0, \\ \Omega^* \ge 0, \end{array}\right\} & \text{原始可行性条件,} \\ \Omega^* \circ Z^* = 0. & \text{互补松弛条件.} \end{cases} \tag{5}$$

这里 “$\circ$” 表示 Hadamard 积.

提纲

ADMM 算法简介

ADMM 算法 (介绍可见Boyd, et al. '10) 求解问题**一般形式**:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^d} \quad & \theta(x) := \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x_i) + \ell(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b. \end{aligned} \tag{6}$$

现有工作简介:

- 凸可分问题 (Boyd, et al. '10, He/Yuan '12等): $n \geq 2, \ell = 0, \theta_1, \theta_2$ 是凸函数. 可能发散 (Chen, et al. '16).$\Rightarrow$ **无假设的困境**.

ADMM 算法简介

ADMM 算法 (介绍可见Boyd, et al. '10) 求解问题**一般形式**:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^d} \quad & \theta(x) := \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x_i) + \ell(x_1,\dots,x_n) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b. \end{aligned} \tag{6}$$

现有工作简介:

- 凸可分问题 (Boyd, et al. '10, He/Yuan '12等): $n \geq 2, \ell = 0, \theta_1, \theta_2$ 是凸函数. 可能发散 (Chen, et al. '16).$\Rightarrow$ **无假设的困境**.
- 凸不可分问题 (Hong, et al. '14, Chen, et al. '19). 即使 $n = 2, \theta(\cdot)$ 凸, 仍然开放 (Hong/Luo/Razaviyayn '16).
- 非凸问题. 理论缺乏, 应用广泛.
  - Wen, et al. '13等: 需要强加无法验证的条件.

ADMM 算法简介 (续)

$$\mathcal{L}_A(X, Z, \Phi) = f(X, Z) - \langle \Phi, X - Z \rangle + \frac{\beta}{2}\|X - Z\|_F^2. \tag{7}$$

框架 1 求解问题 (4) 的 ADMM 算法框架

输入: $X^0, Z^0, \Phi^0, \beta^0, k := 0.$

输出: $X^k, Z^k, \Phi^k.$

1: **while** 收敛性测试未通过 **do**

2: $\quad X^{k+1} = \arg \min_{X: X\mathbf{1}=\rho, \mathrm{tr}(X)=0} \mathcal{L}_A(X, Z^k, \Phi^k);$

3: $\quad Z^{k+1} = \arg \min_{Z: Z^T\mathbf{1}=\rho, Z\geq 0} \mathcal{L}_A(X^{k+1}, Z, \Phi^k);$

4: 　更新 Φ^k 得到 Φ^{k+1};

5: 　如有需要, 更新 β^k 得到 β^{k+1};

6: $\quad k := k + 1;$

7: **end while**

子问题的求解 –X 子问题

省去上标 k, 改用 ‘+’ 标记更新值.

$$\begin{aligned} \min_{X} \quad & 2\langle X, R\rangle + \langle Z, XR\rangle - \langle \Phi, X - Z\rangle + \frac{\beta}{2}\|X - Z\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, \quad \operatorname{tr}(X) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

子问题的求解 $-X$ 子问题

省去上标 k, 改用 '+' 标记更新值.

$$\begin{aligned} \min_{X} \quad & 2\langle X, R\rangle + \langle Z, XR\rangle - \langle \Phi, X - Z\rangle + \frac{\beta}{2}\|X - Z\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, \quad \mathrm{tr}(X) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 2R\mathbf{1} + ZR\mathbf{1} - \Phi\mathbf{1} - \beta Z\mathbf{1} + \beta\rho, \\ m_1 &= 2\mathrm{tr}(R) + \mathrm{tr}(ZR) - \mathrm{tr}(\Phi) - \beta\mathrm{tr}(Z). \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{1}{n}\mathbf{1}^T M_1 + m_1\right), \quad \lambda_1 = \frac{1}{n}(M_1 - \mathbf{1}\mu). \tag{9}$$

$$X^+ = -\frac{1}{\beta}(2R + ZR - \lambda_1\mathbf{1}^T - \mu I - \Phi - \beta Z). \tag{10}$$

(9)和(10)给出 X 子问题(8)的解 X^+.

子问题的求解 –Z 子问题

$$
\begin{aligned}
\min_{Z} \quad & \langle Z, X^+ R\rangle - \langle \Phi, X^+ - Z\rangle + \frac{\beta}{2}\|X^+ - Z\|_F^2 \\
\text{s.t.} \quad & Z^T\mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

子问题的求解 –Z 子问题

$$
\begin{aligned}
\min_{Z} \quad & \langle Z, X^+R\rangle - \langle \Phi, X^+ - Z\rangle + \tfrac{\beta}{2}\|X^+ - Z\|_F^2 \\
\text{s.t.} \quad & Z^T\mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

忽略非负约束，求超平面 $Z^T\mathbf{1} = \rho$ 上的一点 $\widetilde{Z}$:

$$
\lambda_2 = \frac{1}{n}\left[R\left(X^+\right)^T\mathbf{1} + \Phi^T\mathbf{1} - \beta\left(X^+\right)^T\mathbf{1} + \beta\rho\right],
$$

$$
\widetilde{Z} = \frac{1}{\beta}(X^+R + \Phi - \beta X^+ - \mathbf{1}\lambda_2^T).
$$

子问题的求解 –Z 子问题 (续)

问题(11)的等价形式:

$$\begin{aligned} \min_{Z} \quad & \|Z - \widetilde{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T\mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{aligned}$$

子问题的求解 –Z 子问题 (续)

问题(11)的等价形式:

$$\begin{aligned} \min_{Z} \quad & \|Z-\widetilde{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T\mathbf{1}=\rho, \quad Z\geq 0. \end{aligned}$$

分块

$$Z=[z_1,\ldots,z_n], \quad \widetilde{Z}=[\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_n].$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \min_{z_1,\ldots,z_n} \quad & \sum_{j=1}^{n}\|z_j-\tilde{z}_j\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^T z_j=\rho_j, \quad z_j\geq 0, \quad j=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{12}$$

`quadprog()`$\Rightarrow Z^+$.

子问题的求解 –Z 子问题 (续)

问题(11)的等价形式:

$$\begin{aligned} \min_{Z} \quad & \|Z - \widetilde{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & Z^T \mathbf{1} = \rho, \quad Z \geq 0. \end{aligned}$$

分块

$$Z = [z_1, \ldots, z_n], \quad \widetilde{Z} = [\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n].$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \min_{z_1,\ldots,z_n} \quad & \sum_{j=1}^{n} \|z_j - \tilde{z}_j\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^T z_j = \rho_j, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{12}$$

`quadprog()`$\Rightarrow Z^+$.

注

若未恰当引入分裂变量 Z, X 子问题的求解难度非常之大.

拉格朗日乘子的更新

受 ALM 算法启发, 更新策略可选为

$$\Phi^+ = \Phi - \beta(X^+ - Z^+). \tag{13}$$

若带松弛因子 $\alpha > 0$, 则

$$\Phi^+ = \Phi - \alpha\beta(X^+ - Z^+). \tag{14}$$

停机准则与 KKT 违反度

对 X 子问题:

$$X^{k+1} = \arg \min_{X: X\mathbf{1}=\rho, \mathrm{tr}(X)=0} \mathcal{L}_A(X, Z^k, \Phi^k)$$

- 使用更新策略(13):

$$\boxed{(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)};$$

- 使用更新策略(14):

$$\boxed{(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)}, \quad \boxed{(1-\alpha)\beta(X^{k+1} - Z^{k+1})}.$$

停机准则与 KKT 违反度 (续)

对 Z 子问题:

$$Z^{k+1} = \arg\min_{Z:Z^T\mathbf{1}=\rho, Z\geq 0} \mathcal{L}_A(X^{k+1}, Z, \Phi^k)$$

- 使用更新策略(13):

恰好此部分 KKT 违反度为 0.

- 使用更新策略(14):

$$\boxed{(1-\alpha)\beta(X^{k+1} - Z^{k+1})}.$$

停机准则与 KKT 违反度 (续)

KKT 违反度:

$$
\begin{aligned}
t^{k+1} &\triangleq \|X^{k+1} - Z^{k+1}\|_\infty && \text{原始残差,} \\
s^{k+1} &\triangleq \|(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)\|_\infty && \text{对偶残差.}
\end{aligned} \tag{15}
$$

停机准则与 KKT 违反度 (续)

KKT 违反度:

$$
\begin{aligned}
t^{k+1} &\triangleq \|X^{k+1} - Z^{k+1}\|_\infty && \text{原始残差,} \\
s^{k+1} &\triangleq \|(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)\|_\infty && \text{对偶残差.}
\end{aligned} \tag{15}
$$

停机准则:

情形 1 t^{k+1}, s^{k+1} 都足够小;

情形 2 对某个 $p^{k+1} \in (0,1)$, $p^{k+1} s^{k+1} + \left(1 - p^{k+1}\right) t^{k+1}$ 足够小.

停机准则与 KKT 违反度 (续)

KKT 违反度:

$$\begin{aligned} t^{k+1} &\triangleq \|X^{k+1} - Z^{k+1}\|_\infty && \text{原始残差,} \\ s^{k+1} &\triangleq \|(Z^{k+1} - Z^k)(\beta I - R)\|_\infty && \text{对偶残差.} \end{aligned} \tag{15}$$

停机准则:

情形 1 t^{k+1}, s^{k+1} 都足够小;

情形 2 对某个 $p^{k+1} \in (0,1)$, $p^{k+1}s^{k+1} + \left(1 - p^{k+1}\right) t^{k+1}$ 足够小.

我们使用

$$E^{k+1} = (1 - p^{k+1})t^{k+1} + p^{k+1}s^{k+1} \tag{16}$$

作为 **KKT 违反度**.

完整算法

算法 2 求解问题 (4) 的 ADMM 算法

输入: $X^0, Z^0, \Phi^0,\ \beta^0,\ \epsilon,\ k := 0,\ s^0 := 1, t^0 := 1,\ \alpha > 0$(默认值为1), $p^0 \in (0,1)$.

输出: X^k, Z^k, Φ^k

$E^k = (1-p^k)t^k + p^k s^k$;
while $E^k > \epsilon$ **do**
  由公式(9),(10)计算 X^{k+1};
  使用 MATLAB 内置函数 quadprog()求解列子问题(12)得到 Z^{k+1};
  $\Phi^{k+1} = \Phi^k - \alpha\beta^k(X^{k+1} - Z^{k+1})$;
  由公式(15)计算 t^{k+1}, s^{k+1};
  更新 β^k 得到 β^{k+1};
  更新 p^k 得到 p^{k+1};
  由公式(16)得到 E^{k+1};
  $k := k+1$;
end while

提纲

收敛性分析

定理 (充分性定理)

假设算法2每一步 ,Z 子问题均精确求解, 且产生的迭代序列 $\{X^k\},\{Z^k\},\{\Phi^k\}$ 分别收敛到 X^*,Z^*,Φ^*, 满足 $X^*=Z^*$. 则 (X^*,Z^*,Φ^*) 为问题(4)的稳定点.

收敛性分析

定理 (充分性定理)

假设算法2每一步，Z 子问题均精确求解, 且产生的迭代序列 $\{X^k\}, \{Z^k\}, \{\Phi^k\}$ 分别收敛到 X^*, Z^*, Φ^*, 满足 $X^* = Z^*$. 则 (X^*, Z^*, Φ^*) 为问题(4)的稳定点.

关键点:

1. $X^* \in \arg \min\limits_{X\mathbf{1}=\rho, \mathrm{tr}(X)=0} f(X, Z^*) - \langle \Phi^*, X - Z^* \rangle$.
2. $Z^* \in \arg \min\limits_{Z^T\mathbf{1}=\rho, Z\geq 0} f(X^*, Z) - \langle \Phi^*, X^* - Z \rangle$.

提纲

数值实验

使用 MATLAB 内置函数 `randn()`和 `abs()`生成随机问题. 小型问题以 $n = 3, 4, 5$ 各一问题为代表, 大型问题以 $n = 20, 30, 40$ 各一问题为代表.

小型问题中的常量取法:

$$\alpha = 1, \quad \beta^k \equiv 10^3, \quad \epsilon = 10^{-8}, \quad p^k \equiv 0.5.$$

大型问题中的常量取法:

$$\alpha = 1, \quad \beta^k \equiv 10^4, \quad \epsilon = 10^{-6}, \quad p^k \equiv 0.5.$$

数值实验 –收敛曲线

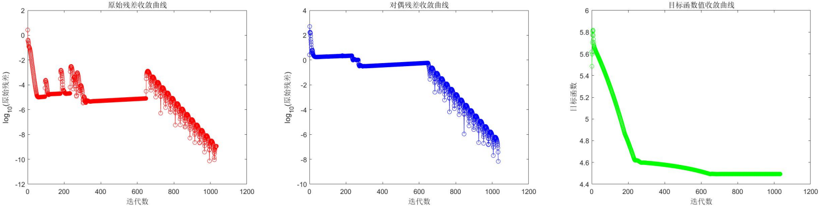


图 1: $n = 4$ 收敛曲线

左: 原始残差; 中: 对偶残差; 右: 目标函数值.

数值实验 –松弛因子 α

$\alpha = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0.$

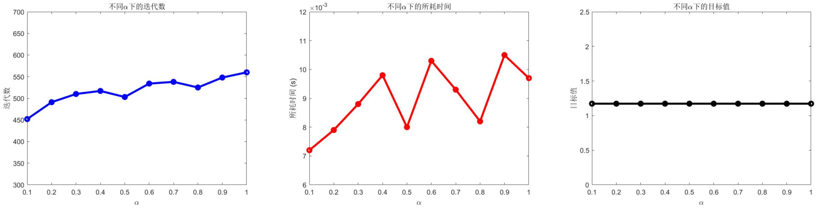


图 2: $n = 3$, 不同的松弛因子
左: 迭代数; 中: 所耗时间; 右: 目标值.

数值实验 –松弛因子 α

$\alpha = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0.$

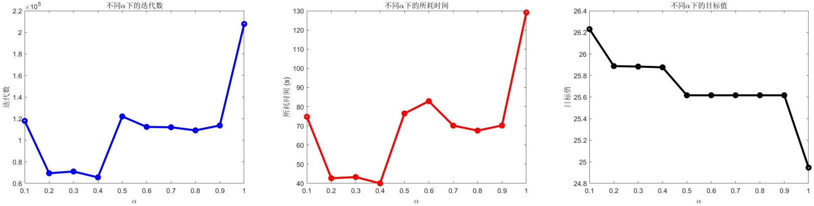


图 3: $n = 30$, 不同的松弛因子
左: 迭代数; 中: 所耗时间; 右: 目标值.

数值实验 –惩罚因子 β

表 1: 不同的惩罚因子

β	$n=3$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
100	**224**	**0.0043**	5.46×10^{-9}	**1.1722**
1000	560	0.0095	8.02×10^{-9}	**1.1722**
10000	3998	0.0647	$\mathbf{4.92\times10^{-9}}$	**1.1722**
100000	38377	0.5818	7.68×10^{-9}	**1.1722**
β	$n=5$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
100	969	0.0465	5.00×10^{-9}	**2.7741**
1000	**860**	**0.0384**	9.54×10^{-9}	**2.7741**
10000	3857	0.1698	$\mathbf{4.64\times10^{-9}}$	**2.7741**
100000	33470	1.4344	9.47×10^{-9}	**2.7741**
β	$n=30$			
	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
10000	**207788**	**133.6154**	$\mathbf{6.00\times10^{-7}}$	**24.9461**
100000	2053406	1327.5987	7.08×10^{-7}	24.9542

数值实验 –惩罚因子 β

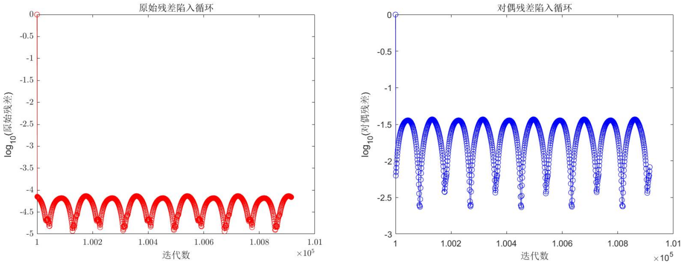


图 4: $n = 30, \beta = 10^3$ 残差陷入循环
左: 原始残差; 右: 对偶残差.

数值实验 –测试问题

给定一数对 $(p,q): p \neq q, p, q \in \{1,2,\ldots,n\}$, 定义 R 为

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i=p, j=q \text{或} i=q, j=p, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{17}$$

$\rho := \mathbf{1}$.

$$\begin{aligned} \min_X \quad & 2x_{pq} + 2\sum_i x_{ip}x_{iq} \\ \text{s.t.} \quad & X\mathbf{1} = \rho, X^T\mathbf{1} = \rho, X \geq 0, \operatorname{tr}(X) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

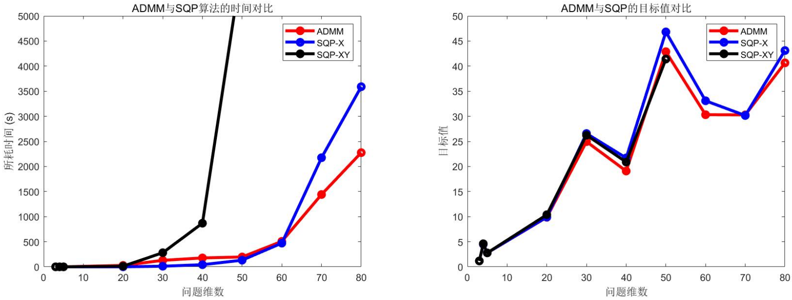
最优值为 0.

表 2: 测试问题, $n = 5, 10, 15, 20$

n	迭代数	所耗时间 (s)	KKT 违反度	目标值
5	3187	0.1536	3.00×10^{-9}	-1.44×10^{-11}
10	1447	0.1766	1.65×10^{-9}	-4.94×10^{-15}
15	2243	0.3284	2.30×10^{-9}	6.54×10^{-13}
20	2030	0.3299	4.53×10^{-9}	-8.07×10^{-13}

数值实验 –与求解非凸二次规划的算法比较

MATLAB 内置函数 `fmincon()`, 调用算法'sqp'求解问题(3)和(2), 设置停机准则 `ConstraintTolerance`为上文默认值.



(a) 所耗时间 (b) 目标值

图 5: 算法2和 SQP 运行时间对比

结论: 对于大型问题, 算法2更具优势. 算法2的缺点在于, 我们需要根据问题的维度不断重新设置惩罚因子 β.

提纲

总结

- 针对问题(4)特殊结构设计了 ADMM 算法.
- 证明了一定条件下 ADMM 算法2收敛到问题(4)的稳定点.
- 在随机生成的问题上进行数值实验; 讨论了多个人工给定因子对算法效果的影响; 与求解非凸二次规划的算法做了比较, 得出算法2在大型问题上更具优势的结论.

特别地:

- 引入变量分裂约束和目标函数, 使问题构造方便算法设计.
- 使用 ADMM 算法求解带特殊约束的问题. 此类约束在最优运输问题中很常见.
- 将 Z 子问题划分成若干个互不相关的小子问题求解.
- 给出了算法收敛到稳定点的充分性定理.

感谢聆听!

huyukuan2015@tongji.edu.cn