大作业 5 Van der Pauw 法测量电阻率

张钰坤 2000011314 (C 语言实现)

2022年5月15日

目录

1	解题	题思路。	2
	1.1	无量纲化	2
	1.2	简化条件	2
	1.3	方形网格离散化	3
		1.3.1 内点	4
		1.3.2 边界点	4
		1.3.2.1 无源	4
		1.3.2.2 有源	5
	1.4	SOR 法/Gauss-Seidel 法求解线性方程组	6
		1.4.1 解决 问题 1 的办法	6
		1.4.2 解决 问题 2 的办法	6
	1.5	遍历格点并寄存位置	8
		1.5.1 第一问方形导体	ç
		1.5.2 具有中心对称和轴对称的曲线边界	9
2	源代	· 6码	L 1
3	结果	是展示	L2
	3.1	第一问	12
	3.2	第二问	13
	3.3	第三问	
	3.4	Martin Ser	14

1 解题思路

本题要求解如下的定解问题:

方程:
$$\nabla^2 \phi = 0, (x, y) \in \Omega$$
 (1)

定解条件:
$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0, (x, y) \in \partial \Omega$$
 (2)

$$\sigma d \int_{C} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi dl = \pm I, \forall C \subseteq \Omega$$
 (3)

1.1 无量纲化

选定

$$\begin{split} \tilde{\phi} &= \phi/(1V) \\ \tilde{I} &= \frac{I}{\sigma d(1V)} \\ \tilde{R} &= \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} \end{split}$$

而所有长度选定某个单位,比如说厘米。 于是定解问题化为

方程:
$$\nabla^2 \tilde{\phi} = 0, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$$
 (4)

定解条件:
$$\tilde{\boldsymbol{n}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\phi} = 0, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial \Omega$$
 (5)

$$\int_{C} \tilde{\boldsymbol{n}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\phi} d\tilde{l} = \pm \tilde{l}, \forall C \subseteq \Omega$$
 (6)

Van der Pauw 方程化为

$$\exp(-\pi \tilde{R}_{AB,DC}) + \exp(-\pi \tilde{R}_{AD,BC}) = 1 \tag{7}$$

1.2 简化条件

不失一般性,我们将物理量无量纲化的上标省略:

方程:
$$\nabla^2 \phi = 0, (x, y) \in \Omega$$
 (8)

定解条件:
$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0, (x, y) \in \partial \Omega$$
 (9)

$$\int_{C} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = \pm I, \forall C \subseteq \Omega$$
(10)

注意到第三个方程是对无穷个曲线的限制条件,不具有操作性。事实上,第三个方程可以用前两个条件简 化。

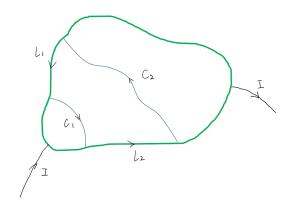


图 1: 条件简化示意图 1

如示意图 1 所示,对任意 Ω 内的曲线 C_1,C_2 ,设它们截出的边界为 l_1,l_2 ,且 l_1,l_2 不包含源点。那么有

$$\oint \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = \begin{cases} \iint_{\Omega} \nabla^2 \phi dS = 0 \\ (\int_{C_1^-} + \int_{C_2^+} + \int_{l_1} + \int_{l_2}) \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = (\int_{C_1^-} + \int_{C_2^+}) \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl \end{cases}$$

其中第一行的等号用到了方程,第二行等号用到了边界条件。

进而得到

$$\int_{C_1} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = \int_{C_2} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl$$

根据上面的性质,方程三 $\int_{C} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = \pm I, \forall C \subseteq \Omega$ 可以简化为

$$\int_{C_{in}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = I, \int_{C_{out}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = -I$$

其中 C_{in}, C_{out} 是电极附近的一个选定的曲线,如示意图 2 所示。

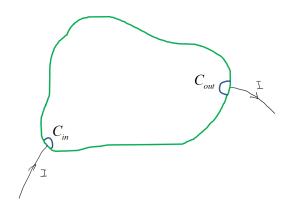


图 2: 条件简化示意图 2

1.3 方形网格离散化

根据上述讨论,我们确定了数值求解的定解问题:

方程:
$$\nabla^2 \phi = 0, (x, y) \in \Omega$$
 (11)

定解条件:
$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0, (x, y) \in \partial \Omega$$
 (12)

$$\int_{C_{in}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = I, \int_{C_{out}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi dl = -I$$
 (13)

本题欲采用有限差分的方法求解,并采用方形网格对求解区域离散化。

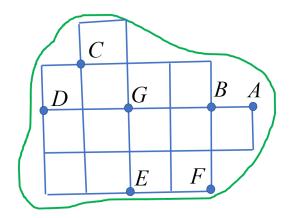


图 3: 方形网格离散化区域

如上图所示,经过离散化后,我们实际用网格区域代替了原来的区域。我们规定,当网格点上下左右都有格点的时候,认为该格点是内点;当网格上下左右有格点缺失的时候,认为该格点是边界点。例如,上图中 ADEF 是边界点,BCG 是内点。注意这里我们认为 BC 也是内点。看似当我们用网格区域代替了原来的区域时,BC 处在了边界上,但是由于它们常处在凹陷中,离真实物理边界较远,故可以把它们当作内点处理。

离散化之后给每个格点横纵指标 (i,j),将每个格点的电势设为 ϕ_{ij} ,进而我们可以分别对内点和边界点满足的方程应用有限差分。

1.3.1 内点

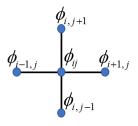


图 4: 内点

如图所示, 内点满足拉普拉斯方程离散化为

$$\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

1.3.2 边界点

1.3.2.1 无源 情况 1:格点上下左右只有一个点缺失,如图 3中的 DE,此时格点在网格的一条边上。

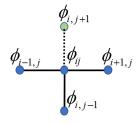


图 5: 无源边界点 1

由于边界点满足 $n\cdot \nabla \phi=0$,即电势法向导数为 0。我们可以关于直边界 $\phi_{i-1,j}\phi_{i,j}\phi_{i+1,j}$ 把内点 $\phi_{i,j-1}$ 对称出去,得到虚拟点 $\phi_{i,j+1}$,如图所示,再由 (i,j) 点法向导数为 0,得到 $\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}=0$ 。由于补全了 (i,j)

点周围的格点,可以由拉普拉斯方程得到 $\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} - 4\phi_{i,j} = 0$,二者联立,就得到这种边界点的满足的离散化方程:

$$\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + 2\phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

情况 2: 格点上下左右有 2 个点缺失,如图 3中的 AF,此时格点在网格的某个角上。

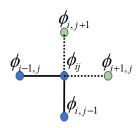


图 6: 无源边界点 2

由于边界点满足 $n\cdot \nabla \phi=0$,即电势法向导数为 0。我们可以分别关于直边界 $\phi_{i-1,j}\phi_{i,j}$ 和 $\phi_{i,j}\phi_{i,j-1}$ 把内点 $\phi_{i-1,j}$ 和 $\phi_{i,j-1}$ 对称出去,得到虚拟点 $\phi_{i+1,j}$ 和 $\phi_{i,j+1}$,如图所示,再由 (i,j) 点法向导数为 0,得到 $\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}=0$ 和 _i+1,j- _i-1,j=0。由于补全了 (i,j) 点周围的格点,可以由拉普拉斯方程得到 $\phi_{i-1,j}+\phi_{i+1,j}+\phi_{i,j-1}+\phi_{i,j-1}-4\phi_{i,j}=0$,二者联立,就得到这种边界点的满足的离散化方程:

$$2\phi_{i-1,j} + 2\phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

我们不妨在取格点的时候保证,**边界格点只可能有 1 或 2 个上下左右格点缺失,即:边界格点要么在一条 边上,要么在一个角上**。进而,所有边界点都可以分成上面两种情况(只差旋转一个角度,分析是类似的)。

1.3.2.2 有源 根据方程 3: $\int_{C_{in}} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi dl = I$,可以得出 $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \mathbf{j}$,即电势的法向导数等于电流密度。 **情况 1:** 格点上下左右只有一个点缺失,此时电流加在网格的一条边上,如下图。

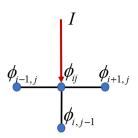


图 7: 有源边界点 1

设格点边长为 h, 我们不妨设 $\phi_{i,j}\phi_{i,j-1}$ 中点的电流密度为 I/h, 那么有

$$\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{h}=\frac{I}{h}$$

于是得到离散化方程

$$\phi_{i,i} - \phi_{i,i-1} = I$$

情况 2: 格点上下左右只有 2 个点缺失,此时电流加在网格的一个角上,如下图。

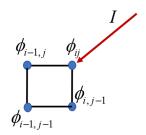


图 8: 有源边界点 2

设格点边长为 h, 我们不妨设 $\phi_{i,i}\phi_{i-1,i-1}$ 中点的电流密度为 I/h, 那么有

$$\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j-1}}{\sqrt{2}h} = \frac{I}{\sqrt{2}h}$$

于是得到离散化方程

$$\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j-1} = I$$

1.4 SOR 法/Gauss-Seidel 法求解线性方程组

根据前一节的分析,我们用方形网格离散化待求解区域,设出每个格点上的电势 ϕ_{ij} 。经过讨论,这些格点分为三大类:内点,无源边界点,有源边界点。每种情况都可以给出以这些格点为中心的线性方程。因此,有多少个格点,就有多少个未知数,多少个线性方程,进而可以通过解线性方程组的方式,求出所有格点的电势值。将 ϕ_{ij} 按一定顺序排列成一个向量 x,线性方程组可以写为

$$Ax = b$$

注意到 A 是一个大型极端稀疏矩阵。因为,想要求解的电势十分精确的反应真实物理情景,有限差分只有在格子取得很小的情况下才能作为导数的近似,这会使得未知数 ϕ_{ij} 数量庞大。但是根据前节的讨论,每个格点对应的方程,之和自身和周围的 4 项相关,说明矩阵 A 中每行只有至多 5 个元素非 0。故,A 大型且稀疏。

于是我们采用 SOR 法/Gauss-Seidel 法求解。这会遇到两个问题:

问题 1: SOR 法/Gauss-Seidel 法需要矩阵对角元全部非 0。

问题 2:由于 A 规模巨大,难以储存;并且即便储存了,在迭代过程中也会遇到 0 和数的乘法这种不必要的运算。(下面的估算说明存储 A 的不值当:假设有一万个格点,那么矩阵 A 是 10000*10000 的,如果用二维double 数组存储,共占据 $8\times 10^8 B=800MB$ 内存!并且这个矩阵元素中大部分都是 0,有多大部分呢?每行10000 个元素最多有 5 个不是 0,那么有 9995/10000=99.95% 空间浪费掉了!)

1.4.1 解决 问题 1 的办法

解决 问题 1 的办法是: 选定 ϕ_{ij} 在 x 中的排列次序,那么让 ϕ_{ij} 在 x 中由上到下的排列次序,与 (i,j) 满足的线性方程在 A 中由上到下的排列次序相同。由于 (i,j) 满足的线性方程一定含有 ϕ_{ij} 项,那么对角元一定非零。

比如说, $\phi_{1,2}$ 在 x 中是第 5 个,那么 A 的第 5 行就去记录以 (1,2) 点为中心的方程系数,以 (1,2) 是内点为例,去记录方程 $\phi_{0,2}+\phi_{2,2}+\phi_{1,1}+\phi_{1,3}-4\phi_{1,2}=0$ 的系数。

1.4.2 解决 问题 2 的办法

解决 **问题 2** 的办法是:不储存矩阵,而把每一步迭代写成函数,这样既不用储存矩阵,又不用计算许多 0 和数的乘法。

参考 SOR 算法 [1],

计

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

SOR 算法的每次迭代可以写为

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i, \\ \Delta x_i = \omega(b_i - \boldsymbol{\alpha}_i^{\top} \boldsymbol{x}) / A(i;i), \\ i = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots; \omega$$
为松弛因子

为简便起见可以让 A 对角元都为-4,然后可以写一个函数计算 $oldsymbol{lpha}_i^{ op}oldsymbol{x}$ 。

Algorithm 1 AmX 函数,计算 $\alpha_i^{\mathsf{T}} x$ Input: 行数 m, 待求解向量 x; Output: 内积 $\alpha_m^{\top} x$; 1: 通过 m 的值确定这一行系数对应的方程中心点 (i,j)。(因为要选定一定顺序排列 $\phi_{i,j}$,而且系数矩阵 A 每 行的排列与这个顺序相同,见"解决问题1的办法"); 2: **if** (i,j) 是有源边界点(通电流的点) **then** 按照有源边界点方程,用这些系数*对应x中的分量再相加,返回这个值。 4: **else** (i,j) 是无源边界点或内点; 由于无源边界点和内点上的方程本质都是拉普拉斯方程(见"方形网格离散化"),因而二者可以统一,并 通过一些判断条件,把想要求的值算出来,下面实现这一点。 设一个变量 s 临时储存待求内积;s=0; 因为 (i,j) 项对应的系数一定是-4,所以 $s+=-4\phi_{i,j}$ 8: **if** (i+1,j) 在界外 **then** (i-1,j) 一定在界内,并且由于对称性,(i-1,j) 的系数一定是 2,故 $s+=2\phi_{i-1,j}$ 10: 11: end if **if** (i-1,j) 在界外 **then** 12: (i+1,j) 一定在界内,并且由于对称性,(i+1,j) 的系数一定是 2,故 $s+=2\phi_{i+1,j}$ end if 14: \mathbf{if} (i,j+1) 在界外 then 15: (i,j-1) 一定在界内,并且由于对称性,(i,j-1) 的系数一定是 2,故 $s+=2\phi_{i,i-1}$ 16: 17: end if **if** (i,j-1) 在界外 **then** 18: (i,j+1) 一定在界内,并且由于对称性,(i,j+1) 的系数一定是 2,故 $s+=2\phi_{i,i+1}$ 19: 20: if (i+1,j) 不在界外且 $\phi_{i+1,j}$ 没有在之前计入过 s then 21: (i-1,j) 的系数一定是 1, 故 $s+=\phi_{i-1,j}$ 22: 23: if (i-1,j) 不在界外且 $\phi_{i-1,j}$ 没有在之前计入过 s then 24: (i+1,j) 的系数一定是 1, 故 $s+=\phi_{i+1,j}$ 25: 26: if (i,j+1) 不在界外且 $\phi_{i,j+1}$ 没有在之前计入过 s then 27: (i,j-1) 的系数一定是 1, 故 $s+=\phi_{i,i-1}$ 28:

值得注意的是,对于不同形状的导体,不同的电极接入位置,电极方程都略有不同,但好处是内点和无源边界点的处理是兼容的,可以参考源代码中 (double) AmX(int, vector*) 函数。

1.5 遍历格点并寄存位置

end if

end if

return s

if (i,j-1) 不在界外且 $\phi_{i,j-1}$ 没有在之前计入过 s then

(i,j+1) 的系数一定是 1, 故 $s+=\phi_{i,i+1}$

29:

30:

31:

32:

33:

34: **end if**

在上节算法的实现中,我们认为 $\phi_{i,j}$ 通过一定顺序排列好了,并且我们需要经常通过 $\phi_{i,j}$ 的排列序号得到位置坐标 (i,j),和通过位置坐标 (i,j) 确定排列序号。这说明我们需要记录这种映射关系。另外,对于不同形状

的导体,如何构造格点是一个问题。我们将在本节中解决这两个问题。

1.5.1 第一问方形导体

方形导体的格子可以直接划分,举个简单的例子,取格子边长 0.5,划分 3*2 的长方形,那么将划出 (7*5=35) 个格子,选定如下的排列方式。

那么容易定出格点位置和序号的函数关系。

一般的,取格子边长 h,划分 3*2 的长方形,可以计算出 NX=3/h,NY=2/h。于是划分出 (NX+1)*(NY+1) 个格子,选定和例子一样的排列方式。

可以计算出位置 (i,j)(i=0,1,...,NX;j=0,1,...,NY) 与序号 l(l=0,1,...,(NX+1)*NY+NX) 的函数关系:

$$l = i + j(NX + 1)$$
$$i = l\%(NX + 1)$$
$$j = [l/(NX + 1)]$$

1.5.2 具有中心对称和轴对称的曲线边界

第二、三、四问中的导体形状都是具有中心对称和轴对称性质的,我们不妨把曲线的对称中心放在原点,只在第一象限内划分格子,进而可以对称到其余象限中。

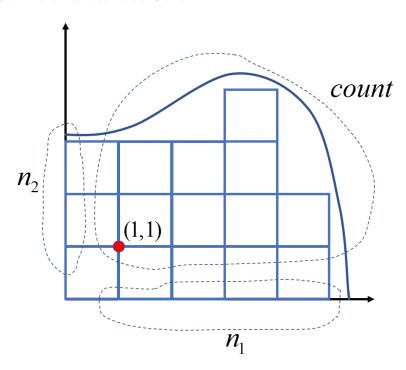


图 9: 构造格点示意图

如上图所示,我们只需要数出上图中三个虚线框中各有多少个格点 (count 个, n1 个, n2 个),就可以得到总格点数 4*count+2*(n1+n2)+1。

怎样去数格点呢?我们通过逐行搜索的方式遍历第一象限内所有格点。起点设在 (1,1),每次向右踏一步,直到走到了曲线外,我们就回到 i=1 但是纵指标增加了 1,在往上一行继续搜索,直到一整行都没有点在曲线内为止。

在这个搜索过程中我们可以得到许多离散后的网格信息,不仅限于图中的 count,n1,n2,我们还可以得到横向最大格数,纵向最大格数,曲线与 y=x 交点的近似格点位置(第四问),曲边中点近似格点位置(第二问)等等,详情见每一问的源代码。

我们通过遍历确定了格点,接下来就可以按照一定顺序给格点编号,并用数组记录三个数(序号1,横指标i,纵指标j)的关系。

这三个数组分别是:

ltoi[],一维数组,记录每个1对应的 i;

ltoi[],一维数组,记录每个1对应的i;

ijtol[][],二维数组,记录 (i,j) 位置的序号 l,相当于是把整个格点图画了下来,由于边界不规则而二维数组是标准的矩形,所以一些数组元素表示导体外的点,可以置为-1,另外由于 i,j 可能取负数,但数组元素的序号非负,因此可以做适当的平移加以储存,这里不过多赘述,详情见源代码。

我们采用如下顺序编号:

- 1、原点;
- 2、x 轴:每一次先后标记正负半轴对称位置的两个值,绝对值从小到大;
- 3、y 轴:每一次先后标记正负半轴对称位置的两个值,绝对值从小到大;
- 4、象限内的点:按照数格点时的遍历方式,在第一象限遍历,每遍历到一个点,根据对称性依次把四个象限对称位置的点全部标记。

这样我们就完成了三个数组的初始化,进而我们可以随时取用1与(i,j)的对应信息。

我们可以把 ijtol[[[] 打印出来, 欣赏一下格点化的成果。

这里为了演示方便, 步长取得比较大。

第二问, 步长 0.1

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	290	43	289	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	286	41	285	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	282	278	39	277	281	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	274	270	266	37	265	269	273	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	262	258	254	250	35	249	253	257	261	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	246	242	238	234	33	233	237	241	245	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	230	226	222	218	214	31	213	217	221	225	229	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	210	206	202	198	194	29	193	197	201	205	209	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	190	186	182	178	174	170	27	169	173	177	181	185	189	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	166	162	158	154	150	146	142	25	141	145	149	153	157	161	165	-1	-1	-1
-1	-1	-1	138	134	130	126	122	118	114	23	113	117	121	125	129	133	137	-1	-1	-1
-1	-1	110	106	102	98	94	90	86	82	21	81	85	89	93	97	101	105	109	-1	-1
-1	78	74	70	66	62	58	54	50	46	19	45	49	53	57	61	65	69	73	77	-1
-1	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	-1
-1	79	75	71	67	63	59	55	51	47	20	48	52	56	60	64	68	72	76	80	-1
-1	-1	111	107	103	99	95	91	87	83	22	84	88	92	96	100	104	108	112	-1	-1
-1	-1	-1	139	135	131	127	123	119	115	24	116	120	124	128	132	136	140	-1	-1	-1
-1	-1	-1	167	163	159	155	151	147	143	26	144	148	152	156	160	164	168	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	191	187	183	179	175	171	28	172	176	180	184	188	192	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	211	207	203	199	195	30	196	200	204	208	212	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	231	227	223	219	215	32	216	220	224	228	232	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	247	243	239	235	34	236	240	244	248	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	263	259	255	251	36	252	256	260	264	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	275	271	267	38	268	272	276	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	283	279	40	280	284	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	287	42	288	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	291	44	292	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

图 10: 第二问格点划分示意

```
-1 452 448 444 440 436 432
                                                         45 431 435 439 443 447 451
                     -1 428 424 420 416 412 408 404 400
                                                         43 399 403 407 411 415 419 423 427
                                                                                                                     -1
                                                                                                     -1
             -1 396 392 388 384 380 376 372 368 364 360
                                                         41 359 363 367 371 375 379 383 387
                                                                                            391
                                                                                                395
                                                                                                                     -1
        -1 356 352 348
                        344 340 336 332 328 324 320 316
                                                         39 315 319 323 327 331 335 339
                                                                                            347
                                                                                                                     -1
     -1 312 308 304 300 296 292 288 284 280 276 272 268
                                                         37 267 271 275 279 283 287 291 295 299 303 307 311
                                                                                                                     -1
 -1 264 260 256 252 248
                        244 240 236 232 228 224 220 216
                                                         35 215 219 223 227 231 235 239 243
                                                                                            247
                                                                                                251 255 259 263
212 208 204 200 196
                    192 188
                            184 180 176 172 168 164 160
                                                         33 159 163 167 171 175 179 183 187
                                                                                            191
                                                                                                195
                                                                                                    199
                                                                                                        203
                                                                                                                     -1
156 152 148 144 140 136
                        132 128 124 120 116 112 108 104
                                                         31 103 107 111 115 119 123 127 131 135
                                                                                                    143
                                                                                                        147
                                                                                                                155
                                                                                                                     -1
                                                                                                139
                                                                                                            151
         92
             88
                 84
                     80
                         76
                             72
                                 68
                                     64
                                         60
                                             56
                                                52
                                                    48
                                                         29
                                                            47
                                                                 51
                                                                    55
                                                                         59
                                                                                 67
                                                                                     71
                                                                                             79
                                                                                                 83
                                                                                                     87
                                                                                                         91
                                                                                                             95
28
             22
                 20
                     18
                         16
                                 12
                                     10
                                         8
                                             6
                                                     2
                                                         0
                                                             1
                                                                 3
                                                                                 11
                                                                                     13
                                                                                             17
                                                                                                     21
                                                                                                         23
                                                                                                                     -1
101
    97
        93
            89
                85
                     81
                             73
                                69
                                     65
                                        61 57
                                                53 49
                                                         30 50
                                                                54
                                                                    58
                                                                                 70
                                                                                     74
                                                                                         78
                                                                                             82
                                                                                                 86
                                                                                                     90
                                                                                                         94
                                                                                                             98 102
                                                                                                                     -1
                                                                        62
                                                                             66
157 153 149 145 141 137
                        133 129 125 121 117 113 109 105
                                                         32 106 110 114 118 122 126 130
                                                                                        134
                                                                                            138
                                                                                                142
                                                                                                    146
                                                                                                        150
                                                                                                            154 158
213 209 205 201 197
                    193
                        189
                            185
                               181 177 173 169 165 161
                                                         34 162 166 170 174 178 182 186 190
                                                                                            194
                                                                                                198
                                                                                                    202
 -1 265 261 257 253 249 245 241 237 233 229 225 221 217
                                                         36 218 222 226 230 234 238 242 246 250 254 258 262 266
                                                                                                                     -1
     -1 313 309
                305
                    301
                        297
                            293 289
                                    285 281 277 273 269
                                                         38
                                                            270
                                                                274 278 282 286 290
                                                                                    294 298
                                                                                            302
                                                                                                306
                                                                                                    310
                                                                                                        314
                                                                                                                     -1
        -1 357 353 349
                            341 337 333 329 325 321 317
                                                        40 318 322 326 330 334 338 342 346 350
                                                                                                         -1
                                                                                                                     -1
            -1 397 393 389 385 381 377 373 369 365 361 42 362 366 370 374 378 382 386 390 394 398
                                                                                                                     -1
                                                                                                             -1
                    -1 429 425 421 417 413 409 405 401
                                                         44 402 406 410 414 418 422 426 430
                                                                                                     -1
                                                                                                                     -1
                     -1 -1 -1 453 449 445 441 437 433 46 434 438 442 446 450 454
                                                                                                 -1
                                                                                                     -1
                                                                                                             -1
                                                                                                                 -1
                                                                                                                     -1
                             -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
                                                                        -1 -1 -1
                                                                                                 -1
                                                                                                     -1
                                                                                                             -1
                                                                    -1
```

图 11: 第三问格点划分示意

第四问,步长 0.3

```
-1 384 380 376 372
          -1 368 364
                     360 356 352 348
                                        340 336 332
                                                                              331 335 339 343
                                                                                              347 351 355 359
                                    344
       -1 328 324 320 316 312 308 304 300 296 292 288 284
                                                                       -1 283 287 291 295 299 303 307 311 315 319 323 327
   -1 280 276 272 268 264 260 256 252 248
                                        244 240 236 232 228
                                                                   -1 227 231 235 239 243 247 251 255 259 263 267
   -1 224 220 216 212 208 204 200 196 192 188 184 180 176 172 168
                                                                37 167 171 175 179 183 187 191 195 199 203 207 211 215 219 223
-1 164 160 156 152 148 144 140 136 132 128 124 120 116 112 108 104
                                                                35 103 107 111 115 119 123 127 131 135 139 143 147 151 155 159
          92 88
                 84
                     80
                             72 68
                                    64
                                        60
                                             56
                                                52 48
                                                        44 49
                                                                   39 43 47
                                                                               51 55 59
                                                                                          63
                                                                                              67
                                                                                                      75
                                                                                                         79
                                                                                                             83
                                                                                                                 87
                                                                                                                     91
          28 26
                  24
                     22 20
                             18
                                 16 14 12
                                            10
                                                 8
                                                     6
                                                         4
                                                                0
                                                                                      11 13
                                                                                              15
                                                                                                  17
                                                                                                      19
                                                                                                          21 23
                                                                                                                 25
                                                                                                                     27
          93 89
                 85 81 77
                             73 69 65 61
                                            57
                                                53 49
                                                        45 41
                                                                34
                                                                   42
                                                                       46 50 54 58 62 66
                                                                                              70 74 78 82 86
                                                                                                                 90
  165 161 157 153 149 145 141 137 133 129 125 121 117 113 109 105
                                                                36 106 110 114 118 122 126 130 134 138 142 146 150 154 158 162 166
                                                                38 170 174 178 182 186 190 194 198 202 206 210 214 218 222 226
   -1 225 221 217 213 209 205 201 197 193 189 185 181 177 173 169
   -1 281 277 273 269 265 261 257 253 249 245 241 237 233 229
                                                                   -1 230 234 238 242 246 250 254 258 262 266 270 274 278 282
       -1 329 325 321 317 313 309 305 301 297 293 289 285
                                                                       -1 286 290 294 298 302 306 310 314 318 322 326 330
                                                                                                                                 -1
       -1 -1 369 365 361 357 353 349 345 341 337 333
                                                                       -1 -1 334 338 342 346 350 354 358 362 366 370
                      -1 385 381 377 373
                                                                                  -1 -1 374 378 382 386
```

图 12: 第四问格点划分示意

2 源代码

为方便计算取 I=1

所有 C 源文件在 code 文件夹,输出 txt 文本 (打印出绘制等高线图的原始数据,即打印出 ijtol[][矩阵,其中为方便 mathematica 作图,-1 用复数-1+I 代替) 在 data 文件夹。对应关系如下:

	code	data	对应下节中的图
第一问	"q1.c"	$"q1_NX{=}300.txt"$	Q1(1)
 	"q1_inverse.c"	"q1_NX=300_inverse.txt"	Q1(2)
第二问	"q2.c"	$"q2_H{=}0.01.txt"$	Q2(1)
郑一門	"q2_inverse.c"	"q2_H= 0.01 _inverse.txt"	Q2(2)
第三问	"q3.c"	"q3_H=0.01.txt"	Q3(1)
岩二門	"q3_inverse.c"	"q3_H= 0.01 _inverse.txt"	Q3(2)
第四问	"q4.c"	"q4.txt"	Q4(1)
郑四円	"q4_inverse.c"	"q4_inverse.txt"	Q4(2)

注意:在 C 编译环境可以运行上述代码,只是每个代码中读写的 txt 文件需要重新更改路径!! 另外,有关松弛因子的选取,这里只是数值估算出的。

具体方式是,选取一个大一点的步长做测试,这时矩阵维数较小,可以快速出结果。由于改变步长只是对矩阵进行了放缩,可以认为矩阵的性质大致不变,因而可以对小矩阵测试不同的松弛因子,输出迭代次数,然后选取次数最小的松弛因子作为正式的松弛因子。代码中所示松弛因子的就是这种数值计算的近似估计,效果是显著的,运行时间可以缩短几倍。

3 结果展示

数据代码和对应的图关系见上节对应表格,这里用来绘制图片的 mathematica 文件"plot.nb" 也在附件中。

3.1 第一问

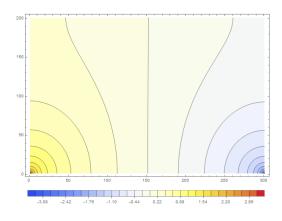


图 13: Q1(1)

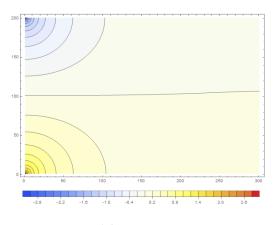


图 14: Q1(2)

$$\begin{split} R_1 &= (0.248355 - (-0.242514))/1 \\ R_2 &= (0.017833 - (-0.014927))/1 \\ E^{-\pi R_1} + E^{-\pi R_2} &= 1.11613 \end{split}$$

3.2 第二问

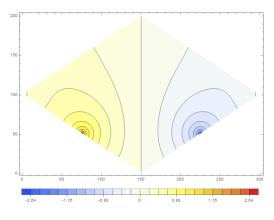


图 15: Q2(1)

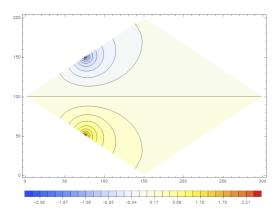


图 16: Q2(2)

$$\begin{split} R_1 &= (0.293313 - (-0.293313))/1 \\ R_2 &= (-(-0.033495) + 0.033495)/1 \\ E^{-\pi R_1} + E^{-\pi R_2} &= 0.968566 \end{split}$$

3.3 第三问

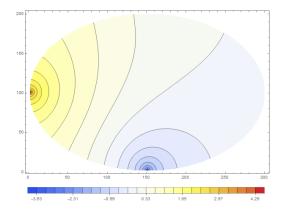


图 17: Q3(1)

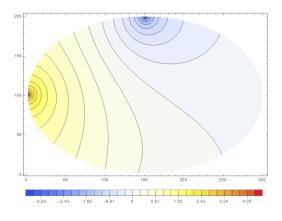


图 18: Q3(2)

$$\begin{split} R_1 &= (0.129034 - (-0.048891))/1 \\ R_2 &= (0.129034 - (-0.048891))/1 \\ E^{-\pi R_1} + E^{-\pi R_2} &= 1.1436 \end{split}$$

3.4 第四问

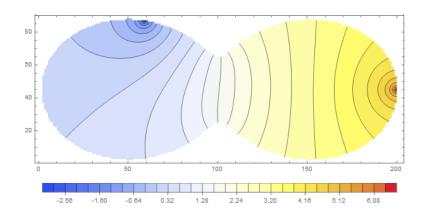


图 19: Q4(1)

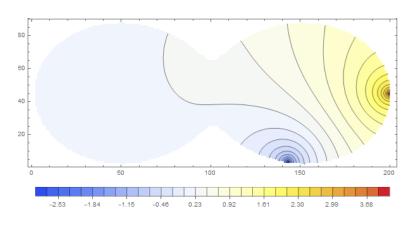


图 20: Q4(2)

$$\begin{split} R_1 &= (2.985171 - 1.656232)/1 \\ R_2 &= (0.215642 - 0.197188)/1 \\ E^{-\pi R_1} + E^{-\pi R_2} &= 0.959049 \end{split}$$

参考文献

[1] 李庆扬, 王能超, 易大义: 数值分析, 194页, 2008年 12月第五版