1. Линейное уравнение переноса

В данном разделе приведены задания по численному решению задач для линейного уравнения переноса (уравнения адвекции).

Рассмотрим для функции $u(t, x)$ задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \mathrm{const} > 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad u(0, x) = \varphi(x). \quad (1)$$

Для данной задачи известно точное решение: $u_e(t, x) = \varphi(x - ct)$. В методе конечных разностей мы вынуждены рассматривать это уравнение на ограниченном отрезке $[a, b]$. Чтобы применить формулу точного решения для нахождения погрешности разностной схемы необходимо иcкдючить либо минимизировать влияние граничных условий. С этой целью будем задавать в качестве граничного условия на левом конце значение начальной функции, т.е. $u(t, a) = \varphi(a)$.

С точки зрения свойств разностных схем представляют интерес начальные функции трех видов:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ \exp\left(-\frac{x^2}{\delta^2}\right), & x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \exp\left(-\frac{x^2}{\delta^2}\right), & x \le 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{d}\right)^M\right]. \quad (4)$$

Параметр δ в формулах (2), (3) определяет ширину скачка волнового фронта. Функция (4) называется *гипергауссовой*. При $M = 2$ это обычная гауссова функция, а при $M \to \infty$ она переходит в прямоугольный импульс ширины $2d$.

Введем равномерную сетку на отрезке $[a, b]$:

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad h = (b - a)/N.$$

Будем находить функцию $u(t, x)$ в дискретные моменты времени $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ При записи функции в узловых точках временной индекс будем опускать, значения функции на верхнем временном слое отметим "крышкой": $u(t_n, x_j) = u_j$, $u(t_{n+1}, x_j) = \hat{u}_j$.

Для решений, найденных численно, можно точно определить максимальную и среднеквадратичную погрешности:

$$e_{\max} = \max_j |u_j - v_j|, \qquad e_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |u_j - v_j|^2}, \quad (5)$$

где $v_j = u_e(t, x_j)$ – точное решение в узлах сетки.

Простейшая явная разностная схема "уголок" имеет вид

$$\hat{u}_j - u_j + r(u_j - u_{j-1}) = 0, \qquad r = c\tau/h. \tag{6}$$

Данная схема имеет первый порядок аппроксимации. Условием устойчивости схемы является выполнение неравенства: $r \le 1$.

Неявная разностная схема "уголок" имеет вид

$$\hat{u}_j - u_j + r(\hat{u}_j - \hat{u}_{j-1}) = 0, \qquad r = c\tau/h. \tag{7}$$

Данная схема имеет первый порядок аппроксимации и абсолютно устойчива.

Для построения более точной разностной схемы запишем переносной член в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad f = cu. \tag{8}$$

Разностную схему второго порядка аппроксимации будем искать в виде

$$\frac{\hat{u}_j - u_j}{\tau} + \frac{\bar{f}_{j+1/2} - \bar{f}_{j-1/2}}{h} = 0, \tag{9}$$

где потоки $\bar{f}_{j\pm1/2}$ относятся к полуцелому временному слою $t_{n+1/2} = (n+1/2)\tau$. Для них во втором порядке аппроксимации справедлива приближенная формула

$$\bar{f}_{j+1/2} = f_j + (f_{j+1} - f_j)\frac{1-r}{2}. \tag{10}$$

Формулы (9) – (10) определяют разностную схему второго порядка аппроксимации, называемую *схемой Лакса–Вендроффа*. Схема устойчива при $r \le 1$.

Существенным недостатком схемы Лакса–Вендроффа является возникновение нефизических осцилляций при распространении скачков либо крутых волновых фронтов. Одним из способов устранения этого недостатка является нелинейная коррекция потокового члена:

$$\bar{f}_{m+1/2} = f_m + (f_{m+1} - f_m)\frac{1-r}{2}\psi(q), \qquad q = \frac{f_m - f_{m-1}}{f_{m+1} - f_m}. \tag{11}$$

Функция $\psi(q)$ называется *лимитером*. Простейший лимитер имеет вид

$$\psi(q) = \max(0, \min(1, \mathrm{q})). \tag{12}$$

Схема, основанная на формулах (8), (10) – (11), называется TVD-схемой. Специфическим свойством этой схемы, определившим ее название, является то, что полная вариация решения

$$TV(u) = \sum_j |u_{j+1} - u_j| \tag{13}$$

не возрастает со временем. Это приводит к подавлению нефизических осцилляций. Другие варианты TVD-схем отличаются видом лимитера. Приведем популярный лимитер, называемый superbee:

$$\psi(q) = \max(0, \min(1, 2\mathrm{q}), \min(2, \mathrm{q})). \tag{14}$$

Одним из возможных путей улучшения свойств разностных схем является переход к трехслойным схемам. Рассмотрим схему, известную в литературе под названием "кабаре":

$$\hat{u}_j - u_j + u_{j-1} - \check{u}_{j-1} + 2r(u_j - u_{j-1}) = 0, \qquad r = a\tau/h. \tag{15}$$

Здесь величина $\check{u}_{j-1}$ относится к моменту времени t_{n-1}. Первый шаг в этой схеме необходимо делать по двухслойной схеме, например, по схеме (6). Схема устойчива при $r \leq 1$. Интересным свойством схемы "кабаре" является тот факт, что она дает точное решение при $r = 0.5$ и $r = 1$.

Задача 1. Решить численно уравнение (1) с начальной функцией одного из видов: (2), (3) или (4).

Выполнить расчеты с помощью трех разностных схем: 1) явной или неявной схемы "уголок", 2) схемы Лакса–Вендроффа, 3) TVD-схемы с одним из лимитеров или схемы "кабаре".

Сравнить найденные численно решения с точным решением. Для нескольких моментов времени рассчитать максимальную и среднеквадратичную погрешности согласно формулам (5).

Для этих же моментов времени вычислить полную вариацию согласно формуле (13) и построить графики пространственных распределений волновой функции.

Как видно, данная задача допускает несколько вариантов заданий.