Задача 702.

Применение неотражающих граничных условий для расчета мод оптического волновода.

Введем декартову систему координат. Направим ось z вдоль оси волновода. Рассмотрим планарный волновод, однородный в направлении оси y. Предположим, что амплитуда поля зависит только от поперечной координаты x и не зависит от y. Волновое поле в волноводе описывается 2-мерным уравнением Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k^2 \varepsilon E = 0, \tag{1}$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, λ - длина волны, ε - комплексная диэлектрическая проницаемость.

Нормальными волноводными модами называются решения уравнения (1) вида:

$$E(z,x) = \exp(i\beta z)u(x).$$

Константа β называется постоянной распространения. Подставляя это решение в уравнение (1) получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k^2\varepsilon - \beta^2)u = 0, \tag{2}$$

Будем предполагать, что выполняется условие слабой волноводности: $|\varepsilon - n_0^2| \ll n_0^2$, где n_0 - показатель преломления в оболочке. В этом случае диэлектрическую проницаемость представим в виде: $\varepsilon = (n_0+\nu)^2 + i\mu$, где $\nu \ll n_0$, $\mu \ll n_0$. Постоянную распространения можно представить в виде $\beta = kn_0 + \tilde{\beta}$, где $\tilde{\beta} \ll kn_0$. Подставляя ε и β в уравнение (2) и пренебрегая величинами $\tilde{\beta}^2$ и ν^2, имеющими второй порядок малости, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2(2n_0\nu + i\mu)u - 2kn_0\tilde{\beta}u = 0, \tag{3}$$

Число $\tilde{\beta}$ в этом уравнении является собственным значением, подлежащим определению наряду с функцией $u(x)$. Таким образом, мы имеем линейную задачу на собственные значения. Задача сформулирована на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ в предположении, что поле $u(x)$ стремится к нулю на бесконечности.

Рассмотрим особенности численного решения этой задачи. Для построения численного алгоритма нужно выбрать отрезок вида $-L < x < L$ и задать на нем равномерную сетку из N ячеек. Нулевые граничные условия

$$u(-L) = 0, \qquad u(L) = 0. \tag{4}$$

можно применять, если известно, что поле убывает достаточно быстро, и на границах отрезка пренебрежимо мало. Однако, так бывает не всегда. В конструкциях волноводных лазеров предпочтительнее моды, медленно убывающие в поперечном направлении. Сборки лазеров на таких волноводных элементах легче синхронизовать, так как "хвосты"мод проникают в соседние элементы. В результате локальные моды взаимодействуют друг с другом и формируют глобальную моду, называемую иногда "супермодой". Для расчета медленно убывающих мод необходимы специальные неотражающие граничные условия, такие, чтобы поле, дошедшее до границы, не возбуждало отраженную волну. Рассмотрим неотражающие граничные условия PML. Уравнение (3) модифицируется следующим образом:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + k^2(2n_0\nu + i\mu)u - 2kn_0\tilde{\beta}u = 0, \qquad S = 1 + i\sigma(x). \tag{5}$$

Функция $\sigma(x)$ локализована в слоях относительно малой толщины Δ, примыкающих к границам расчетной области, и определяется формулой:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_{\max}\left(\frac{x+L-\Delta}{\Delta}\right)^2, & -L < x < -L+\Delta \\ 0, & -L+\Delta < x < L-\Delta \\ \sigma_{\max}\left(\frac{x-L+\Delta}{\Delta}\right)^2, & L-\Delta < x < L \end{cases}$$

Нулевые граничные условия (4) остаются неизменными.

Для написания разностной схемы введем равномерную сетку

$$x_j = jh - L, \qquad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, N-1, N-\frac{1}{2}, N, \qquad h = \frac{2L}{N}$$

Волновое уравнение будем аппроксимировать разностной схемой:

$$\frac{1}{h^2 S_j S_{j-\frac{1}{2}}} u_{j-1} - \frac{1}{h^2 S_j}\left(\frac{1}{S_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{S_{j+\frac{1}{2}}}\right) u_j + \frac{1}{h^2 S_j S_{j+\frac{1}{2}}} u_{j+1} + k^2(2n_0\nu_j + i\mu_j)u_j - 2kn_0\tilde{\beta}u_j = 0. \tag{6}$$

Уравнения записаны при $1 \le j \le N-1$. Для замыкания алгебраической системы дополним ее нулевыми граничными условиями:

$$u_0 = 0, \qquad u_N = 0. \tag{7}$$

Данная разностная схема представляет собой алгебраическую проблему собственных значений для комплексной неэрмитовой матрицы. Решить ее проще всего с помощью подходящей стандартной программы.

Практически важным случаем является задача о прямоугольном волноводе, когда волноводные параметры ν и μ отличны от нуля только при $|x| < a$. В случае $\mu = 0$ это классическая задача о прямоугольной яме($\nu > 0$) или барьере($\nu < 0$) в квантовой механике. Мы рассмотрим случай $\mu < 0$, описывающий рабочую среду лазера, обладающую свойством усиления поля. Эта задача имеет точное решение, собственное число находится из дисперсионного уравнения.

Задание.

1. Задать физические параметры: $\lambda = 0.0001\,cm$, $a = 0.0005\,cm$, $n_0 = 3.45$, $\nu = -0.01$, $\mu = -0.0054908455$.

2. Задать параметры численной схемы: $L = 0.0014\,cm$, $\Delta = 0.0002\,cm$, $\sigma_{\max} = 0$ (без PML) и $\sigma_{\max} = 2$ (с PML).

3. Произвести численные расчеты при отсутствии PML и при наличии PML. Среди вычисленных собственных мод выделить основную по признаку максимального модового усиления $g = -\mathrm{Im}(\tilde{\beta})$.

4. Сравнить численные результаты для основной моды с точным решением на отрезке $-L+\Delta < x < L-\Delta$. Построить графики на всем отрезке $-L < x < L$

5. Точное решение вычислять по формуле:

$$u(x) = \begin{cases} \cos\frac{px}{a}, & |x| < a \\ \frac{\cos p}{\exp(iq)} \exp\left(iq\frac{|x|}{a}\right), & |x| > a \end{cases}$$

   где $p = 1.54158156 - i * 0.1845093486$, $q = 8.3979819858 + i * 0.2887822041$. Постоянная распространения $\tilde{\beta} = -649.93 - i * 44.751$.