

Evaluación Unidad I – Métodos de Optimización

Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

28 de mayo de 2025

1. Evaluación Teórica con Explicaciones

1. **¿Cuál describe mejor una función lineal?**

Respuesta: c) Es una función cuya gráfica es una línea recta.

Explicación: Una función lineal tiene la forma $f(x) = ax + b$, cuya gráfica es una recta.

2. **¿Cuál es el principal objetivo de las restricciones en programación lineal?**

Respuesta: b) Establecer las condiciones bajo las cuales se deben encontrar soluciones.

Explicación: Las restricciones definen el espacio factible donde buscar la solución óptima.

3. **¿Qué concepto define el conjunto de todas las soluciones posibles que satisfacen las restricciones?**

Respuesta: a) Región factible.

Explicación: Conjunto de soluciones que cumplen todas las restricciones.

4. **¿Cuál es un objetivo típico en los problemas de optimización?**

Respuesta: b) Encontrar el valor mínimo o máximo de una función objetivo sujeta a restricciones.

Explicación: El objetivo es maximizar o minimizar una función bajo condiciones.

5. **¿Qué condición debe cumplirse para que un sistema de ecuaciones lineales tenga una única solución?**

Respuesta: c) El determinante de la matriz asociada debe ser distinto de cero.

Explicación: Garantiza que el sistema tenga una única solución.

6. **En $Z = 40x + 60y$, ¿qué representa el valor 60?**

Respuesta: b) La utilidad unitaria por cada mesa vendida.

Explicación: Es el coeficiente de la variable y en la función objetivo.

7. **¿Qué tipo de función es típicamente la función objetivo en programación lineal?**

Respuesta: c) Una función lineal.

Explicación: En programación lineal, tanto las restricciones como la función objetivo son lineales.

8. **¿Qué diferencia hay entre restricciones de igualdad y desigualdad?**

Respuesta: b) Las restricciones de desigualdad limitan el conjunto factible, mientras que las de igualdad lo definen completamente.

Explicación: Las desigualdades permiten áreas de solución; las igualdades las fijan en líneas.

9. **¿Cuál de los siguientes no es un tipo de restricción en programación lineal?**

Respuesta: d) Restricciones no lineales.

Explicación: Las restricciones deben ser lineales en este tipo de programación.

10. **¿De qué depende principalmente el tiempo de ejecución de un algoritmo de optimización?**

Respuesta: e) La complejidad del algoritmo utilizado.

Explicación: La eficiencia algorítmica determina el rendimiento.

2. Evaluación Práctica

Pregunta Práctica 1: Servidores de Análisis de Datos

Datos del Problema

- **Servidor A:** Procesa 500 GB en 10 horas, costo 50 soles/hora, límite 12 horas/día
- **Servidor B:** Procesa 300 GB en 8 horas, costo 30 soles/hora, límite 12 horas/día
- **Almacenamiento total:** 4000 GB/día
- **Presupuesto energía:** 1200 soles/día
- **Objetivo:** Maximizar datos procesados

Paso 1: Definición de Variables

$$x = \text{horas de funcionamiento del Servidor A} \quad (1)$$

$$y = \text{horas de funcionamiento del Servidor B} \quad (2)$$

Paso 2: Cálculo de Tasas de Procesamiento

$$\text{Servidor A: } \frac{500 \text{ GB}}{10 \text{ horas}} = 50 \text{ GB/hora} \quad (3)$$

$$\text{Servidor B: } \frac{300 \text{ GB}}{8 \text{ horas}} = 37,5 \text{ GB/hora} \quad (4)$$

Paso 3: Función Objetivo

$$\boxed{\text{Maximizar } Z = 50x + 37,5y \text{ (GB procesados)}} \quad (5)$$

Paso 4: Restricciones del Problema

$$x \leq 12 \quad (\text{límite diario Servidor A}) \quad (6)$$

$$y \leq 12 \quad (\text{límite diario Servidor B}) \quad (7)$$

$$50x + 37,5y \leq 4000 \quad (\text{límite almacenamiento}) \quad (8)$$

$$50x + 30y \leq 1200 \quad (\text{presupuesto energía}) \quad (9)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (\text{no negatividad}) \quad (10)$$

Paso 5: Simplificación de Restricciones**Restricción 3:** $50x + 37,5y \leq 4000$

$$\text{Dividiendo entre 12.5: } 4x + 3y \leq 320 \quad (11)$$

Restricción 4: $50x + 30y \leq 1200$

$$\text{Dividiendo entre 10: } 5x + 3y \leq 120 \quad (12)$$

Paso 6: Análisis de Vértices de la Región Factible**Verificación de intersecciones:****Intersección restricciones 1 y 4:** $x = 12$ y $5x + 3y = 120$

$$5(12) + 3y = 120 \quad (13)$$

$$60 + 3y = 120 \quad (14)$$

$$3y = 60 \quad (15)$$

$$y = 20 \quad (16)$$

Como $y > 12$, **no es factible.****Intersección restricciones 2 y 4:** $y = 12$ y $5x + 3y = 120$

$$5x + 3(12) = 120 \quad (17)$$

$$5x + 36 = 120 \quad (18)$$

$$5x = 84 \quad (19)$$

$$x = 16,8 \quad (20)$$

Como $x > 12$, **no es factible.****Vértices factibles identificados:**

- $(0, 0)$
- $(0, 12)$ - Verificación: $5(0) + 3(12) = 36 \leq 120$ ✓
- $(12, 0)$ - Verificación: $5(12) + 3(0) = 60 \leq 120$ ✓
- $(12, 12)$ - Verificación: $5(12) + 3(12) = 96 \leq 120$ ✓

Paso 7: Evaluación de la Función Objetivo

$$Z(0, 0) = 50(0) + 37,5(0) = 0 \text{ GB} \quad (21)$$

$$Z(0, 12) = 50(0) + 37,5(12) = 450 \text{ GB} \quad (22)$$

$$Z(12, 0) = 50(12) + 37,5(0) = 600 \text{ GB} \quad (23)$$

$$Z(12, 12) = 50(12) + 37,5(12) = 1050 \text{ GB} \quad (24)$$

Paso 8: Verificación de la Solución Óptima**Punto óptimo:** (12, 12)**Verificación de restricciones:**

$$\text{Tiempo: } x = 12 \leq 12 \checkmark, \quad y = 12 \leq 12 \checkmark \quad (25)$$

$$\text{Almacenamiento: } 50(12) + 37,5(12) = 1050 \leq 4000 \checkmark \quad (26)$$

$$\text{Energía: } 50(12) + 30(12) = 960 \leq 1200 \checkmark \quad (27)$$

RESULTADO PREGUNTA 1

$$x^* = 12 \text{ horas (Servidor A)} \quad (28)$$

$$y^* = 12 \text{ horas (Servidor B)} \quad (29)$$

$$Z^* = 1050 \text{ GB procesados por día} \quad (30)$$

Costo energético: 960 soles (dentro del presupuesto)

Pregunta Práctica 2: Centros de Videovigilancia

Datos del Problema

- **Centro A:** 80 imágenes/hora, máx. 10 horas/día, almacén 600 imágenes/día
- **Centro B:** 100 imágenes/hora, máx. 12 horas/día, almacén 600 imágenes/día
- **Requisito mínimo:** 1200 imágenes/día
- **Objetivo:** Minimizar horas totales de operación

Paso 1: Definición de Variables

$$x = \text{horas de funcionamiento del Centro A} \quad (31)$$

$$y = \text{horas de funcionamiento del Centro B} \quad (32)$$

Paso 2: Función Objetivo

Minimizar $Z = x + y$ (horas totales)

(33)

Paso 3: Restricciones del Problema

$$x \leq 10 \quad (\text{límite diario Centro A}) \quad (34)$$

$$y \leq 12 \quad (\text{límite diario Centro B}) \quad (35)$$

$$80x \leq 600 \Rightarrow x \leq 7,5 \quad (\text{almacenamiento Centro A}) \quad (36)$$

$$100y \leq 600 \Rightarrow y \leq 6 \quad (\text{almacenamiento Centro B}) \quad (37)$$

$$80x + 100y \geq 1200 \quad (\text{mínimo imágenes}) \quad (38)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (\text{no negatividad}) \quad (39)$$

Paso 4: Restricciones Efectivas

Comparando restricciones:

$$\text{Centro A: } \min(10, 7,5) = 7,5 \Rightarrow x \leq 7,5 \quad (40)$$

$$\text{Centro B: } \min(12, 6) = 6 \Rightarrow y \leq 6 \quad (41)$$

Sistema final:

$$x \leq 7,5 \quad (42)$$

$$y \leq 6 \quad (43)$$

$$80x + 100y \geq 1200 \quad (44)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (45)$$

Paso 5: Simplificación

$$80x + 100y \geq 1200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4x + 5y \geq 60} \quad (46)$$

Paso 6: Análisis de Puntos Extremos

¿Puede $x = 0$?

$$4(0) + 5y \geq 60 \quad (47)$$

$$5y \geq 60 \quad (48)$$

$$y \geq 12 \quad (49)$$

Como $y \leq 6$, entonces $x = 0$ **no es factible**.

¿Puede $y = 0$?

$$4x + 5(0) \geq 60 \quad (50)$$

$$4x \geq 60 \quad (51)$$

$$x \geq 15 \quad (52)$$

Como $x \leq 7,5$, entonces $y = 0$ **no es factible**.

Paso 7: Intersección $4x + 5y = 60$ con límites

Con $x = 7,5$:

$$4(7,5) + 5y = 60 \quad (53)$$

$$30 + 5y = 60 \quad (54)$$

$$5y = 30 \quad (55)$$

$$y = 6 \quad (56)$$

Punto: (7,5,6)

Con $y = 6$:

$$4x + 5(6) = 60 \quad (57)$$

$$4x + 30 = 60 \quad (58)$$

$$4x = 30 \quad (59)$$

$$x = 7,5 \quad (60)$$

Punto: (7,5,6) (mismo punto)

Paso 8: Verificación de Factibilidad**Punto candidato:** (7,5, 6)

$$\checkmark \quad x = 7,5 \leq 7,5 \quad (61)$$

$$\checkmark \quad y = 6 \leq 6 \quad (62)$$

$$\checkmark \quad 4(7,5) + 5(6) = 60 \geq 60 \quad (63)$$

$$\checkmark \quad x = 7,5 \geq 0 \quad (64)$$

$$\checkmark \quad y = 6 \geq 0 \quad (65)$$

Verificación de producción:

$$\text{Centro A: } 80 \times 7,5 = 600 \text{ imágenes} \quad (66)$$

$$\text{Centro B: } 100 \times 6 = 600 \text{ imágenes} \quad (67)$$

$$\text{Total: } 1200 \text{ imágenes} \geq 1200 \quad \checkmark \quad (68)$$

Paso 9: Evaluación de la Función Objetivo

$$Z = x + y \quad (69)$$

$$Z = 7,5 + 6 \quad (70)$$

$$Z = 13,5 \text{ horas} \quad (71)$$

RESULTADO PREGUNTA 2

$$x^* = 7,5 \text{ horas (Centro A)} \quad (72)$$

$$y^* = 6 \text{ horas (Centro B)} \quad (73)$$

$$Z^* = 13,5 \text{ horas totales} \quad (74)$$

Imágenes procesadas: 1200 (exactamente el mínimo requerido)**Nota:** Ambos centros operan al límite de capacidad de almacenamiento