El Método de Lagrange

Aplicando la Optimización

¿Qué es el Método de Lagrange?

- Técnica matemática para optimizar funciones con restricciones.
- Se usa cuando se desea maximizar o minimizar $f(x, y, \dots)$ sujeto a $g(x, y, \dots) = c$.
- Se introduce una nueva variable: el **multiplicador de Lagrange** λ.

¿Cómo funciona el Método?

Pasos generales

1. Definir función objetivo $f(x,y)$ y restricción $g(x,y) = c$.
2. Construir:
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$
3. Derivar: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$
4. Resolver el sistema de ecuaciones.

Ejemplo Matemático Paso a Paso

Maximizar: $f(x, y) = xy$ **Sujeto a:** $x + y = 10$

Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - 10)$$

Derivadas

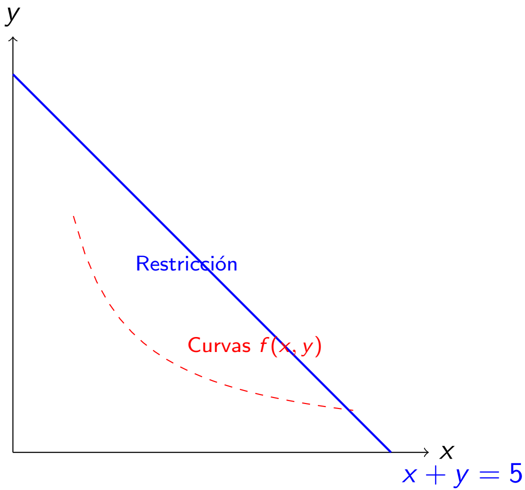
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + y - 10) = 0 \Rightarrow x + y = 10$$

Resultado

$$x = y = 5 \Rightarrow f(5, 5) = 25$$

Aplicando

Visualización Geométrica



El óptimo se encuentra cuando la curva de nivel es tangente a la restricción.

Ejemplo Real: Publicidad

Datos

- Presupuesto: S/ 1000
- Redes sociales (x): 3 clientes/sol
- Radio (y): 2 clientes/sol

Modelo

$$x + y = 1000, \quad f(x, y) = 3x + 2y$$

Resultado

$$\lambda_x = 3, \quad \lambda_y = 2 \Rightarrow 3 \neq 2 \Rightarrow \text{ invertir todo en } x$$

$$x = 1000, \quad y = 0 \Rightarrow f = 3000 \text{ clientes}$$

¿Qué representa el multiplicador λ?

- Mide el cambio en el valor óptimo si se relaja la restricción.
- Ejemplo: si $\lambda = 5$, aumentar en 1 unidad el recurso genera 5 unidades más de beneficio.
- En economía: se interpreta como el **valor marginal**.

Aplicaciones del Método de Lagrange

- Economía
- Ingeniería
- Machine Learning
- Logística
- Transporte y distribución
- Diseño estructural

Utilizado donde hay que optimizar bajo condiciones reales.

Ampliaciones del Método

- Si hay más restricciones:

$$\mathcal{L} = f - \lambda_1(g_1 - c_1) - \lambda_2(g_2 - c_2)$$

- Base del método de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)
- Ampliamente usado en optimización no lineal y programación convexa.

Conclusión

- El Método de Lagrange es clave para optimizar con restricciones.
- Se basa en la tangencia de gradientes: $\nabla f = \lambda \nabla g$
- Tiene aplicación práctica en múltiples disciplinas.

Una herramienta esencial para el análisis y la toma de decisiones.

¡Gracias por tu atención!